

А.А. САМАРСКИЙ

ТЕОРИЯ
РАЗНОСТНЫХ
СХЕМ



А. А. САМАРСКИЙ

ТЕОРИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений.
обучающихся по специальности
«Прикладная математика»*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

Теория разностных схем. А. А. Самарский, учебное пособие, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977.

Настоящая книга содержит систематическое изложение основных вопросов теории разностных схем, возникающих при решении задач для уравнений математической физики. Главное внимание уделяется изложению принципиальных вопросов теории, иллюстрируемых на простых задачах математической физики для уравнений второго порядка, имеющих в основном параболический или эллиптический тип.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Физика», а также для научных работников — математиков и физиков.

Александр Андреевич Самарский

ТЕОРИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

М., 1977 г., 656 стр. с илл.

Редакторы А. В. Захаров, И. М. Овчинникова

Технический редактор В. Н. Кондакова

Корректор З. В. Автонеева

Сдано в набор 16/XII 1976 г. Подписано к печати 6/IV 1977 г. Бумага 60×90₁₆.
Физ. печ. л. 41. Условн. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 38,99. Тираж 18 000 экз. Цена книги
1 р. 62 к. Заказ № 1034

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографией имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28, в 4-ой типографии издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25. Заказ 540.

С 20204—065
053(02)-77 14-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Основные обозначения, принятые в книге	11
Введение	13
Глава I. Предварительные сведения	22
§ 1. Типичные задачи математической физики	22
1. Стационарные задачи (22). 2. Постановка краевых задач (25). 3. Уравнения параболического типа (27). 4. Уравнения гиперболического типа (29). 5. Разрывные коэффициенты, со средоточенными источниками (31).	
§ 2. Разностные уравнения	33
1. Предварительные замечания (33). 2. Примеры разностных уравнений (34). 3. Разностные уравнения и неравенства первого порядка (37). 4. Разностные уравнения второго порядка. Задача Коши. Краевые задачи (38). 5. Метод прогонки (40). 6. Устойчивость метода прогонки (41). 7. Метод левой прогонки и метод встречных прогонок (43). 8. Принцип максимума (44). 9. Принцип максимума для краевой задачи третьего рода (49). 10. Оценка решения разностной краевой задачи при помощи формул прогонки (50). 11. Разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (52). 12. Формулы «разностного дифференцирования» произведения и суммирования по частям (57). 13. Разностные формулы Грина (59). 14. Пространства сеточных функций. Разностные операторы (61). 15. Условие самосопряженности разностного оператора второго порядка (63). 16. Задача на собственные значения для самосопряженного оператора в копечномерном пространстве (65).	
Глава II. Основные понятия теории разностных схем	67
§ 1. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов	67
1. Сетки и сеточные функции (67). 2. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов (71). 3. Погрешность аппроксимации на сетке (81). 4. Постановка разностной задачи (86). 5. О сходимости и точности схем (89). 6. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы (91). 7. Аппроксимация краевых и начальных условий (93).	
§ 2. Устойчивость разностной схемы	97
1. Примеры устойчивых и неустойчивых разностных схем (97). 2. Задача Коши для системы уравнений первого порядка. Условие устойчивости схемы Эйлера (100). 3. О понятии корректности разностной задачи (106). 4. Устойчивость, аппроксимация и сходимость (106).	
§ 3. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем	107
1. Некоторые разностные формулы (107). 2. Отыскание собственных функций и собственных значений на примере простейшей разностной задачи (111). 3. Задачи на собственные значения с краевыми условиями второго рода и третьего рода (115). 4. Разностные аналоги теорем вложения (118). 5. Метод энергетических неравенств (121).	

§ 4. Разностные схемы как операторные уравнения. Общие формулировки	125
1. Разностные схемы как операторные уравнения (125). 2. Устойчивость разностной схемы (133). 3. Сходимость и аппроксимация (135). 4. Некоторые априорные оценки (139). 5. Негативные нормы (141). 6. Операторные уравнения дивергентного вида (144).	
Глава III. Однородные разностные схемы	149
§ 1. Однородные схемы для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами	149
1. Введение (149). 2. Исходная задача (151). 3. Трехточечные схемы (151). 4. Условия второго порядка аппроксимации (153).	
§ 2. Консервативные схемы	154
1. Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов (154). 2. Интегро-интерполяционный метод построения однородных разностных схем (156). 3. Однородные консервативные схемы (159). 4. Исходное семейство консервативных схем (162).	
§ 3. Сходимость и точность однородных консервативных схем	164
1. Погрешность аппроксимации в классе гладких коэффициентов (164). 2. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов (165). 3. Априорные оценки для погрешности (168). 4. Сходимости и точности (170).	
§ 4. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках	171
1. Схемы на неравномерных сетках (171). 2. Погрешность аппроксимации (173). 3. О порядке точности на неравномерных сетках (174). 4. Повышение точности на последовательности сеток. Метод Рунге (175).	
§ 5. Другие задачи	180
1. Третья краевая задача (180). 2. Задача с условиями периодичности (181). 3. Монотонные схемы для уравнения общего вида (184). 4. Разностные схемы для стационарного уравнения в цилиндрической системе координат (188). 5. Разностные схемы для уравнения в сферической системе координат (195).	
§ 6. Разностная функция Грина	197
1. Разностная функция Грина (197). 2. Априорные оценки (201).	
§ 7. Схемы повышенного порядка точности	203
1. Точная схема (203). 2. Схемы любого порядка точности (208).	
§ 8. Методы построения разностных схем	209
1. Общие замечания (209). 2. Интегро-интерполяционный метод (210). 3. Вариационно-разностные методы (методы Ритца и Галеркина) (214). 4. Метод аппроксимации квадратичного функционала (218). 5. Метод сумматорных тождеств (метод аппроксимации интегрального тождества) (220).	
§ 9. Коэффициентная устойчивость	221
1. Коэффициентная устойчивость разностных схем (221). 2. Коэффициентная устойчивость операторных уравнений первого рода (223).	
Глава IV. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	228
§ 1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона	228
1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа (228). 2. Аппроксимация оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне «крест» (230). 3. Разностная задача Дирихле в прямоугольнике (233). 4. Разностная задача Дирихле в области сложной формы (236). 5. Запись разностного уравнения в канонической форме (241).	
§ 2. Принцип максимума	243
1. Каноническая форма сеточного уравнения общего вида (243). 2. Принцип максимума (245). 3. Теорема сравнения. Мажоранта (247). 4. Оценка решения неоднородного уравнения (248).	

§ 3. Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле	250
1. Оценка решения разностной задачи Дирихле (250). 2. Равномерная сходимость и порядок точности разностной схемы (254).	
§ 4. Некоторые свойства разностных эллиптических операторов	255
1. Задача на собственные значения для разностного оператора Лапласа в прямоугольнике (255). 2. Свойства разностных операторов (259). 3. Оператор Лапласа в области, составленной из прямоугольников (261). 4. Теорема вложения (262). 5. Уравнения с переменными коэффициентами (264). 6. Уравнения со смешанными производными (267).	
§ 5. Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона	269
1. Постановка разностной задачи Дирихле повышенного порядка (269). 2. Оценка решения разностной краевой задачи (272). 3. Многомерный случай (275).	
Глава V. Разностные схемы для нестационарных уравнений с постоянными коэффициентами	277
§ 1. Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами	277
1. Исходная задача (277). 2. Семейство шеститочечных схем (278). 3. Погрешность аппроксимации (280). 4. Устойчивость по начальным данным (282). 5. Устойчивость по правой части (287). 6. Сходимость и точность в $L_2(\omega_h)$ (289). 7. Устойчивость и сходимость в C (289). 8. Метод энергетических неравенств (291). 9. Краевые условия третьего рода (294). 10. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности (296).	
§ 2. Асимптотическая устойчивость	300
1. ρ -устойчивость (300). 2. Асимптотическая устойчивость (302). 3. Схема второго порядка точности, безусловно устойчивая в асимптотическом смысле (306). 4. Асимптотическая устойчивость трехслойной схемы (309).	
§ 3. Схемы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными	312
1. Явная разностная схема (312). 2. Явная трехслойная схема (316). 3. Схемы с весами (317). 4. Схема повышенного порядка точности (318).	
§ 4. Нестационарное уравнение Шредингера	320
1. Двухслойная схема с весами (320). 2. Трехслойные схемы (322).	
§ 5. Уравнение переноса	324
1. Явные схемы для задачи Коши (324). 2. Явные схемы более высокого порядка аппроксимации (327). 3. Краевая задача (329).	
§ 6. Разностные схемы для уравнения колебаний струны	332
1. Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации (332). 2. Исследование устойчивости (335). 3. Метод энергетических неравенств (341). 4. О нахождении негладких решений разностным методом (343).	
Глава VI. Теория устойчивости разностных схем	346
§ 1. Операторно-разностные схемы	346
1. Введение (346). 2. Операторно-разностные схемы (347). 3. Каноническая форма двухслойных схем (348). 4. Канонические формы трехслойных схем (349). 5. Понятие устойчивости (350). 6. Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах (352). 7. Аппроксимация и сходимость (355).	
§ 2. Классы устойчивых двухслойных схем	357
1. Постановка задачи (357). 2. Исходное семейство схем (358). 3. Энергетическое тождество (359). 4. Устойчивость по начальным данным в H_A (359). 5. Устойчивость по начальным данным в H_B (362). 6. Оценки нормы оператора перехода (363). 7. Метод разделения переменных (365). 8. Условие ρ -устойчивости (366). 9. Устойчивость по правой части (369). 10. Устойчивость схемы с весами (372). 11. Априорные оценки в случае переменного оператора A (376). 12. Пример (378). 13. Случай кососимметрического оператора A (380).	

§ 3. Классы устойчивых трехслойных схем	382
1. Постановка задачи (382). 2. Основное энергетическое тождество (384). 3. Устойчивость по начальным данным (385). 4. Устойчивость по правой части (388). 5. Схемы с переменными операторами (390). 6. Схемы с весами (392). 7. Примеры (395). 8. Трехслойные схемы с несамосопряженными операторами (396). 9. Другие априорные оценки (398). 10. О регуляризации разностных схем (403).	
<i>Глава VII. Однородные схемы для нестационарных уравнений математической физики с переменными коэффициентами</i>	407
§ 1. Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами	407
1. Исходная задача (407). 2. Однородные разностные схемы с весами (407). 3. Устойчивость и сходимость (410). 4. Уравнение с разрывным коэффициентом теплопроводности (414). 5. Однородные схемы на неравномерных сетках (419). 6. Сосредоточенный источник тепла (424). 7. Сосредоточенная теплоемкость (426). 8. Случай, когда коэффициент теплопроводности k зависит от t , $k = k(x, t)$ (428). 9. Третья краевая задача (431). 10. Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида (432). 11. Цилиндрические- и сферически-симметричные задачи теплопроводности (433). 12. Периодическая задача (435).	
§ 2. Однородные разностные схемы для уравнений гиперболического типа	438
1. Исходная задача (438). 2. Однородные разностные схемы (438). 3. Погрешность аппроксимации (439). 4. Устойчивость и сходимость (441).	
<i>Глава VIII. Разностные методы решения нелинейных уравнений математической физики</i>	444
§ 1. Разностные методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности	444
1. Стационарная задача (444). 2. Квазилинейное уравнение теплопроводности (447). 3. Некоторые аналитические решения квазилинейного уравнения теплопроводности (448). 4. Разностная схема. Метод Ньютона (452). 5. Различные неявные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности (455). 6. Расчет температурных волн (457). 7. Задача о фазовом переходе (задача Стефана) (458).	
§ 2. Консервативные разностные схемы нестационарной газовой динамики	459
1. Уравнения одномерной нестационарной газовой динамики в переменных Лагранжа (459). 2. Уравнения с псевдовязкостью (462). 3. Консервативные однородные схемы (463). 4. Полностью консервативные схемы (465). 5. Решение разностных уравнений методом Ньютона (468). 6. Сходимость итерационного метода (469). 7. Уравнения газодинамики с теплопроводностью (472).	
<i>Глава IX. Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики</i>	474
§ 1. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) для уравнения теплопроводности	474
1. Об экономичных схемах (474). 2. Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) (477). 3. Устойчивость (480). 4. Сходимость и точность (482). 5. Схема для уравнения с переменными коэффициентами (483). 6. Схема повышенного порядка точности (487).	
§ 2. Экономичные факторизованные схемы	491
1. Схемы с факторизованным оператором (491). 2. Краевые условия (492). 3. Построение экономичных факторизованных схем (494). 4. Трехслойные факторизованные схемы (498). 5. Экономичные схемы для систем уравнений параболического и гиперболического типов (504).	
§ 3. Метод суммарной аппроксимации	511
1. Постановка задачи (511). 2. Суммарная аппроксимация (512). 3. Сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач (514). 4. Примеры	

сведения многомерной задачи к цепочке одномерных (518). 5. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области (520). 6. Погрешность аппроксимации ЛОС (523). 7. Устойчивость ЛОС (524). 8. Равномерная сходимость ЛОС (528). 9. ЛОС для уравнений с переменными коэффициентами (529). 10. Аддитивные схемы. Общие формулировки (530). 11. Методы оценки сходимости аддитивной схемы (532). 12. Аппроксимация «многомерной» абстрактной задачи Коши цепочкой «одномерных» задач Коши (535). 13. Методы переменных направлений как аддитивные схемы (539). 14. ЛОС для многомерного гиперболического уравнения второго порядка (540). 15. Аддитивные схемы для систем уравнений (544).

Глава X. Методы решения сеточных уравнений	550
§ 1. Прямые методы	550
1. Прямые и итерационные методы (550). 2. Метод декомпозиции (552). 3. Метод разделения переменных (556). 4. Метод матричной прогонки (557).	
§ 2. Двухслойные итерационные схемы	558
1. Двухслойные итерационные схемы. Постановка задачи (558). 2. Явная схема с оптимальным чебышевским набором параметров (562). 3. Схема простой итерации (566). 4. Модельная задача. Сравнение методов (567). 5. О вычислительной устойчивости итерационных методов (569). 6. Упорядочение итерационных параметров (572).	
§ 3. Попеременно-треугольный метод	576
1. Метод Зейделя (576). 2. Метод верхней релаксации (579). 3. Неявные итерационные схемы (580). 4. Попеременно-треугольный метод (583). 5. ПТМ для разностной задачи Дирихле (587). 6. Схема повышенного порядка точности в прямоугольнике (590). 7. Разностные схемы для эллиптических уравнений общего вида (591). 8. ПТМ для решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области (597). 9. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области (602). 10. О решении разностных уравнений для задач с переменными коэффициентами (604).	
§ 4. Итерационные методы переменных направлений	606
1. Метод переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле в прямоугольнике (606). 2. Общая формулировка МПН (608). 3. Выбор оптимальных итерационных параметров (609). 4. МПН для случая неперестановочных операторов (611). 5. Факторизованные итерационные схемы и МПН (615). 6. МПН для случая несамосопряженных операторов (618).	
§ 5. Другие итерационные методы	620
1. Трехслойные итерационные схемы (620). 2. Метод минимальных связок (622). 3. Метод скорейшего спуска (624). 4. Решение уравнений с несамосопряженными операторами (625). 5. Гибридные методы (629).	
Дополнение	632
§ 1. Некоторые сведения из функционального анализа	632
§ 2. Некоторые варианги метода прогонки	637
§ 3. Задачи	642
Библиографические комментарии	651
Литература	654
Предметный указатель	655

ПРЕДИСЛОВИЕ

Быстрое развитие численных методов решения задач математической физики вызывает необходимость изложения теории разностных (или сеточных) методов на современном уровне в форме, доступной для широкого круга читателей. Данная книга, являющаяся учебным пособием, содержит изложение основ теории разностных схем и применения этой теории для изучения численных алгоритмов решения на ЭВМ типичных задач математической физики. В ней дается по возможности элементарное и систематическое изложение основных принципиальных вопросов теории, иллюстрируемых на простейших задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. Рассматриваются прежде всего те схемы (или их простейшие модели), которые представляют практический интерес, т. е. пригодны для решения конкретных задач на ЭВМ.

Основное внимание уделяется написанию разностной схемы и теоретическому (априорному) исследованию ее свойств (погрешности аппроксимации, устойчивости, сходимости и точности), а также вычислительным алгоритмам для решения разностных уравнений, получающихся при сеточной аппроксимации. Формулируются конструктивные принципы (такие, как требования однородности и консервативности, суммарной аппроксимации и др.), которые теоретически обоснованы для линейных и проверены на практике для нелинейных задач. Эффективность общей теории разностных схем, в особенности теории устойчивости (гл. VI), проиллюстрирована на большом числе примеров, причем даже для простейших уравнений с постоянными коэффициентами общая теория дает неулучшаемые результаты. Поскольку мы рассматриваем лишь схемы для дифференциальных уравнений второго порядка, то при решении получающихся разностных уравнений (как в одномерном, так и многомерном случаях) используется лишь алгоритм одномерной прогонки (для систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей).

Следует отметить, что для теории разностных схем типично предположение о том, что решение исходной задачи для дифференциального уравнения существует и имеет нужное по ходу изложения число производных, обеспечивающих максимальный

порядок аппроксимации. Мы не останавливаемся на перечне условий, обеспечивающих требуемую гладкость решения.

Предполагается, что читатель знаком с основами университетского курса теории уравнений в частных производных (например, по книге А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики»), точнее, с постановками типичных задач, а также с элементами функционального анализа (перечень некоторых сведений дан в Добавлении к книге).

Коротко о содержании книги. Глава I является вводной. В § 1 гл. I даны сведения справочного характера о типичных задачах математической физики, а в § 2 изучаются разностные уравнения, в основном второго порядка, и даны алгоритмы прогонки. Основные понятия теории разностных схем, иллюстрируемые большим числом примеров, излагаются в гл. II. Глава III посвящена теории однородных консервативных разностных схем для краевых задач в случае обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Здесь демонстрируются различные методы исследования и построения разностных схем. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона, а также для эллиптических уравнений общего вида изучается в гл. IV. В главе V рассматриваются разностные схемы для уравнений теплопроводности, колебаний струны, уравнения Шредингера и уравнений переноса; здесь изучаются только уравнения с постоянными коэффициентами. В главе VI излагается общая теория устойчивости двухслойных и трехслойных операторно-разностных схем. Применение этой теории к однородным разностным схемам для параболических и гиперболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами дано в гл. VII. Гл. VIII посвящена нелинейным задачам теплопроводности и газовой динамики.

Экономичные методы решения многомерных уравнений математической физики изложены в гл. IX, а в гл. X даны методы решения сеточных уравнений, получающихся, в частности, при аппроксимации эллиптических уравнений. По ходу изложения обращается внимание читателя на вопросы, касающиеся практического использования алгоритмов.

При написании данной книги использовалась монография автора «Введение в теорию разностных схем». Переход от монографии к учебному пособию потребовал существенной переработки. В частности, за последние пять лет появился ряд новых численных методов и теоретических работ, приведших к переоценке некоторых популярных методов. Так, например, полностью переработан материал главы X.

В последние годы появилось много работ, посвященных методу конечных элементов (МКЭ) — одному из видов вариационно-разностных методов. Его изложение громоздко, и в книге дан пример вывода разностной схемы с помощью МКЭ для одномер-

ной задачи (§ 8 гл. III), причем схема совпадает с той, что получена интерполяционным методом. Подчеркнем, что МКЭ—это только один из методов получения разностных схем, возможно, нестандартного типа.

Характер книги как учебного пособия вынудил отказаться от обзора работ по отдельным разделам теории разностных схем и ограничиться краткими библиографическими сведениями в конце книги. Отметим также, что в книге «Введение в теорию разностных схем» дана подробная библиография вплоть до 1971 года.

На основе материала книги можно построить лекционные курсы по теории разностных схем, рассчитанные на один, два или три семестра. Отбор соответствующего материала не представляет труда. В частности, материал § 2 гл. II, частично гл. III, VIII (§ 1, п. 1) и X (общая теория итерационных методов, модельный пример—трехточечная схема для уравнения $u''(x) = -f(x)$, $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$) составил большую часть содержания лекций по численным методам, прочитанных автором в весеннем семестре 1976 года для студентов 2-го курса факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Данную книгу следует рассматривать как первую в цикле, к которому относятся также книги:

А. А. Самарский, А. В. Гулин, Устойчивость разностных схем, М., 1973.

А. А. Самарский, Ю. П. Попов, Разностные схемы газовой динамики, М., 1975.

А. А. Самарский, В. Б. Андреев, Разностные методы решения эллиптических уравнений, М., 1976.

По материалам, вошедшим в эту книгу, автор в 1960—1976 гг. читал в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова лекции для студентов физического, механико-математического факультетов и факультета вычислительной математики и кибернетики.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему учителю Андрею Николаевичу Тихонову, многолетняя совместная работа с которым способствовала определению содержания и характера изложения теории разностных схем.

При подготовке книги автор учел замечания В. Б. Андреева, А. В. Гулина, И. В. Фрязинова и др. Особенно большую помощь оказали автору А. В. Захаров при подготовке рукописи к печати и Е. С. Николаев—при работе над гл. X. Всем им я выражаю глубокую благодарность. Я благодарен также В. М. Марченко за помощь при оформлении рукописи, Р. А. Волковой и Д. А. Гольдиной за проведение методических расчетов.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В КНИГЕ

$\omega_h = \{x_i = ih, h > 0, i = 1, 2, \dots, N-1, hN = l\}$ — равномерная сетка на интервале $(0, l)$,

$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, h > 0, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$ — равномерная сетка на отрезке $[0, l]$,

h — шаг сетки ω_h ,

x_i — узел сетки ω_h ,

$y = y_i$, $y(x_i)$ — функция, заданная на ω_h ,

$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h$ — правая разностная производная в точке x_i ,

$y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h$ — левая разностная производная в точке x_i ,

$y_{\bar{x}x} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$ — вторая разностная производная в точке x_i ,

$\hat{\omega}_h = \{x_i \in (0, l), i = 1, 2, \dots, N-1\}$ — неравномерная сетка на интервале $(0, l)$,

$\hat{\omega}_h = \{x_i \in [0, l], i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ — неравномерная сетка на отрезке $[0, l]$,

$h_i = x_i - x_{i-1}$ — шаг сетки $\hat{\omega}_h$,

$\hat{h}_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$,

$y_{\bar{x}} = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}$, $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i$,

$y_{\bar{x}x} = (y_{i+1} - y_i)/\hat{h}_i$,

$y_{\bar{x}x} = \frac{1}{\hat{h}_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$.

Скалярные произведения и нормы на сетке:

$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$,

$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$,

$\|y\|_C = \max_{x_i \in \hat{\omega}_h} |y(x_i)|$,

$\|\varphi\|_{(-1)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{k=1}^i h \varphi_k \right)^2 \right)^{1/2}$.

$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \tau > 0, j = 0, 1, \dots\}$ — временная сетка,

τ — шаг сетки ω_τ ,

$y = y^j = y(t_j)$ — функция, заданная на ω_τ ,

$\hat{y} = y^{j+1} = y(t_{j+1})$, $\check{y} = y^{j-1} = y(t_{j-1})$,

$y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y_t^{\circ} = (\hat{y} - \check{y})/(2\tau)$,

$$y_{\bar{i}t} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2,$$

$x = x_i = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \dots, x_p^{(i_p)})$ — узел p -мерной прямоугольной

сетки ω_h ,

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha,$$

h_α — шаг сетки ω_h по направлению α ,

$$x_i^{(\pm 1\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm h_\alpha, \dots, x_p^{(i_p)}),$$

$$y = y(x_i), \quad y^{(\pm 1\alpha)} = y(x_i^{(\pm 1\alpha)}),$$

$$y_{x\alpha} = (y^{(+1\alpha)} - y)/h_\alpha, \quad y_{\bar{x}\alpha} = (y - y^{(-1\alpha)})/h_\alpha,$$

$$y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = (y^{(+1\alpha)} - 2y + y^{(-1\alpha)})/h_\alpha^2,$$

Ω — множество функций, заданных на некоторой сетке ω_h и обращающихся в нуль на ее границе,

H — гильбертово пространство,

(y, v) — скалярное произведение элементов $y, v \in H$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$,

$\mathcal{D}(A)$ — область определения оператора A ,

$\mathcal{R}(A)$ — множество значений оператора A ,

E — единичный оператор,

$A: H \rightarrow H$ — оператор A с $\mathcal{D}(A) = H$ и $\mathcal{R}(A) \subseteq H$,

A^* — оператор, сопряженный оператору A ,

A^{-1} — оператор, обратный оператору A ,

S — оператор перехода,

T — разрешающий оператор,

$A > 0$ — положительный оператор,

$A \geq 0$ — неотрицательный оператор,

$A \geq \delta E$, $\delta > 0$ — положительно определенный оператор,

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}, \quad y \in H,$$

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}, \quad \varphi \in H.$$

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие численных методов и становление новой науки — вычислительной математики — в последние два-три десятилетия связано с необходимостью решения крупных научно-технических проблем и появлением быстродействующих электронно-вычислительных машин (ЭВМ или компьютеров). Достаточно указать такие проблемы, как 1) овладение ядерной энергией, создание ядерных реакторов, 2) проектирование летательных аппаратов (самолетов и ракет), 3) динамика космических полетов, 4) изучение физики плазмы в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза и др.

Решение этих задач было бы невозможно без применения численных методов. Успехи в области вычислительной математики и ее приложений в значительной степени способствовали повышению интереса к математике вообще и привели к созданию новых ее разделов.

В настоящее время можно говорить, что появился новый способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание или математическое моделирование, — вычислительный эксперимент, т. е. исследование реальных процессов средствами вычислительной математики.

В чем заключается вычислительный эксперимент (ВЭ)?

Пусть требуется изучить некоторый физический процесс. Будем исследовать его методом ВЭ.

Первый этап — математическая формулировка задачи или выбор математической модели. Этому предшествует выбор физического приближения, т. е. того, какие факторы надо учесть, а какими можно пренебречь. Выбор физического приближения — привилегия физиков.

Что такое математическая модель? Указываются группа искомых физических величин и группа заданных величин: между ними есть связь, т. е. уравнения (алгебраические или дифференциальные), написание которых вместе со всей необходимой информацией (о коэффициентах уравнений, о начальных и краевых условиях) и есть выбор математической модели.

Изучением математических моделей физики занимается математическая физика. Уравнениями математической физики, в основном, являются дифференциальные уравнения с частными производными, а также интегральные и интегро-дифференциальные

уравнения. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин (энергии, количества движения, массы и др.) и, как правило, являются нелинейными.

После того как написана система уравнений, описывающих процесс, надо исследовать полученную математическую модель методами общей теории дифференциальных и интегральных уравнений. Надо установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли данных, не противоречат ли они друг другу, найти условия, при которых задача разрешима и имеет единственное решение, выяснить, нельзя ли написать решение задачи в явном виде, можно ли построить частные решения. Частные решения важны для получения первичной информации о характере физического процесса, а также как тесты для проверки качества численных методов.

Второй этап — построение приближенного (численного) метода решения задачи, написание вычислительного алгоритма.

Третий этап — программирование для ЭВМ вычислительного алгоритма.

Четвертый этап — проведение расчетов на ЭВМ.

Пятый этап — анализ полученных численных результатов и уточнение математической модели.

Может оказаться, что математическая модель слишком груба — результат вычислений не согласуется с физическим экспериментом, или что модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить при более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа и снова пройти все этапы и т. д.

Здесь показаны этапы вычислительного эксперимента при теоретическом исследовании физических задач. Речь идет о новом методе теоретического исследования с использованием сложных математических моделей.

На первом этапе используются классические методы математической физики. Следует отметить, что многие задачи приводят к таким математическим моделям физики, разработка теории которых находится в начальной стадии. На практике приходится численно решать такие нелинейные задачи математической физики, для которых еще не доказаны даже теоремы существования и единственности.

Здесь мы остановимся лишь на втором этапе вычислительного эксперимента. Под вычислительным алгоритмом обычно понимают последовательность операций (логических и арифметических), при помощи которых находится решение задачи. Требуется, чтобы вычислительный алгоритм давал решение задачи с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ за конечное число действий $Q(\varepsilon)$. Это общее требование. Но уже оно вызывает много вопросов математического характера. Что значит: «с любой точностью»? Должна

быть показана принципиальная возможность получить решение с любой точностью, однако возможен случай, когда $Q(\varepsilon)$ при некотором ε конечно, но настолько велико, что нереально на практике получить решение с такой точностью ε . Для любой задачи можно построить бесчисленное множество вычислительных алгоритмов, которые обладают, например, одинаковыми асимптотическими свойствами, так что для них $Q(\varepsilon)$ имеет один и тот же порядок по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Изучать надо не все такие методы, а лишь те из них, которые пригодны для работы на ЭВМ. Естественно выбирать такие методы, которые для решения задачи с заданной точностью требуют минимального машинного времени. Время решения задачи должно быть разумным, измеряться минутами или, если речь идет о единичных расчетах, несколькими часами. Расчет должен стоить возможно дешевле. Время решения задачи зависит от алгоритма, от вычислительной машины и качества программы. Последнее учесть при априорных оценках качества алгоритма очень трудно. Число логических действий тоже трудно оценить независимо от машины. Поэтому сравнение вычислительных алгоритмов при теоретическом исследовании проводят обычно по числу арифметических операций $Q_0(\varepsilon)$. Поиск экономичного алгоритма, для которого число операций минимально, осуществляется в классе допустимых алгоритмов (например, имеющих одну и ту же асимптотику для $Q_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). В этом и состоит основная задача теории численных методов.

При теоретических исследованиях алгоритмов обычно сначала предполагается, что вычислительный процесс является идеальным, т. е. вычисления ведутся с бесконечным числом знаков. Однако на ЭВМ вычисления ведутся с конечной скоростью и с конечным числом знаков, допустимы не все числа, есть машинный нуль и машинная бесконечность. Если в процессе вычислений получается машинная бесконечность, то происходит аварийный останов (авост). Вычислительный процесс может оказаться неустойчивым, т. е. ошибки округления могут неограниченно нарастать, что делает алгоритм непригодным для практических расчетов (примеры таких неустойчивых алгоритмов приводятся в гл. II данной книги). Реальный (т. е. пригодный для ЭВМ) вычислительный алгоритм должен быть устойчивым и не допускать в процессе вычислений слишком больших промежуточных значений (приводящих к авосту). Из сказанного ясно, что идеальный вычислительный алгоритм может быть оптимальным по числу $Q_0(\varepsilon)$ и совершенно непригодным для вычислений на ЭВМ. Поэтому надо искать оптимальные реальные вычислительные алгоритмы.

Вычислительный эксперимент — это не разовый счет по стандартным формулам, а прежде всего расчет серии вариантов для

различных математических моделей. Пусть, например, надо найти оптимальные условия некоторого химического процесса, т. е. найти условия, при которых быстрее всего идет реакция. Решение задачи зависит от ряда параметров (например, от температуры, давления, от состава реагирующей смеси и др.). Чтобы найти оптимальный режим работы, надо провести расчеты для различных значений этих параметров, т. е. решить ряд вариантов. Конечно, возможны ситуации, когда алгоритм нужен для одиночных расчетов.

Постановка задачи об оптимальном алгоритме зависит от характера его использования (в одновариантном или многовариантном режиме).

Мы не останавливаемся здесь на вопросах, связанных с программированием, организацией и проведением вычислений на ЭВМ. Отметим лишь, что деятельность по программированию должна быть тесно связана с разработкой численных алгоритмов. Задачи математической физики сложны и алгоритмы для их решения — громоздки. Их надо делить на блоки, «модули». Далее, процессы разной физической природы часто описываются одними и теми же уравнениями (например, процессы диффузии, теплопроводности и намагничивания). Разные физические задачи могут иметь одну и ту же математическую модель, хотя у каждой задачи есть своя физическая специфика. С другой стороны, математическая модель в процессе проведения вычислительного эксперимента может существенно меняться несколько раз, и это требует изменения алгоритма (точнее, отдельных его частей) и, следовательно, программы. Отсюда возникает необходимость создания комплекса программ (пакета программ), построенного на модульном принципе и позволяющего оперативно проводить вычислительный эксперимент и решать классы задач разной физической природы. Это — актуальное направление в программировании и решении больших задач математической физики, оказывающее воздействие на работу по созданию численных методов.

Для численного решения задач математической физики обычно применяется метод конечных разностей или метод сеток. Он позволяет свести решение дифференциальных уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений.

Данная книга посвящена теории разностных методов (схем) для решения типичных задач математической физики.

В теории численных методов есть два главных вопроса:

1) построение дискретных (разностных) аппроксимаций для уравнения математической физики и исследование априорных характеристик качества этих аппроксимаций, что сводится прежде всего к изучению погрешности аппроксимации, устойчивости и связанной с ними точности полученной разностной схемы,

2) решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами, выбираемыми из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Характерная черта численных методов — их множественность. Каждому уравнению можно сопоставить бесчисленное множество разностных аппроксимаций, имеющих одни и те же асимптотические (т. е. по порядку относительно шага сетки h) характеристики (один и тот же порядок точности, одинаковый по порядку объем вычислений и т. д.). В этом состоит основная причина появления большого числа разных схем для основных уравнений математической физики.

Естественно стремление найти наилучший метод, который позволял бы получить искомое решение с заданной точностью за минимальное машинное время. Поиск таких численных методов на некотором множестве допустимых методов и есть основная цель теории. Для поиска наилучшего (оптимального) метода (выбор которого зависит от класса решаемых задач) применяется постепенное сужение множества допустимых методов путем последовательного включения требований аппроксимации, устойчивости, экономичности и др. Важную роль играет общее требование: разностная схема (дискретная модель) должна как можно лучше моделировать (приближать) свойства исходного дифференциального уравнения.

Для практики необходимо формулировать общие принципы, эвристические приемы и правила для получения разностных схем заданного качества. Такими принципами прежде всего являются принципы однородности (единобразия) и консервативности разностной схемы. Консервативность означает, что разностная схема выражает некоторый закон сохранения (уравнение баланса) на сетке. Консервативность однородных схем является необходимым условием сходимости в классе разрывных коэффициентов для стационарных и нестационарных задач математической физики.

Для линейных уравнений свойство консервативности разностной схемы обычно эквивалентно требованию самосопряженности разностного оператора (см. гл. III и IV). Для нелинейных уравнений, например уравнений газовой динамики, эффективным конструктивным принципом является принцип полной консервативности разностной схемы (см. § 2 гл. VIII).

Основные понятия теории разностных схем — погрешность аппроксимации, устойчивость, сходимость и точность разностной схемы — вводятся в гл. II данной книги. Эти понятия иллюстрируются на примерах схем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Уже здесь намечается переход к общим формулировкам, не использующим информации о конкретном виде разностного оператора.

Основной вопрос теории — о точности схемы — сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости схемы. Изучение устойчивости схемы сводится к получению априорных оценок решения разностной задачи через входные данные задачи, что является большой самостоятельной проблемой, требующей специального рассмотрения.

С другой стороны, и вопрос о погрешности аппроксимации не является тривиальным. Уже простейший пример схемы на неравномерной сетке для уравнения второго порядка показывает, что погрешность аппроксимации желательно оценивать не в норме C , а в более слабой норме специального вида (в негативной норме). Отсюда возникает необходимость получения априорных оценок для решения разностной задачи через правую часть в слабой норме. Такого вида оценки получены в гл. III и использованы для доказательства сходимости однородных разностных схем в классе разрывных коэффициентов.

С необходимостью пересмотра понятия погрешности аппроксимации и, тем самым, понятия схемы мы сталкиваемся в гл. IX в связи с построением экономичных схем для многомерных задач математической физики. Введенное в § 3 гл. IX понятие суммарной (по t) аппроксимации носит конструктивный характер и позволяет легко написать экономичные схемы для различных задач.

В книге есть примеры, показывающие различные подходы к понятию устойчивости разностных схем. Так, в гл. V, посвященной разностным схемам для нестационарных уравнений с постоянными коэффициентами, изучается асимптотическая устойчивость разностных схем для уравнений теплопроводности — свойство, присущее дифференциальному уравнению.

Теоретические вопросы возникают в гл. II—V в связи с изучением конкретных разностных схем для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов. В гл. III, в связи с изучением однородных разностных схем для обыкновенного дифференциального уравнения, ставится типичная задача теории разностных схем: задано исходное семейство разностных схем (в данном случае семейство задано, если заданы шаблонные функционалы), требуется найти в этом семействе схемы нужного качества. Эта задача решается в гл. III с использованием конкретного вида схемы, и ее решение приводит нас к консервативным однородным схемам.

В гл. VI излагается общая теория разностных схем. Для построения общей теории разностных схем естественно освободиться от предположений о структуре разностных операторов, об их явном представлении. Это приводит к определению разностных схем как операторных уравнений (аналогу сеточных аппроксимаций для эллиптических и интегральных уравнений)

и операторно-разностных уравнений (разностных по аргументу t с операторными коэффициентами), которые являются аналогами разностных схем для нестационарных (эволюционных) уравнений математической физики (например, параболического и гиперболического типа). Операторы схем являются линейными операторами, заданными в некотором абстрактном линейном нормированном пространстве H_h , зависящем от векторного параметра h (аналога шага сетки по $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$) с нормой $|h| \rightarrow 0$. Итак, рассматриваются два типа схем:

Операторная схема имеет вид последовательности (по параметру h) операторных уравнений первого рода

$$Ay = f,$$

где $A = A_h: H_h \rightarrow H_h$ (оператор A_h зависит от h и действует из H_h в H_h), $f = f_h \in H_h$ — заданный вектор, $y = y_h \in H_h$ — искомый вектор.

Операторно-разностная двухслойная схема записывается в следующем каноническом виде:

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \text{задан } y^0 \in H_h,$$

где τ — шаг сетки по t : $t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, A, B: H_h \rightarrow H_h$ и зависят от h, τ и, вообще говоря, от $t_j, y^j = y_{h, \tau}(t_j) \in H_h$ — искомая, а $\varphi^j = \varphi_{h, \tau}(t_j) \in H_h$ — заданная функции дискретного аргумента $t_j = j\tau$ со значениями в H_h (индексы h, τ ниже опускаем).

Многослойные схемы (т. е. схемы, содержащие значения $y(t)$ для нескольких моментов $t = t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \dots$) могут быть сведены к двухслойным схемам, у которых A и B являются операторными матрицами.

Центральным разделом теории разностных схем является теория устойчивости. Исследованию устойчивости разностных схем посвящено огромное количество работ, значительная часть которых основана на применении спектральных методов и содержит трудно сопоставимые и малоэффективные результаты, как правило, использующие предположения о структуре разностных операторов. В случае схем с несамосопряженными операторами спектральная теория дает необходимые условия устойчивости, в то время как основной интерес представляют достаточные условия и априорные оценки. Между тем энергетический подход, использующий введенные выше определения схемы, позволяет дать исчерпывающее исследование устойчивости схемы с операторами в гильбертовом пространстве H_h .

Очевидно, что устойчивость есть внутреннее свойство схемы, не зависящее от аппроксимации и связи схемы с каким-либо дифференциальным уравнением; поэтому условие устойчивости

должно формулироваться в виде некоторой связи между операторами A и B .

Задача ставится так:

Задано исходное семейство схем при помощи условий на A и B : $A = A^* > 0$ или $(Ay, v) = (y, Av)$, $(Ay, y) > 0$ для любых $y, v \in H$, где $(,)$ — скалярное произведение в H , $B > 0$, $B \neq B^*$ (B не является самосопряженным). Требуется выделить из этого семейства множество устойчивых по начальным данным схем

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, y^0 \in H,$$

для которых выполнено неравенство

$$\|y^j\|_A \leq \|y^0\|_A,$$

где $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ (устойчивость здесь означает выполнение этой оценки).

Необходимое и достаточное условие устойчивости двухслойных схем имеет вид операторного неравенства

$$B \geq 0,5\tau A$$

или

$$(By, y) \geq 0,5\tau (Ay, y) \text{ для любых } y \in H.$$

Это условие удобно для проверки в случае разностных схем для уравнений математической физики. Оно выделяет из исходного семейства схем множество устойчивых схем, в котором и следует искать схемы нужного качества по точности, объему вычислений и т. д. Следствием теории устойчивости является общий метод регуляризации в классе устойчивых схем (путем изменения операторов A и B) для получения схем заданного качества. Важную роль играет каноническая форма записи схем. В аналогичной форме записываются итерационные схемы для операторных уравнений $Au = f$. Это позволяет применять результаты общей теории устойчивости операторно-разностных схем к изучению итерационных методов (гл. X).

В гл. VI получено большое число априорных оценок, выражающих устойчивость двухслойных и трехслойных схем по начальным данным и по правой части. Эти оценки широко используются в последующих гл. VII, IX и X.

Отметим, что в теории разностных схем фактически используются элементарные понятия функционального анализа и линейной алгебры, такие как норма оператора, сопряженный оператор, операторное неравенство и т. п. Для удобства читателя эти сведения даны в конце книги, в виде дополнения.

В книге приводится много примеров практического использования для конкретных схем общей теории устойчивости, изложенной в гл. VI.

Основная часть книги посвящена разностным методам решения линейных уравнений математической физики. В гл. VIII рассматриваются нелинейные задачи теплопроводности и газовой динамики. Гл. IX посвящена экономичным методам решения многомерных задач математической физики. Экономичные схемы для нестационарных задач делятся на две группы:

1) факторизованные схемы, обладающие аппроксимацией в обычном смысле,

2) аддитивные схемы, которые представляют собой цепочку обычных схем, осуществляющих переход от слоя j на слой $j+1$, и аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение в суммарном смысле.

Для каждого типа схем указаны методы исследования аппроксимации и устойчивости. Устойчивость факторизованных схем исследована на основе общей теории устойчивости, а для аддитивных схем развит свой метод исследования устойчивости. В частности, оценки в равномерной метрике в случае аддитивной (локально-одномерной) схемы для уравнения теплопроводности удается получить при помощи принципа максимума, общая формулировка которого дана в гл. IV.

Для большинства экономичных методов решения многомерных задач типично использование на каждом этапе вычислений алгоритмов решения одномерных задач.

Методы решения разностных уравнений, получающихся при аппроксимации дифференциальных уравнений эллиптического типа, изучаются в последней, десятой, главе. Сначала излагаются прямые методы (декомпозиции и разделения переменных), пригодные для решения разностной задачи Дирихле в случае уравнения Пуассона в прямоугольнике. Они являются более экономичными, чем метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров.

Общая теория итерационных методов излагается для уравнения первого рода $Au=f$, где A — линейный оператор в гильбертовом пространстве. Теория итерационных методов трактуется как раздел общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Найден оптимальный набор параметров и получены оценки скорости сходимости для двухслойной итерационной схемы. Основное внимание уделяется попеременно-треугольному методу с оптимальным набором чебышевских параметров. Этот универсальный метод в настоящее время, по-видимому, является наиболее эффективным для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами в произвольной области. Соответствующие алгоритмы приведены в § 3 гл. X.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе содержатся некоторые предварительные сведения, используемые в дальнейшем. В § 1 рассматриваются типичные стационарные и нестационарные задачи математической физики. В § 2 проводится изучение простейших представителей сеточных уравнений—разностных уравнений второго порядка, которые являются важным элементом рассматриваемых в книге вычислительных алгоритмов для одномерных и многомерных задач математической физики.

§ 1. Типичные задачи математической физики

1. Стационарные задачи. Основная цель книги—изучение численных методов решения уравнений математической физики. Чтобы подчеркнуть связь с обычным университетским курсом уравнений математической физики, выпишем типичные уравнения математической физики и постановки краевых задач для них. Не имея возможности останавливаться подробно на физических задачах, приводящих к тем или иным уравнениям, а также на теории краевых задач математической физики, ограничимся ссылками на книги по уравнениям математической физики *).

Основное изложение мы проводим для линейных уравнений второго порядка.

Различают два типа процессов—нестационарные (меняющиеся во времени) и стационарные (не меняющиеся во времени).

Нестационарные процессы описываются прежде всего уравнениями параболического и гиперболического типов, а стационарные процессы—уравнениями эллиптического типа.

Начнем со стационарных задач.

Простейшим представителем уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad u = u(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (1)$$

*) См. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1972.

($p = 1, 2, 3, \dots, p_0$ — число измерений). Неоднородное уравнение

$$\Delta u = f(x) \quad (2)$$

называют *уравнением Пуассона*.

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят задачи о стационарном распределении тепла, задачи диффузии, электростатики и др.

Стационарное распределение температуры $u = u(x_1, x_2, x_3)$ в однородной среде описывается уравнением Пуассона

$$\Delta u = f, \quad f = F/k,$$

где $F = F(x)$ — плотность тепловых источников (источник), а $k = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности.

Если среда неоднородна, то коэффициент теплопроводности k зависит от точки x , $k = k(x)$, и вместо уравнения Пуассона получаем уравнение

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -F(x), \quad k(x) > 0. \quad (3)$$

В анизотропной среде температура $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = -F(x). \quad (4)$$

Это уравнение является эллиптическим при условии положительности квадратичной формы (во всех точках $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$)

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta > 0,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ — координаты произвольного вектора ξ такого, что $|\xi| \neq 0$. Если

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \geq c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad c_1 = \text{const} > 0,$$

то уравнение (4) называют *сильно эллиптическим*.

Если имеются источники (или стоки) тепла, пропорциональные температуре, то стационарное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - q(x) u = -F(x) \quad (5)$$

(при $q(x) > 0$ имеется сток, а при $q(x) < 0$ — источник тепла).

При высоких температурах коэффициент теплопроводности зависит от температуры: $k = k(u, x)$, и мы получаем квазилинейное

уравнение теплопроводности, например,

$$\operatorname{div}(k(u, x) \operatorname{grad} u) = -F(x, u),$$

если мощность источников тепла также зависит от температуры (что имеет место, например, в случае тепловыделения за счет химической реакции). В общем случае коэффициент теплопроводности k и источник F зависят не только от температуры, но и от градиента температуры:

$$k = k(x, u, \operatorname{grad} u) = k\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right),$$

$$F = F(x, u, \operatorname{grad} u) = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right).$$

Для определения $u = u(x)$ получается нелинейное уравнение.

Если процесс теплопроводности сопровождается конвективным переносом тепла, что имеет место в движущейся среде, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + \mathbf{v} \operatorname{grad} u - qu =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] - qu = -F(x), \quad (6)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ — вектор скорости среды.

Распределение электростатического поля описывают уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, \mathbf{D} — вектор индукции, $\epsilon > 0$ — диэлектрическая постоянная (которая может зависеть от x и даже от поля \mathbf{E} при очень сильных полях), ρ — плотность объемных зарядов. Из условия $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ следует, что существует потенциал u такой, что

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u.$$

Отсюда и из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ следует

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

В однородной среде

$$\Delta u = -4\pi\rho/\epsilon.$$

Если в проводящей среде имеется стационарный ток с плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$ и нет объемных источников тока, то

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$, поскольку в силу закона Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, то для потенциала $u = u(x)$ получаем уравнение

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0,$$

где σ — коэффициент электропроводности; если среда однородна, $\sigma = \text{const} > 0$, то $\Delta u = 0$.

2. Постановка краевых задач. Остановимся на формулировке краевых задач на примере уравнения Пуассона.

Пусть G — конечная область p -мерного пространства $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ с границей Γ .

Обычно ставятся следующие краевые задачи.

Требуется найти непрерывное в замкнутой области $G + \Gamma$ решение уравнения

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G,$$

удовлетворяющее на Γ одному из граничных условий:

$$\text{a)} \quad u = \mu_1(x) \quad \text{при } x \in \Gamma \quad (7)$$

(первая краевая задача),

$$\text{б)} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \mu_2(x) \quad \text{при } x \in \Gamma \quad (8)$$

(вторая краевая задача),

$$\text{в)} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(u - \mu_3(x)) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma \quad (9)$$

(третья краевая задача),

где $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$, $\sigma = \sigma(x) \geq 0$ — заданные функции x , $\partial u / \partial n$ — производная по внешней нормали к Γ .

В случае уравнения (3) вместо $\partial u / \partial n$ в б) или в) надо подставить $k \partial u / \partial n$.

Мы не останавливаемся на формулировке условий, обеспечивающих единственность и существование решения краевых задач. В дальнейшем всюду в книге предполагается, что рассматриваемые задачи математической физики имеют все производные, нужные по ходу изложения.

Физический смысл условий а) — в): а) — задана граничная температура, б) — на границе Γ задан тепловой поток, в) — на границе происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, имеющей температуру $\mu_3(x)$.

Вторая краевая задача (задача Неймана) разрешима при выполнении условия

$$\int_{\Gamma} \mu_2(x) d\sigma + \int_G f(x) dx = 0,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_p$ — элемент объема. Это условие означает, что через границу Γ вытекает столько же тепла, сколько его выделяется в объеме G .

Уравнение (3) эквивалентно интегральному тождеству (уравнению баланса тепла)

$$\int_{\Gamma'} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{G'} F dx = 0,$$

где G' — произвольная подобласть (с границей Γ') области G . Если, например, в случае двух измерений взять $G' = \{a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$, то уравнение баланса примет вид

$$\left(\int_{a_2}^{b_2} k \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 \right) \Big|_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} + \left(\int_{a_1}^{b_1} k \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 \right) \Big|_{x_2=a_2}^{x_2=b_2} + \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} F(x_1, x_2) dx_1 = 0.$$

Краевые задачи можно свести к задачам о минимуме (в классе достаточно гладких функций) функционала, который, например, для задачи

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

имеет вид

$$I[u] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \int_G k \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 dx + \int_G qu^2 dx - \int_G fu dx, \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

В одномерном случае ($p=1$) эллиптические уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, G есть интервал $0 < x < l$, Γ состоит из двух точек $x=0$ и $x=l$, так что $\bar{G} = G + \Gamma = \{0 \leq x \leq l\}$. Дифференциальное уравнение (5) имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -F(x), \quad 0 < x < l.$$

При $x=0$ и $x=l$ ставятся краевые условия:

а) $u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2,$

б) $k \frac{du}{dx} = \mu_1 \quad \text{при } x=0, \quad -k \frac{du}{dx} = \mu_2 \quad \text{при } x=l,$

в) $k \frac{du}{dx} - \sigma_1 u = -\mu_1 \quad \text{при } x=0,$

$-k \frac{du}{dx} - \sigma_2 u = -\mu_2 \quad \text{при } x=l.$

Кроме того, возможны любые комбинации краевых условий а)–в) при $x=0, x=l$.

3. Уравнения параболического типа. Типичным представителем уравнений параболического типа является уравнение теплопроводности, описывающее нестационарный процесс теплопроводности. В изотропной среде это уравнение имеет вид

$$c \frac{\partial u}{\partial t} - Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad (10)$$

где

$$Lu - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad (11)$$

$k = k(x, t) \geq 0$ — коэффициент теплопроводности, $c = c(x, t) > 0$ — теплоемкость единицы объема.

При $t = 0$ задается начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

а на границе Γ — одно из краевых условий (7) — (9). В дальнейшем основное изложение проводится для первой краевой задачи:

$$u = \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad t \geq 0.$$

В случае однородной изотропной среды, когда $k(x, t) = k = \text{const}$, $c(x, t) = c = \text{const}$, уравнение теплопроводности записывают так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u + \bar{f}(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{c}, \quad \bar{f} = \frac{f}{c}, \quad (12)$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности. Меняя масштаб для t и x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, всегда можно добиться, чтобы коэффициент при Δu был равен единице. Так, например, в одномерном случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{x} < l,$$

введем новые переменные $x = \bar{x}/l$, $t = a^2 \bar{t}/l^2$ и для функции $u = u(x, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1$$

$$\left(\text{здесь } f(x, t) = \frac{l^2}{a^2} \bar{f}\left(lx, \frac{l^2}{a^2} t\right) \right).$$

Таким образом, без ограничения общности вместо уравнения (12) можно писать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad x \in G,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0.$$

В случае неоднородной и анизотропной среды в уравнении (10) меняется лишь оператор L :

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad (13)$$

причем матрица $(k_{\alpha\beta})$ удовлетворяет при любом x и t условию эллиптичности.

Если коэффициенты c и k зависят от температуры u , то уравнение теплопроводности (10) в изотропной среде имеет вид

$$c(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f(x, t, u). \quad (14)$$

Весьма часто встречаются задачи, для которых c и k зависят только от температуры, $c = c(u) > 0$, $k = k(u) > 0$. В этом случае можно ввести новую переменную

$$v = \int_0^u k(u') du' + \text{const}$$

и преобразовать уравнение (14) к виду

$$\varphi(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + f(x, t), \quad \varphi(v) = \frac{c(u(v))}{k(u(v))}.$$

В частности, при $k = k_0 u^n$, $c = c_0 u^m$ имеем

$$v = \frac{k_0}{n+1} u^{n+1}, \quad \varphi(v) = \frac{c_0}{k_0} u^{m-n} = \frac{c_0}{k_0} \left(\frac{n+1}{k_0} \right)^{\frac{m-n}{n+1}} v^{\frac{m-n}{n+1}}.$$

Возможна и другая замена:

$$v = \int_0^u c(u') du', \quad k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \frac{k(u)}{c(u)} \frac{\partial x}{\partial x_\alpha},$$

так что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{k}(v) \frac{\partial x}{\partial x_\alpha} \right) + f, \quad \bar{k}(v) = \frac{k(u(v))}{c(u(v))}.$$

Такие способы замены широко применяются в вычислительной практике.

Уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f$$

соответствует интегральное уравнение баланса тепла в области $G' \subset G$ с границей Γ' :

$$\int_{G'} u \, dx \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma'} k \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{G'} f \, dx,$$

где t_1 и $t_2 > t_1$ — произвольные числа. Здесь $w = -k \partial u / \partial n$ — поток тепла по нормали к поверхности Γ' . В одномерном случае имеем

$$\int_a^b [u(x, t_2) - u(x, t_1)] \, dx = \int_{t_1}^{t_2} k \frac{du}{dx} \Big|_{x=a}^{x=b} \, dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b f \, dx.$$

4. Уравнения гиперболического типа. Мы будем рассматривать уравнения второго порядка, а также системы уравнений первого порядка. Уравнение второго порядка имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad \rho > 0, \quad (15)$$

где Lu — один из эллиптических операторов (11), (13), с коэффициентами, зависящими от x и t , или $Lu = \Delta u$. Для однородной среды имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \Delta u + f(x, t), \quad \rho > 0, \quad k > 0$$

(для уравнения колебаний мембранны ρ — плотность, а k — натяжение мембранны) или, после замены переменных,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(x, t).$$

На границе Γ задаются краевые условия одного из указанных выше типов (7) — (9), например,

$$u = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

а при $t = 0$ — два начальных условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G}.$$

В одномерном случае простейшим уравнением гиперболического типа является уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l$$

(где a — скорость распространения колебаний), которое после замены независимых переменных может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Этому уравнению соответствует интегральное соотношение (уравнение баланса)

$$\int_{\Gamma'} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = \iint_{S'} f(x, t) dx dt,$$

где Γ' — любая замкнутая кривая, ограничивающая область S' на плоскости (x, t) . Если существуют непрерывные вторые производные $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^2 u / \partial x^2$, то отсюда следует дифференциальное уравнение (16). Для этого следует в качестве S' выбрать прямоугольник со сторонами длины Δt и Δx , параллельными осям Ot и Ox соответственно, разделить уравнение баланса на $\Delta x \Delta t$ и перейти к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$.

Однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

эквивалентно системе уравнений первого порядка¹

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

которой соответствуют уравнения баланса

$$\int_{\Gamma'} (u dx + v dt) = 0, \quad \int_{\Gamma'} (v dx + u dt) = 0. \quad 1$$

Примером системы уравнений гиперболического типа может служить система уравнений Ламэ динамической теории упругости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + f,$$

где $\lambda = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$, u — вектор смещения. В двумерном случае система уравнений Ламэ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + f_1, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + f_2, \end{aligned}$$

где $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, а $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$.

5. Разрывные коэффициенты, сосредоточенные источники.

а) Разрывные коэффициенты. Входящие в дифференциальные уравнения коэффициенты k и c могут иметь разрывы первого рода.

Так, разрыв коэффициента теплопроводности имеет место в случае, когда область \mathcal{G} является неоднородной и состоит из нескольких частей с разными свойствами. Разрыв коэффициента $k = k(x)$ в уравнениях (10) или (15) означает, что решение $u = u(x)$ имеет слабый разрыв, т. е. функция $u = u(x)$ непрерывна, а ее первые производные по x_1, x_2, \dots, x_p имеют разрывы первого рода.

Поясним это на примере одномерного (по x) уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1.$$

Пусть при $x = \xi$ функция $k(x, t)$ имеет разрыв первого рода, т. е.

$$[k] = k(\xi + 0, t) - k(\xi - 0, t) \neq 0.$$

Тогда при $x = \xi$ должны выполняться условия непрерывности температуры $u(x, t)$ и теплового потока $-k \frac{\partial u}{\partial x}$ (условия сопряжения)

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \quad x = \xi, \quad t \geq 0.$$

Так как $[k] \neq 0$, то отсюда следует, что производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ разрывна, $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \neq 0$ при $x = \xi$. Условие $\left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$ непрерывности теплового потока может быть получено из уравнения баланса на отрезке $\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} + \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} f(x, t) dx. \quad (17)$$

Переходя в (17) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая ограниченность $\partial u / \partial t$ и f , получим $[ku'] = 0$ при $x = \xi$.

В многомерном случае k может иметь разрыв на некоторой поверхности Γ' . Тогда на ней должны быть выполнены условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial n'} \right] = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma',$$

где n' — нормаль к Γ' .

Для стационарных задач (при $\partial u / \partial t \equiv 0$) условия сопряжения сохраняют свой вид.

б) **Сосредоточенный источник тепла.** Решение уравнения теплопроводности имеет слабый разрыв и в том случае, когда в некоторой точке $x = \xi$ помещен (сосредоточен) источник тепла мощности Q , т. е. выделяется в единицу времени в единице объема количество тепла, равное Q . Тогда при $x = \xi$ тепловой поток разрытен и величина его скачка равна Q :

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -Q \quad \text{при } x = \xi. \quad (18)$$

Чтобы убедиться в этом, распределим источник Q на отрезке $\xi - \varepsilon \leq x \leq \xi + \varepsilon$ с плотностью $f_\varepsilon(x, t)$, где f_ε удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} f_\varepsilon(x, t) dx = Q \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

Можно, например, положить $f_\varepsilon = Q/2\varepsilon$ при $x \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ и $f_\varepsilon = 0$ вне этого отрезка. Напишем соответствующее уравнение

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right) + f_\varepsilon(x, t) \quad \bullet$$

и проинтегрируем его по x от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$:

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} dx = -k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} + Q.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и определяя решение исходной задачи как предел функции $u_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (18).

Если источник тепла Q сосредоточен на границе $x = 0$, то в этой точке ставится известное краевое условие второго рода.

В многомерном случае, когда источник распределен на поверхности Γ' с плотностью q , ставятся условия

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial n'} \right] = -q \quad \text{при } x \in \Gamma'. \quad \bullet$$

в) **Сосредоточенная теплоемкость.** Пусть в точке $x = \xi$ помещена сосредоточенная теплоемкость величины C . Тогда в этой точке должны выполняться условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad C \frac{\partial u}{\partial t} = \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad \text{при } x = \xi. \quad (19)$$

Если теплоемкость C сосредоточена на границе $x = 0$, то при $x = 0$ ставится краевое условие

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } x = 0. \quad (20)$$

Вывод (19) и (20) проводится по аналогии с выводом (18).

Представляем читателю написать краевое условие при $x=0$ в предположении, что в этой точке сосредоточена теплоемкость C и выделяется (в единицу времени) количество тепла, равное Q .

г) **Сосредоточенная сила.** Рассмотрим процесс колебаний неоднородной струны, описываемый уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (21)$$

где ρ — плотность струны, k — натяжение. Предположим, что в точке $x=\xi$ приложена сила, равная F_0 . Рассуждения, аналогичные тем, которые привели к (18), показывают, что в точке $x=\xi$ должны быть выполнены условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -F_0 \quad \text{при } x = \xi.$$

д) **Сосредоточенная масса.** Пусть в точке $x=\xi$ неоднородной струны помещен груз массы M . Тогда здесь ставятся условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad M \frac{d^2 u}{dt^2} = \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad \text{при } x = \xi$$

(ср. с (19)). При $x \neq \xi$ пишется уравнение (21). Если масса M находится на конце $x=0$, то при $x=0$ ставится краевое условие

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } x = 0.$$

Во всех рассмотренных выше случаях производная du/dx имеет при $x=\xi$ разрыв первого рода (решение $u=u(x, t)$ имеет слабый разрыв).

§ 2. Разностные уравнения

1. **Предварительные замечания.** Решение дифференциальных уравнений приближенными методами приводит к системам линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

где $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка N , $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ — искомый вектор, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ — заданный вектор.

Существует два типа методов решения систем линейных алгебраических уравнений:

- прямые или «точные» методы,
- итерационные методы или методы последовательных приближений. Общие методы решения систем линейных алгебраических уравнений (в основном, итерационные методы) будут рассмотрены в гл. X.

Начнем с изучения простейших систем линейных алгебраических уравнений — с разностных уравнений, для которых матрица имеет специальный вид (например, является трехдиагональной). Нужно отметить, что на практике приходится встречаться с системами разностных уравнений очень высокого порядка.

Разностные уравнения появляются, в частности, при аппроксимации дифференциальных уравнений математической физики. При этом приходится искать функции двух или трех переменных, заданных на сетке, т. е. на дискретном множестве точек, число которых достигает десятков и даже сотен тысяч. Для определения сеточных функций получаются системы линейных алгебраических уравнений (разностных уравнений), для которых характерны два обстоятельства:

1) матрица A имеет специальный вид (имеет много нулевых элементов),

2) число уравнений очень велико ($10^4 - 10^6$).

В этом параграфе мы проведем изучение разностных уравнений второго порядка независимо от дифференциальных уравнений, т. е. от происхождения самих разностных уравнений. В частности, будет рассмотрен прямой метод решения краевых задач для разностных уравнений второго порядка.

2. Примеры разностных уравнений. Читателю уже приходилось встречаться с разностными уравнениями, не подозревая, быть может, о том, что они разностные. Это, например, формулы $a_{k+1} = a_k + d$ или $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} = 0$ для членов арифметической прогрессии и $a_{k+1} = qa_k$ — для членов геометрической прогрессии, где $a_k = a(k)$, причем аргумент $k = 1, 2, 3, \dots$ принимает целочисленные значения.

Итак, рассмотрим функцию целочисленного аргумента

$$y(i), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Образуем в точке i разности:

$$\begin{aligned} \text{правую: } \Delta y_i &= y(i+1) - y(i), \\ \text{левую: } \nabla y_i &= y(i) - y(i-1). \end{aligned}$$

Обычно обозначают $y_i = y(i)$. Тогда

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Эти выражения можно рассматривать как формальные аналоги первой производной. Рассмотрим вторую разность

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \\ &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta y_{i-1} = \nabla y_i$. В самом деле, выражения слева и справа равны $y_i - y_{i-1}$. Применение оператора левой разности эквивалентно применению оператора правой разности в точке,

смещённой на единицу влево, так что

$$\Delta \nabla y_i = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}.$$

Аналогично Δ^2 определяется

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i).$$

При каждом применении Δ захватывается еще одна точка вправо, следовательно, применяя оператор Δ m раз, получим, что $\Delta^m y_i$ содержит значения $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$ в точках $i, i+1, \dots, i+m$.

Можно написать уравнение, содержащее разности различного порядка:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + \dots + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ — коэффициенты, $\alpha_0 \neq 0$. Это уравнение называется *разностным уравнением m -го порядка* относительно y_i — искомой функции целочисленного аргумента. Оно содержит значения $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$. Это разностное уравнение есть формальный аналог дифференциального уравнения m -го порядка:

$$\alpha_0 \frac{d^m u}{dx^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \dots + \alpha_{m-1} \frac{du}{dx} + \alpha_m u = f, \quad \alpha_0 \neq 0.$$

Подобно тому, как коэффициенты дифференциального уравнения могут быть функциями от x , коэффициенты разностного уравнения могут зависеть от i : $\alpha_m = \alpha_m(i)$!

Откуда появляются разностные уравнения?

Существуют некоторые математические и технические задачи, которые непосредственно приводят к таким уравнениям, но главный источник — разностные методы решения дифференциальных уравнений математической физики.

Рассмотрим простейший пример обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть надо решить уравнение $\frac{du}{dx} = f(x)$.

Можно приближенно заменить du/dx таким образом:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \sim \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h},$$

где $h > 0$ — расстояние между точками x_i и $x_i + h$. Если обозначить $x_i + h = x_{i+1}$, $u(x_i) = u_i$, $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$, то

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \sim \frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

При $h \rightarrow 0$ это разностное выражение стремится к du/dx . Отметим, что замена неоднозначна. Можно было бы взять левую разность

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{\nabla u_i}{h}$$

или полусумму правой и левой — центральную разность:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \sim \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\Delta u_i + \nabla u_i}{2h}.$$

Всюду здесь знак \sim означает соответствие или аппроксимацию. Говорят, что выражение $\frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ аппроксимирует производную du/dx .

Итак, рассмотрим уравнение

$$\frac{\Delta y_i}{h} = f_i, \quad \text{где } f_i = f(x_i).$$

В соответствии с определением это есть разностное уравнение первого порядка. Его можно записать в виде

$$\Delta y_i = h f_i \quad \text{или} \quad y_{i+1} = y_i + h f_i.$$

Очевидно, что решение такого уравнения не вызывает затруднений.

Заметим, что при замене дифференциального уравнения первого порядка можно получить разностное уравнение второго порядка. Например, таким образом:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + 0,5 h^2 u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u''' + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + 0,5 h^2 u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u''' + O(h^4).$$

Складывая эти два выражения, получим

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u''_i + O(h^2).$$

Отбросив $O(h^2)$, получим приближенное выражение для u'' :

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=x_i} \sim \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta \nabla u_i}{h^2}.$$

Из разложения $u_{i+1} = u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + O(h^3)$ выразим

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad (1)$$

заменив u''_i на вторую разностную производную.

Заменим в формуле (1) u'_i на f_i , отбросим слагаемое $O(h^2)$ и умножим полученное уравнение на $2h$. Тогда вместо дифференциального уравнения первого порядка $du/dx = f$ получим разностное уравнение второго порядка:

$$\Delta \nabla y_i - 2\Delta y_i = 2h f_i.$$

Рассмотрим теперь свойства решений разностных уравнений.

3. Разностные уравнения и неравенства первого порядка. Рассмотрим разностное уравнение первого порядка:

$$b\Delta y_i + ay_i = f_i. \quad (2)$$

Оно формально соответствует дифференциальному уравнению первого порядка:

$$b \frac{du}{dt} + au = f.$$

Уравнение (2) можно записать так:

$$b(y_{i+1} - y_i) + ay_i = f_i \quad \text{или} \quad by_{i+1} = cy_i + f_i, \quad c = b - a.$$

В общем случае $b = b_i$, $a = a_i$, $c = c_i$, т. е. это известные функции аргумента i . Пусть $b_i \neq 0$, тогда

$$y_{i+1} = q_i y_i + \varphi_i.$$

Очевидно, что $q_i = c_i/b_i$, $\varphi_i = f_i/b_i$, $b_i \neq 0$. Отсюда видно, что решение определено однозначно, если задано значение функции y при каком-либо i . Пусть при $i=0$ задано y_0 . Тогда можно определить y_1 , y_2 , ... и т. д. Пусть $q_i = q = \text{const}$. Если $\varphi_i = 0$, то значения y_i составляют просто геометрическую прогрессию. Если $\varphi_i \neq 0$, то

$$y_{i+1} = qy_i + \varphi_i = q(qy_{i-1} + \varphi_{i-1}) + \varphi_i = q^2 y_{i-1} + \varphi_i + q\varphi_{i-1}.$$

Продолжая этот процесс, придем к формуле

$$y_{i+1} = q^{i+1}y_0 + \varphi_i + q\varphi_{i-1} + \dots + q^{i-1}\varphi_1 + q^i\varphi_0 =$$

$$= q^{i+1}y_0 + \sum_{k=0}^i q^{i-k}\varphi_k. \quad (3)$$

Нетрудно также выписать решение уравнения

$$y_{i+1} = q_i y_i + \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

если $q_i \neq \text{const}$.

Иногда приходится иметь дело с неравенствами первого порядка:

$$y_{i+1} \leq qy_i + f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

(задано y_0 , а q , f_i известны). Как решать это неравенство? Мы можем решить уравнение

$$v_{i+1} = qv_i + f_i, \quad v_0 = y_0. \quad (5)$$

Покажем, что $y_i \leq v_i$. Вычтем равенство (5) из неравенства (4):

$$y_{i+1} - v_{i+1} \leq q(y_i - v_i) \leq q^2(y_{i-1} - v_{i-1}) \leq \dots \leq q^{i+1}(y_0 - v_0) = 0.$$

Отсюда $y_{i+1} \leq v_{i+1}$ для любого q , а v_i выражается явным образом через q , v_0 , f_j по формуле, аналогичной (3).

4. Разностные уравнения второго порядка. Задача Коши. Краевые задачи. Рассмотрим теперь разностное уравнение второго порядка. Удобна следующая форма записи разностного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i \\ i = 1, 2, \dots, A_i \neq 0, B_i \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Покажем, что это уравнение второго порядка. Введем

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$B_i \Delta y_i - A_i \Delta y_{i-1} - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta y_i - \nabla y_i &= \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \\ \Delta y_{i-1} &= -\Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_i. \end{aligned}$$

С учетом этих формул уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$A_i \Delta^2 y_{i-1} + (B_i - A_i) \Delta y_i - (C_i - A_i - B_i) y_i = -F_i, \quad A_i \neq 0.$$

Можно записать исходное уравнение (6) по-другому, так что Δ^2 будет при коэффициенте B_i , но так как $B_i \neq 0$, то уравнение все равно имеет второй порядок:

$$B_i \Delta^2 y_{i-1} + (B_i - A_i) \Delta y_{i-1} - (C_i - A_i - B_i) y_i = -F_i.$$

Таким образом, уравнение (6) — аналог дифференциального уравнения второго порядка.

Для его решения нужно задать два дополнительных условия, которыми могут служить значения функции y и разности первого порядка Δy . Если оба условия (значения функции y_i и первой разности Δy_i) задать в одной точке, то получим *задачу Коши*, если же дополнительные условия заданы в разных (не соседних) точках, то полученная задача называется *краевой*.

Пусть решается задача Коши и заданы при $i = 0$ значения y_0 и $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, или, что то же, заданы y_0 и y_1 .

Зная y_0 и y_1 , можно определить последовательно значения y_i при $i = 2, 3, \dots$:

$$y_{i+1} = \frac{C_i y_i - A_i y_{i-1} - F_i}{B_i}, \quad B_i \neq 0.$$

Если заданы y_0 и y_1 , то задача разрешима и притом единственным образом.

Но для уравнений второго порядка в математической физике наиболее типичны краевые задачи, когда дополнительные значения заданы при разных i , например, при $i=0$ задано y_0 и при $i=N$ задано y_N , т. е. требуется найти решение y_i , $0 < i < N$, уравнения (6), если

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (8)$$

где μ_1, μ_2 — заданные числа.

Множество точек (узлов) $i=0, 1, 2, \dots, N$ называется *сеткой*. В граничных узлах сетки $i=0$ и $i=N$ могут быть заданы не только значения функции, но и значения первой разности или линейной комбинации функции и первой разности.

Общее условие можно записать в виде

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (8')$$

Подставляя

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

в первое из условий (8'), получим

$$\kappa_1 \Delta y_0 - (1 - \kappa_1) y_0 = \mu_1. \quad (8'')$$

Случай $\kappa_1 = 0$ означает, что в граничном узле $i=0$ задано значение функции y_0 (так называемое *граничное условие первого рода*). Если $\kappa_1 = 1$, то задано значение Δy_0 (*граничное условие второго рода*). В случае $\kappa_1 \neq 0, \kappa_1 \neq 1$ в точке $i=0$ задана линейная комбинация функции и первой разности (*граничное условие третьего рода*).

Основной интерес представляют разностные краевые задачи. Большое достижение вычислительной математики состоит в том, что для огромного количества задач математической физики вычисления строятся таким способом, что на каждом шаге приходится решать такие трехточечные уравнения, как (6) с условиями (8').

Эта задача является классической, к ней сводятся многие сложные задачи теории вычислительных методов. Матрица такой системы уравнений является трехдиагональной. Она имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & -\kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{array} \right].$$

Ее порядок равен $N+1$, если заданы краевые условия второго или третьего рода. Для системы уравнений (6), (8) имеем матрицу $(N-1)$ -го порядка. У этой матрицы от нуля отличны только коэффициенты, стоящие на 3-х диагоналях — главной и двух соседних.

Для систем линейных уравнений с матрицами такого типа есть эффективный метод решения — метод исключения Гаусса, который приводит к формулам прогонки, излагаемым ниже.

5. Метод прогонки. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1, \quad y_N = \alpha_N y_{N-1} + \beta_N, \end{aligned} \quad (9)$$

причем $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Надо указать простой способ решения этой системы. Идея заключается в сведении разностного уравнения второго порядка к трем разностным уравнениям первого порядка, вообще говоря, нелинейным. Предположим, что имеет место рекуррентное соотношение

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i \quad (10)$$

с неопределенными коэффициентами α_i и β_i . Выражение $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ подставим в (9)

$$(A_i \alpha_i - C_i) y_i + A_i \beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i.$$

Воспользуемся соотношением (10):

$$[(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} = -F_i.$$

Это уравнение выполнено для любых y_i , если

$$(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i = 0, \quad A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} + F_i = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу для α_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

(предполагаем, что знаменатель в (11) отличен от нуля; условия, при которых это выполнено, выясним ниже) и рекуррентную формулу для вычисления β_{i+1} :

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Мы исходили из соотношения (10).

Если коэффициенты α_i и β_i известны и известно значение y_N , то, двигаясь справа налево (от $i+1$ к i), мы определим последовательно все y_i . Уравнения для α_i , β_i — нелинейные, они связывают значения этих функций в двух соседних точках. Для α_i , β_i задача решается слева направо, для y_i — в противоположном направлении. Для каждой из функций α , β , y надо решать задачу Коши. Чтобы найти начальные значения для этих функций, используем граничные условия. Так как формула (10) справедлива при $i = 0, 1, \dots, N-1$, то при $i = 0$ имеем

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1,$$

с другой стороны,

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1.$$

Поэтому

$$\alpha_1 = \kappa_1, \quad (13)$$

$$\beta_1 = \mu_1. \quad (14)$$

Таким образом, для функций α_i и β_i получим задачи Коши: для α —(11), (13), для β —(12), (14) (формулы прямой прогонки).

После того, как функции α_i и β_i найдены для всех $i = 1, 2, \dots, N$, необходимо найти граничное значение y_N . Оно определяется из решения системы уравнений

$$y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N,$$

откуда, если $1 - \alpha_N \kappa_2 \neq 0$ (см. п. 6),

$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \kappa_2}. \quad (15)$$

Таким образом, для определения y_i получаем задачу Коши (10), (15) (формулы обратной прогонки).

Изложенный здесь метод называется *методом прогонки (правой прогонки)*.

Соберем все формулы правой прогонки и запишем их в порядке использования:

$$\overset{(\rightarrow)}{\alpha_{i+1}} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = \kappa_1,$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\beta_{i+1}} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_1 = \mu_1,$$

$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \kappa_2},$$

$$\overset{(\leftarrow)}{y_i} = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Стрелки наверху указывают направление счета: (\rightarrow) —от i к $i+1$, (\leftarrow) —от $i+1$ к i .

6. Устойчивость метода прогонки. В предыдущем пункте формулы прогонки были выведены формально. Мы делили на выражения $C_i - \alpha_i A_i$ и $1 - \alpha_N \kappa_2$, не зная, когда это можно делать. Укажем достаточные условия, при которых формулы (10) и (15) имеют смысл:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\kappa_\alpha| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\kappa_1| + |\kappa_2| < 2. \quad (16)$$

Покажем, что при этих условиях

$$|\alpha_i| \leq 1 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, N.$$

Предположим, что $|\alpha_i| \leq 1$, и покажем, что $|\alpha_{i+1}| \leq 1$; так как $|\alpha_1| = |\kappa_1| \leq 1$, то отсюда и будет следовать, что $|\alpha_i| \leq 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим разность $|C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| \cdot |A_i| - |B_i| \geq |A_i| \cdot (1 - |\alpha_i|) \geq 0$. Поскольку $B_i \neq 0$, то $|C_i - \alpha_i A_i| > 0$, т. е.

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1.$$

Отсюда видно, что $|\alpha_{i+1}| < 1$, если $|\alpha_i| < 1$; все $|\alpha_i| < 1$ при $|\alpha_1| = |\kappa_1| < 1$. Оценим снизу знаменатель в формуле (15):

$$|1 - \alpha_N \kappa_2| \geq 1 - |\alpha_N| \cdot |\kappa_2| \geq 1 - |\kappa_2| > 0,$$

так как $|\kappa_2| < 1$ или $|\alpha_N| < 1$, т. е. $|1 - \alpha_N \kappa_2| > 0$.

Таким образом, знаменатели в формулах (11), (12) и (15) отличны от нуля при условиях (16). Заметим, что если $|C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|$ хотя бы в одной точке $i = i_0$, то $|\alpha_i| < 1$ для всех $i > i_0$ и в том числе для $i = N$: $|\alpha_N| < 1$. В этом случае условие $|\kappa_1| + |\kappa_2| < 2$ является лишним, так как $|1 - \alpha_N \kappa_2| \geq 1 - |\alpha_N| \cdot |\kappa_2| > 0$ при $\kappa_2 = 1$ и $\kappa_1 = 1$.

Таким образом, при выполнении условий (16) задача (9) имеет единственное решение, определяемое по формулам (10) — (15).

Вычисления по этим формулам ведутся на ЭВМ приближенно, с конечным числом значащих цифр. В результате ошибок округления фактически находится не функция y_i — решение задачи (9), а \tilde{y}_i — решение той же задачи с возмущенными коэффициентами \tilde{A}_i , \tilde{B}_i , \tilde{C}_i , $\tilde{\kappa}_1$, $\tilde{\kappa}_2$ и правыми частями \tilde{F}_i , $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$. Возникает естественный вопрос: не происходит ли в ходе вычислений возрастание ошибки округления, что может привести как к потере точности, так и к невозможности продолжать вычисления из-за роста получаемых величин.

Примером может служить определение y_i по формуле $y_{i+1} = qy_i$ при $q > 1$. Отсюда видно, что $y_n = q^n y_0$, и для любого y_0 можно указать такое n_0 , при котором y_{n_0} будет машинной бесконечностью, т. е. при определении y_{n_0} произойдет авост (аварийный останов) ЭВМ. В этом случае, в силу ошибок округления, определяется не y_i , а \tilde{y}_i из уравнения

$$\tilde{y}_{i+1} = q\tilde{y}_i + \eta,$$

где η — ошибка округления. Отсюда следует, что для погрешности $\delta y_i = \tilde{y}_i - y_i$ имеем уравнение

$$\delta y_{i+1} = q\delta y_i + \eta, \quad \delta y_0 = \eta.$$

Из формулы

$$\delta y_i = q^i \eta + \frac{q^i - 1}{q - 1} \eta$$

видно, что ошибка δy_i при $q > 1$ экспоненциально нарастает с ростом i .

Вернемся к методу прогонки и покажем, что, в силу условия $|\alpha_i| \leq 1$, ошибка $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ в определении y_{i+1} не нарастает при определении y_i . В самом деле, из уравнений

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1}$$

следует

$$\delta y_i = \alpha_{i+1} \delta y_{i+1}, \quad |\delta y_i| \leq |\alpha_{i+1}| \cdot |\delta y_{i+1}|,$$

т. е.

$$|\delta y_i| \leq |\delta y_{i+1}|, \quad \text{так как } |\alpha_{i+1}| \leq 1.$$

Если учесть, что в ходе вычислений возмущаются и коэффициенты α_{i+1} , β_{i+1} , то можно показать, что ошибка в определении решения y_i нашей задачи (9) пропорциональна квадрату числа узлов

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2,$$

где ε_0 — ошибка округления. Отсюда видно, что существует связь между точностью ε определения решения задачи, числом N уравнений и числом значащих цифр ЭВМ, так как

$$\varepsilon_0 N^2 \approx \varepsilon.$$

(Здесь и выше \approx означает приближенное равенство по порядку величин с точностью до множителя $M_0 = \text{const}$, не зависящего от ε .)

7. Метод левой прогонки и метод встречных прогонок. Аналогично формулам (10)–(15) получаются формулы левой прогонки

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (17)$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 2, 1. \quad (18)$$

$$\xi_N = \kappa_2;$$

$$\eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 2, 1, \quad (19)$$

$$\eta_N = \mu_2;$$

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \eta_1}{1 - \xi_1 \kappa_1}. \quad (20)$$

В самом деле, предполагая, что имеет место соотношение $y_{i+1} = -\xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}$, исключим из (9) последовательно y_{i+1} , $y_i = \xi_i y_{i-1} + \eta_i$:
 $-F_i = A_i y_{i-1} + (B_i \xi_{i+1} - C_i) y_i + B_i \eta_{i+1} =$
 $= [A_i - (C_i - B_i \xi_{i+1}) \xi_i] y_{i-1} + B_i \eta_{i+1} - (C_i - B_i \xi_{i+1}) \eta_i.$

Уравнение (9) удовлетворяется при

$$\begin{aligned} A_i - (C_i - B_i \xi_{i+1}) \xi_i &= 0, \\ -F_i &= B_i \eta_{i+1} - (C_i - B_i \xi_{i+1}) \eta_i. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы (18) и (19). Значение y_0 находим из условия $y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1$ и формулы $y_0 = \xi_1 y_1 + \eta_1$. Из неравенств

$$\begin{aligned} |C_i - B_i \xi_{i+1}| &\geq |C_i| + |B_i| \cdot |\xi_{i+1}|, \\ |1 - \xi_1 \kappa_1| &\geq 1 - |\xi_1| \cdot |\kappa_1| \end{aligned}$$

видно, что условия (16) гарантируют применимость формул левой прогонки и их вычислительную устойчивость, так как

$$|\xi_i| \leq 1 \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, N.$$

Комбинируя левую и правую прогонки, получаем метод встречных прогонок. Пусть $i = i_0$, $0 < i_0 < N$, — некоторый внутренний узел. Тогда в области $0 \leq i \leq i_0 + 1$ вычисляются по формулам (10)–(15) прогоночные коэффициенты α_i , β_i :

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0, \quad \alpha_1 = \kappa_1, \\ \beta_{i+1} &= \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0, \quad \beta_1 = \mu_1, \end{aligned}$$

а в области $i_0 \leq i \leq N$ по формулам (17)–(20) находятся ξ_i и η_i :

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{A_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, i_0, \quad \xi_N = \kappa_2, \\ \eta_i &= \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, i_0, \quad \eta_N = \mu_2. \end{aligned}$$

При $i = i_0$ сшиваем решения в форме (10) и (17). Из формул

$$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}, \quad y_{i_0+1} = \xi_{i_0+1} y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$$

находим

$$y_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1} \eta_{i_0+1}}{1 - \alpha_{i_0+1} \eta_{i_0+1}}.$$

Эта формула имеет смысл, так как $1 - \alpha_{i_0+1} \eta_{i_0+1} > 0$, поскольку хотя бы одна из величин $|\alpha_{i_0+1}|$ или $|\eta_{i_0+1}|$ меньше единицы в силу условий (16).

Зная y_{i_0} , можно по формуле (10) найти все y_i при $i \leq i_0$, а по формуле (17) — значения y_i при $i > i_0$.

Метод встречных прогонок может оказаться полезным, если, например, требуется найти y_i лишь в одном узле $i = i_0$.

8. **Принцип максимума.** Для оценки решения краевой задачи (9) через заданные правые части F_i , μ_1 и μ_2 (через «входные данные»), можно воспользоваться так называемым *принципом*

максимума. Он имеет место для уравнений более частного вида, когда $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i > 0$.

Для упрощения изложения сначала рассмотрим первую краевую задачу (при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_i] &= A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Теорема 1 (принцип максимума). Пусть выполнены условия

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0 \quad (22)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$. Тогда из условий

$$\mathcal{L}[y_i] \geq 0 \quad (\mathcal{L}[y_i] \leq 0)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$ (во внутренних узлах), где y_i — функция, отличная от постоянной, следует, что y_i не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах, т. е. при $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Доказательство. Пусть дано $\mathcal{L}[y_i] \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Предположим, что в некотором внутреннем узле $i = i_*$, $0 < i_* < N$, функция y_i достигает наибольшего положительного значения

$$y_{i_*} = \max_{0 \leq i \leq N} y_i = M_0 > 0.$$

Так как $y_i \not\equiv \text{const}$, то найдется такая точка i_0 (i_0 может совпадать с i_*), в которой $y_{i_0} = y_{i_*} = M_0 > 0$, а в одной из соседних точек, например в точке $i = i_0 - 1$, выполняется строгое неравенство $y_{i_0-1} < M_0$. Запишем теперь выражение $\mathcal{L}[y_i]$ в виде

$$\mathcal{L}[y_i] = B_i (y_{i+1} - y_i) - A_i (y_i - y_{i-1}) - (C_i - A_i - B_i) y_i.$$

В точке $i = i_0$ в силу условий (22) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_{i_0}] &= B_{i_0} (y_{i_0+1} - y_{i_0}) - A_{i_0} (y_{i_0} - y_{i_0-1}) - (C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0}) y_{i_0} \leq \\ &\leq -B_{i_0} (y_{i_0} - y_{i_0+1}) - A_{i_0} (y_{i_0} - y_{i_0-1}) < 0, \end{aligned}$$

так как

$$y_{i_0} \geq y_{i_0+1} \quad \text{и} \quad y_{i_0} > y_{i_0-1}, \quad A_{i_0} > 0, \quad B_{i_0} > 0.$$

Это противоречит условию теоремы: $\mathcal{L}[y_i] \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$ и в том числе для $i = i_0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично (достаточно заменить y_i на $-y_i$ и воспользоваться доказанным выше утверждением).

Следствие 1. *Если выполнены условия (22) и*

$$\mathcal{L}[y_i] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 \geq 0, \quad y_N \geq 0,$$

то функция y_i неотрицательна, $y_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Если же $\mathcal{L}[y_i] \geq 0$, $y_0 \leq 0$, $y_N \leq 0$, то $y_i \leq 0$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$.

В самом деле, пусть $\mathcal{L}[y_i] \leq 0$ и $y_i < 0$ хотя бы в одной точке $i = i_*$, $0 < i_* < N$; тогда y_i должна достигать наименьшего отрицательного значения во внутренней точке $i = i_0$, $0 < i_0 < N$, что в силу теоремы 1 невозможно.

Следствие 2. *Если выполнены условия (22), то единственным решением задачи*

$$\mathcal{L}[y_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0 \quad (23)$$

является $y_i = 0$, и, таким образом, задача (21) однозначно разрешима при любых F_i , μ_1 , μ_2 .

В самом деле, предполагая, что решение задачи (23) $y_i \neq 0$ хотя бы в одной точке $i = i_*$, мы сразу приедем к противоречию с принципом максимума: если $y_{i_*} > 0$, то y_i достигает наибольшего положительного значения в некоторой точке i_0 , $0 < i_0 < N$, что невозможно в силу теоремы 1; случай $y_{i_*} < 0$ также невозможен.

Теорема 2 (теорема сравнения). *Пусть выполнены условия (22) и y_i есть решение задачи (21), а \bar{y}_i — решение задачи*

$$\mathcal{L}[\bar{y}_i] = -\bar{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \bar{y}_0 = \bar{\mu}_1, \quad \bar{y}_N = \bar{\mu}_2,$$

причем

$$|F_i| \leq \bar{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad |\mu_1| \leq \bar{\mu}_1, \quad |\mu_2| < \bar{\mu}_2.$$

Тогда справедлива оценка

$$|y_i| \leq \bar{y}_i.$$

Доказательство. В силу следствия 1 имеем $\bar{y}_i \geq 0$, $0 \leq i \leq N$, так как $\mathcal{L}[\bar{y}_i] = -\bar{F}_i \leq 0$, $\bar{y}_0 \geq 0$, $\bar{y}_N \geq 0$. Функции $u_i = y_i - \bar{y}_i$ и $v_i = \bar{y}_i + y_i$ удовлетворяют уравнению (21) с правыми частями $\bar{F}_i - F_i \geq 0$ и $\bar{F}_i + F_i \geq 0$ и граничными значениями $u_0 = \bar{\mu}_1 - \mu_1 \geq 0$, $u_N = \bar{\mu}_2 - \mu_2 \geq 0$ и $v_0 = \bar{\mu}_1 + \mu_1 \geq 0$, $v_N = \bar{\mu}_2 + \mu_2 \geq 0$ соответственно. Применяя теперь следствие 1, получаем

$$u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad \text{или} \quad -\bar{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad \text{т. е.} \quad |y_i| \leq \bar{y}_i.$$

Функцию \bar{y}_i будем называть *мажорантой* для решения задачи (21).

Если удастся построить мажоранту \bar{y}_i , то тем самым удастся получить оценку для решения задачи (21)

$$\|y\|_c \leq \|\bar{y}\|_c.$$

Следствие 3. Для решения задачи

$$\mathcal{L}[y_i] = 0, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

справедлива оценка

$$\|y\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_2|).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу $\mathcal{L}[\bar{y}_i] = 0, \quad 0 < i < N$, $\bar{y}_0 = \bar{y}_N = \bar{\mu}$, где $\bar{\mu} = \max(|\mu_1|, |\mu_2|)$. В силу теоремы сравнения $\|y\|_c \leq \|\bar{y}\|_c$, а из теоремы 1 следует, что $\|\bar{y}\|_c \leq \bar{\mu}$, так как $\bar{y}_i \geq 0$ может достигать наибольшего положительного значения только на границе при $i = 0$ или $i = N$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$|A_i| > 0, \quad |B_i| > 0, \quad \bar{D}_i = |C_i| - |A_i| - |B_i| > 0, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогда для решения задачи

$$\mathcal{L}[y_i] = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0 \quad (25)$$

справедлива оценка

$$\|y\|_c \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_c. \quad (26)$$

Для доказательства теоремы запишем уравнение (21) в виде

$$C_i y_i = A_i y_{i-1} + B_i y_{i+1} + F_i. \quad (27)$$

Пусть $|y_i|$ достигает наибольшего значения $|y_{i_0}| > 0$ при $i = i_0$, $0 < i_0 < N$, так что $|y_{i_0}| \geq |y_i|$ при любом $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Тогда из уравнения (27) при $i = i_0$ следует

$$|C_{i_0} y_{i_0}| = |C_{i_0}| |y_{i_0}| = |A_{i_0} y_{i_0-1} + B_{i_0} y_{i_0+1} + F_{i_0}| \leq |A_{i_0}| |y_{i_0-1}| + |B_{i_0}| |y_{i_0+1}| + |F_{i_0}| \leq (|A_{i_0}| + |B_{i_0}|) |y_{i_0}| + |F_{i_0}|.$$

Отсюда находим

$$(|C_{i_0}| - |A_{i_0}| - |B_{i_0}|) |y_{i_0}| = \bar{D}_{i_0} |y_{i_0}| \leq |F_{i_0}|$$

и, следовательно,

$$|y_{i_0}| = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i| \leq \frac{|F_{i_0}|}{\bar{D}_{i_0}} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_c,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу (25) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (22):

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0 \quad \text{при } 0 < i < N.$$

Если условие $D_i > 0$ не выполнено, то для оценки решения y_i этой задачи можно представить его в виде суммы $y_i = \overset{\circ}{y}_i + u_i$, где $\overset{\circ}{y}_i$ удовлетворяет уравнению

$$B_i(\overset{\circ}{y}_{i+1} - \overset{\circ}{y}_i) - A_i(\overset{\circ}{y}_i - \overset{\circ}{y}_{i-1}) = -F_i, \quad 0 < i < N, \quad \overset{\circ}{y}_0 = \overset{\circ}{y}_N = 0. \quad (28)$$

Тогда для u_i получаем задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_i] &= B_i u_{i+1} - C_i u_i + A_i u_{i-1} = -D_i \overset{\circ}{y}_i, \\ u_0 &= u_N = 0, \quad 0 < i < N, \end{aligned} \quad (29)$$

решение которой удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_C = \max_{0 < i < N} |u_i| \leq \|\overset{\circ}{y}\|_C. \quad (30)$$

Это следует из леммы:

Лемма. Для решения задачи (25) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (22), и правой частью $F_i = D_i \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \|\varphi\|_C. \quad (31)$$

Доказательство. Если $D_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, N-1$, то в силу следствия 2 из теоремы 1 $y_i \equiv 0$, и оценка (31) очевидна.

Предположим теперь, что $D_i > 0$ хотя бы в одной точке. Построим функцию $Y_i \geq 0$, являющуюся решением задачи

$$\mathcal{L}[Y_i] = -D_i |\varphi_i|, \quad Y_0 = Y_N = 0. \quad (32)$$

Согласно теореме (2) $\|y\|_C \leq \|Y\|_C$, так что нам остается оценить решение задачи (32).

Пусть в точке $i = i_0$ достигается максимум функции Y_i . Тогда

$$B_{i_0}(Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) \leq 0, \quad A_{i_0}(Y_{i_0} - Y_{i_0-1}) \geq 0,$$

и из (32) получаем

$$D_{i_0} Y_{i_0} \leq D_{i_0} |\varphi_{i_0}| \leq D_{i_0} \|\varphi\|_C.$$

Если $D_{i_0} > 0$, то отсюда следует искомая оценка

$$\|Y\|_C \leq \|\varphi\|_C. \quad (33)$$

Если же $D_{i_0} = 0$, то из (32) получим

$$B_{i_0}(Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) = A_{i_0}(Y_{i_0} - Y_{i_0-1}).$$

Так как $Y_{i_0} \geq Y_{i_0-1}$ и $Y_{i_0} \geq Y_{i_0+1}$, то отсюда следует равенство $Y_{i_0+1} = Y_{i_0} = Y_{i_0-1}$,

т. е. то же самое максимальное значение достигается и в соседних с i_0 точках.

Взяв $i = i_1 = i_0 + 1$ (или $i_1 = i_0 - 1$), повторяем прелыдущее рассуждение и получаем неравенство

$$D_{i_1} Y_{i_1} \leq D_{i_1} \|\varphi\|_C,$$

откуда снова следует либо неравенство (33), либо равенство $Y_{i_1+1} = Y_{i_1-1} = Y_{i_1}$. Так как $D_{i_1} \neq 0$, то при некотором $i = i_\alpha$ получим $D_{i_\alpha} > 0$ и неравенство (33).

Теорема 4. Для решения y_i задачи (25) с коэффициентами (22) справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq 2 \|\dot{y}\|_C, \quad (34)$$

где \dot{y} — решение задачи (28).

Доказательство. Разность $u_i = y_i - \dot{y}_i$, как показано выше, является решением задачи (29) с правой частью $F_i = D_i y_i$. Пользуясь оценкой (30), которая следует из леммы при $\varphi_i = y_i$, и учитывая неравенство

$$\|y\|_C = \|\dot{y} + u\|_C \leq \|\dot{y}\|_C + \|u\|_C,$$

получаем оценку (34).

Эта теорема позволяет свести оценку решения общей задачи (25) к оценке решения \dot{y}_i более простого уравнения (28); функция \dot{y}_i может быть найдена в явном виде.

9. Принцип максимума для краевой задачи третьего рода. Принцип максимума и все его следствия справедливы для общей краевой задачи (6), (8'), которую можно формально записать в виде

$$\mathcal{L}[y_i] = -F_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (21')$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_0] &= -y_0 + \kappa_1 y_1, & F_0 &= \mu_1, \\ \mathcal{L}[y_N] &= -y_N + \kappa_2 y_{N-1}, & F_N &= \mu_2, \end{aligned}$$

так что $C_0 = 1$, $A_0 = 0$, $B_0 = \kappa_1$, $C_N = 1$, $A_N = \kappa_2$, $B_N = 0$.

Теорема 1 (принцип максимума) формулируется так: *Пусть выполнены условия*

$$\begin{aligned} A_i &> 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0 \leq \kappa_1 \leq 1, \quad 0 \leq \kappa_2 \leq 1, \quad 0 < \kappa_1 + \kappa_2 < 2. \end{aligned} \quad (22')$$

Тогда из условий

$$\mathcal{L}[y_i] \geq 0 \quad (\mathcal{L}[y_i] \leq 0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где $y_i \neq \text{const}$, следует, что y_i не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения ни в одном узле $i = 0, 1, 2, \dots, N$, т. е.

$$y_i \leq 0 \quad (y_i \geq 0).$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 п. 8; следует лишь дополнительно рассмотреть два случая:

а) $i_0 = 0$, т. е. $\max_i y_i = y_0 = M_0 > 0$ и $y_1 < M_0$, тогда

$$\mathcal{L}[y_0] = -y_0 + \kappa_1 y_1 = -(1 - \kappa_1) y_0 - \kappa_1 (y_0 - y_1) < 0 \text{ при } 0 \leq \kappa_1 \leq 1,$$

б) $i_0 = N$, т. е. $\max_i y_i = y_N = M_0 > 0$, а $y_{N-1} < M_0$, тогда

$$\mathcal{L}[y_N] = -y_N + \kappa_2 y_{N-1} = -(1 - \kappa_2) y_N - \kappa_2 (y_N - y_{N-1}) < 0,$$

если $0 \leq \kappa_2 \leq 1$.

В обоих случаях мы приходим к противоречию с условием $\mathcal{L}[y_i] \geq 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Отсюда следует, что $y_i \leq 0$, так как если бы $y_i > 0$ хотя бы в одной точке $i = i_*$, то функция y_i имела бы в какой-либо точке $i = i_0$ (например, $i_0 = i_*$) наибольшее положительное значение, что невозможно.

Следствие 2 а. Если выполнены условия (22'), то задача $\mathcal{L}[y_i] = 0$, $i = 0, 1, \dots, N$, имеет только тривиальное решение.

Не представляет труда переформулировать остальные утверждения предыдущего пункта; на этом мы не будем останавливаться.

10. Оценка решения разностной краевой задачи при помощи формул прогонки. Разностное уравнение (21) имеет трехдиагональную матрицу $(N-1)$ -го порядка в случае первой краевой задачи

$$\begin{bmatrix} -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица симметрична при

$$B_i = A_{i+1}. \quad (35)$$

Разностные уравнения с симметричной матрицей встречаются при численном решении краевых задач для самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка.

Ниже (см. п. 15) будет показано, что равенство $B_i = A_{i+1}$ необходимо и достаточно для самосопряженности оператора $\mathcal{L}[y_i]$.

Заметим, что любое разностное уравнение

$$\begin{aligned} B_i y_{i+1} - C_i y_i + A_i y_{i-1} &= -F_i, \\ A_i \neq 0, B_i \neq 0, y_0 &= \mu_1, y_N = \mu_2, \end{aligned} \quad (36)$$

можно привести к самосопряженному виду

$$\begin{aligned} \Lambda y_i = a_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1}) - d_i y_i &= -\varphi_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

В самом деле, умножим уравнение (36) на функцию $\eta_i \neq 0$ и потребуем, чтобы $A_i \eta_i = a_i$, $B_i \eta_i = a_{i+1}$. Отсюда следует, что $A_{i+1} \eta_{i+1} = B_i \eta_i = a_{i+1}$, т. е.

$$\eta_{i+1} = \frac{B_i}{A_{i+1}} \eta_i = \eta_1 \prod_{k=1}^i \frac{B_k}{A_{k+1}},$$

где η_1 — произвольная постоянная. В результате получим уравнение $\Lambda y_i = -\varphi_i$ с правой частью $\varphi_i = \eta_i F_i$ и $a_i = A_i \eta_i$,

$$d_i = (C_i - A_i - B_i) \eta_i = C_i \eta_i - a_i - a_{i+1}.$$

Пользуясь формулами прогонки, можно получить оценку $\|y\|_C$ для задачи

$$\begin{aligned} \Lambda y_i = a_i y_{i-1} - c_i y_i + a_{i+1} y_{i+1} &= -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \quad y_N &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{|a_{i+1}|} \sum_{k=1}^i |\varphi_k|, \quad (38)$$

если выполнены условия

$$|a_i| > 0, \quad |c_i| \geq |a_i| + |a_{i+1}|. \quad (39)$$

Чтобы получить (38), рассмотрим формулы правой прогонки

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad y_N = 0, \\ \alpha_{i+1} &= \frac{a_{i+1}}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = 0, \\ \beta_{i+1} &= \frac{a_i \beta_i + \varphi_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_1 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Так как $|\alpha_{i+1}| \leq 1$ при условиях (39), то из (40) следует

$$|y_i| \leq |\alpha_{i+1}| |y_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq |y_{i+1}| + |\beta_{i+1}|,$$

откуда для $i < N$ получаем

$$|y_i| \leq \sum_{k=i+1}^N |\beta_k|, \quad y_N = 0, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (41)$$

Вводя обозначение $\gamma_i = a_i \beta_i$, находим

$$\gamma_{i+1} = \alpha_{i+1} (\gamma_i + \varphi_i),$$

$$|\gamma_{i+1}| \leq |\gamma_i| + |\varphi_i| \leq |\gamma_1| + \sum_{k=1}^i |\varphi_k| = \sum_{k=1}^i |\varphi_k|$$

и, следовательно,

$$|\beta_i| \leq \frac{1}{|a_i|} \sum_{k=1}^{i-1} |\varphi_k|, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \beta_1 = 0.$$

Отсюда и из (41) получаем (38).

Так как для решения задачи

$$\Lambda \tilde{y}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \tilde{y}_0 = \mu_1, \quad \tilde{y}_N = \mu_2,$$

при $a_i > 0$, $c_i \geq a_i + a_{i+1}$ верна оценка (см. следствие 3 в п. 8)

$$\|\tilde{y}\|_C \leq \max(|\mu_1|, |\mu_2|), \quad (42)$$

то для решения задачи

$$\Lambda y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (43)$$

выполняется неравенство

$$\|y\|_C \leq \max(|\mu_1|, |\mu_2|) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{|a_{i+1}|} \sum_{k=1}^i |\varphi_k|.$$

В самом деле, представим решение задачи (43) в виде суммы $y_i = \tilde{y}_i + v_i$, где v_i — решение задачи (37). Учитывая затем (38), (42) и неравенство $|y_i| \leq |\tilde{y}_i| + |v_i|$, получаем искомую оценку.

11. Разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. В случае, когда коэффициенты разностного уравнения

$$\mathcal{L}[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = 0 \quad (44)$$

не зависят от i , так что $A_i = a$, $C_i = c$, $B_i = b$ для всех $i = 1, 2, \dots$, то решение уравнения

$$by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq 0 \quad (45)$$

может быть найдено в явном виде.

Пусть $y_i^{(1)}$ и $y_i^{(2)}$ — два решения разностного уравнения (44). Они линейно независимы, если равенство

$$C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

возможно только при $C_1 = C_2 = 0$. Это эквивалентно требованию, чтобы определитель системы

$$\begin{aligned} C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} &= 0, \\ C_1 y_{i+m}^{(1)} + C_2 y_{i+m}^{(2)} &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

был отличен от нуля:

$$\Delta_{i, i+m} = \begin{vmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ y_{i+m}^{(1)} & y_{i+m}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

для всех i, m . В частности, условие

$$\Delta_{i, i+1} = \begin{vmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ y_{i+1}^{(1)} & y_{i+1}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ \Delta y_i^{(1)} & \Delta y_i^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

аналогично условию

$$\begin{vmatrix} \bar{u}(x) & \bar{\bar{u}}(x) \\ \bar{u}'(x) & \bar{\bar{u}}'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

линейной независимости решений $\bar{u}(x)$ и $\bar{\bar{u}}(x)$ дифференциального уравнения второго порядка.

Исключая с помощью уравнения (44) $y_{i+1}^{(1)}$, $y_{i+1}^{(2)}$, находим

$$\Delta_{i, i+1} = \frac{1}{B_i} (B_i y_{i+1}^{(2)} y_i^{(1)} - B_i y_{i+1}^{(1)} y_i^{(2)}) = -\frac{A_i}{B_i} (y_i^{(1)} y_{i-1}^{(2)} - y_{i-1}^{(1)} y_i^{(2)}),$$

т. е.

$$\Delta_{i, i+1} = -\frac{A_i}{B_i} \Delta_{i, i-1}.$$

Отсюда видно, что из условия $\Delta_{i, i+1} \neq 0$ для какого-либо $i = i_1$ следует, что $\Delta_{i, i+1} \neq 0$ для всех допустимых i .

Пользуясь уравнением $\mathcal{L}[y_i] = 0$, можно показать, что $\Delta_{i, i+m}$ при любом $m > 1$ выражается через $\Delta_{i, i+1}$ и, следовательно, из условия $\Delta_{i, i+1} \neq 0$ следует $\Delta_{i, i+m} \neq 0$.

Если $y_i^{(1)}$ и $y_i^{(2)}$ — линейно независимые решения уравнения (44), то общее решение этого уравнения, очевидно, имеет вид

$$y_i = C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Они могут быть найдены из начальных или краевых условий, так как $\Delta_{i, i+m} \neq 0$ для любых i и m .

Общее решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}[y_i] = -F_i$ можно представить в виде

$$y_i = C_1 y_i^{(1)} + C_2 y_i^{(2)} + \tilde{y}_i,$$

где \tilde{y}_i — частное решение уравнения $\mathcal{L}[\tilde{y}] = -F_i$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 можно определить, например, из условий при $i=0$, $i=1$:

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)}, \\ y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)}, \end{aligned}$$

если y_0 и y_1 известны (задача Коши). Это возможно, так как $y_i^{(1)}$ и $y_i^{(2)}$ — линейно независимы и $\Delta_{0,1} \neq 0$. В случае краевой задачи $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$ постоянные C_1 и C_2 определяются однозначно, так как $\Delta_{0,N} \neq 0$.

Если коэффициенты уравнения (44) постоянны ($A_i = a$, $C_i = c$, $B_i = b$), то частные решения можно найти в явном виде. Будем искать частное решение уравнения (45) в виде $y_k = q^k$, где $q \neq 0$ — неизвестное пока число. После подстановки этого выражения в (45) получим для q квадратное уравнение

$$bq^2 - cq + a = 0. \quad (46)$$

Оно имеет два корня

$$q_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}.$$

В зависимости от величины дискриминанта $D = c^2 - 4ab$ возможны три случая:

1) $D = c^2 - 4ab > 0$. Квадратное уравнение имеет различные и действительные корни

$$q_1 = \frac{c + \sqrt{D}}{2b}, \quad q_2 = \frac{c - \sqrt{D}}{2b},$$

которым соответствуют различные частные решения

$$y_k^{(1)} = q_1^k, \quad y_k^{(2)} = q_2^k.$$

Так как определитель $\Delta_{k,k+1}$:

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_1^{k+1} & q_2^{k+1} \end{vmatrix} = (q_2 - q_1) q_1^k q_2^k \neq 0,$$

то $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ — линейно независимы. Общее решение уравнения (45) имеет вид

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2) $D = c^2 - 4ab = 0$. В этом случае $q_1 = q_2 = c/(2b) = q_0$ — корни совпадают, а в качестве линейно независимых частных решений можно взять

$$y_k^{(1)} = q_0^k, \quad y_k^{(2)} = kq_0^k.$$

Покажем, что $y_k^{(2)} = kq_0^k$ в самом деле является решением уравнения (45)

$$\begin{aligned} by_{k+1}^{(2)} - cy_k^{(2)} + ay_{k-1}^{(2)} &= [b(k+1)q_0^2 - ckq_0 + a(k-1)]q_0^{k-1} = \\ &= q_0^{k-1}k(bq_0^2 - cq_0 + a) + q_0^{k-1}(bq_0^2 - a) = q_0^{k-1}(bq_0^2 - a) = 0, \end{aligned}$$

так как $bq_0^2 - a = b(c/(2b))^2 - a = D/4b = 0$. Вычисляя определитель

$$\Delta_{k,k+1} = \begin{vmatrix} q_0^k & kq_0^k \\ q_0^{k+1} & (k+1)q_0^{k+1} \end{vmatrix} = q_0^{2k+1} \neq 0,$$

убеждаемся в линейной независимости q_0^k и kq_0^k . Поэтому общее решение уравнения (32) в этом случае имеет вид

$$y_k = (C_1 + kC_2)q_0^k, \quad q_0 = c/(2b).$$

3) $D = c^2 - 4ab < 0$. Квадратное уравнение (46) имеет комплексно сопряженные корни

$$q_1 = \frac{c + \sqrt{|D|}i}{2b} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

$$q_2 = \frac{c - \sqrt{|D|}i}{2b} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi},$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|D|}}{c}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Частными решениями являются функции

$$q_1^k = \rho^k e^{ik\varphi} = \rho^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)),$$

$$q_2^k = \rho^k e^{-ik\varphi} = \rho^k (\cos(k\varphi) - i \sin(k\varphi))$$

или функции

$$y_k^{(1)} = \rho^k \cos(k\varphi), \quad y_k^{(2)} = \rho^k \sin(k\varphi).$$

Они линейно независимы, так как $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$ линейно независимы ($\Delta_{k,k+1} \neq 0$).

Общее решение имеет вид

$$y_k = (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)) \rho^k.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+1} - 2py_k + y_{k-1} = 0.$$

Надо рассмотреть случаи:

a) $p < 1$. Тогда можно положить

$$p = \cos \alpha, \quad \alpha \neq 0,$$

так что

$$y_{k+1} - 2 \cos \alpha y_k + y_{k-1} = 0.$$

Полагая $y_k = q^k$, получим квадратное уравнение

$$q^2 - 2 \cos \alpha q + 1 = 0.$$

Его дискриминант

$$D = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha < 0,$$

а корни равны

$$q_{1,2} = e^{\pm i\alpha}, \quad q_{1,2}^k = e^{\pm ik\alpha}.$$

Частные решения

$$y_k^{(1)} = \cos(k\alpha), \quad y_k^{(2)} = \sin(k\alpha).$$

б) $p > 1$, так что $p = \operatorname{ch} \alpha$.

Полагая $y_k = q^k$, получим для q квадратное уравнение

$$q^2 - 2 \operatorname{ch} \alpha \cdot q + 1 = 0, \quad D = \operatorname{ch}^2 \alpha - 1 > 0.$$

Корни

$$q_{1,2} = \operatorname{ch} \alpha \pm \operatorname{sh} \alpha = e^{\pm \alpha} \quad \text{и} \quad q_{1,2}^k = e^{\pm k\alpha}.$$

Частными решениями являются функции

$$y_k^{(1)} = \operatorname{ch}(k\alpha), \quad y_k^{(2)} = \operatorname{sh}(k\alpha).$$

в) $p = 1$. В этом случае $q^2 - 2q + 1 = 0$, $q_{1,2} = 1$, и частные решения

$$y_k^{(1)} = 1, \quad y_k^{(2)} = k,$$

так что общее решение есть линейная функция

$$y_k = C_1 + C_2 k.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I_k(\varphi) = \int_0^\pi \frac{\cos(k\psi) - \cos(k\varphi)}{\cos \psi - \cos \varphi} d\psi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим прежде всего, что

$$I_0(\varphi) = 0, \quad I_1(\varphi) = \int_0^\pi d\psi = \pi.$$

Покажем, что I_k есть решение задачи Коши для разностного уравнения второго порядка

$$I_{k+1} - 2 \cos \varphi I_k + I_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ I_0 = 0, \quad I_1 = \pi$$

при произвольном фиксированном φ .

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} [\cos((k+1)\psi) - \cos((k+1)\varphi)] + [\cos((k-1)\psi) - \cos((k-1)\varphi)] &= \\ = 2 \cos(k\psi) \cos \psi - 2 \cos(k\varphi) \cos \varphi &= \\ = 2(\cos(k\psi) - \cos(k\varphi)) \cos \varphi + 2(\cos \psi - \cos \varphi) \cos(k\psi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} I_{k+1} + I_{k-1} &= 2 \cos \varphi I_k + 2 \int_0^\pi \frac{(\cos \psi - \cos \varphi) \cos k\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} d\psi = \\ &= 2 \cos \varphi I_k + 2 \int_0^\pi \cos(k\psi) d\psi = 2 \cos \varphi I_k, \quad k > 1, \end{aligned}$$

т. е. $I_{k+1} - 2I_k \cos \varphi + I_{k-1} = 0$.

Как следует из примера 1 (случай а)):

$$I_k(\varphi) = C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi).$$

Начальные условия при $k=0, k=1$ дают $C_1=0$,

$$C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi = \pi, \quad C_2 = \frac{\pi}{\sin \varphi}$$

и, следовательно,

$$I_k(\varphi) = \pi \frac{\sin(k\varphi)}{\sin \varphi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

12. Формулы «разностного дифференцирования» произведения и суммирования по частям. Выведем формулу, являющуюся сеточным аналогом формулы дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}.$$

Пусть y_i и v_i — произвольные сеточные функции аргумента $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда справедливы следующие формулы «разностного дифференцирования» произведения:

$$\begin{aligned} \Delta(y_i v_i) &= y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_{i+1} \Delta v_i + v_i \Delta y_i, \\ \nabla(y_i v_i) &= y_{i-1} \nabla v_i + v_i \nabla y_i = y_i \nabla v_i + v_{i-1} \nabla y_i, \end{aligned} \quad (47)$$

где $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ — правая разность, а $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ — левая разность, так что $\nabla y_{i+1} = \Delta y_i$.

Эти формулы проверяются непосредственно:

$$\begin{aligned} y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i &= y_i (v_{i+1} - v_i) + v_{i+1} (y_{i+1} - y_i) = \\ &= y_{i+1} v_{i+1} - y_i v_i = \Delta(y_i v_i). \end{aligned}$$

При проверке формул для $\nabla(y_i v_i)$ достаточно учесть, что

$$\nabla(y_i v_i) = \Delta(y_{i-1} v_{i-1}).$$

Важную роль в теории разностных уравнений играют сеточные аналоги формул интегрирования по частям

$$\int_a^b u'v \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b uv' \, dx.$$

Рассмотрим функции $y_i = y(i)$, $v_i = v(i)$, заданные на сетке $\{i = 0, 1, 2, \dots, N\}$. Введем суммы

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i, \quad [y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i,$$

$$[y, v] = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i$$

— аналоги интеграла $\int_a^b uv \, dx = (u, v)_0$.

Покажем, что справедлива формула суммирования по частям

$$(y, \Delta v) = -(v, \nabla y) + (yv)_N - y_0 v_1. \quad (48)$$

В самом деле, подставим взятое из (47) выражение

$$y_i \Delta v_i = \Delta(y_i v_i) - v_{i+1} \nabla y_{i+1}$$

в сумму

$$(y, \Delta v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \Delta v_i = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta(y_i v_i) - \sum_{i=1}^{N-1} v_{i+1} \nabla y_{i+1} = \\ = y_N v_N - y_0 v_1 - \sum_{i'=2}^N v_{i'} \nabla y_{i'},$$

где $i' = i + 1$.

Учитывая затем, что $y_1 = y_0 + (y_1 - y_0) = y_0 + \nabla y_1$, получаем

$$(y, \Delta v) = y_N v_N - y_0 v_1 - \sum_{i=1}^N v_i \nabla y_i = -(v, \nabla y) + y_N v_N - v_1 y_0.$$

Если y_i обращается в нуль в граничных узлах сетки $i = 0$ и $i = N$: $y_0 = 0$, $y_N = 0$, или $y_0 = 0$, $v_N = 0$, то подстановка обращается в нуль и формула суммирования по частям принимает вид

$$(y, \Delta v) = -(v, \nabla y]. \quad (49)$$

Полученные тождества используются для преобразования разностных выражений. Кроме того, они часто применяются, например, при вычислении различного рода конечных сумм и рядов.

Пример 1. Вычислить сумму

$$S_N = \sum_{i=1}^N i 2^i.$$

Положим $y_i = i$, $\Delta v_i = 2^i$, так что

$$v_{i+1} = v_i + 2^i = \sum_{k=0}^i 2^k + v_0 = 2^{i+1} - 1 + v_0.$$

Выберем $v_0 = 1 - 2^{N+1}$ так, чтобы $v_{N+1} = 0$. Тогда формула суммирования по частям дает

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N i 2^i &= \sum_{i=1}^N y_i \Delta v_i = - \sum_{i=1}^{N+1} v_i \nabla y_i + v_{N+1} v_{N+1} - v_0 v_1 = \\ &= - \sum_{i=1}^{N+1} (2^i - 2^{N+1}) = -2(2^{N+1} - 1) + 2^{N+1}(N+1) = (N-1)2^{N+1} + 2. \end{aligned}$$

Пример 2. $S_N = \sum_{i=1}^{N-1} i a^i$. В этом случае $y_i = i$, $\Delta v_i = a^i$,
 $v_i = \frac{a^i - a^N}{a - 1}$, $v_N = 0$,

$$S_N = \frac{1}{(a-1)^2} [a^N (N(a-1) - a) + a].$$

13. Разностные формулы Грина. Формулы

$$\begin{aligned} \int_a^b u v'' dx &= - \int_a^b u' v' dx + u v' \Big|_a^b, \\ \int_a^b (u v'' - u'' v) dx &= (u v' - u' v) \Big|_a^b \end{aligned}$$

называют *первой* и *второй формулами Грина* (для простейшего оператора $Lu = u''$). Обычно первая формула записывается в более общем виде:

$$\int_a^b u L v dx = - \int_a^b k u' v' dx - \int_a^b q u v dx + k u v' \Big|_a^b, \quad (50)$$

где

$$L v = (k v')' - q(x) v.$$

Меняя в этой формуле местами $u(x)$ и $v(x)$ и вычитая полученное равенство из (50), получим вторую формулу Грина (в более общем виде)

$$\int_a^b (u L v - v L u) dx = k (u v' - u' v) \Big|_a^b. \quad (51)$$

Если u и v равны нулю на концах интервала $x=a$ и $x=b$, то все подстановки обращаются в нуль и формулы (50) и (51) принимают вид

$$(u, Lv)_0 = -(ku', v')_0 - (qu, v)_0, \quad (u, Lv)_0 = (v, Lu)_0, \quad (52)$$

где

$$(u, v)_0 = \int_a^b uv \, dx.$$

В частности, имеем

$$(u, Lu)_0 = -(k, (u')^2)_0 - (q, u^2)_0.$$

Формула $(u, Lv)_0 = (v, Lu)_0$ означает, что оператор L самосопряжен.

Перейдем к выводу разностных аналогов формул Грина (50), (51) и (52).

Полагая $v_i = \Delta u_{i-1} = \nabla u_i$, получим из (48) тождество

$$(y, \Delta \nabla u) = -(\nabla u, \nabla y) + y_N \nabla u_N - y_0 \nabla u_1. \quad (53)$$

Если положить теперь

$$v_i = a_i \nabla u_i,$$

то вместо (53) получим

$$(y, \Delta (a \nabla u)) = -(\nabla u, \nabla y) + y_N a_N \nabla u_N - y_0 a_1 \nabla u_1. \quad (54)$$

Вводя затем разностный оператор

$$\Delta u_i = \Delta (a_i \nabla u_i) - d_i u_i = a_{i+1} (u_{i+1} - u_i) - a_i (u_i - u_{i-1}) - d_i u_i \quad (55)$$

и пользуясь (54), получаем первую формулу Грина

$$(y, \Delta u) = -(\nabla u, \nabla y) - (du, y) + (ay \nabla u)_N - y_0 (a \nabla u)_1, \quad (56)$$

аналогичную формуле (50).

Поменяем в (56) местами u_i и y_i :

$$(u, \Delta y) = -(\nabla y, \nabla u) - (dy, u) + (au \nabla y)_N - u_0 (a \nabla y)_1$$

и вычтем это равенство из равенства (56). В результате получим вторую разностную формулу Грина

$$(y, \Delta u) - (u, \Delta y) = a (y \nabla u - u \nabla y)_N - a_1 (y_0 \nabla u_1 - u_0 \nabla y_1). \quad (57)$$

В частном случае $a_i \equiv 1$, $d_i \equiv 0$, т. е. при $\Delta y_i = \Delta \nabla u_i = \Delta^2 y_{i-1}$ разностная формула Грина (57) упрощается:

$$(y, \Delta \nabla u) = (u, \Delta \nabla y) + (y \nabla u - u \nabla y)_N - (y \Delta u - u \Delta y)_0 = \\ = (u, \Delta \nabla y) + u_N y_{N-1} - y_N u_{N-1} + u_0 y_1 - y_0 u_1.$$

Если $y_0 = 0$, $y_N = 0$, то первая формула Грина принимает вид

$$(y, \Lambda u) = -(a \nabla u, \nabla y] - (du, y) \quad (58)$$

и, в частности, при $u = y$

$$(y, \Lambda y) = -(a \nabla y, \nabla y] - (d, y^2). \quad (59)$$

Вторая формула Грина имеет вид

$$(\Lambda y, u) = (y, \Lambda u), \quad (60)$$

если y , u удовлетворяют однородным граничным условиям

$$y_0 = y_N = 0, \quad u_0 = u_N = 0.$$

14. Пространства сеточных функций. Разностные операторы. Рассмотрим множество функций $y_i = y(i)$, заданных на сетке $\omega = \{i = 0, 1, 2, \dots, N\}$, т. е. для значений $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Введем на этом множестве скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{i=0}^N y_i v_i \quad \text{и норму } \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Полученное линейное пространство сеточных функций обозначим Ω_{N+1} . Это евклидово пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры. Пусть A — некоторый оператор, заданный в евклидовом пространстве H . Это значит, что каждому вектору $y \in H$ ставится в соответствие некоторый вектор $Ay \in H$. Это коротко записывается так $A: H \rightarrow H$. Областью определения оператора A является все пространство H , а область значений $R(A)$ принадлежит H .

Оператор A линеен, если

$$\begin{aligned} A(\bar{y} + \bar{\bar{y}}) &= A\bar{y} + A\bar{\bar{y}} \quad \text{для любых } \bar{y}, \bar{\bar{y}} \in H, \\ A(Cy) &= CAy \quad \text{для любого } y \in H, \end{aligned}$$

где C — произвольное число, иными словами, $A(C_1\bar{y} + C_2\bar{\bar{y}}) = C_1A\bar{y} + C_2A\bar{\bar{y}}$ для любых $\bar{y}, \bar{\bar{y}} \in H$, где C_1 и C_2 — произвольные числа. Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A , если

$$(Au, v) = (u, A^*v) \quad \text{для любых } u, v \in H.$$

Если $A^* = A$, то A называется *самосопряженным оператором*. Оператор A положителен, если

$$(Au, u) > 0 \quad \text{для любого } u \in H, \quad u \neq 0.$$

Мы будем рассматривать линейные разностные операторы, заданные в пространстве $\Omega_{N+1} = H$ сеточных функций. Простейший

разностный оператор

$$\Lambda^+ y_i = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

задан для любых сеточных функций $y \in \Omega_{N+1}$ (область определения $\mathcal{D}(\Lambda^+)$ оператора Λ^+ — пространство Ω_{N+1}) и ставит им в соответствие функции $v = \Lambda^+ y$, определенные при $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ (область значений $R(\Lambda^+)$ оператора Λ^+ — подпространство Ω_N^+ , состоящее из сеточных функций v_i , заданных при $0 \leq i < N$).

Оператор

$$\Lambda^- y_i = \nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

задан для $y_i \in \Omega_{N+1}$ и имеет областью значений подпространство Ω_N^- , состоящее из сеточных функций, заданных при $i = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, оба оператора Λ^+ , $\Lambda^-: \Omega_{N+1} \rightarrow \Omega_{N+1}$.

Разностный оператор второго порядка

$$\hat{\Lambda} y_i = \Delta \nabla y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

задан на Ω_{N+1} и имеет областью значений пространство Ω_{N-1} , состоящее из сеточных функций y_i , заданных при $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Таким образом, $\hat{\Lambda}: \Omega_{N+1} \rightarrow \Omega_{N-1}$.

Аналогичным свойством обладает разностный оператор

$$\Lambda y_i = \Delta (a_i \nabla y_i) - d_i y_i.$$

Мы будем в дальнейшем пользоваться пространством сеточных функций, заданных при $i = 0, 1, 2, \dots, N$ и равных нулю при $i = 0, i = N$: $y_0 = 0, y_N = 0$.

Обозначим это пространство через $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{N+1}$.

Указанный выше оператор $\hat{\Lambda} y_i = \Delta \nabla y_i$ преобразует любую функцию из пространства $\hat{\Omega}_{N+1}$ в функцию из пространства Ω_{N-1} функций, заданных при $i = 1, 2, \dots, N-1$. Рассмотрим оператор $\tilde{\Lambda}$, который совпадает с оператором $\hat{\Lambda}$ в $\hat{\Omega}_{N+1}$, так что $\tilde{\Lambda} y = \hat{\Lambda} y$ при $y \in \hat{\Omega}_{N+1}$, т. е.

$$\tilde{\Lambda} y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \quad \text{при } 1 < i < N-1,$$

$$\tilde{\Lambda} y_1 = y_2 - 2y_1, \quad \tilde{\Lambda} y_{N-1} = -2y_{N-1} + y_{N-2}.$$

Отсюда видно, что оператор $\tilde{\Lambda}$ отображает пространство Ω_{N-1} на себя, т. е.

$$\tilde{\Lambda} y \in \Omega_{N-1}, \quad \text{если } y \in \Omega_{N-1}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать операторы

$$Ay = -\tilde{\Lambda} y, \quad A: H \rightarrow H, \quad \text{где } H = \Omega_{N-1}.$$

В $\hat{\Omega}_{N+1}$ скалярное произведение определяется формулой

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i.$$

Вторая формула Грина (60)

$$(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v) \text{ для любых } y, v \in \hat{\Omega}_{N+1}$$

выражает самосопряженность оператора

$$\Lambda y_i = \Delta (a_i \nabla y_i) - d_i y_i,$$

т. е. $\Lambda^* = \Lambda$.

15. Условие самосопряженности разностного оператора второго порядка. Рассмотрим разностный оператор второго порядка (трехточечный оператор)

$$\Lambda y_i = B_i y_{i+1} - C_i y_i + A_i y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (61)$$

где

$$y \in \hat{\Omega}_{N+1}, \text{ т. е. } y_0 = 0, \quad y_N = 0.$$

Покажем, что необходимым и достаточным условием самосопряженности разностного оператора (61) является равенство

$$B_i = A_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2. \quad (62)$$

Представим Λy_i в виде суммы $\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y_i &= A_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - A_i (y_i - y_{i-1}) - D_i y_i = \Delta (A_i \nabla y_i) - D_i y_i, \\ D_i &= C_i - A_i - A_{i+1}, \quad \Lambda_2 y_i = (B_i - A_{i+1}) y_{i+1}. \end{aligned}$$

Оператор Λ_1 в силу (60) самосопряжен в пространстве $\hat{\Omega}_{N+1}$:

$$(\Lambda_1 y, v) = (y, \Lambda_1 v) \text{ для любых } y, v \in \hat{\Omega}_{N+1}.$$

Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} (\Lambda y, v) - (y, \Lambda v) &= (\Lambda_2 y, v) - (y, \Lambda_2 v) = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (B_i - A_{i+1}) (y_{i+1} v_i - y_i v_{i+1}). \end{aligned} \quad (63)$$

Отсюда видно, что если

$$(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v) \text{ для любых } y, v \in \hat{\Omega}_{N+1}, \quad (64)$$

т. е. оператор Λ самосопряжен, то

$$\sum_{i=1}^{N-1} (B_i - A_{i+1}) (y_{i+1} v_i - y_i v_{i+1}) = 0. \quad (65)$$

В силу произвольности y и v можно взять $y_i = \delta_{i, i_0+1}$, $v_i = \delta_{i, i_0}$, где i_0 — любой фиксированный узел $i_0 = 1, 2, \dots, N-2$, а $\delta_{i, k} = 0$

при $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$. Тогда получим $y_{i+1}v_i - y_i v_{i+1} = \delta_{i,i_0}$ и условие (65) дает $B_{i_0} = A_{i_0+1}$, т. е. условие (62) необходимо для самосопряженности оператора Λ . Достаточность этого условия очевидна, так как из (63) следует (64) при $B_i = A_{i+1}$.

В п. 10 было показано, что оператор (61) с коэффициентами $A_i \neq 0$, $B_i \neq 0$ всегда может быть преобразован к самосопряженному виду

$$\Lambda y_i = a_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1}) - d_i y_i = \Delta (a_i \nabla y_i) - d_i y_i \quad (66)$$

умножением на число

$$\eta_i = \eta_1 \prod_{k=1}^{i-1} \frac{B_k}{A_{k+1}}.$$

При решении краевых задач для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$

методом конечных разностей, как будет показано в гл. III, мы приходим к разностному уравнению $\Lambda y_i = -\varphi_i$, где

$$y_i = y(x_i), \quad \varphi_i = \varphi(x_i), \quad x_i = ih, \quad h = 1/N,$$

а оператор Λ имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda y_i &= \frac{1}{h^2} [a_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1})] - d_i y_i = \\ &= \frac{1}{h^2} \Delta (a_i \nabla y_i) - d_i y_i. \end{aligned} \quad (67)$$

Этот оператор можно получить из (66) после формальной замены a_i на a_i/h^2 . Здесь h — шаг сетки на отрезке $0 \leq x \leq 1$, состоящей из узлов $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, делящих отрезок $0 \leq x \leq 1$ на N равных частей.

Скалярное произведение в пространстве Ω_{N+1} вводится по формуле

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h. \quad (68)$$

Все выводы, полученные ранее для оператора (66), сохраняют силу и для оператора (67), если учесть (68) и всюду заменить a_i на a_i/h^2 .

Таким образом, оператор (67) самосопряжен в пространстве Ω_{N+1} .

После того как установлена самосопряженность разностного оператора Λ в пространстве сеточных функций $\Omega_{N+1} = H$, можно пользоваться общей теорией для линейных самосопряженных операторов в конечномерном евклидовом пространстве H .

16. Задача на собственные значения для самосопряженного оператора в конечномерном пространстве. Напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Пусть даны конечномерное евклидово пространство H размерности N со скалярным произведением $(,)$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ и линейный оператор $A: H \rightarrow H$, действующий из H в H .

Предположим, что оператор A самосопряжен и положителен:

$$A = A^* > 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (Ay, v) &= (y, Av) \quad \text{для любых } y, v \in H, \\ (Ay, y) &> 0 \quad \text{для любого } y \in H. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о собственных значениях оператора A : требуется найти такие значения параметра λ (собственные значения), при которых однородное уравнение

$$A\xi = \lambda\xi$$

имеет нетривиальные решения (собственные векторы) $\xi \neq 0$.

Из линейной алгебры известно, что это уравнение имеет N собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, которым соответствует N линейно независимых векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$.

Все собственные значения оператора $A = A^* > 0$ положительны:

$$\lambda_k > 0 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, N.$$

В самом деле, из уравнения $A\xi_k = \lambda_k\xi_k$, $\|\xi_k\| \neq 0$, следует, что $(A\xi_k, \xi_k) = \lambda_k(\xi_k, \xi_k)$. Так как по условию $A > 0$, то $(A\xi_k, \xi_k) > 0$ и

$$\lambda_k = \frac{(A\xi_k, \xi_k)}{\|\xi_k\|^2} > 0.$$

Собственные векторы ξ_k и ξ_m , соответствующие разным собственным значениям λ_k и $\lambda_m \neq \lambda_k$, ортогональны:

$$(\xi_k, \xi_m) = 0 \quad \text{при } \lambda_k \neq \lambda_m.$$

Для доказательства рассмотрим уравнения

$$A\xi_k = \lambda_k\xi_k, \quad A\xi_m = \lambda_m\xi_m.$$

Скалярно умножим первое из них на ξ_m , а второе на ξ_k и вычтем из полученного первого равенства второе равенство:

$$(A\xi_k, \xi_m) - (A\xi_m, \xi_k) = (\lambda_k - \lambda_m)(\xi_k, \xi_m).$$

Так как оператор A самосопряжен, то

$$(A\xi_k, \xi_m) = (\xi_k, A\xi_m) = (A\xi_m, \xi_k)$$

$$\text{и} \quad (\lambda_k - \lambda_m) (\xi_k, \xi_m) = 0,$$

откуда при $\lambda_k \neq \lambda_m$ и следует $(\xi_k, \xi_m) = 0$.

Если собственному значению λ_k соответствует не один собственный вектор, а несколько линейно независимых векторов $\xi_k, \xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_r}$ (r — кратность собственного значения λ_k), то можно на их основе построить (методом Шмидта) r ортогональных и нормированных векторов $\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k_1}, \dots, \bar{\xi}_{k_r}$:

$$(\bar{\xi}_{k_\alpha}, \bar{\xi}_{k_\beta}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Перенумеруем, как это принято делать, собственные значения в порядке возрастания их величины

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_N \quad (69)$$

и поставим каждому из них в соответствие собственный вектор

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_N.$$

Знак равенства в (69) означает кратность собственного значения, которое повторяется в (69) столько раз, какова его кратность.

В результате получается система ортонормированных собственных векторов, так что

$$(\xi_k, \xi_m) = \delta_{k,m}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $f \in H$ и разложим его по собственным векторам:

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \xi_k, \quad a_k = (f, \xi_k). \quad (70)$$

Чтобы найти a_k , умножаем (70) скалярно на $\xi_{k'}$:

$$(f, \xi_{k'}) = \sum_{k=1}^N a_k (\xi_k, \xi_{k'}) = \sum_{k=1}^N a_k \delta_{k,k'} = a_{k'}.$$

Покажем, что имеет место равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^N a_k^2.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= (f, f) = \left(\sum_{k=1}^N a_k \xi_k, \sum_{k'=1}^N a_{k'} \xi_{k'} \right) = \sum_{k, k'=1}^N a_k a_{k'} (\xi_k, \xi_{k'}) = \\ &= \sum_{k, k'=1}^N a_k a_{k'} \delta_{k, k'} = \sum_{k=1}^N a_k^2. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы познакомимся с задачей на собственные значения для разностного оператора.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В этой главе на простейших примерах поясняются основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость, и дается представление о некоторых методах исследования устойчивости и сходимости, таких как метод разделения переменных, метод энергетических неравенств. В § 4 дается трактовка разностных уравнений как операторных уравнений в абстрактном пространстве.

§ 1. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов

1. **Сетки и сеточные функции.** Для того чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую данное дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие два шага.

1. Необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения.

2. Необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и для начальных данных.

После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений. Таким образом, задача о численном решении исходного (линейного) дифференциального уравнения сводится к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы.

Остановимся на этих вопросах несколько подробнее.

При численном решении той или иной математической задачи мы, очевидно, не можем воспроизвести разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства.

Естественно поэтому выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется *сеткой*. Отдельные точки называют *узлами сетки*.

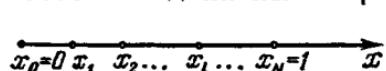
Функция, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*. Таким образом, мы заменили область непрерывного изменения аргумента сеткой, т. е. областью дискретного изменения аргумента; иными словами, мы осуществили аппроксимацию

пространства решений дифференциального уравнения пространством сеточных функций.

Свойства разностного решения и, в частности, его близость к точному решению зависят от выбора сетки.

Рассмотрим несколько примеров сеток.

Пример 1. Равномерная сетка на отрезке. Разобьем единичный отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Рас-



стояние между соседними узлами $x_i - x_{i-1} = h = 1/N$ назовем шагом сетки. Точки деления $x_i = ih$ — узлы сетки. Множество всех узлов

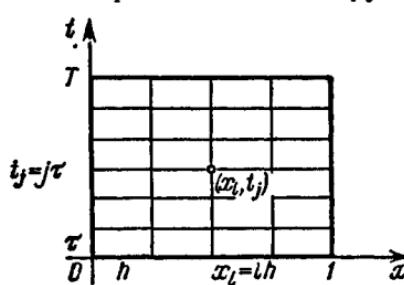
$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}$ и

составляет сетку (рис. 1), в данном случае введенную на отрезке.

В это множество можно включить граничные точки $x_0 = 0$, $x_N = 1$. Обозначим $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1, N\}$.

На отрезке $[0, 1]$ вместо функции непрерывного аргумента $y(x)$ будем рассматривать функцию дискретного аргумента $y_h(x_i)$. Значения этой функции вычисляются в узлах сетки x_i , а сама функция зависит от шага сетки h как от параметра.

Пример 2. Равномерная сетка на плоскости. Рассмотрим множество функций двух аргументов $u(x, t)$. В качестве области определения выберем



прямоугольник

$$\bar{\mathcal{D}} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Разобьем отрезки $[0, 1]$ оси x и $[0, T]$ оси t соответственно на N_1 и N_2 частей; пусть $h = 1/N_1$, $\tau = T/N_2$. Через точки деления x проведем прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получим узлы (x_i, t_j) , которые и образуют сетку (рис. 2)

$$\bar{\omega}_{ht} = \{(x_i, t_j) \in \bar{\mathcal{D}}\}.$$

Эта сетка имеет шаги h и τ соответственно по направлениям x и t . Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на одной и той же прямой (горизонтальной или вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки (h или τ).

Пример 3. Неравномерная сетка на отрезке. Рассмотрим отрезок $0 \leq x \leq 1$. Вводя произвольные точки $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < 1$, разобьем его на N частей. Множество узлов $\{x_i, i = 0, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ образует неравномерную сетку $\bar{\omega}_h$ $[0, 1]$. Расстояние между соседними узлами — шаг

сетки—равно $h_i = x_i - x_{i-1}$ и зависит уже от номера i узла, т. е. является сеточной функцией. Шаги сетки удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1.$$

Пример 4. Сетка в двумерной области. Пусть на плоскости $x = (x_1, x_2)$ дана область G сложной формы с границей Γ . Проведем прямые $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h_1 > 0$; $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h_2 > 0$. Тогда на плоскости (x_1, x_2) получим сетку (решетку) с узлами $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Эта решетка равномерна по каждому из направлений Ox_1 и Ox_2 . Нас интересуют только те узлы, которые принадлежат области $\bar{G} = G + \Gamma$, включая границу Γ . Те узлы $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, которые попали внутрь G , назовем *внутренними*, а их совокупность обозначим ω_h (рис. 3). Рассмотрим точки пересечения прямых $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ и $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с границей Γ ; эти точки назовем *границными* узлами, а множество всех

границных узлов обозначим γ_h . На рис. 3 знаком \times обозначены граничные узлы, а значком \circ —внутренние узлы. Из рис. 3 видно, что имеются граничные узлы, которые отстоят от ближайших к ним внутренних узлов на расстоянии, меньшем h_1 или h_2 . Таким образом, хотя сетка на плоскости и равномерна по x_1 и x_2 , но сетка $\omega_h = \omega_h + \gamma_h$ для области \bar{G} неравномерна вблизи границы. Более подробно эта сетка будет рассмотрена в гл. IV.

Итак, область \bar{G} изменения аргумента x мы заменяем сеткой ω_h , т. е. конечным множеством точек x_i , принадлежащих \bar{G} . Вместо функций $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in \bar{G}$ будем рассматривать сеточные функции $y(x_i)$, т. е. функции точки x_i , являющейся узлом сетки $\omega_h = \{x_i\}$. Сеточную функцию $y(x_i)$ можно представить в виде вектора. Если перенумеровать все узлы в некотором порядке x_1, x_2, \dots, x_N , то значения сеточной функции в этих узлах можно рассматривать как компоненты вектора

$$Y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_N).$$

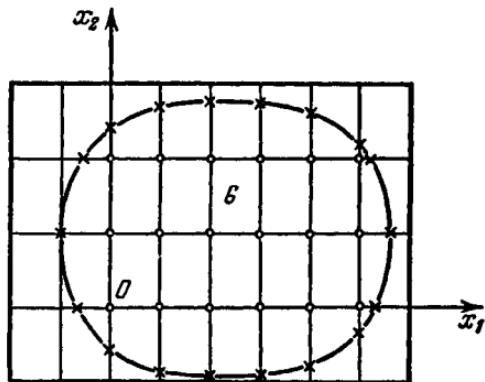


Рис. 3.

Если область G , в которой построена сетка, конечна, то размерность N вектора Y конечна. В случае неограниченной области G сетка состоит из бесконечного числа узлов и размерность вектора Y также бесконечна.

Обычно рассматриваются множества сеток $\{\omega_h\}$, зависящих от шага h как от параметра. Поэтому и сеточные функции $y_h(x)$ зависят от параметра h (или от числа узлов N в случае равномерной сетки). Если сетка ω_h неравномерна, то под h следует понимать вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ с компонентами h_1, \dots, \dots, h_N . Это же замечание относится и к случаю, когда область G многомерна, $x = (x_1, \dots, x_p)$; тогда $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$, если сетка ω_h равномерна по каждому из аргументов x_1, x_2, \dots, x_p .

Функции $u(x)$ непрерывного аргумента $x \in G$ являются элементами некоторого функционального пространства H_0 . Множество сеточных функций $y_h(x)$ образует пространство H_h . Таким образом, используя метод конечных разностей, мы заменяем пространство H_0 пространством H_h сеточных функций $y_h(x)$.

Рассматривая множество сеток $\{\omega_h\}$, получаем множество $\{H_h\}$ пространств сеточных функций, зависящих от параметра h . В линейном пространстве H_h вводится норма $\|\cdot\|_h$, являющаяся сеточным аналогом нормы $\|\cdot\|_0$ в исходном пространстве H_0 .

Укажем простейшие типы норм в H_h для случая сеток $\omega_h = \{x_i = ih\}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ (индекс h у y_h опускаем).

1) Сеточный аналог нормы в C :

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)| \text{ или } \|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|.$$

2) Сеточные аналоги нормы в L_2 :

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} \text{ или } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем будем, как правило, пользоваться нормами, индуцированными скалярными произведениями на H_h (сеточными аналогами норм в L_2 , W_2^1 и др. См. стр. 11–12).

Пусть $u(x)$ — решение исходной непрерывной задачи, $u \in H_0$, y_h — решение приближенной (разностной) задачи, $y_h \in H_h$. Основной интерес для теории приближенных методов представляет оценка близости y_h к u . Однако y_h и u являются векторами из разных пространств. Имеются две возможности:

1. Сеточная функция y_h , заданная в узлах $\omega_h(G)$ доопределяется (например, при помощи линейной интерполяции) во всех остальных точках x области G . В результате получаем функцию $\tilde{y}(x, h)$ непрерывного аргумента $x \in G$. Разность $\tilde{y}(x, h) - u(x)$ принадлежит H_0 . Близость y_h к u характеризуется числом $\|\tilde{y}(x, h) - u(x)\|_0$, где $\|\cdot\|_0$ — норма на H_0 .

2. Пространство H_0 отображается на пространство H_h . Каждой функции $u(x) \in H_0$ ставится в соответствие сеточная функция $u_h(x)$, $x \in \omega_h$, так что $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$, где \mathcal{P}_h — линейный оператор из H_0 в H_h . Это соответствие можно осуществить различными способами (выбирая разные операторы \mathcal{P}_h). Если $u(x)$ — непрерывная функция, то полагаем $u_h(x) = u(x)$, где $x \in \omega_h$. Иногда определяют $u_h(x_i)$ в узле $x_i \in \omega_h$ как интегральное среднее значение $u(x)$ по некоторой окрестности (например, диаметра $O(h)$) данного узла $x_i \in \omega_h$. В дальнейшем всюду будем предполагать, что $u(x)$ — непрерывная функция и $u_h(x_i) = u(x_i)$ для всех $x_i \in \omega_h$.

Имея сеточную функцию u_h , образуем разность $y_h - u_h$, являющуюся вектором пространства H_h . Близость y_h к u характеризуется числом $\|y_h - u_h\|_h$, где $\|\cdot\|_h$ — норма на H_h . При этом естественно требовать, чтобы норма $\|\cdot\|_h$ аппроксимировала норму $\|\cdot\|_0$ в следующем смысле:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

для любого вектора u из H_0 . Это условие будем называть условием согласования норм в H_h и H_0 .

Мы всюду используем второй путь, исследуем погрешность разностных методов в пространстве сеточных функций. В большинстве случаев эти пространства являются конечномерными.

Как будет показано в дальнейшем, оказывается возможным провести изложение основных вопросов теории разностных схем, трактуя H_h как абстрактные линейные пространства любой размерности.

После того как мы познакомились на простейших примерах со способами построения сеток и тем самым пространств H_h сеточных функций, перейдем к вопросу о разностной аппроксимации дифференциальных операторов.

2. **Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов.** Пусть дан линейный дифференциальный оператор L , действующий на функцию $v = v(x)$. Заменяя входящие в Lv производные разностными отношениями, мы получим вместо Lv разностное выражение $L_h v_h$, являющееся линейной комбинацией значений сеточной функции v_h на некотором множестве узлов сетки, называемом *шаблоном*:

$$L_h v_h(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}(x)} A_h(x, \xi) v_h(\xi)$$

или

$$(L_h v_h)_i = \sum_{x_j \in \mathcal{W}(x_i)} A_h(x_i, x_j) v_h(x_j),$$

где $A_h(x, \xi)$ — коэффициенты, h — шаг сетки, $W(x)$ — шаблон в точке x . Такая приближенная замена Lv на $L_h v_h$ называется аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором (или разностной аппроксимацией оператора L).

Изучение разностных аппроксимаций оператора L вначале обычно проводят локально, т. е. в любой фиксированной точке x пространства. Если $v(x)$ — непрерывная функция, то $v_h(x) = v(x)$. Прежде чем приступить к разностной аппроксимации оператора L , необходимо выбрать шаблон, т. е. указать множество соседних с узлом x узлов, в которых значения сеточной функции $v(x)$ могут быть использованы для аппроксимации оператора L .

В этом пункте рассматриваются примеры разностной аппроксимации для простейших дифференциальных операторов.

Пример 1. $Lv = dv/dx$.

Фиксируем некоторую точку x оси Ox и возьмем точки $x-h$ и $x+h$, где $h > 0$. Для аппроксимации Lv можно воспользоваться любым из следующих выражений:

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x, \quad (1)$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_{\bar{x}}. \quad (2)$$

Выражение (1) есть *правая разностная производная* (ее мы будем обозначать v_x), а (2) — *левая разностная производная* (обозначение $v_{\bar{x}}$). Разностные выражения $L_h^+ v$ и $L_h^- v$ определены на двух точках (имеют двухточечные шаблоны x , $x+h$ и $x-h$, x соответственно).

Кроме того, в качестве разностной аппроксимации производной dv/dx можно взять линейную комбинацию выражений (1) и (2)

$$L_h^\sigma v \equiv \sigma v_x + (1-\sigma) v_{\bar{x}}, \quad (3)$$

где σ — любое вещественное число. В частности, при $\sigma = 0,5$ получаем так называемую *центральную (двустороннюю) разностную производную*

$$v_{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(v_x + v_{\bar{x}}) = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (4)$$

Таким образом, оказывается, что можно написать бесчисленное множество разностных выражений, аппроксимирующих $Lv = v'$. Возникает вопрос: какую ошибку мы допускаем, используя ту или иную разностную аппроксимацию, и как ведет себя разность $\psi(v) = L_h v(x) - Lv(x)$ в точке x при $h \rightarrow 0$. Величина $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$ называется *погрешностью разностной аппроксимации*.

ксимации Lv в точке x . Разложим $v(x)$ по формуле Тейлора

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) + O(h^3)$$

(предполагая при этом, что функция $v(x)$ — достаточно гладкая в некоторой окрестности $(x - h_0, x + h_0)$ точки x и $h < h_0$, h_0 — фиксированное число). Подставляя это разложение в (1), (2) и (4), получим

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2), \\ v_{\bar{x}} &= \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) - \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2), \\ v_{\ddot{x}} &= \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + O(h^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \psi &= v_x - v'(x) = O(h), \\ \psi &= v_{\bar{x}} - v'(x) = O(h), \\ \psi &= v_{\ddot{x}} - v'(x) = O(h^2). \end{aligned}$$

Пусть V — класс достаточно гладких функций $v \in V$, заданных в окрестности $W(x, h_0)$ точки x , содержащей при $h < h_0$ шаблон $W(x, h)$ разностного оператора L_h . Будем говорить, что L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$ в точке x , если

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m).$$

Таким образом, левая и правая разностные производные аппроксимируют $Lv = v'$ с первым порядком, а центральная разностная производная — со вторым порядком.

Пример 2. $Lv = v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$.

Чтобы написать разностную аппроксимацию второй производной, надо использовать три точки $(x-h, x, x+h)$, т. е. взять трехточечный шаблон. В этом случае

$$L_h v = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}. \quad (6)$$

Замечая, что правая разностная производная в точке x совпадает с левой разностной производной в точке $x+h$, т. е. $v_x(x) = v_{\bar{x}}(x+h)$, перепишем (6) в виде

$$L_h v = \frac{v_x(x) - v_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h} [v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)] = v_{\bar{xx}}(x). \quad (7)$$

Пользуясь разложением функции $v(x)$ по формуле Тейлора, не трудно показать, что порядок аппроксимации в этом случае

равен двум, т. е.

$$v_{\bar{xx}} - v''(x) = O(h^2),$$

так как

$$v_{\bar{xx}} = v'' + \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4). \quad (8)$$

Пример 3. $Lv = v^{(4)}$.

Выберем пятиточечный шаблон, состоящий из точек

$$(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h),$$

и определим $L_h v = v_{\bar{xxx}}$. Пользуясь формулой (6) для $v_{\bar{xx}}$, напишем выражение для $v_{\bar{xxx}}$:

$$\begin{aligned} L_h v = v_{\bar{xx}\bar{xx}} &= \frac{1}{h^2} [v_{\bar{xx}}(x+h) - 2v_{\bar{xx}}(x) + v_{\bar{xx}}(x-h)] = \\ &= \frac{1}{h^4} [v(x+2h) - 4v(x+h) + 6v(x) - 4v(x-h) + v(x-2h)]. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что L_h аппроксимирует L со вторым порядком

$$v_{\bar{xx}\bar{xx}} - v^{(4)} = \frac{h^2}{6} v^{(6)} + O(h^4).$$

В самом деле, пользуясь разложением по формуле Тейлора

$$v(x \pm kh) = v(x) + \sum_{s=1}^7 \frac{(-1)^s k^s h^s}{s!} \frac{d^s v(x)}{dx^s} + O(h^8)$$

при $k = 1, 2$ и учитывая, что сумма $v(x+kh) + v(x-kh)$ содержит только четные степени, получаем написанную выше формулу для $v_{\bar{xxx}}$.

Разложение погрешности аппроксимации $\Psi = L_h v - Lv$ по степеням h можно использовать для повышения порядка аппроксимации. В самом деле, имеем

$$[v_{\bar{xx}} - v''] = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4) = \frac{h^2}{12} v_{\bar{xxx}} + O(h^4).$$

Отсюда следует, что оператор

$$L'_h v = v_{\bar{xx}} - \frac{h^2}{12} v_{\bar{xxx}},$$

определенный на шаблоне $(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h)$, аппроксимирует $Lv = v''$ с четвертым порядком.

В принципе такой процесс повышения порядка аппроксимации можно продолжить дальше и получить любой порядок аппроксимации.

проксимации в классе достаточно гладких функций $v \in V$. При этом шаблон, т. е. число используемых узлов, возрастает. Однако указанный прием повышения порядка разностной аппроксимации не всегда можно рекомендовать для практического применения, так как качество получающихся при этом операторов ухудшается (в смысле объема вычислительной работы, условий существования обратного оператора, устойчивости и т. д.).

Нам в дальнейшем понадобится

Лемма. Справедливы формулы

1)

$$v_{xx} = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = v''(\xi), \quad \xi = x + \theta h, \quad |\theta| \leq 1, \quad (9)$$

если $v \in C^{(2)}[x-h, x+h]$,

2)

$$v_{xx} = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi), \quad \xi = x + \theta_1 h, \quad |\theta_1| \leq 1, \quad (10)$$

если $v \in C^{(4)}[x-h, x+h]$,

где $C^{(k)}[a, b]$ — класс функций, имеющих непрерывную k -ю производную на отрезке $a \leq x \leq b$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме *)

$$v(x) = v(a) + (x-a)v'(a) + \dots + \frac{(x-a)^r}{r!} v^{(r)} + R_{r+1}(x), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} R_{r+1}(x) &= \frac{1}{r!} \int_a^x (x-\xi)^r v^{(r+1)}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{(x-a)^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-s)^r v^{(r+1)}(a+s(x-a)) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя теорему о среднем для интеграла, представим $R_{r+1}(x)$ в виде

$$R_{r+1}(x) = \frac{(x-a)^{r+1}}{(r+1)!} v^{(r+1)}(\xi),$$

где ξ — среднее значение x на отрезке $[a, x]$,

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \int_0^1 (1-s)^r ds = \frac{1}{r+1}.$$

*) См: С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. 1, М., «Наука», 1975.

Заменяя в формуле (11) x на $x+h$, a на x , получим при $r=1$ и $r=3$ соответственно

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + h^2 \int_0^1 (1-s)v''(x+sh) ds. \quad (13)$$

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) + \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(x+sh) ds. \quad (14)$$

Заменяя здесь h на $-h$ и затем s на $-s$, получим формулы

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + h^2 \int_{-1}^0 (1+s)v''(x+sh) ds, \quad (15)$$

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) - \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_{-1}^0 (1+s)^3 v^{(4)}(x+sh) ds. \quad (16)$$

Сложим формулы (13) и (15), перенесем $2v(x)$ в левую часть равенства и разделим на h^2 :

$$v_{xx} = \frac{v(x+h) + v(x-h) - 2v(x)}{h^2} = \int_{-1}^1 g_2(s) v''(x+sh) ds,$$

где

$$g_2(s) = \begin{cases} 1+s & \text{при } -1 \leq s < 0, \\ 1-s & \text{при } 0 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Так как $g_2(s) \geq 0$, то можно воспользоваться теоремой о среднем, что дает

$$v_{xx} = v''(x + \theta h) \int_{-1}^1 g_2(s) ds = v''(x + \theta h) = v''(\xi), \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

где ξ — средняя точка на отрезке $[x-h, x+h]$. Аналогично получается и вторая формула (10).

Сложим (14) и (16), перенесем $2v(x)$ в левую часть и разделим на h^2 :

$$v_{xx} = v''(x) + \frac{h^2}{6} \int_{-1}^1 g_4(s) v^{(4)}(x+sh) ds,$$

где

$$g_4(s) = \begin{cases} (1+s)^3 & \text{при } -1 \leq s \leq 0, \\ (1-s)^3 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 g_4(s) ds = \frac{1}{2}.$$

Так как $g_4(s) \geq 0$, а $v^{(4)}(x)$ непрерывна, то, применяя теорему о среднем, получим

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(x + \theta h), \quad |\theta| \leq 1,$$

что и требовалось.

Замечания. 1. Очевидно, что аналогично можно получить и формулу

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(x) + \frac{h^4}{360} v^{(6)}(\xi), \quad \xi = x + \theta h, \quad -1 \leq \theta \leq 1, \quad (17)$$

если $v(x) \in C^{(6)}[x-h, x+h]$.

2. Аналогично можно показать, что

$$v_{xxxx}^- = \frac{1}{h^4} [v(x+2h) - 4v(x+h) + 6v(x) - 4v(x-h) + v(x-2h)] = v^{(4)}(\xi), \quad (18)$$

где $\xi = x + \theta h$, $|\theta| \leq 2$ — средняя точка на отрезке $[x-2h, x+2h]$, а $v \in C^{(4)}[x-2h, x+2h]$. Для этого достаточно получить формулу

$$v_{xxxx}^- = \frac{1}{6} \int_{-2}^2 g(s) v^{(4)}(x+sh) ds,$$

где

$$g(s) = \begin{cases} 8(1+s/2)^3 & \text{при } -2 \leq s \leq -1, \\ 8(1+s/2)^3 - 4(1+s)^3 & \text{при } -1 \leq s \leq 0, \\ 8(1-s/2)^3 - 4(1-s)^3 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 8(1-s/2)^3 & \text{при } 1 \leq s \leq 2. \end{cases}$$

Пример 4. $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v = v(x, t)$.

Пусть (x, t) — фиксированная точка плоскости (x, t) , $h > 0$ и $\tau > 0$ — два числа (шаги). Чтобы написать разностную аппроксимацию L_{ht} для оператора L , мы должны прежде всего определить шаблон.

Остановимся сначала на аппроксимациях простейшего типа. Пусть шаблон состоит из четырех точек (рис. 4, a).

Определим L_{ht} так:

$$L_{ht}^0 v = \frac{v(x, t+\tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x+h, t) - 2v(x, t) + v(x-h, t)}{h^2}. \quad (19)$$

Для упрощения записи разностных выражений весьма важным является вопрос о введении рациональной символики.

Условимся о следующих обозначениях:

$$v = v(x, t), \quad \hat{v} = v(x, t + \tau), \quad \check{v} = v(x, t - \tau).$$

В этих обозначениях, например, разностная производная по t может быть записана следующим образом:

$$v_t = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{v} - v}{\tau}. \quad (20)$$

Учитывая (7) и (20), запишем (19) в виде

$$L_{h\tau}^{(0)} v = v_t - v_{xx}. \quad (19')$$

При построении $L_{h\tau}^{(0)}$ мы взяли значение v_{xx} в момент t (на нижнем слое).

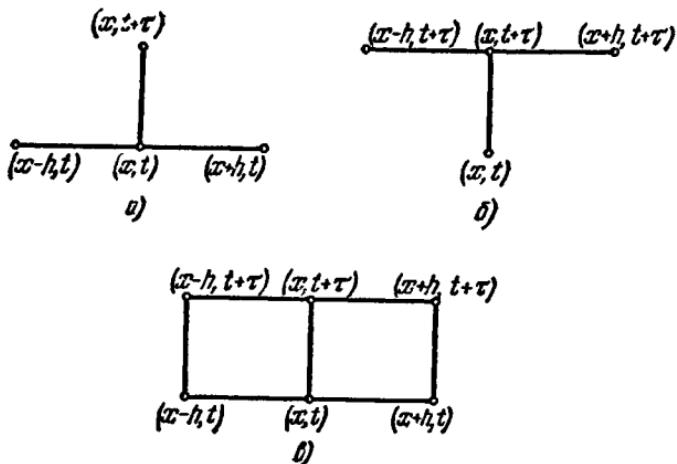


Рис. 4.

Используя шаблон, изображенный на рис. 4, б, можно взять v_{xx} в момент $t + \tau$ (на верхнем слое), что дает

$$L_{h\tau}^{(1)} v = v_t - \hat{v}_{xx}. \quad (21)$$

Взяв линейную комбинацию (19') и (21), получим однопараметрическое семейство разностных операторов

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} v = v_t - (\sigma \hat{v}_{xx} + (1 - \sigma) v_{xx}), \quad (22)$$

определенных при $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$ на шеститочечном шаблоне, указанном на рис. 4, б.

Для оценки порядка разностной аппроксимации воспользуемся формулами

$$v_t = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x, t + \tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2),$$

$$v_{xx} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + O(h^4) =$$

$$= \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2),$$

$$\hat{v}_{xx} = \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2).$$

Подставляя эти выражения в формулы для $L_{ht}^{(0)}v$, $L_{ht}^{(1)}v$, $L_{ht}^{(2)}v$, получим

$$1) \quad L_{ht}^{(0)}v = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) = Lv(x, t) + O(h^2 + \tau),$$

т. е.

$$\Psi^{(0)} = L_{ht}^{(0)}v - Lv(x, t) = O(h^2 + \tau),$$

$$2) \quad L_{ht}^{(1)}v = \frac{\partial v(x, t + \tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) =$$

$$= Lv(x, t + \tau) = O(h^2 + \tau),$$

т. е.

$$\Psi^{(1)} = L_{ht}^{(1)}v - Lv(x, t + \tau) = O(h^2 + \tau),$$

$$3) \quad L_{ht}^{(0.5)}v = \frac{\partial v(x, t + \tau/2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau^2) =$$

$$= Lv(x, t + \tau/2) + O(h^2 + \tau^2),$$

т. е.

$$\Psi^{(0.5)} = L_{ht}^{(0.5)}v - Lv(x, t + \tau/2) = O(h^2 + \tau^2).$$

Таким образом, оператор $L_{ht}^{(\sigma)}$ аппроксимирует L со вторым порядком по h при любом σ , с первым порядком по τ при $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ и со вторым порядком по τ при $\sigma = 0,5$.

Пример 5. $Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

В этом случае для записи разностного оператора L_{ht} надо использовать значения сеточной функции в три момента времени $t - \tau$, t , $t + \tau$. Минимальным является пятиточечный шаблон (рис. 5, а, б, в).

Одна из возможных аппроксимаций (на шаблоне 5, в), использующая значение v_{xx} на среднем слое t , имеет вид

$$L_{ht}v = v_{tt} - v_{xx}, \quad (23)$$

где

$$v_{tt}(x, t) = (v(x, t + \tau) - 2v(x, t) + v(x, t - \tau))/\tau^2.$$

Аналогично можно написать оператор

$$L_{h\tau} v = v_{\bar{tt}} - \hat{v}_{\bar{xx}} \quad (\text{на шаблоне } 5, a). \quad (24)$$

На девятиточечном шаблоне (рис. 5, *г*) можно написать двухпараметрическое семейство разностных операторов

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)} v = v_{\bar{tt}} - (\sigma_1 \hat{v}_{\bar{xx}} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{\bar{xx}} + \sigma_2 \check{v}_{\bar{xx}}). \quad (25)$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ отсюда следует (23), и при $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$ следует (24). Замечая, что $v_{\bar{tt}} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2)$, $v_{\bar{xx}} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2)$, видим, что оператор (23) имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau^2)$. Этот

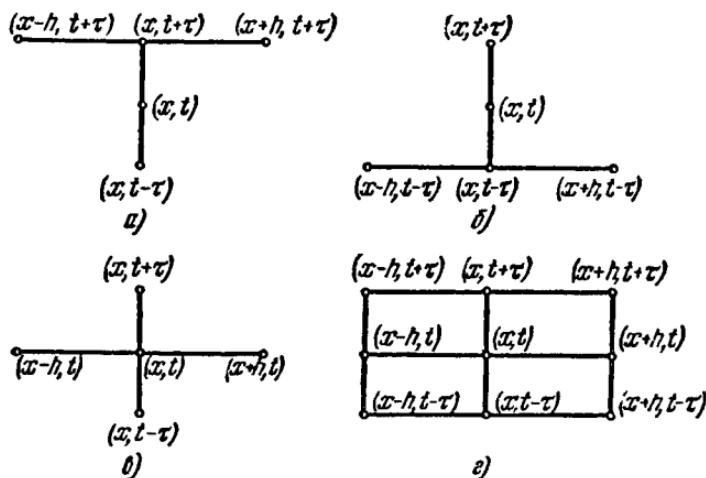


Рис. 5.

же порядок аппроксимации имеет и оператор (25) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, где σ — любое число.

Отметим, что параметры σ_1 и σ_2 , так же как и параметр σ в предыдущем примере, управляют не только порядком аппроксимации, но, как будет показано в гл. V, §1, и таким важным свойством, как устойчивость соответствующей разностной схемы.

Пример 6. $Lv = v''$. Нерегулярный шаблон (неравномерная сетка).

Пусть $h_- > 0$ и $h_+ > 0$ — два числа. Возьмем трехточечный шаблон $(x - h_-, x, x + h_+)$. Если $h_- \neq h_+$, то шаблон будем называть *нерегулярным* (сетка, построенная из таких шаблонов, *неравномерна*). Введем обозначения

$$v_x = \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-}, \quad v_x = \frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_+}, \quad \hbar = 0,5(h_- + h_+)$$

и определим $L_h v$ по формуле

$$L_h v = \frac{1}{h} \left[\frac{v(x+h_+)-v(x)}{h_+} - \frac{v(x)-v(x-h_-)}{h_-} \right] = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h}. \quad (26)$$

Если $h_- = h_+ = h$, то $L_h v$ совпадает с выражением (7) (см. пример 2). Вычислим локальную погрешность аппроксимации (в точке x):

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x).$$

Учитывая разложение достаточно гладкой функции $v(x)$ в окрестности узла x :

$$v(x+h_+) = v(x) + h_+ v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^4),$$

$$v(x-h_-) = v(x) - h_- v'(x) + \frac{h_-^2}{2} v''(x) - \frac{h_-^3}{6} v'''(x) + O(h_-^4),$$

получаем

$$v_x = v'(x) + \frac{h_+}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^4),$$

$$v_{\bar{x}} = v'(x) - \frac{h_-}{2} v''(x) + \frac{h_-^2}{6} v'''(x) + O(h_-^3),$$

$$L_h v = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h} = v''(x) + \frac{h_+^2 - h_-^2}{6h} v'''(x) + O(h^2)$$

(пользуемся тем, что $h_{\pm} < 2h$).

Выражение для $\psi(x)$ примет вид

$$\psi = L_h v - Lv = \frac{h_+ - h_-}{3} v''' + O(h^2) = O(h). \quad (27)$$

Таким образом, оператор (26) на нерегулярном шаблоне ($h_+ \neq h_-$) имеет первый локальный порядок аппроксимации.

3. Погрешность аппроксимации на сетке. До сих пор мы рассматривали локальную разностную аппроксимацию (аппроксимацию в точке). Именно в этом смысле и шла речь о порядке аппроксимации в предыдущем пункте. Обычно требуется оценка порядка разностной аппроксимации на всей сетке.

Пусть ω_h — сетка в некоторой области G в клиновидном пространстве $\{x = (x_1, \dots, x_p)\}$, H_h — линейное пространство сеточных функций, заданных на ω_h , H_0 — пространство гладких функций $v(x)$, $\|\cdot\|_0$ — норма на H_0 , $\|\cdot\|_h$ — норма на H_h . Предполагается, что 1) существует оператор \mathcal{P}_h такой, что $\mathcal{P}_h u = u_h \in H_h$ для любого $u \in H_0$, 2) нормы $\|\cdot\|_h$ и $\|\cdot\|_0$ согласованы, т. е.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h u\|_h = \|u\|_0,$$

где $|h|$ — норма вектора h .

Рассмотрим некоторый оператор L , заданный в H_0 , и оператор L_h , преобразующий сеточную функцию v_h в сеточную функцию $L_h v_h$, заданную на ω_h (т. е. действующий из H_h в H_h).

Назовем *погрешностью аппроксимации* оператора L разностным оператором L_h сеточную функцию

$$\Psi_h = L_h v_h - (Lv)_h,$$

где $v_h = \mathcal{P}_h v$, $(Lv)_h = \mathcal{P}_h (Lv)$, v — любая функция (вектор, элемент) из H_0 .

Если $\|\Psi_h\|_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то говорят, что разностный оператор L_h *аппроксимирует* дифференциальный оператор L .

Будем говорить, что разностный оператор L_h *аппроксимирует* дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$, если

$$\|\Psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m), \quad (28)$$

или $\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M |h|^m$, где M — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$.

Замечания. 1. Приведем примеры оператора проектирования \mathcal{P}_h в пространство сеточных функций:

1) если $v(x)$ — непрерывная функция, то можно положить

$$v_h = \mathcal{P}_h v(x) = v(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$2) \quad v_h = \mathcal{P}_h v = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} v(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x+sh) ds,$$

если $v(x)$ — интегрируемая функция и т. д.

2. Если $h = (h_1, \dots, h_p)$ — вектор с компонентами h_1, h_2, \dots, h_p , то под $|h|$ можно понимать длину $|h| = (h_1^2 + \dots + h_p^2)^{1/2}$. Может оказаться, что аппроксимация по h_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, различна по порядку. Тогда вместо (28) будем иметь

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^{m_\alpha}, \quad \text{где } m_\alpha > 0.$$

Выбирая среди m_1, \dots, m_p наименьшее число и обозначая его через m , получим оценку (28).

3. Если сетка ω_h неравномерна, т. е. $h = (h_1, \dots, h_N)$, где N — число узлов, то, например, $|h| = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ или $|h|$ есть среднее квадратичное значение.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Разностная аппроксимация на неравномерной сетке. Рассмотрим оператор $Lv = \frac{d^2v}{dx^2}$ в пространстве $H_0 = C^{(4)}[0, 1]$ функций, заданных на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Выберем на отрезке $0 \leq x \leq 1$ произвольную неравномерную

сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Оператору Lv , согласно примеру 6 предыдущего пункта, поставим в соответствие разностный оператор

$$(L_h v)_i = \frac{1}{\hat{h}_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{\hat{h}_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{\hat{h}_i} \right], \quad v_i = v(x_i), \quad \hat{h}_i = 0.5(h_i + h_{i+1}),$$

определенный в узле x_i на нерегулярном трехточечном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) .

Вводя обозначения

$$v_{x, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x, i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x}, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hat{h}_i},$$

оператор $L_h v$ можно записать в виде

$$(L_h v)_i = v_{\hat{x}\hat{x}, i} = v_{\hat{x}\hat{x}}.$$

В п. 2 была найдена локальная погрешность аппроксимации

$$\Psi_i = (L_h v)_i - (Lv)_i = \frac{\hat{h}_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(\hat{h}_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отсюда видно, что оператор $L_h v$ имеет в сеточной норме C первый порядок аппроксимации

$$\|\Psi\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\Psi_i| = O(h), \quad h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

В сеточной норме L_2 также получаем первый порядок:

$$\|\Psi\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \hat{h}_i \Psi_i^2 \right)^{1/2} = O(h).$$

Однако в норме

$$\|\Psi\|_{(-1)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^i \hat{h}_k \Psi_k \right)^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

Ψ имеет второй порядок, так что

$$\|\Psi\|_{(-1)} = O(h^2), \quad \text{где } h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

Докажем это утверждение. Перепишем Ψ в виде

$$\Psi_i = \frac{\hat{h}_{i+1}^2 - h_i^2}{6\hat{h}_i} v_i''' + O(\hat{h}_i^2).$$

Принимая во внимание, что $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, находим

$$\Psi_i = \frac{h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i'''}{6\hat{h}_i} + \Psi_i^* = \dot{\Psi}_i + \Psi_i^*,$$

где $\psi_i^* = O(h^2)$ в любой норме. Главный член $\dot{\psi}_i$ в разложении $\psi_i = \dot{\psi}_i + \psi_i^*$ имеет «дивергентный вид». Поэтому

$$S_i = \sum_{k=1}^i h_k \dot{\psi}_k = \sum_{k=1}^i (h_{k+1}^2 v_{k+1}''' - h_k^2 v_k''')/6 = (h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_1^2 v_1''')/6.$$

Отсюда видно, что

$$|S_i| \leq Mh^2,$$

и следовательно,

$$\|\dot{\psi}\|_{(-1)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h_i S_i^2 \right)^{1/2} = O(h^2).$$

Так как

$$\|\psi\|_{(-1)} \leq \|\dot{\psi}\|_{(-1)} + \|\psi^*\|_{(-1)}, \text{ и } \|\psi^*\|_{(-1)} = O(h^2),$$

то $\|\psi\|_{(-1)} \leq Mh^2$, т. е. погрешность аппроксимации в норме $\|\cdot\|_{(-1)}$ имеет второй порядок.

Отметим, что норма $\|\cdot\|_{(-1)}$ согласована с нормой $\|u\|_0 = \left[\int_0^1 dx \left(\int_0^x u(\xi) d\xi \right)^2 \right]^{1/2}$, так что $\|u_h\|_{(-1)} \rightarrow \|u\|_0$ при $h \rightarrow 0$.

Разобранный пример показывает, что исследование локальной аппроксимации может оказаться недостаточным для суждения о порядке разностной аппроксимации на сетке и тем самым для суждения о качестве разностного оператора.

Выбор подходящей нормы для оценки погрешности аппроксимации связан со структурой оператора, и в каждом конкретном случае должен быть предметом изучения. Связь между оператором и нормой для оценки погрешности аппроксимации в общем виде установлена ниже, в § 4. Ее конкретизация для рассмотренного примера естественно приводит к «негативной» норме $\|\cdot\|_{(-1)}$.

Аналогичная ситуация встречается и при изучении разностных аппроксимаций для оператора $Lu = (ku)'$, где $k(x)$ — кусочно-непрерывная функция (см. гл. III).

Если ищется решение $u(x, t)$ нестационарного уравнения (например, уравнения теплопроводности), то переменная t (время) выделяется. Функция $u(x, t)$ как функция аргумента x является элементом пространства H_0 . Пусть ω_h — сетка в области G пространства $\{x = (x_1, \dots, x_p)\}$, ω_t — сетка на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. Сеточная функция $y(x, t) = y_{ht}(x, t)$ определена на сетке

$$\omega_{ht} = \omega_h \times \omega_t = \{(x, t), x \in \omega_h, t \in \omega_t\}.$$

Как функция аргумента $x \in \omega_h$ она является вектором пространства H_h с нормой $\|\cdot\|_h$. Для оценки $y(x, t)$ на сетке ω_{ht} обычно используется норма

$$\|y\|_{ht} = \max_{t \in \omega_t} \|y(t)\|_h, \quad (30)$$

или одна из норм

$$\|y\|_{ht} = \sum_{t \in \omega_t} \tau \|y(t)\|_h, \quad \|y\|_{ht} = \left[\sum_{t \in \omega_t} \tau \|y(t)\|_h^2 \right]^{1/2}. \quad (31)$$

Пусть $L_{ht}v_{ht}$ — разностная аппроксимация оператора Lu , $u = u(x, t)$. Оператор L_{ht} определен на сеточных функциях $v_{ht}(x, t)$, заданных на сетке ω_{ht} .

Пусть $v(x, t)$ как функция x принадлежит H_0 . Тогда $v_h(x, t) = \mathcal{P}_h v(x, t)$ принадлежит H_h для любого $t \in [0, t_0]$. Если $v(x, t)$ непрерывна по t , то можно положить $v_{ht}(x, t) = v_h(x, t)$ для всех $t \in \omega_t$. Таким образом, $v_{ht}(x, t)$ задана на сетке ω_{ht} и можно определить погрешность аппроксимации

$$\Phi_{ht}(x, t) = L_{ht}v_{ht}(x, t) - (Lv)_{ht}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{ht}.$$

Будем говорить, что L_{ht} аппроксимирует L с порядком $m > 0$ по x и с порядком $n > 0$ по t , если в классе достаточно гладких функций $v(x, t)$ выполняется оценка

$$\|\Phi_{ht}(x, t)\|_{ht} = O(|h|^m + \tau^n) \text{ или } \|\Phi_{ht}\|_{ht} \leq M(|h|^m + \tau^n),$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ .

Пример 2. $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $0 < t \leq t_0$,

$$L_{ht}v = v_t - v_{xx}.$$

Оператор L_{ht} пишется во всех внутренних узлах сетки

$$\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, t_j = j\tau, 0 < i < N, 0 < j < j_0, j_0 = t_0/\tau\}.$$

Если $v(x, t)$ имеет две производные по t и четыре производные по x ($v \in C_2^4$), непрерывные в прямоугольнике

$$(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_0),$$

то в каждом внутреннем узле сетки ω_{ht} согласно п. 2 имеем

$$\Phi_{ht}(x, t) = L_{ht}v_{ht} - (Lv)_{ht} = O(h^2 + \tau).$$

Отсюда следует, что L_{ht} аппроксимирует L со вторым порядком по x и с первым порядком по t в любой из норм (30) и (31),

где $\|\psi\|_h = \max_{x \in \omega_h} |\psi|$ либо $\|\psi\|_h = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^2 h \right)^{1/2}$ и т. д. Таким образом, в этом случае из локальной аппроксимации следует аппроксимация на сетке.

До сих пор мы рассматривали погрешность разностной аппроксимации на функциях v , принадлежащих некоторому классу V . В частности, в наших примерах в качестве V выбирался класс достаточно гладких функций.

Пусть теперь v является решением некоторого дифференциального уравнения: $v' = u$; например,

$$Lu = u'' = -f.$$

В качестве разностной аппроксимации оператора $Lv = v''$ выберем $L_h v = v_{xx}$. Выше было показано, что на равномерной сетке

$$L_h v = v'' + \frac{h^2}{12} v^{(4)} + \frac{h^4}{360} v^{(6)}(x + \theta h), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Подставим сюда $v = u$, $u'' = -f$, $u^{(4)} = -f''$ и предположим, что $f'' = 0$, а следовательно, и $f^{(k)} = 0$ для $k > 2$. Тогда $L_h u = u'' = -Lu$, т. е. погрешность аппроксимации в классе решений уравнения $Lu = -f$, где f — линейная функция, тождественно равна нулю, $\psi = 0$. В этом случае говорят, что аппроксимация точная. Если же $f'' \neq 0$, то разностный оператор можно поправить, вводя оператор

$$\tilde{L}_h v = L_h v + \frac{h^2}{12} f'',$$

и для этого оператора имеем $\tilde{\psi} = \tilde{L}_h u - Lu = O(h^4)$.

Таким образом, рассмотрение погрешности разностной аппроксимации на решении дифференциального уравнения может использоваться для повышения порядка аппроксимации.

4. Постановка разностной задачи. До сих пор мы занимались приближенной заменой дифференциальных операторов разностными. Однако задачи математической физики помимо дифференциального уравнения включают и дополнительные условия — краевые и начальные, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений.

Поэтому при формулировке разностной задачи, помимо аппроксимации дифференциального уравнения, необходимо эффективно описывать в разностном виде эти дополнительные условия. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и дополнительные условия (краевые и начальные), называют *разностной схемой*.

Сначала проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

$$u' = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0. \quad (32)$$

Выберем простейшую равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots\}$$

и поставим в соответствие задаче (32) разностную задачу:

$$\left. \begin{array}{l} y_x = \Phi, \\ y_0 = u_0 \end{array} \right\} \text{ или } \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad y_0 = u_0.$$

При этом правую часть φ_i можно задавать различными способами, например,

$$\varphi_i = f(x_i), \quad \varphi_i = 0,5(f(x_i) + f(x_{i+1})),$$

лишь бы выполнялось условие $\varphi_i - f_i = O(h)$.

Для нахождения решения получаем рекуррентную формулу $y_{i+1} = y_i + h\varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, где $y_0 = u_0$.

Пример 2. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

где A — квадратная матрица $n \times n$, $A = (a_{ik})$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ — вектор размерности n .

Введем сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots\}$ с шагом τ и напишем разностную схему Эйлера

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\therefore \quad y^j = (y_1^j, y_2^j, \dots, y_n^j).$$

Разностная задача поставлена, если при $j = 0$ задано начальное условие для вектора y^j :

$$y^0 = u_0.$$

Значение y^{j+1} вычисляется последовательно по явной формуле

$$y^{j+1} = y^j - \tau Ay^j.$$

Пример 3. Краевая задача.

$$u''(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (33)$$

Выберем опять равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}.$$

Разностную задачу запишем в виде

$$y_{xx}'' = -\varphi, \quad \text{или} \quad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (33_h)$$

В результате получим систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Такую систему можно решать, например, методом прогонки (см. гл. I, § 2).

Пример 4. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.

$$\begin{aligned} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (34)$$

Выбрав равномерную сетку

$$\omega_{ht} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

и простейший четырехточечный шаблон (см. п. 2, пример 4), получим разностную задачу

$$y_t = y_{xx} + \varphi,$$

или в индексной форме:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq j \leq N_2 - 1, \\ y_0^j &= \mu_1(t_j), \quad y_{N_1}^j = \mu_2(t_j), \\ y_i^0 &= u_0(x_i). \end{aligned} \quad (34_h)$$

Правую часть φ можно задавать различными способами

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_j), \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1/2}), \text{ и т. д.}$$

Разностная задача (34_h) является примером использования так называемой *явной схемы*: значения решения на верхнем временном слое y^{j+1} определяются через значения на предыдущем слое по явным формулам

$$y^{j+1} = y^j + \tau (y'_{xx} + \varphi^j).$$

Рассмотрим *неявную схему*

$$y_t = \hat{y}_{xx} + \varphi, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_t, \quad x \in \omega_x.$$

Для определения значений $\hat{y} = y^{j+1}$ на $(j+1)$ -м слое получаем систему алгебраических уравнений

$$y^{j+1}/\tau - y'_{xx} = F^j, \quad F^j = y^j/\tau + \varphi^j$$

или

$$\begin{aligned} y_{i-1}^{j+1} - (2 + h^2/\tau) y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1} &= -h^2 F_i^j, \quad 0 < i < N, \\ y_0^{j+1} &= \mu_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}) \end{aligned}$$

с трехдиагональной матрицей.

Эту систему можно решать методом прогонки (см. гл. I, § 2).

До сих пор мы рассматривали краевые условия первого рода, которые на разностной сетке аппроксимировались точно. В случае краевых условий третьего рода вопрос об их аппроксимации требует специального исследования. На нем мы остановимся позже.

5. О сходимости и точности схем. При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи.

Поэтому следует рассмотреть вопрос о сходимости и точности разностных схем.

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \quad (35)$$

удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (36)$$

где $f(x)$ и $\mu(x)$ — заданные функции (входные данные задачи), l — некоторый линейный дифференциальный оператор. Предположим, что решение задачи (35) — (36) существует и единственно.

Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения аргумента (точки) заменяется дискретным множеством точек (узлов) x_i — сеткой.

Пусть h — векторный параметр, характеризующий плотность расположения узлов, ω_h — множество внутренних узлов сетки, γ_h — множество граничных узлов. Задаче (35) — (36) поставим в соответствие разностную задачу

$$L_h y_h = \Phi_h, \quad x \in \omega_h; \quad l_h y_h = \chi_h \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad (37)$$

где $\Phi_h(x)$ и $\chi_h(x)$ — известные сеточные функции. Здесь L_h и l_h — операторы, действующие на сеточные функции, заданные для $x \in \omega_h = \omega_h + \gamma_h$. Решение y_h задачи (37) есть сеточная функция, определяемая в узлах сетки ω_h . Меняя h , т. е. выбирая различные сетки ω_h , мы получаем множество решений $\{y_h\}$, зависящих от параметра h . Таким образом, следует рассматривать семейство разностных задач (37), соответствующих различным значениям параметра h . Это семейство разностных задач (37) будем называть *разностной схемой*.

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий. Чтобы выяснить принципиальную возможность приближения решения u задачи (35)–(36) решением y_h задачи (37) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$ в зависимости от выбора шага $h(\varepsilon)$, мы должны сравнить y_h и $u(x)$.

Это сравнение будем проводить в пространстве H_h сеточных функций. Пусть u_h —значение $u(x)$ на сетке ω_h , так что $u_h \in H_h$.

Рассмотрим погрешность разностной схемы (37):

$$z_h = y_h - u_h.$$

Напишем условие для z_h . Подставив $y_h = z_h + u_h$ в (37), получим для z_h задачу того же типа, что и (37):

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h, \quad l_h z_h = v_h, \quad x \in \mathfrak{V}_h, \quad (38)$$

где ψ_h и v_h —невязки, равные

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h, \quad v_h = \chi_h - l_h u_h.$$

Правые части ψ_h и v_h задачи (38) называются погрешностью аппроксимации уравнения (35) разностным уравнением (37) и соответственно погрешностью аппроксимации условия (36) разностным условием $l_h y_h = \chi_h$ на решении задачи (35)–(36). Обычно говорят короче: ψ_h —погрешность аппроксимации для уравнения $L_h y_h = \varphi_h$ на решении $u(x)$ уравнения (35), v_h —погрешность аппроксимации для условия $l_h y_h = \chi_h$ на решении задачи (35)–(36).

Для оценки погрешности схемы z_h и погрешности аппроксимации ψ_h , v_h введем на множестве сеточных функций нормы $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$ и $\|\cdot\|_{(3_h)}$ соответственно.

Будем говорить, что *решение разностной задачи (37) сходится к решению задачи (35)–(36)* (схема (37) сходится), если

$$\|z_h\|_{(1_h)} = \|y_h - u_h\|_{(1_h)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0,$$

или $\|z_h\|_{(1_h)} = \rho(|h|)$, где $\rho(|h|) \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

Разностная схема (37) сходится со скоростью $O(|h|^n)$ или имеет n -й порядок точности (имеет точность $O(|h|^n)$), если при достаточно малом $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\|z_h\|_{(1_h)} = \|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M|h|^n,$$

где $M > 0$ —постоянная, не зависящая от $|h|$, $n > 0$.

Говорят, что *разностная схема (37) обладает n -м порядком аппроксимации*, если

$$\|\psi_h\|_{(2_h)} = O(|h|^n), \quad \|v_h\|_{(3_h)} = O(|h|^n).$$

Обозначая f_h и $(Lu)_h$ значения $f(x)$ и $Lu(x)$ на сетке ω_h и учитывая, что $(f - Lu)_h = 0$, запишем ψ_h в виде

$$\psi_h = (\varphi_h - L_h u_h) - (f_h - (Lu)_h) = (\varphi_h - f_h) + ((Lu)_h - L_h u_h) = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации схемы ψ_h складывается из погрешности аппроксимации $\psi_h^{(1)} = \varphi_h - f_h$ правой части и погрешности аппроксимации $\psi_h^{(2)} = (Lu)_h - L_h u_h$ дифференциального оператора.

Так как ψ_h есть погрешность аппроксимации в классе решений дифференциального уравнения, то условие $\|\psi_h\|_{(\omega_h)} = O(|h|^n)$ может быть выполнено, если $\psi_h^{(1)}$ и $\psi_h^{(2)}$ не имеют по отдельности n -го порядка. Иллюстрирующий это утверждение пример был рассмотрен в п. 3.

Возникает вопрос: как зависит порядок точности схемы от порядка аппроксимации на решении? Погрешность $z_h = y_h - u_h$ есть решение задачи (38) с правой частью ψ_h (и v_h). Поэтому вопрос о связи порядка точности с порядком аппроксимации сводится к вопросу о характере зависимости решения разностной задачи от правой части. Если z_h непрерывно (и притом равномерно по h) зависит от ψ_h и v_h (схема устойчива), то порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Точное определение устойчивости разностной схемы будет дано в следующем параграфе.

Остаковимся сначала на вопросе о повышении порядка аппроксимации разностной схемы на решении дифференциального уравнения.

6. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы. В п. 3 было замечено, что погрешность аппроксимации дифференциального оператора на решении дифференциального уравнения может быть повышена без увеличения шаблона. Рассмотрим этот прием на примере двух разностных схем.

Пусть дана разностная схема

$$y_x = \varphi, \quad y_0 = u_0$$

для задачи (32) ($u' = f(x)$, $u(0) = u_0$).

Найдем невязку на решении $u = u(x)$ уравнения $u' = f(x)$:

$$\psi = u_x - \varphi.$$

Разложим

$$u(x+h) = u(x) + hu' + \frac{h^2}{2} u'' + \frac{h^3}{6} u''' + O(h^4)$$

и учтем, что $u' = f$, $u'' = f'$, ..., тогда получим

$$\begin{aligned}\Psi &= u' + \frac{h}{2} u'' + \frac{h^2}{6} u''' - \varphi + O(h^3) = \\ &= f(x) - \varphi(x) + \frac{h}{2} f'(x) + \frac{h^2}{6} f''(x) + O(h^3) = \\ &= f(x) - \varphi(x) + \frac{h}{2} f'(x) + \frac{h^2}{6} u''' + O(h^3).\end{aligned}$$

Выбирая $\varphi = f(x) + 0,5hf'$ или $\varphi_i = (f + 0,5hf_x)_i$, получаем схему второго порядка аппроксимации на решении $u = u(x)$:

$$\Psi = O(h^2).$$

Учитывая затем, что $u''' = f'' = f_{xx} + O(h^2)$, $f' = f_x - 0,5hf_{xx} + O(h^2)$, найдем

$$\Psi = f + \frac{h}{2} f_x - \frac{h^2}{12} f_{xx} + O(h^3) - \varphi,$$

т. е. схема $y_x = \varphi$ с правой частью

$$\varphi = f + \frac{h}{2} f_x - \frac{h^2}{12} f_{xx}$$

имеет третий порядок аппроксимации $\Psi = O(h^3)$ на решении $u = u(x)$.

Рассмотрим теперь для краевой задачи

$u'' - qu = -f(x)$, $0 < x < 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, $q = \text{const}$, трехточечную разностную схему

$$y_{xx} - dy = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0.$$

Покажем, что можно повысить ее порядок аппроксимации на решении $u = u(x)$ без увеличения шаблона, если выбрать соответствующие d и φ .

Пусть $u = u(x)$ — решение исходной задачи. Рассмотрим невязку $\Psi = u_{xx} - du + \varphi$.

Подставим сюда

$$u_{xx} = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(4)} + O(h^4)$$

и учтем уравнение $u'' = qu - f(x)$:

$$\Psi = (q - d)u + (\varphi - f) + \frac{h^2}{12} u^{(4)} + O(h^4).$$

Отсюда видно, что $\Psi = O(h^2)$ при $d = q$, $\varphi = f$.

Подставляя $u^{(4)} = qu'' - f'' = q(qu - f) - f_{xx} + O(h^2)$ в формулу для ψ , будем иметь

$$\psi = \left[\varphi - f - \frac{h^2}{12} (f_{xx} + qf) \right] - \left[d - \left(q - \frac{q^2 h^2}{12} \right) \right] u + O(h^4).$$

Таким образом, если положить

$$d = q - \frac{q^2 h^2}{12}, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} (f_{xx} + qf),$$

то получаем схему повышенного порядка аппроксимации

$$\psi = O(h^4)$$

на решении $u(x)$ исходного уравнения.

Остановимся теперь на связанном с постановкой разностных задач вопросе об аппроксимации краевых и начальных условий на решении исходной задачи.

7. Аппроксимация краевых и начальных условий. Из п. 5 следует, что точность схемы зависит от порядка аппроксимации на решении исходной задачи не только уравнения, но и дополнительных условий (краевых или начальных).

В этом пункте мы рассмотрим ряд примеров повышения порядка аппроксимации краевых и начальных условий без увеличения шаблона.

Пример 1. Третья краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} - qu &= -f(x), \quad q = \text{const}, \quad 0 < x < 1, \\ \frac{du(0)}{dx} &= \sigma u(0) - \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Выбрав равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$, запишем разностное уравнение в виде

$$y_{xx} - qy = -\varphi, \tag{40}$$

где $\varphi_i = f(x_i)$, если $f(x)$ — непрерывная функция.

Краевое условие при $x = 1$ удовлетворяется точно:

$$y(1) = y_N = \mu_2. \tag{41}$$

Первую производную $u'(0)$ заменим правой разностной производной $y_{x,0} = (y_1 - y_0)/h$ и краевое условие при $x = 0$ напишем в виде

$$y_{x,0} = \sigma y_0 - \mu_1 \quad \text{или} \quad l_h y = \mu_1, \tag{42}$$

причем оператор l_h определен на двухточечном шаблоне $(0, h)$. Подставляя сюда $y = z + u$, где u — решение задачи (29), полу-

чим для погрешности z условие

$$z_{x,0} = \sigma z_0 - v_1,$$

где v_1 — погрешность аппроксимации для краевого условия на решении, равная

$$v_1 = \mu_1 + u_{x,0} - \sigma u_0.$$

Разлагая $u(x)$ в окрестности узла $x=0$ по формуле Тейлора

$$u_1 = u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2} u''_0 + O(h^3),$$

находим

$$u_{x,0} = u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2), \quad (43)$$

$$v_1 = [\mu_1 + u'(0) - \sigma u(0)] + 0,5hu''(0) + O(h^2) = 0,5hu''(0) + O(h^2),$$

так как $\mu_1 + u'(0) - \sigma u(0) = 0$. Отсюда видно, что $v_1 = O(h)$. Подправим условие (42) так, чтобы порядок аппроксимации составлял $O(h^2)$. Используем для этого тот факт, что $u(x)$ есть решение исходной задачи (39). Выразим из дифференциального уравнения $u''(0)$:

$$u''(0) = qu(0) - f(0). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), получим

$$u_{x,0} - 0,5h(qu(0) - f(0)) = u'(0) + O(h^2), \quad (45)$$

т. е. выражение в левой части (45) аппроксимирует производную $u'(x)$ в точке $x=0$ на решении уравнения $u'' - qu = f$ со вторым порядком.

Отсюда и из (42) следует, что краевое условие

$$y_{x,0} = \bar{\sigma} y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\sigma} = \sigma + 0,5hq, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0) \quad (46)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении задачи (39).

Отметим, что нам удалось повысить порядок аппроксимации, не увеличивая числа узлов сетки (шаблона), которые использовались для аппроксимации краевого условия.

Пример 2. Третья краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (47)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \sigma u(0, t) - \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t).$$

На сетке ω_{ht} , описанной в п. 1, напишем явную схему

$$y_t = y_{\bar{x}x} + \Phi, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad (48)$$

где $\Phi = \Phi_i^l = f(x_i, t_j)$.

Эта схема имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau)$. Построим разностную аппроксимацию того же порядка для краевого условия при $x=0$. Для этого рассмотрим

$$u_{x,0} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Пользуясь уравнением теплопроводности при $x=0$, найдем $\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - f(0,t)$. Отсюда следует, что

$$u_x(0,t) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - f(0,t) \right) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + O(h^2),$$

т. е. выражение, стоящее слева, аппроксимирует производную $\partial u / \partial x$ при $x=0$ с точностью $O(h^2)$.

Заменяя $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0}$ разностной производной $u_{t,0} = \frac{u(0,t+\tau) - u(0,t)}{\tau}$, получим разностное краевое условие при $x=0$:

$$y_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \sigma y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0,t). \quad (49)$$

Оно имеет аппроксимацию $O(h^2 + \tau^2)$ на решении задачи (47). В случае неявной схемы

$$y_t = \hat{y}_{xx} + \varphi$$

вместо (49) следует взять условие

$$\hat{y}_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \hat{\sigma} \hat{y}_0 - \hat{\mu}_1, \quad \hat{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0,t). \quad (50)$$

Пример 3. Гиперболическое уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(0,t) = u_1(t), \quad u(1,t) = u_2(t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x). \quad (51)$$

Очевидно, что при аппроксимации задачи (51) особое внимание следует обратить на запись в разностном виде начального условия для производной $\partial u / \partial t$.

Пусть дана равномерная по x и t сетка ω_{ht} с шагами h и τ (см. п. 1).

Если мы воспользуемся простейшей аппроксимацией

$$u_t(x,0) = \bar{u}_0(x),$$

то погрешность аппроксимации будет величиной $O(\tau)$. Представим $u_t(x,0)$ в виде

$$u_t(x,0) = \frac{u(x,\tau) - u(x,0)}{\tau} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Обратимся теперь к исходному дифференциальному уравнению и найдем

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + f(x, 0) = Lu_0(x) + f(x, 0), \quad Lu_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},$$

так как $\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{d^2 u_0(x)}{dx^2}$. Отсюда следует, что

$$u_t(x, 0) - 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + O(\tau^2).$$

Поэтому разностное начальное условие $y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$, где $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0))$, аппроксимирует на решении задачи (41) условие $\partial u(x, 0)/\partial t = u_0(x)$ со вторым порядком по τ .

Условие $u(x, 0) = u_0(x)$ и краевые условия в данном случае аппроксимируются точно. В качестве разностной аппроксимации уравнения можно взять, например, одну из схем, рассмотренных в п. 2.

Из предыдущего изложения следует, что при повышении порядка аппроксимации краевых и начальных условий мы использовали существование и непрерывность производных, входящих в уравнение, на границе области (при $x=0$ или $t=0$), а также существование и ограниченность третьих производных решения.

Пример 4. Трехслойная разностная схема для уравнения теплопроводности. Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t). \end{aligned} \tag{52}$$

Для решения уравнения теплопроводности (52) часто применяются так называемые трехслойные схемы, использующие значения сеточной функции $y^{j-1}(x)$, $y^j(x)$, $y^{j+1}(x)$ на трех временных слоях t_{j-1} , t_j , t_{j+1} .

Например, трехслойная симметричная схема на равномерной сетке ω_h с шагами h и τ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} &= \Lambda (\sigma y^{j+1} + (1 - 2\sigma) y^j + \sigma y^{j-1}) + \Phi^j, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^j = u_1^j, \quad y_N^j = u_2^j, \end{aligned} \tag{53}$$

где $\Lambda y = y_{xx}$, σ — вещественный параметр, $\Phi^j = f(x_i, t_j)$.

Так как центральная разностная производная по t аппроксимирует $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_j}$ со вторым порядком по τ , а $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)$, то схема (53) аппроксимирует уравнение (52) с $O(h^2 + \tau^2)$. Не-

трудно, однако, заметить, что задача (53) недоопределена. Для применения трехслойной схемы требуется задать еще одно начальное условие, например, задать $y(x, t)$ на первом слое. Естественно потребовать, чтобы введение этого условия сохраняло аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$.

Можно указать два способа задания $y(x, \tau)$. Первый способ состоит в том, что мы делаем первый шаг по двухслойной схеме

$$\frac{y^1 - y^0}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y^1 + y^0) + \varphi^0,$$

обеспечивающей определение $y(x, \tau)$ с точностью $O(\tau^2 + h^2)$. Второй способ состоит в том, что мы ищем значение $y(x, \tau)$ в виде

$$y(x, \tau) = u_0(x) + \tau \mu(x)$$

и подбираем μ так, чтобы погрешность $y(x, \tau) - u(x, \tau)$ не пре-
восходила $O(\tau^2 + h^2)$. Подставим в формулу

$$u(x, \tau) - u_0(x) = \tau \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} + O(\tau^3)$$

значение $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}$, исходя из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = Lu_0 + f(x, 0), \quad Lu_0 = \frac{d^2 u_0}{dx^2}.$$

Тогда получим

$$\mu = Lu_0 + f(x, 0),$$

и, следовательно,

$$y(x, \tau) = u_0(x) + \tau (u_0''(x) + f(x, 0)).$$

§ 2. Устойчивость разностной схемы

1. Примеры устойчивых и неустойчивых разностных схем. Использование разностных схем позволяет свести решение задачи для дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом правые части уравнений, краевые и начальные данные, которые мы будем в дальнейшем называть одним общим термином — *входные данные*, — задаются с определенной погрешностью. В процессе самого численного решения системы также неизбежны ошибки, связанные с округлением. Естественно потребовать от разностной схемы, чтобы малые ошибки, допущенные во входных данных, не нарастили в процессе вычислений и не приводили к искажению решения.

Схемы, которые в процессе счета усиливают начальные неопределенные величины, именуются неустойчивыми и не могут быть использованы на практике.

Прежде чем дать определение устойчивости разностной схемы по входным данным, к понятию которого мы интуитивно подошли, приведем несколько примеров.

Пример 1. Устойчивая схема. Пусть

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Точным решением задачи (1), как нетрудно видеть, является функция $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$. Это решение не нарастает с ростом x : $|u(x)| < |u_0|$ при $\alpha > 0$ и, следовательно, $u(x)$ непрерывно зависит от u_0 .

Задачу (1) на равномерной сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots\}$ аппроксимирует разностная задача

$$(y_i - y_{i-1})/h + \alpha y_i = 0, \quad y_0 = u_0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Задачу (2) можно переписать в виде

$$y_i = s y_{i-1}, \quad s = 1/(1 + \alpha h), \quad i = 1, 2, \dots, \quad y_0 = u_0.$$

Отсюда следует

$$y_i = s^i y_0.$$

Рассмотрим фиксированную точку \bar{x} и выберем такую последовательность шагов h , чтобы \bar{x} все время оставалось узловой точкой, $\bar{x} = i_0 h$. Тогда при измельчении сетки, $h \rightarrow 0$, номер i_0 , соответствующий выбранной нами точке \bar{x} , неограниченно возрастает.

Вычислим значение y в этой точке

$$y(\bar{x}) = y_{i_0} = s^{i_0} y_0.$$

Так как $|s| < 1$ при $\alpha > 0$ и любых h , то $|y(\bar{x})| \leq |s|^{i_0} |y_0| < |y(0)|$ при любом h .

Из последнего неравенства видно, что решение разностной задачи (2) непрерывно зависит от начальных данных. В таких случаях будем говорить, что разностная схема устойчива по начальным данным.

Пример 2. Неустойчивая схема. Для задачи (1) рассмотрим схему

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

где $\sigma > 1$ — числовой параметр. Так как схема трехточечная (разностное уравнение имеет второй порядок), то помимо y_0

следует задать y_1 . При любом σ схема (3) имеет, по крайней мере, первый порядок аппроксимации. Если положить $\bar{u}_0 = (1 - \alpha h) u_0$, то $\bar{u}_0 - u(h) = O(h^2)$. Частные решения разностного уравнения (3) ищем в виде $y_i = s^i$. Подставляя $y_i = s^i$ в (3), получим для s квадратное уравнение

$$(\sigma - 1)s^2 - (2\sigma - 1 + \alpha h)s + \sigma = 0, \quad (4)$$

которое имеет два различных корня

$$s_{1,2} = \frac{2\sigma - 1 + \alpha h \pm \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2}}{2(\sigma - 1)}.$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_i = As_1^i + Bs_2^i. \quad (5)$$

Полагая $i = 0$ и $i = 1$ и учитывая, что $y_0 = u_0$, $y_1 = \bar{u}_0$, найдем постоянные A и B :

$$A = \frac{\bar{u}_0 - s_2 u_0}{s_1 - s_2}, \quad B = \frac{s_1 u_0 - \bar{u}_0}{s_1 - s_2}.$$

Так как $\sigma > \sigma - 1 > 0$, то $s_1 s_2 > 1$. Покажем, что $s_2 < 1$ при любых αh . В самом деле, разность

$$2(\sigma - 1) - (2\sigma - 1 + \alpha h) - \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2} = \\ = \sqrt{(1 + \alpha h)^2 + 4(\sigma - 1)\alpha h} - (1 + \alpha h) > 0$$

при $\sigma > 1$.

Очевидно также, что $s_1 > 1$ при любом значении αh , так как $s_1 s_2 > 1$.

Из формулы $y_i = As_1^i + Bs_2^i$ видно, что $y_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, если $A \neq 0$. Можно выбрать значение $y_1 = \bar{u}_0$ так, что $A = 0$. Для этого достаточно положить $\bar{u}_0 = u_0 s_2$. Однако в процессе вычислений из-за ошибок округления решение s_1^i неизбежно появляется, что приводит к неустойчивости указанного типа. При фиксированном h эта схема приводит к нарастанию решения с ростом $x_i = ih$. Сгущение сетки (уменьшение h) приводит к нарастанию ошибок в фиксированной точке $\bar{x} = i_0 h$, так как $i_0 = \bar{x}/h$ растет с уменьшением h . Малое изменение начальных данных приводит при $h \rightarrow 0$ к неограниченному возрастанию решения задачи в любой фиксированной точке \bar{x} .

Ниже приводятся результаты расчетов для задачи (3) при $u_0 = 1$, $y_1 = s_2$, где s_2 — меньший корень квадратного уравнения (4). При этих начальных данных точное решение уравнения (3) имеет вид $y_i = Bs_2^i$, так как $A = 0$. Однако из-за ошибок округления в формуле (5) решения возникает первое слагаемое,

которое растет с ростом i и приводит к переполнению арифметического устройства ЭВМ.

Были проведены расчеты следующих вариантов на ЭВМ БЭСМ-6:

- 1) $\sigma = 1,1; \alpha h = 0,01; s_1 = 11,11; s_2 = 0,99;$
- 2) $\sigma = 1,1; \alpha h = 0,1; s_1 = 12,09; s_2 = 0,91;$
- 3) $\sigma = 2; \alpha h = 0,01; s_1 = 2,02; s_2 = 0,99;$
- 4) $\sigma = 2; \alpha h = 0,1; s_1 = 2,17; s_2 = 0,92.$

В таблице 1 приведены значения y_i в некоторых узлах сетки ω_h для всех четырех вариантов. В последней строке таблицы указаны номера узлов сетки, в которых наступил аварийный останов ЭВМ (авост).

Таблица 1

Вариант 1)		Вариант 2)		Вариант 3)		Вариант 4)	
i	y_i	i	y_i	i	y_i	i	y_i
6	0,952	7	0,567	32	0,724	28	$8,97 \cdot 10^{-2}$
7	0,942	8	0,516	33	0,703	29	$7,87 \cdot 10^{-2}$
11	0,900	10	0,420	37	0,260	32	$3,78 \cdot 10^{-3}$
12	0,832	11	0,306	38	-0,196	33	$-7,41 \cdot 10^{-2}$
13	0,174	12	-0,641	39	-1,11	34	-0,237
14	-7,05	13	$-1,17 \cdot 10^1$	40	-2,95	40	$-3,17 \cdot 10^1$
15	$-8,72 \cdot 10^1$	14	$-1,45 \cdot 10^2$	50	$-4,10 \cdot 10^3$	50	$-7,84 \cdot 10^4$
16	$-9,77 \cdot 10^2$	15	$-1,76 \cdot 10^3$	60	$-4,64 \cdot 10^6$	60	$-1,54 \cdot 10^8$
20	$-1,49 \cdot 10^7$	20	$-4,54 \cdot 10^8$	80	$-5,92 \cdot 10^{12}$	80	$-1,19 \cdot 10^{15}$
25	$-2,52 \cdot 10^{12}$	25	$-1,17 \cdot 10^{14}$	90	$-6,69 \cdot 10^{25}$	90	$-2,94 \cdot 10^{18}$
32	∞	30	∞	100	∞	92	∞

2. Задача Коши для системы уравнений первого порядка. Условие устойчивости схемы Эйлера. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (6)$$

где $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$ — искомый вектор, $u_0 = (u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \dots, u_0^{(n)})$ — заданный вектор размерности n , $A = (a_{ij})$ — симметричная положительно определенная матрица $n \times n$.

Пусть H_n — линейное пространство векторов со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u^{(i)} v^{(i)} \quad \text{и нормой} \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Матрице A соответствует линейный самосопряженный оператор $A: H_n \rightarrow H_n$, $A = A^* > 0$.

Обозначим $\{\lambda_k, \xi_k\}$ множество собственных значений и ортонормированных собственных векторов оператора A :

$$A \xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

так что

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

$$(\xi_k, \xi_s) = \delta_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

Решение задачи (6) будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{s=1}^n \alpha_s(t) \xi_s.$$

Подставляя это выражение в уравнение (6), получим

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{d\alpha_s}{dt} + \lambda_s \alpha_s \right) \xi_s = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{d\alpha_k}{dt} + \lambda_k \alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{-\lambda_k t}, \text{ так что}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(0) e^{-\lambda_k t} \xi_k. \quad (7)$$

Потребуем выполнения начального условия

$$u(0) = u_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k(0) \xi_k,$$

так что

$$\alpha_k(0) = (u_0, \xi_k)$$

и

$$\|u_0\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2(0).$$

Из (7) видно, что

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_k(0) \alpha_s(0) e^{-\lambda_k t} e^{-\lambda_s t} (\xi_k, \xi_s) = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2(0) e^{-2\lambda_k t} \leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2(0) = e^{-2\lambda_1 t} \|u_0\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|u(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|u_0\|. \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи Коши убывает с ростом t :

$$\|u(t)\| < \|u_0\| \text{ при } t > 0. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь схему Эйлера для задачи Коши:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\tau} + Ay_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y_0 = u_0, \quad (10)$$

где $y_j = y(t_j)$, $t_j = j\tau$.

Решение этой задачи ищем в виде суммы

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_k q_k^j \xi_k, \quad (11)$$

так что

$$y_0 = u_0 = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k, \quad a_k = (u_0, \xi_k).$$

Выражение (11) удовлетворяет уравнению (10), если

$$\sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{q_k - 1}{\tau} + \lambda_k \right) q_k^j \xi_k = 0,$$

т. е.

$$\frac{q_k - 1}{\tau} + \lambda_k = 0,$$

откуда находим

$$q_k = 1 - \tau \lambda_k.$$

Из формулы

$$\|y_j\|^2 = \sum_{k=1}^n |q_k^j|^2 a_k^2$$

видно, что

$$\|y_j\|^2 \leq \max_k |q_k^j|^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 = \max_k |q_k^j|^2 \|y_0\|^2 < \|y_0\|^2,$$

если $\max_k |q_k| < 1$, и $\|y_j\|^2 > \|y_0\|^2$, если $\min_k |q_k| > 1$.

Неравенство

$$\|y_j\| < \|y_0\| \quad (12)$$

является аналогом (9) и выражает устойчивость решения задачи (10).

Условие $\max_k |q_k| < 1$ выполнено, если $-1 < q_k = 1 - \tau \lambda_k < 1$, т. е. $\tau \lambda_k < 2$ для любых $k = 1, 2, \dots, n$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\tau < \frac{2}{\Delta}, \quad (13)$$

где $\Delta = \max_k \lambda_k = \lambda_n$.

Если $\tau \Delta > 2$, то, полагая $y_0 = c \xi_n$, мы получим, что $a_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$, $a_n = c$ и

$$y_j = cq_n^j \xi_n = q_n^j y_0, \quad \|y_j\| = |q_n|^j \|y_0\| > \|y_0\|,$$

так как $|q_n| = \tau \lambda_n - 1 = \tau \Delta - 1 > 1$. Если, например, $\tau \Delta = 2 + p$, $p > 0$, то $|q_n| = 1 + p$ и $|q_n^j| = (1 + p)^j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. В этом случае схема (10) неустойчива.

Можно задать начальное условие так:

$$y_0 = c \xi_1.$$

Тогда

$$y_j = q_1^j y_0, \quad \|y_j\| = |q_1|^j \|y_0\|,$$

где

$$q_1 = 1 - \tau \lambda_1.$$

Может оказаться, что $\tau > 2/\Delta$, но $\tau \lambda_1 < 2$ и $|q_1| < 1$. В этом случае

$$\|y_j\| \leq |q_1|^j \|y_0\| < \|y_0\|. \quad (14)$$

Однако в силу ошибок округления, y_0 задается с некоторой погрешностью ε , которую можно разложить в сумму

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \xi_k, \quad \varepsilon_k = (\varepsilon, \xi_k).$$

Каково бы ни было ε_n , можно указать такое j_0 , что $|\varepsilon_n| |q_n|^{j_0} > M_\infty$, где M_∞ — машинная бесконечность, т. е. при $j = j_0$ наступает авост, так как $|q_n| > 1$.

Поэтому схема (10) неустойчива по отношению к ошибкам округления при любых начальных данных, если только

$$\tau \Delta > 2.$$

Если добиваться, чтобы решение y_j задачи (10) удовлетворяло оценке, аналогичной неравенству (8), то надо дополнительно потребовать, чтобы

$$1 - \tau \lambda_1 > \tau \lambda_n - 1,$$

т. е.

$$\tau < \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}.$$

При этом условии

$$\|y_j\| \leq \max_k |q_k|^j \|y_0\| \leq (1 - \tau \lambda_1)^j \|y_0\| < e^{-\lambda_1 \tau} \|y_0\|,$$

так как

$$|q_1| > |q_k|, \quad k > 1, \quad 1 - \tau \lambda_1 < e^{-\lambda_1 \tau}.$$

В качестве примера рассмотрим систему двух уравнений

$$\frac{du}{dt} + au + bv = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} + bu + av = 0$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, где $a = \frac{1}{2}(\Delta + \delta)$, $b = \frac{1}{2}(\Delta - \delta)$, а собственные числа и собственные векторы

$$\lambda_1 = \delta, \quad \lambda_2 = \Delta, \quad \xi_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad \xi_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Схема (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{\tau} + ay_j + bz_j &= 0, \\ \frac{z_{j+1} - z_j}{\tau} + by_j + az_j &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{15}$$

Положим

$$y_0 = 1/\sqrt{2}, \quad z_0 = -1/\sqrt{2}, \tag{16}$$

т. е. вектор $\{y_0, z_0\} = \xi_1$ — первому собственному вектору.

Рассмотрим результаты расчетов задачи (15), (16) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta &= 1, \quad \Delta = 2, \quad \tau = 3/\Delta, \\ 2) \quad \delta &= 10, \quad \Delta = 400, \quad \tau = 6/\Delta. \end{aligned}$$

В обоих случаях $|1 - \tau \delta| < 1$, поэтому для решения задачи (15), (16) справедлива оценка (14). Однако для обоих вариантов $\tau > 2/\Delta$, поэтому из-за ошибок округления вычислительный процесс неустойчив, т. е. при достаточно больших j решение начинает расти, что приводит к аварийному останову ЭВМ.Результаты расчетов на ЭВМ БЭСМ-6 приведены в таблице 2, где даны значения функций y_j и z_j для некоторых j . При расчете варианта 1) авария наступила на 105-м шаге по времени, а при расчете варианта 2) — на 46-м шаге.

Отметим, что для варианта 1) точность задания первого собственного вектора ξ_1 играет важную роль. Когда были заданы

$$y_0 = 1, \quad z_0 = -1, \quad (17)$$

то переполнение арифметического устройства произошло на 197-м шаге по времени (сначала y_j и z_j уменьшились до величин порядка 10^{-19} при $j \approx 65-70$, после чего начали нарастать).

Таблица 2

Вариант 1)			Вариант 2)		
j	y_j	z_j	j	y_j	z_j
8	$-5,52 \cdot 10^{-3}$	$5,52 \cdot 10^{-3}$	8	0,227	-0,227
9	$2,76 \cdot 10^{-3}$	$-2,76 \cdot 10^{-3}$	9	0,193	-0,193
10	$-1,38 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	10	0,164	-0,164
17	$1,08 \cdot 10^{-5}$	$-1,08 \cdot 10^{-5}$	13	0,101	-0,101
18	$-5,46 \cdot 10^{-6}$	$5,33 \cdot 10^{-6}$	14	$8,49 \cdot 10^{-2}$	$-8,61 \cdot 10^{-2}$
19	$2,82 \cdot 10^{-6}$	$-2,57 \cdot 10^{-6}$	15	$7,56 \cdot 10^{-2}$	$-6,96 \cdot 10^{-2}$
20	$-1,60 \cdot 10^{-6}$	$1,09 \cdot 10^{-6}$	16	$4,69 \cdot 10^{-2}$	$-7,65 \cdot 10^{-2}$
25	$8,18 \cdot 10^{-6}$	$8,10 \cdot 10^{-6}$	17	0,127	$2,16 \cdot 10^{-2}$
26	$-1,63 \cdot 10^{-6}$	$-1,62 \cdot 10^{-6}$	18	-0,326	-0,415
27 *)	$3,26 \cdot 10^{-6}$		19	1,89	1,81
28	$-6,51 \cdot 10^{-6}$		20	-9,23	-9,30
30	$-2,60 \cdot 10^{-4}$		21 *)	$4,63 \cdot 10^1$	
50	$-2,73 \cdot 10^2$		22	$-2,32 \cdot 10^3$	
68	$-7,16 \cdot 10^7$		38	$-3,53 \cdot 10^{13}$	
69	$1,43 \cdot 10^8$		39	$1,77 \cdot 10^{14}$	
70	$-2,86 \cdot 10^8$		40	$-8,83 \cdot 10^{14}$	
105	∞		46	∞	

*) Начиная с этого номера j имеем: $z_j = y_j$

В отличие от этого при расчете варианта 2) начальные данные (17) не изменили существенно результатов. Авост наступил при $j = 47$.

Если для $\delta = 1$, $\Delta = 2$ задать $\tau = 2,1/\Delta$, при котором условие $\tau \leq 2/\Delta$ нарушено слабо (превышение $\tau - 5\%$), то авост наступает на 760—790 шагах по времени.

Разобранные примеры позволяют сделать вывод, что понятие устойчивости по входным данным совпадает с понятием непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных.

3. О понятии корректности разностной задачи. Применительно к задачам математической физики принято говорить, что задача поставлена корректно, если выполнены два условия:

1) задача однозначно разрешима при любых входных данных из некоторого класса.

2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Аналогично определяют понятие корректности разностной задачи. Пусть y_h — решение, а Φ_h — входные данные некоторой разностной задачи. Они зависят от параметра h (шага сетки). Меняя h , мы получим последовательности решений $\{y_h\}$ и входных данных $\{\Phi_h\}$. Таким образом, мы рассматриваем не одну разностную задачу, а семейство задач, зависящее от параметра h . Понятие корректности вводится для семейства разностных задач (схем) при $|h| \rightarrow 0$.

Будем говорить, что *разностная задача (схема) корректна*, если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:

1) решение y_h разностной задачи существует и единственno для всех входных данных Φ_h из некоторого допустимого семейства,

2) решение y_h непрерывно зависит от Φ_h , причем эта зависимость равномерна относительно h .

Более точно, второе условие означает, что существует такая постоянная $M > 0$, не зависящая от h , что при достаточно малом $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\tilde{\Phi}_h - \Phi_h\|_{(2_h)}, \quad (18)$$

где \tilde{y}_h — решение задачи с входными данными $\tilde{\Phi}_h$, а $\|\cdot\|_{(1_h)}$ и $\|\cdot\|_{(2_h)}$ — нормы на множестве сеточных функций, заданных на сетке ω_h .

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, выраженное неравенством (18), называется *устойчивостью* схемы по входным данным или просто *устойчивостью*¹ (см. § 4, п. 2).

4. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.

Пусть дана непрерывная задача

$$Lu = f(x) \quad \text{при } x \in G, \quad l u = \mu(x) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad (19)$$

и пусть на сетке $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ ее аппроксимирует разностная задача

$$L_h y_h = \Phi_h \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad l_h y_h = \tilde{\mu}_h \quad \text{при } x \in \gamma_h. \quad (20)$$

Задача для погрешности $z_h = y_h - u_h$, где u_h — значение (проекция) решения и задачи (19) на сетке ω_h , имеет вид

$$L_h z_h = \Psi_h \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad l_h z_h = \nu_h \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad (21)$$

где ψ_h , v_h — погрешности аппроксимации уравнения и дополнительного условия. Вместо (21) напишем формально

$$\tilde{L}_h z_h = \tilde{\psi}_h.$$

Если оператор \tilde{L}_h линеен и разностная схема корректна, то, в силу (18), будем иметь

$$\|z_h\|_{(1_h)} \leq M \|\tilde{\psi}_h\|_{(2_h)} \text{ или } \|z_h\|_{(1_h)} \leq M (\|\psi_h\|_{(2_h)} + \|v_h\|_{(3_h)}). \quad (22)$$

Отсюда видно, что если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится (обычно говорят «из аппроксимации и устойчивости следует сходимость»), причем порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется ее порядком аппроксимации.

Из сказанного выше следует, что изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости, т. е. к получению оценок вида (22), называемых *априорными оценками*.

Отметим, что решение z_h и правая часть ψ_h разностной задачи оцениваются, вообще говоря, в разных нормах (являются элементами разных пространств).

Ранее уже приводились примеры норм, в которых оцениваются решение и погрешность аппроксимации на сетке ω_h . К сожалению, мы не можем сейчас же получить оценки устойчивости вида (22) для конкретных разностных задач. Для этого нам понадобится вспомогательный математический аппарат, а именно: формулы суммирования, разностные формулы Грина, простейшие сеточные аналоги теорем вложения. Такие минимальные средства позволяют получить оценки решения разностных аналогов краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. На этом примере мы познакомимся с типичными ситуациями, которые возникают для значительно более сложных задач при изучении устойчивости, аппроксимации и точности разностных схем.

§ 3. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем

1. Некоторые разностные формулы. В дальнейшем для преобразования различных разностных выражений нам потребуются формулы разностного дифференцирования произведения, формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина. В этом пункте мы получим эти формулы, проводя аналогию с соответствующими формулами дифференциального исчисления (аналогичные формулы были получены в § 2 гл. I при изучении разностных операторов второго порядка, однако, там использо-

вались другие обозначения; установление связи между формулами п. 12, § 2 гл. I и формулами данного пункта не представляет труда).

1) **Формулы разностного дифференцирования произведения.** Как известно, в дифференциальном исчислении имеет место следующая формула дифференцирования произведения функций $u(x)$, $v(x)$:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Выше, в § 1, п. 2, для сеточных функций были введены два типа разностных производных — левые и правые. Соответственно этому имеется и две формулы разностного дифференцирования произведения:

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x, \quad (1)$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$f^{(\pm 1)} = f(x \pm h), \quad f_x = \frac{f^{(+1)} - f}{h}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f - f^{(-1)}}{h}.$$

Обратим внимание на то, что в этих формулах происходит сдвиг индекса. Докажем, например, первое из этих равенств. Записывая равенство (1) в индексной форме

$$\frac{u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_i}{h} = \frac{u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_{i+1}}{h} + \frac{u_i v_{i+1} - u_i v_i}{h},$$

непосредственно убеждаемся в его справедливости.

2) **Формулы суммирования по частям.** Рассмотрим формулу интегрирования по частям

$$\int_0^1 uv' dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 u' v dx.$$

Для сеточных функций, как и в предыдущем случае, имеют место аналогичные формулы двух типов

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v], \quad (3)$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v). \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad [u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h. \quad (5)$$

Докажем, например, (3). На основании формулы (1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (uv_x)_i h &= \sum_{i=1}^{N-1} (uv)_{x,i} h - \sum_{i=1}^{N-1} (u_x v^{(i+1)})_i h = \\ &= (uv)_N - (uv)_1 - \sum_{i=2}^N (u_{\tilde{x}} v)_i h = \\ &= (uv)_N - u_1 v_1 - \sum_{i=1}^N u_{\tilde{x},i} v_i h + (u_{\tilde{x}} v)_1 h. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно далее, что

$$h (u_{\tilde{x}} v)_1 = u_1 v_1 - u_0 v_1.$$

Подставляя последнее выражение в (6) и учитывая (5), получим (3).

В дальнейшем мы будем часто использовать неравномерную сетку, которую, как уже говорилось в § 1, п. 1, в отличие от равномерной будем обозначать через \hat{h}_i . На этой сетке формулы скалярного произведения и разностные формулы суммирования по частям выглядят несколько иначе:

$$\begin{aligned} (u, v)_* &= \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \hat{h}_i, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h_{i+1}, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h_i, \\ (u, v_{\tilde{x}})_* &= u_N v_N - u_0 v_1 - (v, u_{\tilde{x}}], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{h}_i = 0,5 (h_i + h_{i+1})$.

Здесь введено также обозначение для разностной производной на неравномерной сетке

$$v_{\tilde{x},i} = (v_{i+1} - v_i) / \hat{h}_i$$

и для скалярного произведения на неравномерной сетке $(,)_*$.

Для доказательства формулы (7) заметим, что

$$v_{\tilde{x}} = \frac{h_{i+1}}{\hat{h}_i} v_x, \quad v_x = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}.$$

Подставляя это выражение в скалярное произведение

$$(u, v_{\tilde{x}})_* = (u, v_x), \quad \text{где } (u, w) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i w_i h_{i+1},$$

и повторяя доказательство тождества (3), приходим к (7).

3) Первая формула Грина. Равенство

$$\int_0^1 u (kv')' dx = - \int_0^1 k u' v' dx + k u v' \Big|_0^1$$

обычно называют *первой формулой Грина*.

Для сеточных функций аналог формулы Грина можно получить, пользуясь формулами суммирования по частям. Подставляя в (3)

$$u = z, \quad v = ay_{\bar{x}},$$

получаем *первую разностную формулу Грина*:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + ayz_{\bar{x}}|_N - a_1 y_{x, 0} z_0. \quad (8)$$

Если $z_0 = z_N = 0$, то подстановки обращаются в нуль и первая формула Грина имеет вид

$$(z, \Lambda y) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}], \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x. \quad (8')$$

В частности, при $z = y$ получаем

$$(\Lambda y, y) = - (a, (y_{\bar{x}})^2], \quad y_0 = y_N = 0. \quad (8'')$$

Аналогичный результат справедлив и в случае неравномерной сетки:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + ayz_{\bar{x}}|_N - a_1 y_{x, 0} z_0,$$

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] \quad \text{при } z_0 = z_N = 0.$$

4) Вторая формула Грина. В интегральном исчислении вторая формула Грина имеет вид

$$\int_0^1 u (kv')' dx - \int_0^1 v (ku')' dx = k (uv' - vu')|_0^1.$$

Подставив в (3) $u = y$, $v = az_{\bar{x}}$, получим

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + ayz_{\bar{x}}|_N - a_1 y_{x, 0} z_0. \quad (9)$$

Вычитая теперь (9) из (8), приходим к *разностному аналогу второй формулы Грина*

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (az_{\bar{x}})_x) = a_N (zy_{\bar{x}} - z_{\bar{x}}y)_N - a_1 (y_{x, 0} z - z_{x, 0} y)_0. \quad (10)$$

Точно так же для неравномерной сетки имеем

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* - (y, (az_{\bar{x}})_{\hat{x}})_* = a_N (zy_{\bar{x}} - yz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_{x, 0} z - z_{x, 0} y)_0. \quad (11)$$

Если y и z обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, то подстановки равны нулю и

$$(\Lambda y, z) = (y, \Lambda z), \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad (10')$$

$$(\Lambda y, z)_* = (y, \Lambda z)_*, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}. \quad (11')$$

Эти формулы показывают, что оператор Λ является самосопряженным.

5) Неравенство Коши—Буняковского и ε-неравенство. Нам понадобится в дальнейшем известное неравенство

Коши—Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

где $(,)$ —скалярное произведение в некотором линейном пространстве и $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. В частности, под $(,)$ можно понимать одно из введенных выше скалярных произведений.

В дальнейшем изложении мы будем часто пользоваться неравенством

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0 \text{ — любое число}),$$

которое будем называть иногда ε -неравенством. Из него, в частности, следует

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \leq \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|^2. \quad (12)$$

2. Отыскание собственных функций и собственных значений на примере простейшей разностной задачи. Метод разделения переменных, известный в математической физике, используется и для исследования разностных задач. Применение этого метода позволяет расчленить исходную задачу, зависящую от нескольких независимых переменных, на более простые задачи, зависящие от меньшего числа переменных. При этом, как правило, по отдельным координатным направлениям возникают задачи на собственные значения. Такая же ситуация имеет место и в разностном случае.

В этом пункте мы рассмотрим задачу на отыскание собственных значений для простейшего разностного оператора.

Сведения, полученные здесь, потребуются нам в дальнейшем, так как использование метода разделения переменных приводит к задачам именно такого типа.

В последующих главах будут приведены примеры использования этого метода для анализа устойчивости и сходимости конкретных разностных схем.

Предварительно напомним основные факты, связанные с простейшей задачей на отыскание собственных функций и собственных значений для дифференциального уравнения

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (13)$$

Нетривиальные решения этой задачи—собственные функции u_k и отвечающие им собственные значения λ_k —выражаются следующим образом:

$$1. \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \lambda_k = k^2\pi^2/l^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Собственные функции u_k образуют ортонормированную систему

$$\int_0^1 u_k(x) u_m(x) dx = \delta_{km},$$

где

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

3. Если $f(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет однородным краевым условиям, т. е. $f(0) = f(l) = 0$, то она представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

где

$$f_k = \int_0^l f(x) u_k(x) dx,$$

причем

$$\|f\|^2 = \int_0^l f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (13) разностную задачу

$$\begin{aligned} y_{xx} + \lambda y = 0, \quad x = ih, \quad 0 < i < N, \quad h = l/N, \quad y(0) = y(l) = 0, \\ y(x) \not\equiv 0 \end{aligned} \quad (14)$$

об отыскании нетривиальных решений — собственных функций задачи (14) и соответствующих собственных значений. Перейдем в (14) к индексной форме

$$y_{i+1} - 2(1 - h^2 \lambda/2) y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$y(x) = \sin \alpha x,$$

где α подлежит определению. Тогда

$$y_{i+1} + y_{i-1} = \sin \alpha (x + h) + \sin \alpha (x - h) = 2 \sin \alpha x \cos \alpha h.$$

Подставляя полученное выражение в (15), получим

$$2 \sin \alpha x \cos \alpha h = 2(1 - h^2 \lambda/2) \sin \alpha x.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения, т. е. $\sin \alpha x \not\equiv 0$, то из последнего равенства следует

$$1 - h^2 \lambda / 2 = \cos \alpha h,$$

и далее

$$\lambda = \frac{2}{h^2} (1 - \cos \alpha h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

Значение параметра α выберем так, чтобы функция $y(x) = \sin \alpha x$ удовлетворяла граничным условиям задачи (14)

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Заметим, что при $x = 0$ граничное условие выполняется автоматически при любых α . При $x = l$ имеем

$$\sin \alpha l = 0,$$

откуда

$$\alpha = \alpha_k = k\pi/l, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Итак, мы получили собственные функции и собственные значения задачи (14). Перечислим их свойства.

$$1. \quad y^{(k)}(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

2. Собственные значения λ_k перенумерованы в порядке возрастания, и для всей совокупности $\{\lambda_k\}$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} = \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h (N-1)}{2l} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17), в частности, следует, что все собственные значения задачи (14) положительны.

3. Собственные функции задачи (14) $y^{(k)}$, $y^{(m)}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в смысле скалярного произведения, определяемого соотношением (5):

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0, \quad k \neq m. \quad (18)$$

Для доказательства этого факта воспользуемся второй разностной формулой Грина, записанной для однородных краевых условий (10'):

$$0 = (y_{xx}^{(k)}, y^{(m)}) - (y^{(k)}, y_{xx}^{(m)}) = (\lambda_m - \lambda_k) (y^{(k)}, y^{(m)}).$$

Так как по предположению $y^{(k)}$ и $y^{(m)}$ — собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, т. е. $\lambda_k \neq \lambda_m$,

то из последнего равенства следует ортогональность $y^{(k)}$ и $y^{(m)}$:

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0.$$

4. Норма собственной функции $y^{(k)}(x)$ есть

$$\|y^{(k)}\| = \sqrt{l/2}.$$

Норма понимается в смысле скалярного произведения (5), определенного выше,

$$\|y\|^2 = (y, y) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h.$$

Проведем несложные преобразования

$$\|y^{(k)}\|^2 = \sum_{s=1}^{N-1} (y^{(k)}(x_s))^2 h = \sum_{s=1}^{N-1} h \sin^2 \frac{\pi k x_s}{l} = \sum_{s=1}^{N-1} \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k x_s}{l} \right). \quad (19)$$

Обозначая $q_k = \exp \left(i \frac{2k\pi h}{l} \right)$ и учитывая, что $q_k^s = \exp \left(i \frac{2k\pi}{l} x_s \right)$, $q_k^N = 1$, получаем $\sum_{s=1}^{N-1} h \cos \frac{2k\pi}{l} x_s = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{N-1} h q_k^s = \operatorname{Re} h \frac{q_k^N - q_k}{q_k - 1} = \operatorname{Re} h \frac{1 - q_k}{q_k - 1} = -h$. Подставим это значение в (19):

$$\|y^{(k)}\|^2 = \frac{h(N-1)}{2} + \frac{h}{2} = \frac{hN}{2} = \frac{l}{2},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, набор сеточных функций

$$\mu^{(k)}(x) = \sqrt{2/l} y^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (20)$$

образует ортогональную и нормированную в смысле скалярного произведения (,) систему: $(\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \delta_{km}$.

5. Пусть на сетке ω_h задана функция $f(x)$, причем $f_0 = f_N = 0$. Тогда, очевидно, она представима в виде суммы по собственным функциям задачи (14)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)}(x), \quad (21)$$

где коэффициенты определяются соотношениями

$$f_k = (f(x), \mu^{(k)}(x)).$$

При этом оказывается справедливым равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2. \quad (22)$$

Докажем (22). В самом деле,

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h f^2(x_i) = (f^2, 1) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)}, \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)} \right) = \\ = \left(\sum_{k, m=1}^{N-1} f_k f_m \mu^{(k)} \mu^{(m)}, 1 \right) = \sum_{k, m=1}^{N-1} f_k f_m (\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2,$$

так как $(\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \delta_{km}$.

3. Задачи на собственные значения с краевыми условиями второго рода и третьего рода. Рассмотрим вторую краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) = u'(l) = 0, \quad u(x) \neq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Замечая, что $u_{x,0} = u'(0) + 0,5hu''(0) + O(h^2) = -0,5h\lambda u(0) + O(h^2)$, $u_{x,0} + 0,5h\lambda u(0) = O(h^2)$, аппроксимируем краевые условия с погрешностью $O(h^2)$. В результате получим вторую краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x} + \lambda y(x) = 0, \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = l/N, \\ y_{x,0} + 0,5h\lambda y_0 = 0, \quad -y_{\bar{x},N} + 0,5h\lambda y_N = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Требуется найти такие значения параметра λ , при которых эти однородные уравнения имеют нетривиальные решения $y(x) \neq 0$. В отличие от первой краевой задачи здесь параметр λ входит не только в уравнение, но и в граничные условия.

Вводя обозначения

$$Av = \begin{cases} -\frac{2}{h}v_x & \text{при } x=0, \\ -v_{\bar{x}x} & \text{при } x=ih, \quad 0 < i < N, \\ \frac{2}{h}v_{\bar{x}} & \text{при } x=l, \end{cases} \quad (25)$$

запишем задачу (24) в операторном виде

$$Ay = \lambda y, \quad (26)$$

где оператор A определен в пространстве $H = \bar{\Omega}$ функций $y(x)$, заданных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$.

Введем в этом пространстве H скалярное произведение

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h(y_0 v_0 + y_N v_N)$$

и покажем, что оператор A самосопряжен и неотрицателен

$$\begin{aligned} [Ay, v] &= [y, Av], \\ [Ay, y] &\geq 0 \quad \text{для любого } y \in H. \end{aligned}$$

В самом деле,

$$[Ay, v] = (-y_{xx}, v) + 0,5h \left(-\frac{2}{h}v_0y_{x,0} + \frac{2}{h}v_Ny_{x,N} \right).$$

Пользуясь второй формулой Грина (10), получим

$$[Ay, v] = (y, -v_{xx}) + (vy_x - yv_x)_0 - (vy_x - yv_x)_N + \\ + (-v_0y_{x,0} + v_Ny_{x,N}) = (y, -v_{xx}) + (-y_0v_{x,0} + y_Nv_{x,N}) = [y, Av],$$

т. е. $A = A^*$. Первая формула Грина (8) (при $z = y$) дает

$$[A, y] = (y, -y_{xx}) + (-y_0y_{x,0} + y_Ny_{x,N}) = \\ = (y_x, y_x) - (yy_x)_N + (yy_x)_0 + (-y_0y_{x,0} + y_Ny_{x,N}) = \\ = (y_x, y_x) \geq 0.$$

Для задачи (26) можно пользоваться общей теорией (см. Дополнение, § 1).

Найдем собственные значения λ_k и собственные функции $\mu_k(x)$ задачи (24).

Будем искать решение задачи (24) в виде

$$y = \mu(x) = A \cos \alpha x, \quad A \neq 0.$$

Подстановка $\mu(x)$ в уравнение (24) дает

$$\lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

Потребуем выполнения краевых условий при $x = 0$ и $x = l$.

Условие при $x = 0$: $\cos \alpha h - 1 + \frac{h^2}{2} \lambda = 0$ автоматически выполнено.

Условие при $x = l$ дает

$$(1 - 0,5h^2\lambda) \cos \alpha l - \cos \alpha (l - h) = 0$$

или

$$\cos \alpha h \cos \alpha l - \cos \alpha l \cos \alpha h + \sin \alpha l \cdot \sin \alpha h = \sin \alpha l \cdot \sin \alpha h = 0,$$

откуда следует

$$\alpha l = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Тем самым найдены собственные значения

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2l}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

и ортонормированные собственные функции $\{\mu_k(x)\}$, для которых

$$[\mu_k, \mu_m] = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

где

$$\mu_0 = \sqrt{1/l}, \quad \mu_N = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad \mu_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi k x}{l}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (28)$$

Нормировочный множитель A_k находится из условия

$$[\mu_k]^2 = [\mu_k, \mu_k] = A_k^2 \left[\cos \frac{\pi k x}{l}, \cos \frac{\pi k x}{l} \right],$$

причем сумма

$$\left(\cos \frac{\pi k x}{l}, \cos \frac{\pi k x}{l} \right) = \sum_{s=1}^{N-1} h \cos^2 \frac{\pi k x_s}{l}$$

вычисляется по аналогии с предыдущим пунктом.

Ортогональность собственных функций $\{\mu_k\}$ следует из общей теории, так как $A = A^* \geq 0$, и все собственные значения простые.

Любую сеточную функцию $f(x)$, заданную на $\bar{\omega}_h$, можно разложить по $\{\mu_k(x)\}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f_k \mu_k(x), \quad f_k = [f, \mu_k], \quad k=0, 1, \dots, N,$$

причем

$$[f, f] = \sum_{k=0}^N f_k^2.$$

Рассмотрим теперь третью краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u(x) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) &= \sigma_1 u(0), \quad \sigma_1 > 0, \\ -u'(l) &= \sigma_2 u(l), \quad \sigma_2 > 0, \quad u(x) \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Нетрудно заметить, что разностная схема второго порядка аппроксимации имеет вид

$$\begin{aligned} y_{xx} + \lambda y &= 0, \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ (y_{x,0} - \sigma_1 y_0) + 0,5h\lambda y_0 &= 0, \\ -(y_{x,N} + \sigma_2 y_N) + 0,5h\lambda y_N &= 0, \quad y(x) \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (30)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} u_{x,0} - \sigma_1 u_0 + 0,5h\lambda u_0 &= \\ &= u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2) - \sigma_1 u_0 + 0,5h\lambda u_0 = O(h^2). \end{aligned}$$

Вводя оператор

$$Ay = \begin{cases} -\frac{1}{0,5h}(y_x - \sigma_1 y) & \text{при } x=0, \\ -y_{xx} & \text{при } x=ih, \quad 0 < i < N, \\ \frac{1}{0,5h}(y_{x,N} + \sigma_2 y) & \text{при } x=l, \end{cases} \quad (31)$$

перепишем задачу (30) в виде

$$A\mu = \lambda\mu. \quad (32)$$

Оператор (31) задан в том же пространстве H , что и оператор (25). Он является самосопряженным и положительно определенным

$$A = A^* > 0,$$

причем

$$[Ay, y] = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) + \sigma_1 y_0^2 + \sigma_2 y_N^2,$$

т. е. $A > 0$, если хотя бы один из коэффициентов σ_1 или σ_2 отличен от нуля или $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$, а $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$. В этом случае $[Ay, y] = 0$ только при $y(x) = 0$.

В отличие от двух предыдущих задач для α не удается найти явное выражение; α определяется из уравнения

$$(\sin^2 \alpha h - h^2 \sigma_1 \sigma_2) \operatorname{tg} \alpha l = h (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \alpha h, \quad (33)$$

а собственные значения по-прежнему выражаются по формуле

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Собственные функции с точностью до постоянной определяются формулой

$$\mu_k(x) = \cos \alpha_k(l - x) + \frac{h \sigma_1}{\sin \alpha_k h} \sin \alpha_k(l - x). \quad (35)$$

4. Разностные аналоги теорем вложения. В дальнейшем при оценке различных свойств разностных схем, таких как устойчивость, сходимость и т. д., нам понадобятся неравенства, которые соответствуют простейшим теоремам вложения С. Л. Соболева.

Докажем три леммы.

Лемма 1. Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, справедливо неравенство

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|y_{\bar{x}}\|, \quad (36)$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|, \quad \|y_{\bar{x}}\| = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})^{1/2}.$$

Доказательство. Функция $y(x)$ на сетке $\bar{\omega}_h$ может быть представлена в тождественном виде

$$y^2(x) = (1-x)y^2(x) + xy^2(x). \quad (37)$$

С другой стороны, поскольку $y(0) = y(1) = 0$, можно записать

$$y^2(x) = \left(\sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2,$$

или

$$y^2(x) = \left(\sum_{x'=x+h}^1 y_{\bar{x}}(x') h \right)^2.$$

Подставляя эти равенства в (37), находим

$$y^2(x) = (1-x) \left(\sum_{x'=h}^x h y_{\bar{x}}(x') \right)^2 + x \left(\sum_{x'=x+h}^1 h y_{\bar{x}}(x') \right)^2.$$

Оценим суммы в правой части, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} y^2(x) &\leq (1-x) \sum_{x'=h}^x h \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}^2(x') h + x \sum_{x'=x+h}^1 h \sum_{x'=x+h}^1 y_{\bar{x}}^2(x') h = \\ &= x(1-x) \sum_{x'=h}^1 y_{\bar{x}}^2(x') h = x(1-x) \|y_{\bar{x}}\|^2 \end{aligned}$$

(здесь $y_{\bar{x}}^2 = (y_{\bar{x}})^2$). Максимум выражения $x(1-x)$ на отрезке $[0, 1]$ достигается при $x=0,5$ и равен $1/4$. Поэтому

$$y^2(x) \leq \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2,$$

и следовательно,

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|y_{\bar{x}}\|.$$

Замечание 1. Лемма 1 остается справедливой на произвольной неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$.

Замечание 2. В дальнейшем нам потребуется также неравенство типа (36) для отрезка произвольной длины l . Такое неравенство нетрудно получить из (36) с помощью замены переменных $x' = lx$. Тогда x' будет меняться на отрезке $(0, l)$ и

$$y_{\bar{x}'} = y_{\bar{x}}/l, \quad h' = hl.$$

Подставим $y_{\bar{x}} = y_{\bar{x}'} \cdot l$ и $h = h'/l$ в (24). В результате получим

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x}'}^i)^2 l^2 l^{-1} h' = l \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x}'}^i)^2 h' = l \|y_{\bar{x}'}\|^2.$$

Следовательно, на отрезке длины l справедливо неравенство

$$|y(x)| \leq \|y\|_c \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|. \quad (38)$$

Замечание 3. Неравенства (36) и (38) получены для функций, обращающихся в нуль на обоих концах интервала. Если функция $y(x)$ обращается в нуль лишь на одной границе, то справедливо неравенство

$$\|y\|_c \leq \sqrt{l} \|y_{\bar{x}}\|. \quad (39)$$

Для произвольных функций неравенства (36), (38), (39), вообще говоря, неверны. Однако можно показать, что в этом случае имеют место неравенства следующего вида:

$$\|y\|_c^2 \leq 2(l\|y_{\bar{x}}\|^2 + y_0^2), \quad \|y\|_c^2 \leq 2(l\|y_{\bar{x}}\|^2 + y_N^2).$$

Лемма 2. Для всякой функции $y(x)$, заданной на произвольной сетке $\hat{\omega}_h = \{x_i, x_0 = 0, x_N = l\}$ и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливо неравенство

$$\|y\|^2 \leq \frac{l^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (40)$$

В самом деле, легко проверить, что

$$\|y\|^2 \leq l \|y\|_c^2.$$

Подставляя это неравенство в (36), получим (40).

В случае равномерной сетки оценка (40) может быть улучшена.

Лемма 3. Для всякой функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы оценки

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (41)$$

Разложим $y(x)$ по собственным функциям задачи (14):

$$\int y(x) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu^{(k)}(x), \quad c_k = (y(x), \mu^{(k)}(x)), \quad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2.$$

В силу первой формулы Грина (8)

$$(-\Lambda y, y) = \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad \text{где } \Lambda y = y_{xx}, \quad \|y_{\bar{x}}\|^2 = (1, (y_{\bar{x}})^2). \quad (42)$$

Так как $\Lambda \mu^{(k)} = -\lambda_k \mu^{(k)}$, то

$$-\Lambda y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k \mu^{(k)}(x).$$

Подставим это выражение в (42) и учтем ортонормированность $\{\mu^{(k)}\}$:

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = -(\Delta y, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k c_k^2.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \lambda_{N-1} \|y\|^2,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l}.$$

Оценим λ_1 снизу. Обозначив $\alpha = \pi h / (2l)$, получим

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

Так как $h \leq 0,5l$, то α меняется на интервале $(0, \pi/4]$. Нетрудно проверить, что минимум функции $(\sin \alpha)/\alpha$ при $\alpha \in (0, \pi/4]$ достигается в точке $\alpha = \pi/4$, т. е. $\lambda_1(h)$ имеет минимум при $h = 0,5l$. Отсюда следует, что $\lambda_1 \geq 8/l^2$. Учитывая также, что $\lambda_{N-1} < 4/h^2$, получаем (41).

5. Метод энергетических неравенств. Одним из общих и весьма эффективных способов получения априорных оценок является метод энергетических неравенств. Мы приведем примеры использования этого метода для получения априорных оценок применительно к разностным задачам и покажем, как на основании этих оценок можно определить, например, скорость сходимости разностной схемы.

Все рассуждения в этом пункте будут проводиться для простейшей (модельной) задачи

$$u''(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (43)$$

Пример 1. Пусть на отрезке $[0, 1]$ введена равномерная сетка ω_h . Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию задачи (43):

$$y_{\bar{xx}} + f(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (44)$$

Умножим уравнение (44) на hy и просуммируем полученное равенство по узлам сетки ω_h :

$$\sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{xx}})_i y_i h + \sum_{i=1}^{N-1} f_i y_i h = 0. \quad (45)$$

Перепишем (45) в терминах скалярных произведений

$$(y_{\bar{xx}}, y) + (f, y) = 0. \quad (46)$$

Преобразуя первое слагаемое в (46) с помощью разностной формулы Грина (8''), находим

$$-(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] + (f, y) = 0 \quad \text{или} \quad \|y_{\bar{x}}\|^2 = (f, y). \quad (47)$$

Скалярное произведение (f, y) оценим при помощи неравенства Коши—Буняковского (12)

$$|(f, y)| \leq \|f\| \|y\|.$$

Воспользуемся леммой 3: $\|y\| \leq \|y_{\bar{x}}\| / \sqrt{8}$. Отсюда и из (47) находим

$$\|y_{\bar{x}}\| \leq \|f\| / \sqrt{8}.$$

Применяя затем лемму 1, получаем априорную оценку для решения задачи (44).

$$\|y\|_C \leq \|f\| / (4\sqrt{2}). \quad (48)$$

Это неравенство используем для оценки скорости сходимости схемы (44). Напишем сначала уравнение для погрешности схемы (44): $z = y - u$, где u — решение задачи (43), y — решение разностной задачи (44).

Подставляя $y = z + u$ в (44), получим для z задачу

$$z_{\bar{x}} + \psi(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad z_0 = z_N = 0. \quad (49)$$

Здесь $\psi(x) = u_{\bar{x}} + f(x)$ — погрешность аппроксимации схемы (44) которая, как известно, при достаточной гладкости $u(x)$ есть величина порядка $O(h^2)$. Отметим, что для функции $z(x)$ мы получили задачу того же типа, что и для функции $y(x)$. Поэтому для $z(x)$ справедлива оценка (48):

$$\|z\|_C \leq \|\psi\| / (4\sqrt{2}). \quad (50)$$

Но $\psi = O(h^2)$ и, следовательно,

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq Mh^2,$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от шага h .

На основании данных выше определений (см. § 1) из (50) следует, что решение разностной задачи (44) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (43) со скоростью $O(h^2)$.

Мы получили оценку скорости сходимости для очень простой задачи. Аналогичный результат для этой задачи можно было бы получить и с помощью ряда других методов, быть может даже более простых. Однако ценность приведенного здесь метода энергетических неравенств состоит в том, что он без существенных изменений переносится на многомерный случай, на случай

переменных коэффициентов, на разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений и т. д.

Покажем, например, что этот метод без всяких затруднений дает нужный результат для случая неравномерной сетки.

Пример 2. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана неравномерная сетка $\hat{\omega}_h$. Задачу (43) на такой сетке можно аппроксимировать следующим образом:

$$y_{\hat{x}\hat{x}} + f(x) = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y_0 = y_N = 0 \quad (51)$$

(относительно обозначений см. § 1, п. 3, пример 1 и стр. 11).

Для задачи (51) можно получить априорную оценку того же типа, что и оценка (48) для задачи (44). Но в этом случае такая оценка дает не совсем верное представление о скорости сходимости схемы (51). Было показано (§ 1, п. 3), что локальная погрешность аппроксимации

$$\psi = u_{\hat{x}\hat{x}} + f$$

схемы (51) есть величина $O(\hat{h}_i)$ и

$$\|\psi\|_c \leq M h_{\max}. \quad (52)$$

Оценка (52) указывает на понижение порядка скорости сходимости схемы (51) на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ по сравнению со схемой (44) на равномерной сетке. Однако выше говорилось, что если погрешность аппроксимации оценивать не в сеточной норме C или L_2 , а в некоторой специально построенной «негативной» норме $\|\cdot\|_{(-1)}$, то погрешность аппроксимации на неравномерной сетке будет иметь также порядок $O(h^2)$. Именно, надо взять норму

$$\|\psi\|_{(-1)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=i}^{N-1} \hat{h}_k \psi_k \right)^2 \right]^{1/2} = O(h^2).$$

Из сказанного ясно, что теперь при выводе априорной оценки для задачи (51) нужно оценивать правую часть в норме $\|\cdot\|_{(-1)}$.

Получим эту априорную оценку. Умножим уравнение (51) на $y_i \hat{h}_i$ и просуммируем по узлам сетки $\hat{\omega}_h$. В терминах скалярных произведений полученное выражение можно записать в виде

$$(y_{\hat{x}\hat{x}}, y)_* + (f, y)_* = 0. \quad (53)$$

Первое слагаемое в (53) преобразуем по разностной формуле Лиона (8)

$$(y_{\hat{x}}, y_{\hat{x}}) = (f, y)_*. \quad (54)$$

Введем в рассмотрение функцию $\eta(x)$, определенную следующим образом:

$$\eta_{\hat{x}, i} = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \eta_N = 0. \quad (55)$$

Решая задачу (55), получим

$$-\eta(x_i) = \sum_{k=i}^{N-1} f_k \hat{h}_k.$$

Скалярное произведение в правой части равенства (54) преобразуется на основании формулы суммирования по частям (7):

$$(f, y)_* = (\eta_{\hat{x}}, y)_* = -(\eta, y_{\hat{x}}).$$

В силу неравенства Коши—Буняковского имеем

$$|(f, y)_*| = |(\eta, y_{\hat{x}})| \leq \|\eta\| \cdot \|y_{\hat{x}}\|.$$

Подставим эту оценку в (54) и сократим обе части неравенства на $\|y_{\hat{x}}\|$:

$$\|y_{\hat{x}}\| \leq \|\eta\| = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=i}^{N-1} \hat{h}_k f_k \right)^2 \right]^{1/2} = \|f\|_{(-1)}.$$

На основании леммы 1 $\|y\|_C \leq \|y_{\hat{x}}\|/2$ и, следовательно,

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|f\|_{(-1)}. \quad (56)$$

Тем самым желаемая оценка установлена.

Рассмотрим теперь, как обычно, погрешность решения $z = y - u$, где y —решение задачи (51), а u —решение исходной дифференциальной задачи (43). Подставляя $y = z + u$ в (51), получим для z задачу

$$z_{\hat{x}x} + \psi = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad z_0 = z_N = 0. \quad (57)$$

Применяя к задаче (57) оценку (56), заключаем

$$\|z\|_C \leq 0,5 \|\psi\|_{(-1)}.$$

Но мы уже видели раньше (см. § 1, п. 3), что

$$\|\psi\|_{(-1)} \leq Mh^2, \quad \text{где } h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i,$$

и следовательно, схема (51) на произвольной неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ сходится в C со скоростью $O(h^2)$.

§ 4. Разностные схемы как операторные уравнения. Общие формулировки

Ранее были рассмотрены разностные схемы для простейших дифференциальных уравнений, введены для них основные понятия теории разностных схем и продемонстрированы некоторые приемы исследования устойчивости и сходимости схем.

В этом параграфе проводится систематическая трактовка разностных уравнений как операторных уравнений в абстрактном пространстве и даются соответствующие определения аппроксимации, устойчивости и сходимости. Этот подход применим для случая стационарных задач математической физики.

1. Разностные схемы как операторные уравнения. После замены дифференциальных уравнений разностными уравнениями на некоторой сетке ω_h мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричной форме

$$\mathcal{A}Y = \Phi, \quad (1)$$

где \mathcal{A} —квадратная матрица, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ —искомый вектор, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ —известная правая часть, включающая и правые части краевых условий.

Каждой матрице \mathcal{A} можно поставить в соответствие некоторый линейный оператор A , отображающий пространство R_N в R_N . Тогда уравнение (1) примет вид

$$Ay = \Phi, \quad (2)$$

где y —искомый, а Φ —известный векторы пространства R_N . Оператор A отображает в себя пространство сеточных функций, заданных на ω_h и удовлетворяющих однородным граничным условиям.

Поясним это на примерах.

Пример 1. Первая краевая задача. Пусть на отрезке $[0, 1]$ введена равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\}.$$

Ищется решение первой краевой задачи

$$\Lambda y = y_{xx} = -f(x), \quad 0 < x = ih < 1, \quad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2 \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = u_1, \quad y_N = u_2. \quad (3')$$

Вводя вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$, перепишем уравнение (3')

в виде (1), где

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица размера $(N-1) \times (N-1)$. Вектор правой части $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$ учитывает правые части краевых условий (3):

$$\varphi_i = f_i, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad \varphi_1 = f_1 + \frac{u_1}{h^2}, \quad \varphi_{N-1} = f_{N-1} + \frac{u_2}{h^2},$$

так что φ_i отличается от f_i только в приграничных узлах $i=1$ и $i=N-1$.

Матрица \mathfrak{A} определяет оператор $A = -\tilde{\Lambda}$, который преобразует сеточную функцию $y(x_i)$, т. е. вектор $(N-1)$ -мерного пространства в вектор того же пространства (в сеточную функцию $(-\tilde{\Lambda}y)_i$). Оператор $\tilde{\Lambda}$ совпадает с оператором Λ на сеточных функциях, обращающихся в нуль на границе (при $i=0$ и $i=N$), так что $(\tilde{\Lambda}y)_i = (\Lambda y)_i$ при $i=2, 3, \dots, N-2$,

$$(\tilde{\Lambda}y)_1 = \frac{-2y_1 + y_2}{h^2}, \quad (\tilde{\Lambda}y)_{N-1} = \frac{y_{N-2} - 2y_{N-1}}{h^2}. \quad (4)$$

Пусть Ω_h — множество сеточных функций, заданных во внутренних узлах сетки ω_h ; это множество линейно. Вводя на Ω_h скалярное произведение $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ и норму $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, получим линейное нормированное пространство Ω_h .

Определенный выше оператор A линеен и отображает Ω_h на Ω_h (его область определения и область значений совпадают со всем пространством Ω_h).

Пусть $\dot{\Omega}_h$ — пространство сеточных функций, заданных во всех узлах сетки ω_h и обращающихся в нуль в граничных узлах сетки, т. е. при $x \in \gamma_h$. Тогда оператор A можно рассматривать как оператор, отображающий $\dot{\Omega}_h$ на Ω_h .

Очевидно, что $A = A_h$, $y = y_h$, $\Phi = \Phi_h$ зависят от шага h сетки; поэтому мы рассматриваем не одно уравнение (2), а семейство уравнений, зависящих от параметра h . Семейство таких уравнений и есть *операторная схема* (см. п. 2).

При изучении операторных уравнений (2) необходимо знать основные свойства оператора A , такие как самосопряженность, положительная определенность, нижняя грань оператора и его норма и др.

Построенный в примере 1 оператор A в дальнейшем будет часто встречаться. Поэтому укажем его основные свойства.

Оператор A самосопряжен, т. е.

$$(Ay, v) = (y, Av) \text{ для любых } y, v \in \Omega_h.$$

В самом деле, $(Ay, v) = (-\tilde{\Lambda}y, v)$. Пользуясь второй формулой Грина (§ 3) и учитывая, что $\tilde{\Lambda}$ совпадает с Λ на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе сетки, получаем $(\tilde{\Lambda}y, v) = (y, \tilde{\Lambda}v)$, т. е. $A = A^*$.

Оператор A положительно определен, т. е.

$$(Ay, y) \geq 8\|y\|^2.$$

Это следует из леммы 3 (§ 3, п. 4).

Норма оператора A равна

$$\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}. \quad (5)$$

В самом деле, норма самосопряженного положительного оператора в конечномерном пространстве Ω_h равна его наибольшему собственному значению, $\|A\| = \lambda_{N-1}$. Так как в данном случае, согласно § 4, п. 2, $\lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$, то имеет место формула (5). При этом справедливо неравенство

$$(Ay, y) \leq \|A\| \|y\|^2.$$

Рассмотрим оператор

$$Ay = -(ay_x)_x + dy, \quad 0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad 0 \leq d \leq \bar{c}_3. \quad (6)$$

Он самосопряжен в силу второй формулы Грина. Первая формула Грина дает

$$(Ay, y) = (a, y_x^2) + (dy, y), \quad (7)$$

где $y_x^2 = (y_x)^2$. Отсюда следует, что

$$(Ay, y) \geq c_1 (a, y_x^2) = c_1 \|y_x\|^2 \geq 8c_1 \|y\|^2, \quad (8)$$

т. е. A положительно определен. Его норма, как видно из формул (7) и (5), оценивается так:

$$\|A\| < 4c_2/h^2 + \bar{c}_3.$$

Замечание. Здесь всюду оператор $A = A_h$ зависит от шага h сетки как от параметра. Если сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \in [0, 1], i = 0, 1, 2, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

неравномерна, то ее шаг $h_i = x_i - x_{i-1}$ в свою очередь является сеточной функцией или вектором $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ размерности N с компонентами h_1, h_2, \dots, h_N . Оператор A имеет вид

$A = -\tilde{\Lambda}$, где

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = y_{\tilde{x}\tilde{x}, i}, \quad \tilde{h}_i = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}).$$

В этом случае мы по-прежнему будем писать $A = A_h$, имея в виду, что h есть вектор размерности N , т. е. элемент пространства Ω_h^+ , состоящего из функций, заданных на сетке $\omega_h^+ = \{x_i \in (0, 1], i = 1, 2, \dots, N, x_N = 1\}$.

Пример 2. Третья краевая задача. Пусть дана также сетка ω_h , что и в примере 1. Рассмотрим разностную краевую задачу третьего рода

$$\begin{aligned} \Lambda y &= y_{\tilde{x}\tilde{x}} = -f(x), \quad 0 < x = ih < 1, \\ y_{x, 0} &= \sigma_1 y_0 - \mu_1, \quad -y_{\tilde{x}, N} = \sigma_2 y_N - \mu_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $\bar{\Omega}_h$ — множество функций, заданных на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Определим оператор $\tilde{\Lambda}$ так:

$$(\tilde{\Lambda} y)_i = \begin{cases} \frac{1}{0,5h} (y_{x, 0} - \sigma_1 y_0) = \Lambda^- y, & i = 0, \\ \Lambda y = y_{\tilde{x}\tilde{x}}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\frac{1}{0,5h} (y_{\tilde{x}, N} + \sigma_2 y_N) = \Lambda^+ y, & i = N. \end{cases}$$

Полагая $A = -\tilde{\Lambda}$, перепишем задачу (9) в виде

$$Ay = \varphi, \quad (10)$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{0,5h} \mu_1, & i = 0, \\ f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{0,5h} \mu_2, & i = N. \end{cases}$$

Линейный оператор A отображает $\bar{\Omega}_h$ на $\bar{\Omega}_h$. Введем скалярное произведение

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h (y_0 v_0 + y_N v_N)$$

и норму $\|y\| = \sqrt{[y, y]}$.

Оператор A самосопряжен, т. е. $[y, Av] = [v, Ay]$, где

$$[y, Av] = -(y, \Lambda v) - 0,5h (y_0 \Lambda^- v + y_N \Lambda^+ v), \quad (y, w) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i w_i h.$$

Пользуясь формулой Грина (§ 3) и подставляя выражения для Λ^-v и Λ^+v , получим

$$\begin{aligned} -(y, \Lambda v) &= (-\Lambda y, v) - (y_{x,0}v_0 - y_{\bar{x},N}v_N) + (y_0v_{x,0} - y_Nv_{\bar{x},N}), \\ -0,5h(y_0\Lambda^-v + y_N\Lambda^+v) &= -y_0(v_{x,0} - \sigma_1v_0) + y_N(v_{\bar{x},N} + \sigma_2v_N). \end{aligned}$$

Так как

$$y_{x,0} = \sigma_1y_0 + 0,5h\Lambda^-y, \quad y_{\bar{x},N} = -\sigma_2y_N - 0,5h\Lambda^+y,$$

то

$$[y, Av] = -(\Lambda y, v) - 0,5h(v_0\Lambda^-y + v_N\Lambda^+y) = [Ay, v],$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что если $\sigma_1 \geq c_1 > 0$, $\sigma_2 \geq c_1 > 0$, то оператор A положительно определен:

$$[Ay, y] \geq \frac{2c_1}{1+c_1} \|y\|^2. \quad (11)$$

Для этого воспользуемся тем же приемом, что и при доказательстве леммы 1 из § 3. Именно, представив функцию $y^2(x)$ в виде

$$y^2(x) = \left(y_0 + \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x')h \right)^2 = y_0^2 + 2y_0 \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x')h + \left(\sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x')h \right)^2$$

и воспользовавшись ε-неравенством, получим

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon)y_0^2 + (1 + 1/\varepsilon) \left(\sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x')h \right)^2.$$

Так как, согласно неравенству Коши—Буняковского,

$$\left(\sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x')h \right)^2 \leq x \left(\sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}^2(x')h \right) \leq x(1, y_{\bar{x}}^2],$$

то из предыдущего неравенства получаем

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon)y_0^2 + (1 + 1/\varepsilon)x(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Аналогично доказывается неравенство

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon)y_N^2 + (1 + 1/\varepsilon)(1 - x)(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$y^2(x_i) \leq 0,5(1 + \varepsilon)(y_0^2 + y_N^2) + 0,5(1 + 1/\varepsilon)(1, y_{\bar{x}}^2],$$

$$\|y\|^2 \leq 0,5(1 + \varepsilon)(y_0^2 + y_N^2) + 0,5(1 + 1/\varepsilon)(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Отсюда и из тождества

$$[Ay, y] = (1, y_x^2) + \sigma_1 y_0^2 + \sigma_2 y_N^2, \quad (12)$$

положив $\varepsilon = c_1$, получаем (11).

Для нормы оператора A справедлива оценка

$$\|A\| \leq \frac{4}{h^2} (1 + 0.5c_2h), \text{ где } c_2 = \max(\sigma_1, \sigma_2). \quad (13)$$

В самом деле, так как $(y_{x,i})^2 \leq \frac{2}{h^2} (y_i^2 + y_{i-1}^2)$, то

$$(1, y_x^2) \leq \frac{4}{h^2} \|y\|^2,$$

$$\text{где } \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h + 0.5h(y_0^2 + y_N^2).$$

Учитывая затем, что $[Ay, y] \leq \|A\| \|y\|^2$ и

$$\sigma_1 y_0^2 + \sigma_2 y_N^2 = \frac{2}{h} (0.5h\sigma_1 y_0^2 + 0.5h\sigma_2 y_N^2) \leq \frac{2c_2}{h} \|y\|^2,$$

из формулы (12) получим искомую оценку (13).

Пример 3. Несамосопряженные операторы. Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$$

—сетка на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим разностные операторы

$$\Lambda^- y = y_x, \quad \Lambda^+ y = -y_x, \quad (14)$$

отображающие множество $\dot{\Omega}_h$ сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $i = 0, i = N$, на Ω_h , так что

$$\begin{aligned} (\Lambda^- y)_i &= \begin{cases} y_1/h, & i = 1, \\ (y_i - y_{i-1})/h, & i = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \\ (\Lambda^+ y)_i &= \begin{cases} -(y_{i+1} - y_i)/h, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ y_{N-1}/h, & i = N-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что Λ^- и Λ^+ можно рассматривать как операторы из Ω_h на Ω_h .

Пусть $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ — скалярное произведение на $\dot{\Omega}_h$ и Ω_h . Покажем, что операторы Λ^- и Λ^+ сопряжены друг другу:

$$(\Lambda^- y, v) = (y, \Lambda^+ v) \text{ для любых } y, v \in \Omega_h. \quad (15)$$

В силу формулы суммирования по частям $-(y, v_x) = (y_{\bar{x}}, v)$, если $y = v = 0$ при $i = 0, i = N$. Отсюда и следует сопряженность Λ^- и Λ^+ .

Нетрудно заметить, что $\Lambda^-y + \Lambda^+y = -(y_x - y_{\bar{x}}) = -h\Lambda y$, где $\Lambda y = y_{xx}$, т. е. $\Lambda^- + \Lambda^+ = -h\Lambda$. Поэтому операторы Λ^- и Λ^+ положительно определенные:

$$(\Lambda^-y, y) = (\Lambda^+y, y) = \frac{h}{2}(-\Lambda y, y) = \frac{h}{2}\|y_{\bar{x}}\|^2 \geq 4h\|y\|^2.$$

Последнее неравенство справедливо в силу леммы 3 из § 3, п. 4.

В гл. X рассматриваются операторы из Ω_h на Ω_h вида

$$R_1y = \frac{1}{h}y_{\bar{x}}, \quad R_2y = \frac{1}{h}(-y_x), \quad R_1 = \frac{1}{h}\Lambda^-, \quad R_2 = \frac{1}{h}\Lambda^+, \quad (16)$$

Они сопряжены друг другу $(R_1y, v) = (y, R_2v)$ и

$$(R_1y, y) = (R_2y, y) = 0,5\|y_{\bar{x}}\|^2 \geq 4\|y\|^2.$$

Из формулы

$$\|R_1y\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x}}^2 h \leq \frac{4}{h^4} \|y\|^2$$

следует, что

$$\|R_1\| \leq 2/h^2, \quad \|R_2\| \leq 2/h^2. \quad (17)$$

Так как $R_1 = R_2^*$, то

$$(R_1R_2y, y) = \|R_2y\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x}, i}^2 h \leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N y_{\bar{x}, i}^2 h = \frac{1}{h^2} \|y_{\bar{x}}\|^2,$$

т. е.

$$\|R_2y\|^2 \leq \frac{1}{h^2} (Ry, y), \quad R = R_1 + R_2. \quad (18)$$

Разностный оператор

$$R_3y = \frac{1}{h}y_{\bar{x}} = \frac{1}{2}(R_1 - R_2)y \text{ при } y \in \Omega_h,$$

очевидно, является кососимметрическим, так как

$$R_3^* = \frac{1}{2}(R_1^* - R_2^*) = \frac{1}{2}(R_2 - R_1) = -R_3,$$

и следовательно,

$$(R_3y, y) = 0.$$

Его норма

$$\|R_3\| \leq \frac{1}{2} (\|R_1\| + \|R_2\|) \leq \frac{2}{h^2}.$$

Нетрудно уточнить оценку для нормы $\|R_3\|$:

$$\|y_{\tilde{x}}\|^2 = \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1} - y_{i-1})^2 h \leq \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1}^2 + y_{i-1}^2) h \leq \|y\|^2/h^2,$$

т. е.

$$\|R_3\| \leq 1/h^2.$$

Несамосопряженные разностные операторы появляются, например, при аппроксимации эллиптических операторов второго порядка, содержащих первые производные. Так, оператор

$$Lu = u''(x) + bu'(x), \quad x \in [0, 1], \quad b = \text{const},$$

аппроксимируем разностными операторами $\Lambda_1 y = y_{xx} + by_x$ при $b > 0$ или $\Lambda_2 y = y_{xx} + by_{\tilde{x}}$ при $b < 0$, где $y \in \Omega_h$.

Пусть $\tilde{\Lambda}y$ — оператор из Ω_h на Ω_h , совпадающий с Λy при $y \in \Omega_h$. Операторы $A_1 = -\tilde{\Lambda}_1$, $A_2 = -\tilde{\Lambda}_2$, действующие из Ω_h на Ω_h , положительно определены при любом h . В самом деле,

$$\begin{aligned} (A_1 y, y) &= (-y_{xx}, y) - b(y_x, y) = (1 + 0,5hb) \|y_x\|^2, \\ (A_2 y, y) &= (1 - 0,5hb) \|y_{\tilde{x}}\|^2 = (1 + 0,5h|b|) \|y_{\tilde{x}}\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда находим

$$(A_\alpha y, y) \geq 8(1 + 0,5h|b|) \|y\|^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Так как $A_1 = A + b\Lambda^+$, $A_2 = A + |b|\Lambda^-$, где $A = -\Lambda$, $\Lambda y = y_{xx}$ и $\|\Lambda^\pm\| \leq 2/h$, $\|A\| \leq 4/h^2$, то, в силу неравенства треугольника для норм, получаем

$$\begin{aligned} \|A_1\| &\leq \|A\| + b\|\Lambda^+\| < \frac{4}{h^2} (1 + 0,5hb), \quad b > 0, \\ \|A_2\| &\leq \|A\| + |b|\|\Lambda^-\| < \frac{4}{h^2} (1 + 0,5h|b|), \quad b < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что если оператор $Lu = u'' + bu'$ аппроксимировать выражением $\Lambda y = y_{xx} + by_{\tilde{x}}$ при $b > 0$, то вместо $1 + 0,5hb$ в (19) получим $1 - 0,5hb$ и оператор $(-\Lambda)$ будет положительно определенным только при $h < 2/b$.

Если аппроксимировать $u'(x)$ центральной разностной производной $u_{\tilde{x}}^*$ при любом знаке b , то получим оператор $A_3 y = -\tilde{\Lambda}_3 y$, $\Lambda_3 y = y_{xx} + by_{\tilde{x}}^*$. Этот оператор $A_3 y = -y_{xx} - hbR_3 y$ имеет второй

порядок аппроксимации и для него

$$(A_3 y, y) = (-y_{xx}, y) - hb (R_3 y, y) = \|y_x\|^2,$$

$$\|A_3\| \leq \|A\| + h|b| \cdot \|R_3\| < \frac{4}{h^2} (1 + h|b|).$$

Мы ограничились здесь простейшими примерами.

В следующих главах аналогичными методами будут изучаться разностные операторы, аппроксимирующие эллиптические операторы (в частности, оператор Лапласа) в прямоугольных областях.

Если исходный дифференциальный оператор самосопряжен и положительно определен, то и разностный оператор надо строить так, чтобы он обладал указанными свойствами в сеточном пространстве. Этого можно добиться, используя, например, метод баланса (интегро-интерполяционный метод, см. гл. III) или вариационный метод для построения разностных схем.

Из предыдущих примеров видно, что разностные уравнения можно трактовать как операторные уравнения с операторами в линейном нормированном конечномерном пространстве. Для этих операторов характерно то, что они отображают все пространство в себя.

Перейдем к изложению теории разностных схем как операторных уравнений.

2. Устойчивость разностной схемы. Пусть даны два линейных нормированных пространства $\mathcal{B}_h^{(1)}$ и $\mathcal{B}_h^{(2)}$, зависящих от параметра h , являющегося вектором некоторого нормированного пространства, $|h| > 0$ — норма вектора h . Рассмотрим линейный оператор A_h с областью определения $\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{B}_h^{(1)}$ и множеством значений $\mathcal{R}(A_h) \subseteq \mathcal{B}_h^{(2)}$.

Рассмотрим уравнение

$$A_h y_h = \varphi_h, \quad y_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}, \quad \varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}, \quad (21)$$

где φ_h — заданный вектор.

Меняя параметр h , мы получим множество решений $\{y_h\}$ уравнения (21). Операторное уравнение (21), зависящее от параметра h , будем называть *разностной схемой*.

Пусть $\|\cdot\|_{(1_h)}$ и $\|\cdot\|_{(2_h)}$ — нормы в $\mathcal{B}_h^{(1)}$ и $\mathcal{B}_h^{(2)}$.

Будем говорить, что схема (21) *корректна* (задача (21) *корректно поставлена*), если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$

1) решение y_h уравнения (21) существует и единственno при любых $\varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$ (схема (21) *однозначно разрешима*),

2) решение y_h уравнения (21) непрерывно зависит от φ_h , причем эта зависимость равномерна по h (схема (21) *устойчива*), иными словами, существует такая положительная постоянная M , не зависящая от h , φ_h , что для решения уравнения (21) имеет

место оценка (при любых $\varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$):

$$\|y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\varphi_h\|_{(2_h)}. \quad (22)$$

Разрешимость схемы (21) означает, что существует обратный оператор A_h^{-1} , т. е.

$$y_h = A_h^{-1} \varphi_h. \quad (23)$$

Устойчивость схемы означает, что обратный оператор A_h^{-1} из $\mathcal{B}_h^{(2)}$ в $\mathcal{B}_h^{(1)}$ равномерно по h ограничен:

$$\|A_h^{-1}\| \leq M, \text{ где } M > 0 \text{ не зависит от } h. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует оценка (22):

$$\|y_h\|_{(1_h)} \leq \|A_h^{-1}\| \|\varphi_h\|_{(2_h)} \leq M \|\varphi_h\|_{(2_h)}.$$

Иными словами, устойчивость схемы (21) означает, что решение уравнения (21) непрерывно зависит от правой части, причем эта зависимость равномерна по параметру h . Отсюда следует, что малому изменению правой части соответствует малое изменение решения. Если схема разрешима и устойчива, то она корректна. Заметим, что единственность решения задачи (21) есть следствие ее разрешимости и устойчивости, и поэтому требование единственности в условии 1) можно опустить. В самом деле, предположим, что существуют два решения \bar{y}_h и $\bar{\bar{y}}_h \neq \bar{y}_h$ уравнения (21). Их разность $z_h = \bar{\bar{y}}_h - \bar{y}_h$ в силу линейности оператора A_h удовлетворяет однородному уравнению $A_h z_h = A_h (\bar{y}_h - \bar{\bar{y}}_h) = A_h \bar{y}_h - A_h \bar{\bar{y}}_h = \varphi_h - \varphi_h = 0$. Так как схема (21) устойчива, то выполнено неравенство (22), в силу которого $\|z_h\|_{(1_h)} = \|\bar{\bar{y}}_h - \bar{y}_h\|_{(1_h)} \leq M \|0\|_{(2_h)} = 0$. Отсюда следует, что $\bar{y}_h = \bar{\bar{y}}_h$.

Для доказательства устойчивости схемы (21) требуется получить априорную оценку вида (22). Вывод некоторых априорных оценок для операторного уравнения (21) будет дан в п. 4.

Разностная схема $A_h y_h = \varphi_h$ называется *некорректно поставленной* (некорректной), если не выполнено хотя бы одно из условий 1), 2) на стр. 133.

Предположим, что решение y_h задачи (21) существует при любых $\varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$, так что $y_h = A_h^{-1} \varphi_h$. Так как $\mathcal{B}_h^{(1)}$ и $\mathcal{B}_h^{(2)}$ — конечномерные пространства, то оператор A_h^{-1} , действующий из $\mathcal{B}_h^{(2)}$ в $\mathcal{B}_h^{(1)}$, ограничен и его норма

$$\|A_h^{-1}\| = M_h,$$

где M_h — положительная постоянная, зависящая от параметра h . Если схема устойчива, то существует постоянная $M > 0$, не за-

висящая от h такая, что $M_h \leq M$ при всех $|h| \leq h_0$. Неустойчивость схемы (21) (и, следовательно, ее некорректность) означает, что $M_h \rightarrow \infty$ при $|h| \rightarrow 0$, т. е. указанной выше постоянной M не существует. Для некорректной схемы может выполняться лишь оценка вида

$$\|y_h\|_{(1_h)} \leq M_h \|\varPhi_h\|_{(2_h)}. \quad (25)$$

Здесь можно говорить лишь о *слабой устойчивости* в смысле выполнения условия (22). Фактически это значит, что существует область изменения $|h|$, например, $0 < h_* \leq |h| < h_0$, в которой выполнена оценка (22), где M зависит от h_* .

Определение корректности и некорректности схемы тесно связано с выбором норм $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$. Может оказаться, что при одном выборе норм выполняется оценка (25), а при другом — оценка (22).

Заметим, что для схемы

$$Ay = -y_{xx} = \varPhi \quad \text{при } y \in \mathring{\Omega}_h,$$

как было показано в § 3, имеет место оценка (22) с нормами

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{(1_h)} &= \|y_h\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_h(x_i)|, \quad M = 1, \\ \|\varPhi_h\|_{(2_h)} &= \left[\sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{k=i}^{N-1} h \varPhi_k \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

3. Сходимость и аппроксимация. Пусть $\mathcal{B}^{(1)}$ и $\mathcal{B}^{(2)}$ — линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$. Предположим, что

1) существуют линейные операторы $\mathcal{P}_h^{(1)}$ из $\mathcal{B}^{(1)}$ в $\mathcal{B}_h^{(1)}$ и $\mathcal{P}_h^{(2)}$ из $\mathcal{B}^{(2)}$ в $\mathcal{B}_h^{(2)}$ (операторы проектирования), так что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h^{(1)}u &= u_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}, \quad \text{если } u \in \mathcal{B}^{(1)}, \\ \mathcal{P}_h^{(2)}f &= f_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}, \quad \text{если } f \in \mathcal{B}^{(2)}, \end{aligned}$$

2) выполнены условия согласования норм:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h^{(1)}u\|_{(1_h)} = \|u\|_{(1)}, \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h^{(2)}f\|_{(2_h)} = \|f\|_{(2)}. \quad (26)$$

Пусть y_h — вектор из $\mathcal{B}_h^{(1)}$. Нас будет интересовать сходимость $\{y_h\}$ при $|h| \rightarrow 0$ к некоторому фиксированному элементу u из $\mathcal{B}^{(1)}$.

Будем говорить, что

1) $\{y_h\}$, где $y_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}$, сходится к элементу $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, если

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - \mathcal{P}_h^{(1)}u\|_{(1_h)} = 0, \quad (27)$$

2) $\{y_h\}$ сходится к $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ со скоростью $O(|h|^n)$, $n > 0$ (или аппроксимирует u с точностью $O(|h|^n)$), если при всех доста-

точно малых $|h| \leq h_0$ имеет место оценка

$$\|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M|h|^n, \quad u_h = \mathcal{P}_h^{(1)} u, \quad (28)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от h .

Замечания. 1. Из условия сходимости (27) следует, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h\|_{(1_h)} = \|u\|_{(1)}. \quad (29)$$

В самом деле, в силу неравенства треугольника можно написать

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{(1_h)} &= \|(y_h - u_h) + u_h\|_{(1_h)} \leq \|y_h - u_h\|_{(1_h)} + \|u_h\|_{(1_h)} \leq \\ &\leq \|y_h - u_h\|_{(1_h)} + \|\mathcal{P}_h^{(1)} u\|_{(1_h)}, \end{aligned}$$

так как $u_h = \mathcal{P}_h^{(1)} u$. Переходя к пределу при $|h| \rightarrow 0$ и учитывая (27) и (26), получаем $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h\|_{(1_h)} \leq \|u\|_{(1)}$; аналогичным рассмотрением получаем $\|u\|_{(1)} \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h\|_{(1_h)}$. Отсюда следует (29).

2. Последовательность $\{y_h\}$ может сходиться только к одному элементу $u \in \mathcal{B}^{(1)}$. Пусть существуют два предельных элемента $\bar{u}, \tilde{u} \in \mathcal{B}^{(1)}$, $\bar{u} \neq \tilde{u}$, к каждому из которых сходится $\{y_h\}$, так что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - \bar{u}_h\|_{(1_h)} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - \tilde{u}_h\|_{(1_h)} = 0.$$

Покажем, что $\bar{u} = \tilde{u}$. Для этого рассмотрим разность $\bar{u}_h - \tilde{u}_h = -(\bar{u}_h - y_h) + (y_h - \tilde{u}_h)$ и воспользуемся неравенством треугольника

$$\|\bar{u}_h - \tilde{u}_h\|_{(1_h)} \leq \|y_h - \bar{u}_h\|_{(1_h)} + \|y_h - \tilde{u}_h\|_{(1_h)}.$$

Переходя к пределу при $|h| \rightarrow 0$ и учитывая сходимость y_h к \bar{u} и \tilde{u} , а также условие согласования норм (26), получаем $\|\bar{u} - \tilde{u}\|_{(1)} = 0$, т. е. $\bar{u} = \tilde{u}$.

Пусть y_h — решение задачи (21). Будем говорить, что

1) схема (21) сходится, если существует элемент $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ такой, что выполнено (27),

2) схема имеет точность $O(|h|^n)$, если существует такой элемент $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, что при $|h| \leq h_0$ выполнено (28).

Введем понятие погрешности аппроксимации на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$. Для этого напишем уравнение для разности $z_h = y_h - u_h$. Подставляя $y_h = z_h + u_h$ в (21), получим

$$A_h z_h = \psi_h, \quad \psi_h = \varphi_h - A_h u_h, \quad \psi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}. \quad (30)$$

Правую часть $\psi_h = \psi_h(u)$, зависящую от выбора элемента u из $\mathcal{B}^{(1)}$, назовем погрешностью аппроксимации на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$.

для схемы (21). Очевидно, что $\psi_h(u)$ есть невязка, возникающая при замене в уравнении (21) u_h элементом $u_h = \mathcal{P}_h^{(1)}u$.

Будем говорить, что

1) схема (21) обладает аппроксимацией на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, если

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\psi_h(u)\|_{(\mathcal{B}_h)} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\varphi_h - A_h u_h\|_{(\mathcal{B}_h)} = 0, \quad (31)$$

2) схема (21) имеет n -й порядок аппроксимации на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$

$$\|\psi_h(u)\|_{(\mathcal{B}_h)} \leq M|h|^n \quad \text{или} \quad \|\psi_h(u)\|_{(\mathcal{B}_h)} = O(|h|^n), \quad (32)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h , $n > 0$.

Установим теперь связь между устойчивостью, аппроксимацией на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ и сходимостью к этому элементу для схемы (21).

Если схема (21) корректна, то и задача (30) для z_h также корректна. Поэтому для ее решения верна оценка

$$\|z_h\|_{(\mathcal{B}_h)} \leq M \|\psi_h\|_{(\mathcal{B}_h)}. \quad (33)$$

Отсюда следует

Теорема 1. Если схема (21) корректна и обладает аппроксимацией на некотором элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, то она сходится, точнее, решение u_h задачи (21) при $|h| \rightarrow 0$ сходится к этому элементу $u \in \mathcal{B}^{(1)}$, причем порядок точности схемы (21) совпадает с порядком аппроксимации (т. е. из аппроксимации и корректности (устойчивости) схемы следует ее сходимость).

До сих пор мы говорили о сходимости схемы и погрешности аппроксимации на некотором фиксированном элементе u из $\mathcal{B}^{(1)}$. Однако если u принадлежит области определения некоторого линейного оператора \mathcal{A} , действующего из $\mathcal{B}^{(1)}$ в $\mathcal{B}^{(2)}$, то $\mathcal{A}u = f$, $f \in \mathcal{B}^{(2)}$. Поэтому можно считать, что u есть решение уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad u \in \mathcal{B}^{(1)}, \quad f \in \mathcal{B}^{(2)}, \quad (34)$$

и, следовательно, говорить об аппроксимации этого уравнения разностной схемой. Мы не вводили уравнение (34) лишь потому, что нигде в определениях не используются никакие предположения относительно оператора \mathcal{A} . Всюду мы имели дело лишь с элементом $u \in \mathcal{B}^{(1)}$.

Однако если u есть решение некоторого уравнения (34), то можно говорить, как это обычно делается, об аппроксимации уравнения (34) схемой (21) на решении уравнения (34), о сходимости к решению уравнения (34) и т. д.

Поскольку имеется понятие аппроксимации элемента f из $\mathcal{B}^{(2)}$ множеством $\{\varphi_h\}$ из $\{\mathcal{B}_h^{(2)}\}$, то можно говорить об аппроксимации f элементами φ_h , оператором \mathcal{A} оператором A_h :

1) φ_h аппроксимирует f с порядком n , если

$$\|\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)} f\|_{(2)_h} = O(|h|^n), \quad (35)$$

2) оператор A_h аппроксимирует оператор \mathcal{A} с порядком n , если для любого $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ справедлива оценка

$$\|A_h u_h - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2)_h} = \|A_h(\mathcal{P}_h^{(1)} u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2)_h} = O(|h|^n). \quad (36)$$

Очевидно, что если выполнены условия (35) и (36), то схема (21) имеет n -й порядок аппроксимации на решении u уравнения (34).

В самом деле, так как $\mathcal{P}_h^{(2)}(f - \mathcal{A}u) = 0$, то

$$\psi_h(u) = \varphi_h - A_h u_h = (\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)} f) - (A_h(\mathcal{P}_h^{(1)} u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u))$$

и

$$\|\psi_h(u)\|_{(2)_h} \leq \|\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)} f\|_{(2)_h} + \|A_h(\mathcal{P}_h^{(1)} u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2)_h} \leq M|h|^n,$$

если выполнены условия (35) и (36).

Очевидно, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. из (32) не следуют условия (35) и (36).

Еще раз подчеркнем, что для оценки порядка точности схемы надо оценить ее порядок аппроксимации лишь на решении исходной задачи.

До сих пор мы предполагали, что оператор A_h линеен (схема (21) линейная). Если A_h — нелинейный оператор (схема (21) нелинейная), то в предыдущих рассуждениях надо изменить лишь определение устойчивости схемы. Пусть дана нелинейная схема

$$A_h y_h = \varphi_h, \quad \varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}; \quad (21^*)$$

y_h — ее решение, а \bar{y}_h — решение с правой частью $\bar{\varphi}_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$. Схема (21^{*}) называется *устойчивой*, если существуют такие положительные постоянные $h_0 > 0$ и $M > 0$, не зависящие от параметра h и выбора φ_h , $\bar{\varphi}_h$, что выполняется неравенство

$$\|\bar{y}_h - y_h\|_{(1)_h} \leq M \|\bar{\varphi}_h - \varphi_h\|_{(2)_h}$$

$$\text{при } |h| < h_0 \text{ для любых } \varphi_h, \bar{\varphi}_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}. \quad (22^*)$$

(Для линейной схемы отсюда при $\bar{\varphi}_h = 0$, $\bar{y}_h = 0$ следует (22).) Все определения аппроксимации и сходимости, данные выше, сохраняют силу. Верна и теорема 1, однако ее доказательство имеет несколько другую редакцию. Вместо (30) надо написать

$$A_h u_h = \bar{\varphi}_h, \quad \bar{\varphi}_h = \varphi_h - \psi_h, \quad \psi_h = \varphi_h - A_h u_h,$$

где ψ_h — погрешность аппроксимации (невязка) на элементе $u \in \mathcal{B}^{(1)}$. Обозначим решение уравнения (21^{*}) через y_h , $\bar{y}_h = u_h$ и восполь-

зумеся условием устойчивости (22*). Тогда получим оценку (33):

$$\|z_h\|_{(1_h)} = \|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M \|\Psi_h\|_{(2_h)}.$$

Тем самым теорема 1 доказана и для нелинейной схемы.

4. Некоторые априорные оценки. Рассмотрим ряд простейших априорных оценок решения уравнения (21), вид которых зависит от информации об операторе схемы. Эти оценки типичны для разностных эллиптических задач.

Для упрощения записи будем в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, опускать индекс h . Итак, пусть дано уравнение

$$Ay = \varphi, \quad (37)$$

где A — линейный ограниченный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве H , φ — известный, y — искомый элементы из H .

Будем предполагать, что задача (37) разрешима при любых правых частях $\varphi \in H$ (т. е. что существует оператор A^{-1} с областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$).

Все постоянные, встречающиеся ниже, предполагаются не зависящими от h .

Пусть $(,)$ — скалярное произведение, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ — норма в H . Запись $A = A^* > 0$ будет означать, что A — самосопряженный и положительный оператор. Введем обозначения

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}, \quad \|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}, \quad A = A^* > 0.$$

Априорная оценка зависит от характера информации об A .

Пусть H — конечномерное пространство.

1) Рассмотрим сначала простейший случай, когда A — несамосопряженный положительно определенный оператор

$$A \geq \delta E, \quad \delta > 0 \quad \text{или} \quad (Ay, y) \geq \delta \|y\|^2 \quad \text{для любого } y \in H, \quad (38)$$

где E — единичный оператор. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен по норме постоянной $1/\delta$:

$$\|A^{-1}\| \leq 1/\delta. \quad (39)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} 0 \leq (Ay, y) - \delta \|y\|^2 &= (A^{-1}x, x) - \delta \|A^{-1}x\|^2 \leq \|A^{-1}x\| \cdot \|x\| - \delta \|A^{-1}x\|^2 = \\ &= \delta \|A^{-1}x\| \left(\frac{1}{\delta} \|x\| - \|A^{-1}x\| \right), \quad x = Ay, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } \|A^{-1}x\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\| \text{ или } \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Так как $y = A^{-1}\varphi$, $\|y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\varphi\|$, то для решения уравнения (37) верна оценка

$$\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\| \quad \text{при } A \geq \delta E, \quad \delta > 0. \quad (40)$$

2) Имеет место точная оценка

$$\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}} \text{ при } A = A^* > 0.$$

В самом деле, умножим (37) скалярно на $y = A^{-1}\varphi$:

$$(Ay, y) = (\varphi, y) = (\varphi, A^{-1}\varphi) \text{ или } \|y\|_A^2 = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2.$$

3) Если $A > 0$, то

$$\|y\|_{A_0} \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}}, \quad A_0 = \frac{A + A^*}{2}. \quad (41)$$

В самом деле, умножим (37) скалярно на y :

$$(Ay, y) = (\varphi, y), \quad (42)$$

$A = A_0 + A_1$, где $A_0 = 0,5(A + A^*)$ — симметрическая часть, $A_1 = -0,5(A - A^*)$ — кососимметрическая часть оператора A . Тогда $(Ay, y) = (A_0y, y)$, так как $(A_1y, y) = 0$. Поскольку $A_0 > 0$, то A_0^{-1} существует (H — конечномерное пространство*)), поэтому, пользуясь обобщенным неравенством Коши — Буняковского, можно написать $(\varphi, y) = (A_0^{-1}\varphi, A_0y) \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}}\|y\|_{A_0}$. Подставляя это неравенство в (42), получаем $(A_0y, y) = \|y\|_{A_0}^2 \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}}\|\varphi\|_{A_0}$, откуда и следует искомая оценка (41).

4) Если $A \geq \delta E$, $\delta > 0$, то

$$\|y\|_{A_0} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|\varphi\|. \quad (43)$$

Воспользуемся оценкой (41) и неравенством $\|\varphi\|_{A_0^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|\varphi\|$, которое получается, если учесть, что

$$A_0 \geq \delta E \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{A_0^{-1}}^2 = (A_0^{-1}\varphi, \varphi) \leq \|A_0^{-1}\| \cdot \|\varphi\|^2 \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|^2.$$

5) Предположим, что A — несамосопряженный оператор, удовлетворяющий неравенству $A \geq \gamma \hat{A}$, $\gamma > 0$, $A^* = \hat{A} > 0$.

Тогда для решения уравнения (37) верна оценка

$$\|y\|_A \leq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|_{\hat{A}^{-1}}. \quad (44)$$

Из тождества $(Ay, y) = (\varphi, y)$ находим $\gamma (\hat{A}y, y) \leq (Ay, y) = (\varphi, y) \leq \|\varphi\|_{\hat{A}^{-1}} \|y\|_{\hat{A}}$. Отсюда и получаем (44).

6) Для решения уравнения (37) справедлива оценка

$$\|\hat{A}y\| \leq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|, \quad (45)$$

*). Если H — бесконечномерное пространство, то вместо $A > 0$ надо потребовать, чтобы $A \geq \delta E$, $\delta > 0$.

если выполнены условия

$$A^* = A \geq \gamma \hat{A}, \quad \hat{A} = \hat{A}^* > 0, \quad A\hat{A} = \hat{A}A, \quad \gamma > 0.$$

Достаточно показать, что $\|Ay\| \geq \gamma \|\hat{A}y\|$, и воспользоваться уравнением (37), в силу которого $\|Ay\| = \|\varphi\|$. Из условий $A \geq \gamma \hat{A}$ и $A\hat{A} = \hat{A}A$ следует $\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A(A^{1/2}y), (A^{1/2}y)) \geq \geq \gamma(\hat{A}(A^{1/2}y), (A^{1/2}y)) = \gamma(A\hat{A}y, y) = \gamma(A(\hat{A}^{1/2}y), (\hat{A}^{1/2}y)) \geq \geq \gamma^2(\hat{A}(\hat{A}^{1/2}y), (\hat{A}^{1/2}y)) = \gamma^2\|\hat{A}y\|^2$, т. е. $\|Ay\| \geq \gamma \|\hat{A}y\|$. При этом мы воспользовались перестановочностью A , $A^{1/2}$ и \hat{A} , $\hat{A}^{1/2}$.

5. Негативные нормы. В априорных оценках (41) и (42) содержатся негативные нормы $\|\varphi\|_{A^{-1}}$. Остановимся на вопросе о вычислении негативных норм для некоторых простейших операторов. Заметим прежде всего, что

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|\varphi\|_{\hat{A}^{-1}}, \quad \text{если } A \geq \gamma \hat{A}, \quad (46)$$

где $A = A^* > 0$ и $\hat{A} = \hat{A}^* > 0$. Это следует из эквивалентности операторных неравенств

$$A \geq \gamma \hat{A} \text{ и } \hat{A}^{-1} \geq \gamma A^{-1}. \quad (47)$$

Докажем сначала эквивалентность неравенств

$$Q \geq 0, \quad L^* Q L \geq 0,$$

где Q , $L: H \rightarrow H$ и L^{-1} существует. В самом деле,

$$(L^* Q L y, y) = (Q L y, L y) = (Q v, v), \quad \text{где } v = L y, \quad y \in L^{-1} v.$$

Пусть выполнено $A \geq \gamma \hat{A}$ или $Q = A - \gamma \hat{A} \geq 0$. Полагая $L = L^* = A^{-1/2}$, получаем $C = \gamma E \geq 0$, где $C = \hat{A}^{-1/2} A A^{-1/2} = C^* > 0$. Так как существует оператор $C^{-1/2} = (C^{-1/2})^* > 0$, то $C = \gamma E \geq 0$ эквивалентно $C^{-1/2}(C - \gamma E)C^{-1/2} = E - \gamma C^{-1} = E - \gamma A^{1/2} A^{-1} \hat{A}^{1/2} \geq 0$. Полагая здесь $L = L^* = \hat{A}^{-1/2}$, получаем $\hat{A}^{-1} - \gamma A^{-1} \geq 0$, т. е. неравенства (47) эквивалентны, что и требовалось доказать.

Пример 4. Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{aligned} \Lambda y = (ay_x)_x &= -\varphi(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad hN = 1, \\ y_0 = y_N &= 0, \quad a_i \geq c_1 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (48)$$

на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad h = 1/N\}$. Пусть, как обычно, $H_h = \dot{\Omega}_h$ — пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $i = 0, i = N$; скалярное произведение в H_h

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Введем оператор Ay , полагая $Ay = -\tilde{A}y$, где $\tilde{A}y = Ay$ при $y \in \Omega$, так что

$$(Ay)_i = -(ay_x)_x, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (Ay)_0 = (Ay)_N = 0 \quad (49)$$

и вектор $\varphi = (0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}, 0)$. Запишем задачу в виде операторного уравнения

$$Ay = \varphi. \quad (37)$$

Из формул Грина $(y, (ay_x)_x) = -(a, (y_x)^2)$, $(v, (ay_x)_x) = (y, (av_x)_x)$, где $y, v \in \Omega$, видно, что A — самосопряженный и положительно определенный оператор

$$A \geq \delta E, \quad \delta = 8c_1$$

$$((Ay, y) = (a, (y_x)^2) \geq c_1(1, (y_x)^2) \geq 8c_1 \|y\|^2, \text{ см. гл. II, § 3).}$$

Отсюда следует, что A^{-1} существует и $(A^{-1})^* = A^{-1} > 0$, точнее,

$$\frac{1}{\|A\|} E \leq A^{-1} \leq \frac{1}{\delta} E. \quad (50)$$

Покажем, что негативную норму $\|\varphi\|_{A^{-1}}$ для оператора (49) можно представить в виде

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i \right)^2 / \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i}, \quad (51)$$

$$S_i = \sum_{k=1}^{i-1} h \varphi_k, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad S_1 = 0, \quad (52)$$

и для этой нормы справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left\| \sum_{k=1}^{i-1} h \varphi_k \right\|. \quad (53)$$

Для доказательства представим правую часть уравнения (48) в виде $\varphi_i = S_{x,i}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, где S_i задано условиями (52). Из уравнения $(ay_x)_x + \varphi = (ay_x + S)_x = 0$ находим $a_i y_{x,i} + S_i = c = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Отсюда $y_i - y_{i-1} = \frac{c - S_i}{a_i} h$. Суммируя по $i = 1, 2, \dots, N$ и учитывая, что $y_0 = y_N = 0$, получим

$$c = \left(\sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i \right) / \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i}.$$

С другой стороны, $\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = (A^{-1}\varphi, \varphi) = (y, \varphi) = (y, S_x) = -[S, y_{\bar{x}}] = -\sum_{i=1}^N h y_{\bar{x}, i} S_i$. Подставим сюда $y_{\bar{x}, i} = (c - S_i)/a_i$:

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = -c \sum_{i=1}^N \frac{h S_i}{a_i} + \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N \frac{h S_i}{a_i} \right)^2 / \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i},$$

что и требовалось получить.

Оценка (53) очевидна:

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 \leq \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 \leq \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^N h S_i^2 = \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h S_{i+1}^2 = \frac{1}{c_1} \left\| \sum_{k=1}^t h \varphi_k \right\|^2.$$

Пример 5. Рассмотрим теперь третью краевую задачу (9). Введем так же, как и в примере 2 п. 1, пространство $H_h = \bar{\Omega}_h$ размерности $N+1$, состоящее из функций, заданных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$, со скалярным произведением

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0.5h (y_0 v_0 + y_N v_N).$$

Перепишем задачу (9) в форме операторного уравнения

$$Ay = \varphi, \quad (37)$$

где y и φ — векторы размерности $N+1$:

$$\begin{aligned} y &= \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N\}, \\ \varphi &= \left\{ \frac{1}{0.5h} \mu_1, f_1, \dots, f_{N-1}, \frac{1}{0.5h} \mu_2 \right\}, \end{aligned}$$

а оператор A определяется формулами

$$(Ay)_i = \begin{cases} -\frac{1}{0.5h} (y_{x, 0} - \sigma_1 y_0), & i = 0, \\ -y_{xx, i}, & 1 \leq i \leq N-1, \\ -\frac{1}{0.5h} (y_{x, N} + \sigma_2 y_N), & i = N. \end{cases} \quad (54)$$

Негативная норма для оператора (54) выражается формулами

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{A^{-1}}^2 &= [A^{-1}\varphi, \varphi] = \sum_{i=1}^N h S_i^2 + \frac{1}{\sigma_2} S_{N+1}^2 - \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^N h S_i + \frac{1}{\sigma_2} S_{N+1} \right)^2 / \left(1 + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 0.5h \varphi_0, \quad S_i = 0.5h \varphi_0 + \sum_{k=1}^{i-1} h \varphi_k, \quad i = 2, 3, \dots, N, \\ S_{N+1} &= 0.5h (\varphi_0 + \varphi_N) + \sum_{k=1}^{N-1} h \varphi_k, \end{aligned} \quad (56)$$

и для нее справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 \leq \left\| 0,5h\varphi_0 + \sum_{k=1}^i \varphi_k \right\|^2 + \frac{1}{\sigma_2} [1, \varphi]^2. \quad (57)$$

Для получения этих формул введем точки $x_{-1} = -h$, $x_{N+1} = 1+h$ и положим $y(x_{-1}) = y_{-1} = 0$, $y(x_{N+1}) = y_{N+1} = 0$, после чего перепишем краевое условие в (9) при $i=0$ в виде

$$-\frac{(y_1 - y_0) - a_0(y_0 - y_{-1})}{h^2} = \tilde{\varphi}_0, \quad \text{где } a_0 = h\sigma_1, \quad \tilde{\varphi}_0 = 0,5\varphi_0.$$

Аналогично запишем краевое условие в (9) при $i=N$:

$$-\frac{a_{N+1}(y_{N+1} - y_N) - (y_N - y_{N-1})}{h^2} = \tilde{\varphi}_N, \quad \text{где } a_{N+1} = h\sigma_2, \quad \tilde{\varphi}_N = 0,5\varphi_N.$$

Таким образом, задача (9) эквивалентна первой краевой задаче

$$-(ay_x)_{x,i} = \tilde{\varphi}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad y_{-1} = y_{N+1} = 0, \quad (58)$$

где $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $\tilde{\varphi}_0 = 0,5\varphi_0$, $\tilde{\varphi}_N = 0,5\varphi_N$, $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, $a_0 = h\sigma_1$, $a_{N+1} = h\sigma_2$.

Если y — решение задачи (9), то

$$\begin{aligned} [A^{-1}\varphi, \varphi] &= [y, \varphi] = 0,5h(y_0\varphi_0 + y_N\varphi_N) + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i h = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i h + h(y_0\tilde{\varphi}_0 + y_N\tilde{\varphi}_N) = \sum_{i=0}^N hy_i\tilde{\varphi}_i = \sum_{i=0}^N (A^{-1}\tilde{\varphi})_i \tilde{\varphi}_i h. \end{aligned}$$

Пользуясь теперь для задачи (58) формулами (51), (52) и оценкой (53), получаем (55) и (57).

Следствие. Если $\sigma_2 \geq c_1 > 0$, то для оператора (54) имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{i-1} h\varphi_k + 0,5h\varphi_0 \right\|^2 + \frac{1}{c_1} [1, \varphi]^2. \quad (59)$$

6. Операторные уравнения дивергентного вида. Рассмотрим теперь операторы специального вида (дивергентные или консервативные)

$$A = T^*ST, \quad (60)$$

где T , S , T^* — линейные ограниченные операторы. Операторы такого типа часто встречаются в этой книге при аппроксимации дифференциальных операторов вида $Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$.

Пусть H — линейное пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, H_1 — линейное пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Оператор T действует из H в H_1 , оператор S действует из H_1 в H ,

оператор T^* действует из H_1 в H . Тогда оператор A действует из H в H : $A: H \rightarrow H$.

Операторы T и T^* сопряжены в следующем смысле:

$$(Ty, v) = (y, T^*v) \text{ для всех } y \in H, v \in H_1.$$

Приведем примеры построения факторизованных операторов (60) для простейших разностных схем.

Пример 6. Первая краевая задача

$$(ay_x)_x = -\varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad a \geq c_1 > 0, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0. \quad (61)$$

В данном случае $H = \Omega_h$ — пространство сеточных функций, заданных во внутренних узлах сетки $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1\}$, т. е. при $0 < i < N$, а $H_1 = \Omega_h^+$ — пространство функций, заданных на множестве узлов $\omega_h^+ = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N, hN = 1\}$. Оператор $A: H \rightarrow H$ равен $Ay = -\tilde{\Lambda}y$, где $\tilde{\Lambda}y$ имеет вид

$$(\tilde{\Lambda}y)_i = (ay_x)_x, \quad i = 2, 3, \dots, N-2,$$

$$(\tilde{\Lambda}y)_1 = \frac{a_2(y_2 - y_1) - a_1 y_1}{h^2}, \quad (\tilde{\Lambda}y)_{N-1} = \frac{-a_N y_{N-1} - a_{N-1} (y_{N-1} - y_{N-2})}{h^2}.$$

Скалярные произведения в H и H_1 определим так:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h \text{ при } y, v \in H,$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h \text{ при } y_i, v_i \in H_1.$$

Операторы Ty , T^*v , Sv зададим формулами

$$(Ty)_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = y_{x,i}$$

при $i = 2, 3, \dots, N-1$, $(Ty)_1 = \frac{y_1}{h}$, $(Ty)_N = -\frac{y_{N-1}}{h}$, так что $v = -Ty \in H_1$, если $y \in H$,

$$(T^*v)_i = -\frac{v_{i+1} - v_i}{h}$$

при $i = 1, 2, \dots, N-1$, так что $T^*v \in H$, если $v \in H_1$.

$$(Sv)_i = a_i v_i,$$

$i = 1, 2, \dots, N$, т. е. $Sv \in H_1$, если $v \in H_1$, $(Sv, v) \geq c_1 \|v\|^2$. Отсюда видно, что

$$(STy)_i = a_i y_{x,i}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (STy)_1 = a_1 y_1/h,$$

$$(STy)_N = -a_N y_{N-1}/h,$$

$$(T^*STy)_i = -(ay_x)_x, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{при } y_0 = y_N = 0.$$

Таким образом, мы убедились, что оператор задачи (61) может быть факторизован в виде (60), так что вместо (37) можно написать

$$T^*STy = \varphi. \quad (62)$$

Сопряженность операторов T и T^* следует из формулы суммирования по частям:

$$(y, v_x) = -(v, y_x], \quad \text{так что} \quad (y, T^*v) = -(v, Ty].$$

Пример 7. Третья краевая задача:

$$\begin{aligned} (ay_x)_x &= -\varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad a \geq c_1 > 0, \\ a_1 y_{x,1} &= \sigma_1 y_0 - \mu_1, \quad -a_N y_{x,N} = \sigma_2 y_N - \mu_2, \\ \sigma_1 &\geq c_1 > 0, \quad \sigma_2 \geq c_1 > 0. \end{aligned} \quad (63)$$

В данном случае оператор A имеет вид (см. пример 2 п. 1):

$$(Ay)_i = \begin{cases} -\frac{1}{0.5h} (a_1 y_{x,1} - \sigma_1 y_0), & i = 0, \\ -(ay_x)_x, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{0.5h} (a_N y_{x,N} + \sigma_2 y_N), & i = N. \end{cases} \quad (64)$$

Чтобы представить оператор (64) в виде (60), удобно ввести дополнительную сетку

$$\bar{\omega}_h^1 = \{x_0, x_{1/2}, \dots, x_{-1/2}, \dots, x_{N-1/2}, x_N\}, \quad x_{i-1/2} = (i-0.5)h,$$

и рассматривать пространство функций H_1 , определенных на $\bar{\omega}_h^1$, со скалярным произведением

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N hy_{i-1/2} v_{i-1/2} + y_N v_N + y_0 v_0, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y]}.$$

Как и ранее, H — пространство функций, определенных на $\bar{\omega}_h$ $\{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$, со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i + 0.5h (y_0 v_0 + y_N v_N), \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Определим операторы $T: H \rightarrow H_1$ и $T^*: H_1 \rightarrow H$ следующим образом:

$$(Ty)_i = y_0, \quad (Ty)_{i-1/2} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (Ty)_N = -y_N,$$

$$(T^*v)_0 = -\frac{v_1 - v_0}{0.5h}, \quad (T^*v)_N = -\frac{v_N - v_{N-1/2}}{0.5h},$$

$$(T^*v)_i = -\frac{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y \in H, \quad v \in H_1.$$

Нетрудно видеть, что $A = T^*ST$, где оператор $S: H_1 \rightarrow H_1$ определен формулами

$$(Sy)_0 = \sigma_1 y_0, \quad (Sy)_{i-1/2} = a_i y_{i-1/2}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (Sy)_N = \sigma_2 y_N.$$

Очевидно, что S — самосопряженный в H_1 оператор и

$$(Sy, y) \geq c_1 \|y\|^2, \quad c_1 = \min(a_i, \sigma_1, \sigma_2).$$

Покажем теперь, что операторы T и T^* являются взаимно сопряженными в следующем смысле:

$$(T^*v, y) = (v, Ty], \quad y \in H, \quad v \in H_1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (T^*v, y) &= - \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) y_i - y_0 (v_{1/2} - v_0) - y_N (v_N - v_{N-1/2}) = \\ &= \sum_{i=1}^N v_{i-1/2} (y_i - y_{i-1}) + y_0 v_0 - y_N v_N = (v, Ty]. \end{aligned}$$

Напишем некоторые априорные оценки для уравнения $Ay = T^*STy = \varphi$. Пусть $S \geq c_1 E$, $c_1 > 0$, тогда

$$(Ay, y) = (T^*STy, y) = (STy, Ty] \geq c_1 \|Ty\|^2,$$

т. е. $A \geq \gamma A_0$, где $A_0 = T^*T$, $\gamma = c_1$.

Оператор A_0 самосопряжен,

$$(A_0 y, z) = (T^*Ty, z) = (y, T^*Tz) = (y, A_0 z).$$

Поэтому имеет место оценка (44), которая, если существуют T^{-1} и $(T^*)^{-1}$, принимает вид

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{c_1} \|(T^*)^{-1}\varphi\|. \quad (65)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|y\|_{A_0}^2 &= (A_0 y, y) = \|Ty\|^2, \\ \|\varphi\|_{A_0^{-1}}^2 &= (T^{-1}(T^*)^{-1}\varphi, \varphi) = \|(T^*)^{-1}\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Оценка (65) упрощается в том случае, когда правая часть φ уравнения (37) имеет специальный вид, $\varphi = T^*\eta$ и $A = T^*ST$. Умножая (37) скалярно на y , получим

$$(T^*STy, y) = (T^*\eta, y) = (Ty, \eta].$$

Отсюда и из неравенств

$$(T^*STy, y) \geq c_1 \|Ty\|^2, \quad (Ty, \eta] \leq \|Ty\| \|\eta\|$$

следует оценка

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{c_1} \|\eta\|.$$

Мы ограничились простейшими примерами, показывающими, как надо использовать для конкретных задач априорные оценки, полученные для операторного уравнения $Ay = \Phi$.

ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Основное содержание главы—теория однородных разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами

$$Lu + f(x) = 0, \quad Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u.$$

Главное внимание уделяется способам написания однородных разностных схем и исследования их аппроксимации и сходимости в случае разрывных k , q , f , а также в случае неравномерных сеток.

§ 1. Однородные схемы для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

1. Введение. В связи с широким применением вычислительных машин становится ясным, что нецелесообразно использовать разностные схемы и составлять программы, предназначенные лишь для решения отдельных задач частного вида. Необходимо иметь разностные схемы, пригодные для решения классов задач, определяемых заданием типа дифференциального уравнения, класса краевых и начальных условий, а также функционального пространства, которому принадлежат коэффициенты дифференциального уравнения. Такие универсальные разностные схемы должны, естественно, удовлетворять требованиям сходимости и устойчивости на любой последовательности сеток и для любой исходной задачи из рассматриваемого класса задач. Требование единобразия вычислительного алгоритма для решения класса задач приводит к понятию однородных разностных схем. Под однородной разностной схемой понимается разностная схема, вид которой не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. Коэффициенты однородной разностной схемы определяются как функционалы коэффициентов дифференциального уравнения.

Большой интерес, например, представляет отыскание однородных схем «сквозного» или «непрерывного» счета, пригодных для решения уравнения теплопроводности (диффузии) с разрывным коэффициентом теплопроводности (диффузии) по одним и тем же

формулам (программам) без явного выделения точек или линий разрыва коэффициентов. Это значит, что схема в окрестности разрывов не меняется и вычисления во всех узлах ведутся по одним и тем же формулам, независимо от того, разрывен или непрерывен коэффициент теплопроводности.

Использование однородных схем сквозного счета особенно важно в тех случаях, когда коэффициент теплопроводности вычисляется в результате приближенного решения других уравнений, что, например, имеет место при решении уравнений газодинамики в теплопроводном газе, когда коэффициент теплопроводности зависит от плотности и терпит разрывы на ударных волнах.

Для теории разностных схем необходимо задать *исходное семейство схем*. Коэффициенты однородной разностной схемы выражаются через коэффициенты исходного дифференциального уравнения при помощи некоторых так называемых *шаблонных функционалов*, произвол в выборе которых ограничен требованиями аппроксимации, разрешимости, устойчивости и др. Семейство однородных разностных схем задано, если указано семейство допустимых шаблонных функционалов схемы.

Поясним это в возможно более простой ситуации. Будем рассматривать разностные операторы над функциями одного переменного $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \dots$. Разностный оператор вначале определяется на *целочисленном шаблоне*, т. е. на множестве

$$\mathfrak{M}_0 = \{-m_1, -m_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_2\},$$

где m_1, m_2 — целые числа, после чего совершается переход к реальной сетке

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, \pm 1, \dots\}$$

с шагом h . Пусть $\bar{k}(s)$ — вектор-функция, заданная на отрезке $-m_1 \leq s \leq m_2$ (на коэффициентном шаблоне). Пусть далее

$$A_h^k[\bar{k}(s)], -m_1 \leq j \leq m_2, B^k[\bar{k}(s)]$$

— некоторые *шаблонные функционалы*, зависящие, вообще говоря, от параметра h и определенные для вектор-функций $k(s)$, $s \in [-m_1, m_2]$. Линейная (относительно сеточной функции y^h) однородная разностная схема определяется так: $(L_h^k y^h)_i = 0$, где

$$(L_h^k y^h)_i = \sum_{m=-m_1}^{m_2} A_m^h [k(x_i + sh)] y^h(x_i + mh) + B^h [k(x_i + sh)].$$

Опуская индекс i , это выражение можно записать в виде

$$L_h^k y^h = \sum_{m=-m_1}^{m_2} A_m^h [k(x + sh)] y^h(x + mh) + B^h [k(x + sh)].$$

Целью теории однородных разностных схем является отыскание (в исходном семействе) схем, пригодных для решения возможно более широкого класса задач, а также выделение наилучших схем (по порядку точности, по объему вычислений и др.).

В этой главе мы дадим изложение основных вопросов теории однородных разностных схем для одномерной стационарной задачи теплопроводности с переменными коэффициентами.

Полученные здесь результаты будут использованы в дальнейшем при изучении однородных разностных схем для нестационарного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f(x, t)$$

и уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f'(x, t).$$

2. Исходная задача. Рассмотрим первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности или диффузии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u &= -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Эта задача имеет решение, если $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ —кусочно-непрерывные функции (принадлежат классу $Q^{(0)}$)^{*}). Если $k(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x = \xi$, так что $[k] = k(\xi + 0) - k(\xi - 0) \neq 0$, то при $x = \xi$ ставятся условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi$$

(температура u и поток $(-ku')$ непрерывны).

При $x = 0$ и $x = 1$ могут быть заданы краевые условия

$$ku' = \beta_1 u - \mu_1 \quad \text{при } x = 0, \quad -ku' = \beta_2 u - \mu_2 \quad \text{при } x = 1.$$

Если, например, $\beta_1 > 0$, то это условие третьего рода, при $\beta_1 = 0$ —условие второго рода. Возможны различные комбинации

условий первого, второго и третьего рода (например, при $x = 0$ —условие третьего рода, при $x = 1$ —условие первого рода и т. д.).

Мы проведем основное изложение для первой краевой задачи.

3. Трехточечные схемы. На отрезке $[0, 1]$ введем равномерную сетку

$$\tilde{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

^{*}) Мы пользуемся обозначениями: $C^{(n)}[a, b]$ —класс функций, имеющих n непрерывных на отрезке $a \leq x \leq b$ производных, $Q^{(n)}[a, b]$ —класс функций, кусочно-непрерывных на $[a, b]$ вместе с производными до n -го порядка включительно, $Q^{(0)}[a, b]$ —класс кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций

с шагом $h = 1/N$; обозначим

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$y_i = y(x_i)$ — сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}_h$.

При написании схемы, аппроксимирующей уравнение (1), возьмем трехточечный шаблон (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) . Любое трехточечное разностное уравнение на этом шаблоне можно записать в виде

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где a_i, c_i, b_i и φ_i зависят от шага h , или в виде

$$\frac{1}{h} \left(b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i + \varphi_i = 0, \quad (2)$$

где $d_i = (c_i - b_i - a_i)/h^2$. Коэффициенты a_i, b_i, d_i и правая часть φ_i пока не определены.

Пусть на шаблоне $-1 \leq s \leq 1$ (т. е. $m_1 = m_2 = 1$) определены функционалы

$$A^h[\bar{k}(s)], \quad B^h[\bar{k}(s)], \quad D^h[\bar{q}(s)], \quad F^h[\bar{f}(s)]$$

для любых функций $\bar{k}(s)$, $\bar{q}(s)$, $\bar{f}(s)$ из $Q^{(0)}$, зависящие, вообще говоря, от параметра h . Если коэффициенты разностной схемы (2) при любых $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}$ во всех узлах x_i произвольной сетки ω_h вычисляются по одним и тем же формулам

$$\begin{aligned} a_i &= A^h[k(x_i + sh)], \quad b_i = B^h[k(x_i + sh)], \\ d_i &= D^h[q(x_i + sh)], \quad \varphi_i = F^h[f(x_i + sh)], \end{aligned} \quad (3)$$

то схема (2) называется *однородной*.

Отсюда видно, что если, например, задан функционал $A^h[\bar{k}(s)]$, то для вычисления a_i надо положить формально $\bar{k}(s) = k(x_i + sh)$ и т. д.

Если схема (2) однородна, то индекс i можно опустить и (2) записать в виде

$$\frac{1}{h} (b y_x - a y_{\bar{x}}) - d y = -\varphi, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a &= a(x), \quad b = b(x), \quad y = y(x), \quad x = ih \in \omega_h, \\ y_x &= (y(x+h) - y(x))/h, \quad y_{\bar{x}} = (y(x) - y(x-h))/h. \end{aligned}$$

Семейство однородных схем задано, если задано семейство шаблонных функционалов A^h, B^h, D^h, F^h . Требования аппроксимации и разрешимости задачи (4) накладывают ограничения на произвол в их выборе.

4. Условия второго порядка аппроксимации. Вычислим локальную погрешность аппроксимации схемы (4):

$$\psi(v) = \left[\frac{1}{h} (bv_x - av_{\bar{x}}) - dv + \varphi \right] - [(kv')' - qv + f],$$

где v — произвольная достаточно гладкая функция, k, q, f также имеют нужное по ходу изложения число производных. Разлагая v в точке x по формуле Тейлора, найдем

$$v_x = v' + 0,5hv'' + \frac{h^3}{6}v''' + O(h^3),$$

$$v_{\bar{x}} = v' - 0,5hv'' + \frac{h^2}{6}v'' + O(h^3),$$

$$\begin{aligned} \psi(v) = & \left(\frac{1}{h} (b - a) - k' \right) v' + \left(\frac{a + b}{2} - k \right) v'' + \\ & + \frac{b - a}{6} hv''' + (d - q)v + (\varphi - f) + O(h^3). \end{aligned}$$

Требование $\psi(v) = O(h^2)$ будет выполнено, если

$$\frac{b - a}{h} = k'(x) + O(h^2), \quad \frac{a + b}{2} = k(x) + O(h^2), \quad (5)$$

$$d(x) = q(x) + O(h^2), \quad \varphi(x) = f(x) + O(h^2).$$

Для разрешимости задачи (4) достаточно (см. гл. I, § 2, п. 8), чтобы

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \omega_h. \quad (6)$$

Приведем два примера разностных схем второго порядка аппроксимации для задачи (1):

$$\frac{1}{h} \left(k_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - k_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - q_i y_i = -f_i, \quad (7)$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{k_i + k_{i-1}}{2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - q_i y_i = -f_i, \quad (8)$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$, $y_0 = u_1$, $y_N = u_2$, $k_{i \pm 1/2} = k(x_i \pm 0,5h)$, $k_{i \pm 1} = k(x_i \pm h)$.

Нетрудно видеть, что для каждой из этих схем выполнены условия (5), если k, q, f — достаточно гладкие функции.

В дальнейшем для упрощения изложения будем предполагать, что шаблонные функционалы не зависят от параметра h и $D[\bar{f}(s)] = F[\bar{f}(s)]$, так что

$$\begin{aligned} a(x) &= A[k(x+sh)], \quad b(x) = B[k(x+sh)], \\ d(x) &= F[q(x+sh)], \quad \varphi(x) = F[f(x+sh)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $s \in [-1, 1]$.

Будем рассматривать семейство схем, для которых выполнены условия (5), (6), (9). Нас интересуют схемы, сходящиеся в случае разрывных $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$.

В следующем параграфе приводится пример, показывающий, что не всякая однородная схема вида (4), удовлетворяющая условиям аппроксимации (5) (в случае гладких коэффициентов) и условиям разрешимости (6), сходится в классе разрывных $k(x)$.

§ 2. Консервативные схемы

1. Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов. Рассмотрим задачу (1) из § 1 при $q=0$, $f=0$:

$$(ku')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \quad (1)$$

Представим $(ku')'$ в виде $ku'' + k'u'$. Естественно, на первый взгляд, для получения аппроксимации второго порядка провести замену

$$u'' \sim u_{xx}, \quad k' \sim k_x = \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}, \quad u' \sim u_x = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Тогда получим схему

$$k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \quad (2)$$

$$0 < i < N, \quad y_0 = 1, \quad y_N = 0.$$

Преобразуя (2) к виду (4) из § 1, найдем

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0, \quad (3)$$

т. е. схема (2) принадлежит семейству (4) из § 1.

Условия (5) и (6) из § 1 выполнены, так как на участках гладкости функции $k(x)$ имеем:

$$a_i = k_i - 0,5hk'_i + O(h^2), \quad b_i = k_i + 0,5hk'_i + O(h^2),$$

$$0,5(a_i + b_i) = k_i, \quad b_i - a_i = 0,5(k_{i+1} - k_{i-1}) = hk'_i + O(h^3),$$

так что $a_i > 0$, $b_i > 0$ при достаточно малом h .

Покажем, что схема (2) расходится даже в классе кусочно-постоянных коэффициентов

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad (4)$$

где ξ — иррациональное число; $\xi = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 < \theta < 1$.

Точное решение задачи (1), (4), удовлетворяющее условиям сопряжения, имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \quad \alpha_0 = (\kappa + (1 - \kappa) \xi)^{-1}, \\ \beta_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1, \quad \beta_0 = \kappa \alpha_0, \quad \kappa = k_1/k_2. \end{cases} \quad (5)$$

Найдем решение разностной задачи (2), (4). Так как $a_i = b_i = k_1$ при $0 < i < n$, $a_i = b_i = k_2$ при $n+1 < i < N$, то уравнение (2) принимает вид $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$ при $i \neq n$ и $i \neq n+1$. Отсюда находим

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leq x \leq x_n, \\ \beta(1 - x_i), & x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициенты α и β определим из уравнений при $i = n$, $i = n+1$:

$$\begin{aligned} b_n [\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] + a_n \alpha h &= 0, \\ b_{n+1} \beta h + a_{n+1} [\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (3) и (4) находим $a_n = (5k_1 - k_2)/4$, $a_{n+1} = (k_1 + 3k_2)/4$, $b_n = (3k_1 + k_2)/4$, $b_{n+1} = (5k_2 - k_1)/4$. Решая уравнения (7) относительно α , β и учитывая, что $x_n = \xi - \theta h$, $x_{n+1} = \xi + (1 - \theta)h$, определим $\beta = \mu \alpha$,

$$\alpha = \frac{1}{\mu + (1 - \mu) \xi + h(\lambda - 0 - (1 - \theta) \mu)}, \quad \mu = \frac{3 + \kappa}{5 - \kappa}, \quad \lambda = \frac{5\kappa - 1}{3\kappa + 1}. \quad (8)$$

Предельный переход при $h \rightarrow 0$ дает

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = \bar{\alpha}_0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta = \bar{\beta}_0,$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = (\mu + (1 - \mu) \xi)^{-1}, \quad \bar{\beta}_0 = \mu \bar{\alpha}_0. \quad (9)$$

Функции (6) доопределим на всем отрезке $0 \leq x \leq 1$ (при помощи линейной интерполяции), получим функцию $\bar{y}(x, h)$, $x \in \mathbb{E}[0, 1]$, совпадающую с y_i в узлах $x_i = ih$. Найдем предел $\bar{y}(x, h)$ при $h \rightarrow 0$:

$$\bar{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{y}(x, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \bar{\beta}_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Сравним предельную функцию $\bar{u}(x)$ с точным решением $u(x)$, определяемым формулой (5). Из (5), (9) и (10) видно, что $\bar{u}(x) = u(x)$ при $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$, $\bar{\beta}_0 = \beta_0$, а это возможно лишь при $\kappa = 1$ или $k_1 = k_2$.

Итак, решение (6) разностной задачи (2), (5) при $h \rightarrow 0$ стремится к функции $\bar{u}(x)$, которая в случае $k_1 \neq k_2$ отлична от точного решения $u(x)$ задачи (1). Следовательно, схема (2) расходится.

Нетрудно установить физический смысл функции $\bar{u}(x)$: Функция $\bar{u}(x)$ есть решение задачи (1), удовлетворяющее при $x = \xi$ условиям $[\bar{u}] = 0$, $[ku'] = -\bar{\alpha}_0(\mu - \kappa)k_2 = q$, где q есть мощность со-

средоточенного источника (стока) тепла в точке $x = \xi$. Величина q меняется в широких пределах в зависимости от x (в частности, $q \rightarrow \pm \infty$ при $x \rightarrow 5 \pm 0$). Таким образом, физическая причина расходности схемы (2) в том, что она нарушает баланс (закон сохранения) тепла, приводя к появлению дополнительного источника (при $q < 0$) или стока (при $q > 0$) тепла в точке $x = \xi$.

Схемы, нарушающие законы сохранения, называют неконсервативными или дисбалансными.

Рассмотренный пример показывает, что при написании разностных схем следует добиваться, чтобы эти схемы выражали на сетке соответствующий закон сохранения. Такие схемы мы будем называть консервативными.

В следующем пункте дается общий метод получения консервативных схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов.

Прежде, чем переходить к его изложению, сделаем два замечания, связанных с рассмотренным выше примером.

Метод экспериментальной проверки сходимости схемы путем сгущения сетки, применяемый часто на практике в тех случаях, когда нет теоретических оценок качества схемы, может иногда привести к ошибочному выводу о сходимости схемы на том основании, что при сгущении сетки обнаруживается стремление решения разностной задачи к некоторой предельной функции $\bar{u}(x)$. Приведенный выше пример показывает, что функция $\bar{u}(x)$, вообще говоря, может сколь угодно сильно отличаться от решения $u(x)$ исходной задачи. Поэтому методом сгущения сетки надо пользоваться с известной осторожностью. Во всяком случае, он не может подменить теоретического исследования хотя бы на модельных примерах.

Можно рекомендовать для проверки сходимости и порядка точности метод *пробных функций*. Выбирается некоторая функция $U(x)$ (она может быть выбрана произвольно, но так, чтобы выполнялись условия сопряжения в точке разрыва коэффициентов). Подставляя ее в уравнение (1) из § 1, найдем правую часть $f = (kU')' - qU$ и краевые значения $\mu_1 = U(0)$, $\mu_2 = U(1)$. Полученная задача решается по схеме (4) из § 1, и разностное решение сравнивается с известной функцией $U(x)$ на различных сетках.

Второе замечание состоит в том, что, так как не всякая схема, сходящаяся в случае гладких коэффициентов, сходится в случае разрывных коэффициентов, то необходимо выделить семейство схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов, и в дальнейшем иметь дело только с такими схемами.

2. Интегро-интерполяционный метод построения однородных разностных схем. Различные физические процессы (теплопроводности или диффузии, колебаний, газодинамики

и т. д.) характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (тепла, массы, количества движения, энергии и т. д.). При выводе дифференциальных уравнений математической физики обычно исходят из некоторого интегрального соотношения (уравнения баланса), выражающего закон сохранения для малого объема. Дифференциальное уравнение получается из уравнения баланса при стягивании объема к нулю в предположении существования непрерывных производных, входящих в уравнение.

Метод конечных разностей физически означает переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись. Такими свойствами, прежде всего, являются законы сохранения. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называют *консервативными* (или *дивергентными*). Законы сохранения для всей сеточной области («интегральные законы сохранения») для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем будем называть *интегро-интерполяционным методом (методом баланса)*.

Проиллюстрируем этот интегро-интерполяционный метод на примере уравнения (1) из § 1, описывающего стационарное распределение температуры в однородном стержне $0 \leq x \leq 1$. Наишием уравнение баланса тепла на отрезке $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$:

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx, \quad w = -ku', \quad (11)$$

где $w(x)$ — поток тепла, $q(x)u(x)$ — мощность стоков тепла (при $q < 0$ — источников), пропорциональных температуре, $f(x)$ — плотность распределения внешних источников (стоков) тепла.

Сток тепла происходит за счет теплообмена с внешней средой, происходящего на боковой поверхности стержня. Величина $w_{i-1/2}$, дает количество тепла, втекающее через сечение $x = x_{i-1/2}$ на отрезок $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, $w_{i+1/2}$ — количество вытекающего через сечение $x = x_{i+1/2}$ тепла; третье слагаемое в левой части (11) дает количество тепла, выделяющегося на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ за счет распределенных с плотностью $f(x)$ источников тепла,

интеграл в правой части (11) есть количество тепла, отдаваемое внешней среде за счет теплообмена на боковой поверхности.

Чтобы получить из (11) разностное уравнение, заменим w и интеграл, содержащий u , линейными комбинациями значений u в узлах сетки. Для этого воспользуемся интерполяциями в окрестности узла x_i . Возьмем простейшую интерполяцию

$$u = \text{const} = u_i \text{ при } x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2},$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx \approx h d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad (12)$$

где d_i есть среднее значение $q(x)$ на отрезке $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, длины h . Проинтегрируем равенство $u' = -w/k$ на отрезке $x_{i-1} \leq x \leq x_i$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx.$$

Предполагая, что $w(x) = \tilde{w}_{i-1/2} = \text{const}$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, имеем

$$u_{i-1} - u_i \approx \tilde{w}_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Отсюда находим приближенное значение $\tilde{w}_{i-1/2}$ потока

$$\tilde{w}_{i-1/2} = -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x}, i}, \quad a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Отметим, что $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$ есть тепловое сопротивление отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Подставляя (12) и (13) в (11) и обозначая через y_i искомую функцию, получим *консервативную разностную схему*

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i, \quad (14)$$

где

$$a_i = \dot{a}_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$d_i = \dot{d}_i = \int_{-0.5}^{0.5} q(x_i + sh) ds, \quad \varphi_i = \dot{\varphi}_i = \int_{-0.5}^{0.5} f(x_i + sh) ds.$$

Разностное уравнение (14) написано в фиксированном узле $x = x_i$. Считая узел x_i произвольным, получаем уравнение (14) во всех внутренних узлах сетки. Так как коэффициенты a_i , d_i , φ_i во всех узлах x_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, определяются по одним и тем же формулам (15), то схема (14) — (15) является однородной консервативной схемой. Поэтому в (14) и (15) индекс i можно опустить и вместо (14) писать

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi.$$

В общем случае в формуле для потока коэффициент a_i является некоторым функционалом значений $k(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Отметим, что закон сохранения во всей сеточной области ω_h («интегральный» закон сохранения) для любой (с любыми a , d , φ) консервативной схемы вида (14) есть алгебраическое следствие уравнения (14).

В самом деле, обозначая через $\bar{w}_{i-1/2} = -a_i(y_i - y_{i-1})/h$ разностное выражение потока тепла при $x = x_{i-1/2}$, запишем равенство (14) в виде $\bar{w}_{i-1/2} - \bar{w}_{i+1/2} + h\varphi_i = h d_i y_i$. Суммируя по $i = 1, 2, \dots, N-1$, получим разностный закон сохранения тепла во всей сеточной области

$$\bar{w}_{1/2} - \bar{w}_{N-1/2} + \sum_{i=1}^{N-1} h\varphi_i = \sum_{i=1}^{N-1} h d_i y_i.$$

Он является разностной аппроксимацией интегрального закона сохранения для уравнения (1) из § 1.

3. Однородные консервативные схемы. В предыдущем пункте мы получили консервативную схему (14) интегро-интерполяционным методом. В общем случае можно считать, что коэффициенты a , d , φ схемы (14) являются функционалами коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ дифференциального уравнения

$$a(x) = A[k(x+sh)], \quad d(x) = F[q(x+sh)], \quad \varphi(x) = F[f(x+sh)]. \quad (16)$$

Область определения шаблонного функционала $A[\bar{k}(s)]$ есть $Q^{(0)}[-1, 1]$ ($\bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$), область определения $F[\bar{f}(s)]$ есть $Q^{(0)}[-1/2, 1/2]$. Иными словами, $A[\bar{k}(s)]$ ($F[\bar{f}(s)]$) определен для всех кусочно-непрерывных функций $\bar{k}(s)$ ($\bar{f}(s)$), заданных на отрезке $-1 \leq s \leq 1$ ($-0,5 \leq s \leq 0,5$). При вычислении $a(x)$ согласно (16) мы полагаем $\bar{k}(s) = k(x+sh)$. Это соответствует переходу от шаблона $-1 \leq s \leq 1$, на котором задана функция $\bar{k}(s)$, к шаблону $x-h \leq x' \leq x+h$, на котором надо задать $k(x')$, чтобы вычислить $a(x)$.

Итак, рассмотрим однородную консервативную схему

$$(ay_{\bar{c}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad (17)$$

коэффициенты которой определяются согласно (16).

Сравнение консервативной схемы (17) или (14) с трехточечной схемой общего вида (4) из § 1 показывает, что (17) соответствует случаю

$$b_i = a_{i+1}.$$

Требование консервативности («дивергентности») схемы (4) из § 1 эквивалентно также требованию самосопряженности разностного оператора. Действительно, рассмотрим оператор второго порядка

$$(\Lambda y)_i = a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1},$$

определенный на пространстве $\dot{\Omega}_h$ сеточных функций $y = \{y_i\}$, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе, $y_0 = y_N = 0$. Введем в $\dot{\Omega}_h$ скалярное произведение $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$. Так как для любых функций $y, v \in \dot{\Omega}_h$ справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{N-1} (a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1}) v_i = \sum_{i=1}^{N-1} (b_{i-1} v_{i-1} - c_i v_i + a_{i+1} v_{i+1}) y_i,$$

то условие $(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v)$ будет выполнено при любых $y, v \in \dot{\Omega}_h$ тогда и только тогда, когда $b_i = a_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. (см. § 2 гл. I).

Условие $b_i = a_{i+1}$ для схемы (4) из § 1 означает, что

$$B[k(x+sh)] = A[k(x+(s+1)h)]$$

или

$$B[\bar{k}(s)] = A[\bar{k}(s+1)]$$

для любых $\bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$. Это, очевидно, возможно только в том случае, когда функционал $A[\bar{k}(s)]$ не зависит от значений $\bar{k}(s)$ при $0 < s \leq 1$, а $B[\bar{k}(s)]$ — от значений функции $\bar{k}(s)$ при $-1 \leq s \leq 0$, так что

$$a(x) = A[k(x+sh)] \text{ при } -1 \leq s \leq 0.$$

Условия (5) из § 1 локальной аппроксимации второго порядка для консервативной схемы (17) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{a(x+h)-a(x)}{h} &= k'(x) + O(h^2), \\ \frac{a(x+h)+a(x)}{2} &= k(x) + O(h^2), \\ d(x) - q(x) + O(h^2), \quad \varphi(x) &= f(x) + O(h^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Сюда следует, что

$$\begin{aligned} a(x) &= k(x) - 0,5h k'(x) + O(h^2), \\ a(x) &= k(x - 0,5h) + O(h^2). \end{aligned}$$

В п. 2 при помощи интегро-интерполяционного метода была получена однородная консервативная схема (16) с коэффициентами a , d , φ специального вида (15), а именно с шаблонными функционалами

$$A[\bar{k}(s)] = \left(\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(s)} \right)^{-1}, \quad F[\bar{f}(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds. \quad (15')$$

Коэффициенты a , d , φ при этом вычисляются путем интегрирования функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ (см. (15)).

Для практических целей удобно иметь возможно более простые формулы для нахождения a , d , φ , использующие значения k , q , f в отдельных точках. Обычно используют шаблон из одной или двух точек, полагая, например,

$$\begin{aligned} a_i &= k_{i-1/2} = k(x_i - 0,5h) \quad (A[\bar{k}(s)] = \bar{k}(-0,5)), \\ d_i &= q_i, \quad \varphi_i = f_i \quad (F[\bar{f}(s)] = \bar{f}(0)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} a_i &= 0,5(k_i + k_{i-1}) \quad (A[\bar{k}(s)] = 0,5(\bar{k}(-1) + \bar{k}(0))), \\ a_i &= \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}} \quad \left(\frac{1}{A[\bar{k}(s)]} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{k}(0)} + \frac{1}{\bar{k}(-1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Для всех этих схем условия (18), очевидно, выполнены.

Если коэффициент $k(x)$ разрывен в полуцелых точках сетки $x = x_{i-1/2}$, а $q(x)$ и $f(x)$ — в точках $x = x_i$, то в формулах (19) следует брать полусуммы предельных значений слева и справа:

$$\begin{aligned} a_i &= 0,5(k(x_{i-1/2}-0) + k(x_{i-1/2}+0)), \\ d_i &= 0,5(q(x_i+0) + q(x_i-0)), \quad \varphi_i = 0,5(f(x_i-0) + f(x_i+0)). \end{aligned}$$

Отметим, что формулы (19) и ряд других формул для a , d , φ могут быть получены путем замены интегралов (15) их приближенными выражениями

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \sim \frac{1}{k_{i-1/2}}, \quad \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) \text{ и т. д.}$$

4. Исходное семейство консервативных схем. Семейство однородных консервативных схем (17) задано, если указан класс шаблонных функционалов $A[\bar{k}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$.

Мы будем предполагать, что $F[\bar{f}(s)]$ —линейный неотрицательный функционал, так что

$$1) \quad F[c_1 \bar{f}_1(s) + c_2 \bar{f}_2(s)] = c_1 F[\bar{f}_1(s)] + c_2 F[\bar{f}_2(s)], \\ -1/2 \leq s \leq 1/2,$$

где c_1 и c_2 —произвольные постоянные,

$$2) \quad F[\bar{f}(s)] \geq 0 \quad \text{при} \quad \bar{f}(s) \geq 0.$$

Хотя, как показывает пример схемы (15'), $A[\bar{k}(s)]$ является, вообще говоря, нелинейным функционалом, мы для упрощения изложения будем предполагать, что $A[\bar{k}(s)]$ —линейный неотрицательный функционал, и наряду со схемами (16)–(17) рассматривать схемы, у которых коэффициент $a(x)$ находится по формуле (ср. с (15'))

$$\frac{1}{a(x)} = A \left[\frac{1}{\bar{k}(x+sh)} \right]; \quad (16')$$

Условия второго порядка аппроксимации (18) накладывают ограничения на шаблонные функционалы $A[\bar{k}(s)]$ и $F[\bar{f}(s)]$. Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \psi(x) = F[f(x+sh)] &= F[f(x) + shf'(x) + O(h^2)] = \\ &= f(x)F[1] + hf'(x)F[s] + O(h^2). \end{aligned}$$

Отсюда и из (18), в силу произвольности $f(x)$, следует

$$F[1] = 1, \quad F[s] = 0. \quad (20)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
 a(x) &= A \left[k(x) + shk'(x) + \frac{s^2 h^2}{2} k''(x) + O(h^3) \right] = \\
 &= k(x) A[1] + hk'(x) A[s] + \frac{h^2}{2} k''(x) A[s^2] + O(h^3), \\
 a(x+h) &= \\
 &= k(x) A[1] + hk'(x) A[1+s] + \frac{h^2}{2} k''(x) A[(1+s)^2] + O(h^3), \\
 \frac{a(x+h) - a(x)}{h} &= \\
 &= (A[1+s] - A[s]) k'(x) + \frac{h}{2} (A[(1+s)^2] - A[s^2]) k''(x) + O(h^3), \\
 \frac{a(x+h) + a(x)}{2} &= A[1] k(x) + \frac{h}{2} (A[1+s] + A[s]) k'(x) + O(h^2).
 \end{aligned}$$

Сравнение с (18) дает

$$A[1] = 1, \quad A[s] = -0,5, \quad (21)$$

так как $A[1+s] + A[s] = A[1] + 2A[s] = 0$,

$$\begin{aligned}
 A[(1+s)^2] - A[s^2] &= A[(1+s)^2 - s^2] = A[1+2s] = \\
 &= A[1] + 2A[s] = 0.
 \end{aligned}$$

Для схем (17), (15') при проверке (18) следует учесть, что

$$\begin{aligned}
 a(x+h) \pm a(x) &= a(x) a(x+h) \left(\frac{1}{a(x)} \pm \frac{1}{a(x+h)} \right), \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a(x+h)} + \frac{1}{a(x)} \right) &= \frac{1}{k(x)} + O(h^2), \\
 \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a(x+h)} - \frac{1}{a(x)} \right) &= \left(\frac{1}{k(x)} \right)' + O(h^2), \\
 a(x) a(x+h) &= k^2(x) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

В этом случае $A[\bar{k}(s)]$ также удовлетворяет условиям (21). В частности, для функционалов

$$F[\bar{f}(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds, \quad A[\bar{f}(s)] = \int_{-1}^0 \bar{f}(s) ds$$

условия (20) и (21) выполнены:

$$\begin{aligned}
 F[1] &= \int_{-0,5}^{0,5} ds = 1, \quad F[s] = \int_{-0,5}^{0,5} s ds = 0, \\
 A[1] &= \int_{-1}^0 ds = 1, \quad A[s] = \int_{-1}^0 s ds = -0,5.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем всюду рассматривать исходное семейство однородных консервативных схем (16)–(17) и (16'),

(17) с линейными и неотрицательными шаблонными функционалами $A[\bar{k}(s)]$ и $F[\bar{f}(s)]$, удовлетворяющими условиям второго порядка аппроксимации (20) и (21).

Схему (17), (15) в дальнейшем будем называть *наилучшей схемой*.

§ 3. Сходимость и точность однородных консервативных схем

1. Погрешность аппроксимации в классе гладких коэффициентов. Основной вопрос теории—оценка порядка точности однородной схемы (16)–(17) из § 2 в классе непрерывных и разрывных функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$. Пусть $u(x)$ —точное решение задачи

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad (1)$$

а $y = y(x)$ —решение разностной задачи

$$(ay_{\bar{x}})_x - d(x)y = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = u_1, \quad y_N = u_2, \quad a(x) \geq c_1 > 0, \quad d(x) \geq 0 \quad (2)$$

из исходного семейства консервативных схем, определенного выше (см. § 2, п. 4).

Рассмотрим погрешность, т. е. сеточную функцию $z(x) = y(x) - u(x)$, где $x \in \bar{\omega}_h$. Подставляя в (2) $y(x) = z(x) + u(x)$ и предполагая, что $u(x)$ —заданная функция, получим для погрешности задачу

$$\Lambda z = (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ z(0) = z(1) = 0, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad (3)$$

где *невязка*

$$\psi(x) = \Lambda u + \Phi(x) = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi \quad (4)$$

есть погрешность аппроксимации уравнения (1) разностной схемой (2) на решении $u = u(x)$ задачи (1).

В п. 4 § 1 были получены условия второго порядка локальной аппроксимации для консервативной схемы (2) с линейными неотрицательными шаблонными функционалами $A[\bar{k}(s)]$, $F[\bar{f}(s)]$:

$$A[1] = 1, \quad A[s] = -0,5, \quad F[1] = 1, \quad F[s] = 0 \quad (5)$$

(для схемы из исходного семейства).

Для оценки порядка точности схемы (2) нам понадобится оценка погрешности $z = y - u$ как решения задачи (3) через правую часть ψ .

Начнем с исследования погрешности аппроксимации $\psi(x)$.

Если $k(x) \in C^{(3)}$ и $q(x), f(x) \in C^{(2)}$, то

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \Lambda u + \varphi - (Lu + f) = \\ &= [(au_x)_x - (ku')'] - (d - q)u + (\varphi - f) = O(h^2),\end{aligned}$$

т. е. схема (2) имеет второй порядок локальной аппроксимации, так что

$$\|\psi\|_C \leq Mh^2,$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h .

В дальнейшем будет показано, что

$$\|\psi\|_* = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \psi_k \right| \leq Mh^2,$$

если $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}$, т. е. $k(x)$ имеет две, а не три непрерывные производные.

2. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов. Покажем сначала, что погрешность аппроксимации (4) всегда можно представить в виде

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad (6)$$

$$\eta_i = (au_x)_i - (ku')_{i-1/2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\psi_i^* = & \left(\varphi_i - \int_{-0.5}^{0.5} f(x_i + sh) ds \right) - \\ & - \left(d_i u_i - \int_{0.5}^{0.5} q(x_i + sh) u(x_i + sh) ds \right). \quad (8)\end{aligned}$$

Для этого воспользуемся уравнением баланса, которое получается после интегрирования уравнения (1) по x от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$:

$$\frac{1}{h} [(ku')_{i+1/2} - (ku')_{i-1/2}] - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = 0.$$

Вводя новую переменную $s = (x - x_i)/h$, перепишем уравнение баланса в виде

$$((ku')_{i-1/2})_x - \int_{-0.5}^{0.5} q(x_i + sh) u(x_i + sh) ds + \int_{-0.5}^{0.5} f(x_i + sh) ds = 0.$$

После вычитания этого уравнения из (4) получаем формулы (6)–(8).

Если $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}$, то

$$\eta_i = O(h^2), \quad \psi_i^* = O(h^2). \quad (9)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-1/2} + 0,5hu'_{i-1/2} + \frac{h^2}{8}u''_{i-1/2} + O(h^3), \\ u_{i-1} &= u_{i-1/2} - 0,5hu_{i-1/2} + \frac{h^2}{8}u''_{i-1/2} + O(h^3), \\ u_{\bar{x}, i} &= u'_{i-1/2} + O(h^2), \\ \eta_i &= (a_i - k_{i-1/2})u'_{i-1/2} + O(h^2) = O(h^2), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} a_i &= A[k(x_i + sh)] = A[k(x_{i-1/2} + (s + 0,5)h)] = \\ &= A[k_{i-1/2} + hk'_{i-1/2}(s + 0,5) + O(h^2)] = \\ &= k_{i-1/2} + hk'_{i-1/2}A[s + 0,5] + O(h^2) = k_{i-1/2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Замечая затем, что $\int_{-0,5}^{0,5} v(x_i + sh) ds = v_i + O(h^2)$ для $v(x) \in C^{(2)}$, получаем $\psi_i^* = (q_i u_i - d_i u_i) + (\varphi_i - f_i) + O(h^2) = O(h^2)$.

Перейдем теперь к случаю разрывных коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Без ограничения общности можно считать, что k , q и f имеют разрывы первого рода только в одной точке $x = \xi \in (0, 1)$, так что

$$\xi = x_n + \theta h, \quad 0 \leq \theta = \theta(h) \leq 1, \quad 0 < n < N.$$

Решение $u = u(x)$ уравнения (1) при $x = \xi$ удовлетворяет условиям непрерывности функции $u(x)$ и потока $k(x)u'(x)$:

$$[u] = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi.$$

Будем предполагать, что $k(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(2)}$ и, следовательно, $u(x) \in Q^{(3)}$.

Рассмотрим сначала выражение η_i . Очевидно, что

$$\eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2} = O(h^2) \quad \text{для всех } i \neq n + 1.$$

Оценим $\eta_{n+1} = a_{n+1}u_{\bar{x}, n+1} - (ku')_{n+1/2}$.

Воспользуемся разложениями в окрестности точки $x = \xi$:

$$u_{n+1} = u(\xi) + (1 - \theta)hu'(\xi + 0) + \frac{(1 - \theta)^2}{2}h^2u''(\xi + 0) + O(h^3),$$

$$u_n = u(\xi) - \theta hu'(\xi - 0) + \frac{\theta^2}{2}h^2u''(\xi - 0) + O(h^3),$$

$$(ku')_{n+1/2} =$$

$$= (ku')_{x=\xi+0} + (0,5 - \theta)h(ku')'_{x=\xi+0} + O(h^2) \quad \text{при } \theta \leq 0,5,$$

$$(ku')_{n+1/2} = (ku')_{x=\xi-0} + (0,5 - \theta)h(ku')'_{x=\xi-0} + O(h^2) \quad \text{при } \theta > 0,5,$$

и найдем выражение для η_{n+1} :

$$\eta_{n+1} = a_{n+1} ((1 - \theta) u'_n + \theta u'_n) - w_0 + O(h),$$

где $w_0 = (ku')_n = (ku')_n$, $v_n = v(\xi = 0)$, $v_n = v(\xi = 0)$.

Из условия сопряжения $[ku'] = 0$ следует, что

$$\theta u'_n + (1 - \theta) u'_n = \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1 - \theta}{k_n} \right) w_0$$

и

$$\eta_{n+1} = \left[a_{n+1} \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1 - \theta}{k_n} \right) - 1 \right] w_0 + O(h).$$

Рассмотрим наилучшую схему (15) из § 2. Для нее

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{a}_{n+1}} &= \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_{n+1} + sh)} = \int_0^1 \frac{ds}{k(x_n + sh)} = \\ &= \int_0^{\theta} \frac{ds}{k(x_n + sh)} + \int_{\theta}^1 \frac{ds}{k(x_n + sh)} = \int_0^{\theta} \left(\frac{1}{k_n} + (s - \theta) h \left(\frac{1}{k} \right)'_n + O(h^2) \right) ds + \\ &\quad + \int_{\theta}^1 \left(\frac{1}{k_n} + (s - \theta) h \left(\frac{1}{k} \right)'_n + O(h^2) \right) ds = \frac{\theta}{k_n} + \frac{1 - \theta}{k_n} + O(h), \end{aligned}$$

так что $\eta_{n+1} = \dot{\eta}_{n+1} = O(h)$. Для всех других схем $\eta_{n+1} = O(1)$.

При оценке ψ^* надо различать два случая:

1) Пусть $\theta < 0,5$. Тогда $\psi_i^* = O(h^2)$ при $i \neq n$, а $\psi_n^* = O(1)$, и лишь для наилучшей схемы ($\varphi_i = \dot{\varphi}_i$, $d_i = \dot{d}_i$)

$$\psi_i^* = \int_{-0,5}^{0,5} q(x_i + sh)(u(x_i + sh) - u_i) ds = O(h) \text{ при } i = n,$$

так как $u(x_i + sh) = u(\xi) + O(h)$ при любых $s \in [-0,5, 0,5]$.

2) Если $\theta > 0,5$, то $\psi_i^* = O(h^2)$ при $i \neq n+1$, а $\psi_{n+1}^* = O(1)$ и $\dot{\psi}_{n+1}^* = O(h)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta_i &= O(h^2), \quad i \neq n+1, \quad \eta_{n+1} = O(1), \quad \dot{\eta}_{n+1} = O(h), \\ \psi_i^* &= O(h^2) \text{ при } i \neq n, \quad \psi_n^* = O(1), \\ \dot{\psi}_n^* &= O(h), \text{ если } \theta < 0,5, \\ \psi_i^* &= O(h^2) \text{ при } i \neq n+1, \quad \psi_{n+1}^* = O(1), \\ \dot{\psi}_{n+1}^* &= O(h), \text{ если } \theta > 0,5. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда следует, что в узлах $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$ функция $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi_n = \frac{\eta_{n+1}}{h} + O(1), \quad \psi_{n+1} = -\frac{\eta_{n+1}}{h} + O(1), \quad \eta_{n+1} = O(1), \tag{11}$$

т. е. в узлах, соседних с точкой разрыва $x = \xi$, схема (2) не аппроксимирует уравнение (1), так как $\psi_n = O\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow \infty$, $\psi_{n+1} = O\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Из формул (11) видно, что главные слагаемые в выражениях ψ_n и ψ_{n+1} равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, так что

$$\psi_n + \psi_{n+1} = O(1), \quad h(\psi_n + \psi_{n+1}) = O(h),$$

т. е. погрешность аппроксимации в окрестности разрыва коэффициентов $k(x)$ имеет дипольный характер. Именно поэтому, несмотря на отсутствие локальной аппроксимации, консервативная схема (1), как будет показано ниже, имеет первый порядок аппроксимации в норме

$$\|\psi\|_* = (1, |\eta|) + (1, |\mu|) = O(h),$$

где

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^*, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \mu_1 = 0.$$

3. Априорные оценки для погрешности. Перейдем к оценке погрешности $z = y - u$, которая является решением задачи

$$\begin{aligned} \Lambda z = (az_x)_x - dz &= -\psi(x), \quad 0 < x = ih < 1, \\ z(0) = z(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\psi(x)$ — погрешность аппроксимации, выражение для которой было представлено в форме

$$\psi = \eta_x + \psi^*. \quad (6)$$

Покажем, что для решения задачи (3) с правой частью (6) справедлива оценка

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq \frac{2}{c_1} ((1, |\eta|) + (1, |\mu|)), \quad (12)$$

где

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^*, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \mu_1 = 0.$$

Достаточно оценить решение задачи

$$\Lambda v = (av_x)_x - dv = -\eta_x, \quad v(0) = v(1) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала задачу

$$(aw_x)_x = -\eta_x, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

Отсюда сразу следует

$$aw_x + \eta = \text{const} = c_0.$$

Выразим отсюда

$$w_k = w_{k-1} - h\eta_k/a_k + hc_0/a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Суммирование по k от 1 до i дает

$$w_i = w_0 - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} + c_0 A_i, \quad A_i = \sum_{k=1}^i \frac{h}{a_k}.$$

Полагая $i = N$ и учитывая, что $w_0 = w_N = 0$, находим

$$c_0 = \frac{1}{A_N} \sum_{k=1}^N \frac{h\eta_k}{a_k}$$

и, следовательно,

$$w_i = - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} + \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=1}^N \frac{h\eta_k}{a_k}$$

или

$$w_i = - \left(1 - \frac{A_i}{A_N}\right) \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} + \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=i+1}^N \frac{h\eta_k}{a_k}.$$

Так как $A_i \leq A_N$, то отсюда следует

$$|w_i| \leq \left(1 - \frac{A_i}{A_N}\right) \sum_{k=1}^i \frac{h|\eta_k|}{a_k} + \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=i+1}^N \frac{h|\eta_k|}{a_k} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^N \frac{h|\eta_k|}{a_k} \leq \frac{1}{c_1} (1, |\eta|).$$

Чтобы оценить v_i , рассмотрим разность $\xi_i = v_i - w_i$; для нее имеем задачу

$$(a\xi_x)_x - d\xi = dw, \quad \xi(0) = \xi(1) = 0,$$

где $a \geq c_1 > 0$, $d \geq 0$.

Применяя лемму из п. 8 § 2 гл. I, находим

$$\|\xi\|_C \leq \|w\|_C$$

и, следовательно,

$$\|v\|_C \leq \|w\|_C + \|\xi\|_C \leq 2\|w\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta|).$$

Таким образом,

$$\|v\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta|). \quad (14)$$

Функцию ψ^* можно представить в виде

$$\psi_i^* = \mu_x, \quad (15)$$

где $\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^*, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \mu_1 = 0$.

Поэтому можно написать

$$\psi = (\eta + \mu)_x$$

и воспользоваться оценкой (14)

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta + \mu|) \leq \frac{2}{c_1} ((1, |\eta|) + (1, |\mu|)).$$

4. О сходимости и точности. Воспользуемся теперь результатами, полученными в двух предыдущих пунктах, для оценки скорости сходимости схемы (2).

Теорема 1. Любая схема (2) (с коэффициентами (16) из § 2) в классе гладких коэффициентов

$$k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)} [0, 1]$$

имеет второй порядок точности:

$$\|y - u\|_C \leq Mh^2,$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h , а в классе разрывных коэффициентов

$$k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)} [0, 1]$$

— первый порядок точности:

$$\|y - u\|_C \leq Mh;$$

наилучшая схема сохраняет второй порядок точности и в классе разрывных коэффициентов.

Эта теорема следует из представления погрешности аппроксимации в форме (6)–(8) и из априорной оценки (12).

Учитывая полученные в п. 2 оценки для η_i и ψ_i^* , можно написать

$$(1, |\eta|) = h |\eta_{n+1}| + O(h^2), \quad \mu_i = O(h^2) \text{ при } i \leq n, \quad (16)$$

$$\mu_i = h (\psi_n^* + \psi_{n+1}^*) + O(h^2) \text{ при } i > n + 1$$

и, следовательно,

$$(1, |\mu|) = h |\psi_n^* + \psi_{n+1}^*| (1 - x_n) + O(h^3). \quad (17)$$

Из соотношений (16), (17) и (12) следуют все утверждения теоремы, так как

$$\begin{aligned}\psi_n^* + \psi_{n+1}^* &= O(1), \\ \dot{\psi}_n^* + \dot{\psi}_{n+1}^* &= O(h) \text{ при любом } \theta \in [0, 1], \\ \eta_{n+1} &= O(1), \quad \dot{\eta}_{n+1} = O(h).\end{aligned}$$

В случае гладких коэффициентов, очевидно, $\eta_i = O(h^2)$, $\psi_i^* = O(h^2)$ для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$ и для любой схемы; поэтому $(1, |\eta|) + (1, |\mu|) = O(h^2)$.

Замечание. Можно показать, что аппроксимация в классе гладких коэффициентов необходима и достаточна для сходимости однородной схемы (2).

§ 4. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках

1. Схемы на неравномерных сетках. Для решения дифференциальных уравнений на практике часто используются разностные схемы на неравномерных сетках. В гл. II, § 1 для простейшего уравнения $u'' = -f$ была рассмотрена схема на неравномерной сетке

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1, h_i = x_i - x_{i-1}\}$$

и проведено изучение погрешности аппроксимации для этой схемы.

Чтобы получить однородную консервативную схему на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$, напишем на интервале $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, где $x_{i-1/2} = x_i - 0,5h_i$, $x_{i+1/2} = x_i + 0,5h_{i+1}$, уравнение баланса

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx = - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad w = -ku'. \quad (1)$$

По аналогии с § 2, п. 2 проведем замену

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qu dx &\sim \hbar_i \dot{d}_i u_i, \quad \dot{d}_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1}), \\ w_{i-1/2} \sim \tilde{w}_{i-1/2} &= -\dot{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = -\dot{a}_i \bar{u}_x, \quad \dot{a}_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

После этого, так же как и в § 2, п. 2, получаем разностную схему

$$\frac{1}{h_i} \left[\dot{a}_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dot{a}_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] - \dot{d}_i y_i = - \dot{\varphi}_i, \\ \dot{a}_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad \dot{d}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \quad (2)$$

Эту схему будем называть, как и в случае равномерной сетки, *наилучшей схемой*.

Коэффициенты \dot{a}_i , \dot{d}_i , $\dot{\varphi}_i$, очевидно, можно записать в виде

$$\dot{a}_i = \left(\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh_i)} \right)^{-1}, \\ \dot{d}_i = \frac{h_i}{h_i} \int_{-0,5}^0 q(x_i + sh_i) ds + \frac{h_{i+1}}{h_i} \int_0^{0,5} q(x_i + sh_{i+1}) ds, \\ \dot{\varphi}_i = \frac{h_i}{h_i} \int_{-0,5}^0 f(x_i + sh_i) ds + \frac{h_{i+1}}{h_i} \int_0^{0,5} f(x_i + sh_{i+1}) ds. \quad (3)$$

Введем обозначения (см. гл. II, § 1):

$$y_{x, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{x, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad y_{\hat{x}, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}.$$

Рассмотрим трехточечную схему

$$(ay_{\hat{x}})_{\hat{x}} - dy = -\varphi, \quad x = x_i \in \hat{\omega}_h, \\ y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0. \quad (4)$$

Если заданы $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ из $Q^{(0)}[0, 1]$ и известны точки их разрывов, то всегда можно выбрать неравномерную сетку так, чтобы точки разрыва коэффициентов k , q , f были бы ее узлами. Такую сетку, зависящую от конкретных функций k , q , f , будем обозначать $\hat{\omega}_h(K)$. Простейшие выражения для a_i , d_i , φ_i на $\hat{\omega}_h(K)$, как следует из (3), имеют вид

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i}, \quad (5)$$

где $f_i^{\pm} = f(x_i \pm 0)$ и т. д. Впрочем, можно пользоваться и другими формулами, например,

$$a_i = \frac{1}{2} (k_{i-1}^+ + k_i^-), \quad a_i = \frac{2k_{i-1}^+ k_i^-}{k_{i-1}^+ + k_i^-}, \\ d_i = \frac{h_i q_{i-1/2}^- + h_{i+1} q_{i+1/2}^+}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_{i-1/2}^- + h_{i+1} f_{i+1/2}^+}{2h_i}.$$

В случае непрерывных коэффициентов из (5) следует

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i.$$

Если точки разрыва совпадают с потоковыми точками ($x = x_{i-1/2}$) сетки $\hat{\omega}_h$, то a_i , d_i , φ_i выберем следующим образом:

$$a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad (5')$$

либо возьмем

$$a_i = \frac{2k_{i-1/2}^+ k_{i-1/2}^-}{k_{i-1/2}^+ + k_{i-1/2}^-}, \quad d_i = \frac{h_{i+1} q_{i+1/2}^- + h_i q_{i-1/2}^+}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_{i+1} f_{i+1/2}^- + h_i f_{i-1/2}^+}{2h_i}.$$

2. Погрешность аппроксимации. Переходим к изучению погрешности аппроксимации схемы (4) на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h(K)$. Напишем уравнение для ошибки $z = y - u$:

$$(az_x)\hat{x} - dz = -\psi(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \\ z_0 = z_N = 0, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad (6)$$

где $\psi(x) = (au_x)\hat{x} - du + \varphi(x)$ — погрешность аппроксимации.

Пользуясь уравнением баланса (1), представим погрешность аппроксимации ψ_i в виде

$$\psi_i = \eta_{\hat{x}, i} + \psi_i^*, \quad \eta_i = (au_x)_i - (ku')_{i-1/2},$$

где

$$\psi_i^* = (\varphi_i - \dot{\varphi}_i) - d_i u_i + \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx. \quad (7)$$

Предположим, что k , q , f имеют разрыв первого рода в узле x_i , а при $x_{i-1} < x < x_i$, $x_i < x < x_{i+1}$ являются гладкими функциями.

Пользуясь разложениями $f(x_i + sh_i) = f_{i-0} + sh_i f'_{i-0} + O(h_i^2)$ при $s < 0$ и $f(x_i + sh_i) = f_{i+0} + sh_i f'_{i+0} + O(h_i^2)$ при $s > 0$, а также формулой (3) для $\dot{\varphi}_i$, будем иметь

$$\dot{\varphi}_i = \frac{h_i f_{i-0} + h_{i+1} f_{i+0}}{2h_i} + \left(\frac{h_i^2 f'_{i-1/2}}{8} \right)_{\hat{x}, i} + O(h_i^2).$$

По аналогии с этим можно написать

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx = \frac{h_i q_{i-0} + h_{i+1} q_{i+0}}{2h_i} u_i + \left(\frac{h_i^2 (qu)'_{i-1/2}}{8} \right)_{\hat{x}, i} + O(h_i^2).$$

Отсюда видно, что для схемы с коэффициентами (5)

$$\psi_i = (\eta + \bar{\eta})_{\hat{x}, i} + \psi_i^*, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_i^{**} &= O(h_i^2), \\ \bar{\eta}_i &= \frac{h_i^2 (qu - f)_{i-1/2}}{8} = O(h_i^2), \\ \eta_i &= a_i u_{x_i}^{+} - (ku')_{i-1/2} = O(h_i^2),\end{aligned}\quad (9)$$

так как $a_i = k_{i-1/2}$, $u_{x_i}^{+} = u'_{i-1/2} + O(h_i^2)$.

3. О порядке точности на неравномерных сетках. Введем скалярные произведения

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad [y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i.$$

Справедливо утверждение:

Для задачи (6) с правой частью (8) имеет место оценка

$$\|z\|_c \leq \frac{2}{c_1} \{(1, |\eta| + |\bar{\eta}|) + (1, |\mu|)\}, \quad (10)$$

где

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{h}_k \psi_k^*, \quad \mu_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Вывод этой оценки почти полностью совпадает с выводом неравенства (12) из § 3. При выводе оценки (10) необходимо только всюду заменить a_i/h на a_i/\bar{h}_i .

Из (10) и (9) следует, что схема (4) — (5) имеет на последовательности неравномерных сеток $\hat{\omega}_h(K)$ второй порядок точности

$$\|z\|_c = \|y - u\|_c \leq M \bar{h}^2,$$

где $\bar{h} = \sqrt{(1, \bar{h}^2)}$ — средний квадратичный шаг сетки, если $k, q, f \in Q^{(2)}[0, 1]$.

Если разрыжен только коэффициент $k(x) \in Q^{(2)}$, а $q, f \in C^{(2)}$ — непрерывны, то любая консервативная схема (4) второго порядка аппроксимации имеет на последовательности неравномерных сеток $\hat{\omega}_h(K)$ второй порядок точности.

Это следует из того, что $\eta_i = a_i u_{x_i}^{+} - (ku')_{i-1/2} = O(h_i^2)$ для любой из указанных схем, а $\psi_i^* = O(h_i^2)$.

Остался невыясненным вопрос о точности схемы (4) второго порядка аппроксимации на произвольной неравномерной сетке, т. е. при любом положении точки $x = \xi$ разрыва коэффициентов

$$x_n \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad \xi = x_n + \theta h, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Так как формула

$$\psi_i = \eta_{\hat{x}, i} + \psi_i^*, \quad \eta_i = (au_{\hat{x}})_i - (ku')_{i-1/2},$$

где ψ_i^* определяется согласно (7), верна всегда, то исследование точности в этом случае проводится полностью по аналогии со случаем равномерной сетки (см. § 3). Если для простоты предположить, что q и f непрерывны, $q, f \in C^{(2)}$, то

$$\eta_i = O(h_i^2) \quad \text{для } i \neq n+1, \quad \eta_{n+1} = O(1),$$

и лишь для наилучшей схемы (3) $\eta_{n+1} = O(h_{n+1})$, а

$$\begin{aligned} \psi_i^* &= \bar{\eta}_{\hat{x}, i} + \psi_i^{**}, \\ \bar{\eta}_i &= \frac{h_i^2 (qu-f)_{i-1/2}^*}{8}, \quad \psi_i^{**} = O(h_i^2) \end{aligned}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Пользуясь затем оценкой (10), получаем, что наилучшая схема (3) — (4) сохраняет второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов на произвольной последовательности неравномерных сеток, а произвольная схема (4) имеет в этом случае первый порядок точности. Очевидно, что в классе непрерывных коэффициентов $k, q, f \in C^{(2)}[0, 1]$ любая схема (4) сохраняет второй порядок на произвольной последовательности неравномерных сеток.

Для доказательства последнего утверждения можно воспользоваться оценкой из гл. II, § 4 для операторного уравнения $Az = \psi$:

$$\|z\|_A = \|\psi\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{c_1} \|\psi\|_{\hat{A}^{-1}},$$

где $A \geq c_1 \hat{A}$, $A = A^* > 0$, $\hat{A} = \hat{A}^* > 0$.

В нашем случае

$$Ay = -(ay_{\hat{x}})_{\hat{x}} + dy, \quad \hat{A}y = -y_{\hat{x}} \hat{x} \quad \text{при } y \in \hat{\Omega},$$

где $\hat{\Omega} = H$ — пространство сеточных функций, заданных на ω_h и равных нулю при $i = 0, N$.

Негативная норма $\|\psi\|_{\hat{A}^{-1}}$ была найдена в гл. II, § 4:

$$\|\psi\|_{\hat{A}^{-1}} \leq \|\eta\| + \|\bar{\eta}\| + \|\mu\| = O(\bar{h}^2),$$

где \bar{h}^2 — среднее квадратичное значение h_i^2 .

4. Повышение точности на последовательности сеток. Метод Рунге. Пусть дано некоторое линейное уравнение математической физики

$$Lu = f(x), \quad x \in G \quad (11)$$

с дополнительными условиями на границе Γ , которые мы для упрощения технической стороны изложения не выписываем. Где ω_h — сетка в области G с шагом h , и задаче (11) ставится в соответствие разностная схема

$$L_h y_h = \Phi_h, \quad x \in \omega_h. \quad (12)$$

Если схема устойчива, так что $\|y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\Phi_h\|_{(2_h)}$, где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h (см. гл. II, § 2), то из аппроксимации следует сходимость

$$\|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M \|\Phi_h\|_{(2_h)}, \quad (13)$$

где $\Psi_h = \Phi_h - L_h u_h = (\Phi_h - f_h) - (L_h u_h - (Lu)_h)$ — погрешность аппроксимации (невязка) на решении $u = u(x)$ задачи (11). Из (13) видно, что порядок точности схемы не ниже порядка аппроксимации так, что из $\|\Phi_h\|_{(2_h)} = O(h^n)$ следует $\|y_h - u_h\|_{(1_h)} = O(h^n)$.

Чтобы повысить точность приближенного решения, очевидно, надо уменьшить шаг сетки h или увеличить n , т. е. повысить порядок аппроксимации схемы. Простейший пример повышения порядка аппроксимации на решении рассмотрен в гл. I, § 2, п. 2. Однако для большинства задач построение схем повышенного порядка точности представляет технические трудности, особенно, в случае уравнений с переменными коэффициентами; кроме того, при переходе к таким схемам может произойти существенное увеличение объема вычислений. Исключение представляют схемы для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и уравнения Лапласа, которые будут рассмотрены в гл. V, гл. IV.

Повышение точности путем уменьшения шага сетки h ограничено требованием экономичности, т. е. минимума машинного времени для получения решения.

Если же решение исходной задачи u (так же, как и f) является гладкой функцией x , то повышение порядка точности сеточного решения может быть достигнуто путем проведения расчетов для одной и той же задачи (12) на последовательности сеток $\omega_{h_1}, \dots, \omega_{h_n}$.

Будем предполагать, что $u = u(x)$ имеет столько производных, сколько их требуется по ходу изложения. Рассмотрим сначала простейший случай. Предположим, что справедливо асимптотическое разложение

$$y_h(x) = u_h(x) + \sigma_1(x) h^{k_1} + O(h^{k_2}), \quad k_2 > k_1 > 0, \quad (14)$$

где $\sigma_1(x)$ — функция, не зависящая от h . Требуется найти соответствующую функцию $\tilde{y}_h(x)$, для которой

$$\tilde{y}_h(x) = u_h(x) + O(h^{k_2}). \quad (15)$$

Для этого рассмотрим две сетки ω_{h_1} и ω_{h_2} с шагами h_1 и h_2 , имеющие общие узлы, множество которых обозначим $\tilde{\omega}_h$. В узлах $x \in \tilde{\omega}_h$ образуем сеточную функцию

$$\tilde{y}_h(x) = c_1 y_{h_1}(x) + c_2 y_{h_2}(x), \quad x \in \tilde{\omega}_h, \quad (16)$$

где c_1, c_2 — неизвестные пока числа, и воспользуемся разложениями (14) для y_{h_1} и y_{h_2} , после подстановки которых в (16) получим

$$\tilde{y}_h(x) = (c_1 + c_2) u_h(x) + (c_1 h_1^{k_1} + c_2 h_2^{k_1}) \alpha_1(x) + O(h^{k_2}).$$

Следует, что $\tilde{y}_h - u_h = O(h^{k_2})$, если

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_1 h_1^{k_1} + c_2 h_2^{k_1} = 0,$$

т. е.

$$c_2 = 1 - c_1, \quad c_1 = -h_2^{k_1} / (h_1^{k_1} - h_2^{k_1}). \quad (17)$$

В частности, можно взять $h_1 = h$, $h_2 = 0,5h$; тогда $\tilde{\omega}_h = \omega_h$, $c_1 = -1/(2^{k_1} - 1)$.

Таким образом, для повышения точности сеточного решения на некотором множестве узлов $\tilde{\omega}_h$ надо решить задачу (12) дважды: один раз на сетке ω_{h_1} , второй раз — на сетке ω_{h_2} , (ω_{h_1} и ω_{h_2} выбраны так, что их пересечением является $\tilde{\omega}_h$) и составить линейную комбинацию (16) с коэффициентами (17).

Так, например, если мы имеем схему второго порядка точности, для которой

$$y_h(x) = u_h(x) + \alpha_1 h^2 + O(h^4), \quad \text{т. е. } k_1 = 2, k_2 = 4,$$

то решая разностную задачу с шагами $h_1 = h$, $h_2 = 0,5h$, найдем y_h и $y_{0,5h}$, $c_1 = -1/3$, $c_2 = 4/3$, после чего образуем функцию

$$\tilde{y}(x) = \frac{4}{3} y_{0,5h} - \frac{1}{3} y_h.$$

Эта функция определена на сетке ω_h и приближает точное решение $u(x)$ с точностью $O(h^4)$:

$$\tilde{y}_h = u_h + O(h^4) \quad \text{при } x \in \omega_h.$$

Если существует разложение

$$y_h = u_h + \alpha_1(x) h^{k_1} + \alpha_2(x) h^{k_2} + O(h^{k_3}), \quad k_3 > k_2 > k_1 > 0,$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ не зависят от h , и мы хотим получить решение с точностью $O(h^{k_3})$, то следует провести три расчета разностной задачи с шагами h_1 , h_2 , h_3 . Пусть $y_{h_1}(x)$, $y_{h_2}(x)$, $y_{h_3}(x)$ — соответствующие решения разностной задачи. Образуем их линейную

комбинацию

$$\tilde{y}_h(x) = c_1 y_{h_1}(x) + c_2 y_{h_2}(x) + c_3 y_{h_3}(x), \quad x \in \tilde{\omega}_h$$

в узлах сетки $\tilde{\omega}_h$, являющейся пересечением трех сеток ω_{h_1} , ω_{h_2} , ω_{h_3} ; если $h_1 = h$, $h_2 = 0,5h$, $h_3 = 0,25h$, то $\tilde{\omega}_h = \omega_h$. Требуя

$$\tilde{y}_h = u_h + O(h^{k_0}),$$

получаем для определения c_1 , c_2 , c_3 уравнения

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\ c_1 h_1^{k_1} + c_2 h_2^{k_1} + c_3 h_3^{k_1} &= 0, \\ c_1 h_1^{k_2} + c_2 h_2^{k_2} + c_3 h_3^{k_2} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы, очевидно, отличен от нуля.

В общем случае разложение погрешности $y_h - u_h$ по степеням h имеет вид

$$y_h = u_h + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s(x) h^s + \alpha_n(x, h) h^n, \quad (18)$$

где $\alpha_s(x)$, $s = 1, 2, \dots, n-1$, не зависят от h , а $\alpha_n(x, h)$ ограничено по модулю постоянной $M = \text{const} > 0$, которая не зависит от h . Как получить априори разложение вида (18)? Непосредственно мы можем найти в предположении достаточной гладкости $u(x)$, $f(x)$ и коэффициентов уравнения (11) для погрешности аппроксимации $\psi_h(x)$ следующее выражение

$$\psi_h(x) = \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s(x) h^s + \beta_n(x, h) h^n, \quad (19)$$

где $\beta_s(x)$, $1 \leq s \leq n-1$, не зависят от h , а $|\beta_n(x, h)| \leq M$, $M = \text{const} > 0$ не зависит от h .

Отсюда следует, что для любой достаточно гладкой функции $\alpha_s(x)$ также можно написать

$$L_h \alpha_s(x) = L \alpha_s(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_s(x) h^s + \gamma_n(x, h) h^n. \quad (20)$$

Будем искать разность $y_h - u_h$ в виде (18).

Применим к тождеству (18) оператор L_h :

$$L_h(y_h - u_h) = \sum_{s=1}^{n-1} L_h \alpha_s(x) h^s + L \alpha_n(x, h) h^n.$$

Учитывая затем, что

$$L_h(y_h - u_h) = \psi_h,$$

а также формулу (20) для $L_h \alpha_s$, получаем

$$L_h(y_h - u_h) = \sum_{s=1}^{n-1} \left(L\alpha_s + \sum_{m=1}^{s-1} \gamma_m \right) h^s + O(h^n),$$

т. е.

$$\psi_h = \sum_{s=1}^{n-1} \left(L\alpha_s + \sum_{m=1}^{s-1} \gamma_m \right) h^s + O(h^n). \quad (21)$$

Сравнивая формулы (19) и (21), убеждаемся в справедливости разложения (18), если функции $\alpha_s(x)$ являются решениями уравнений

$$L\alpha_s = \beta_s(x) - \sum_{m=1}^{s-1} \gamma_m(x) \quad \text{при } s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что разложение (19) может содержать не все степени h^s ; тогда соответствующий коэффициент $\beta_s \equiv 0$.

Использование неравномерных сеток открывает новые возможности повышения порядка точности без увеличения числа узлов. Имея предварительную информацию о поведении решения исходной задачи, можно выбирать сетку таким образом, чтобы обеспечить достаточную точность с использованием минимума узлов и тем самым минимума действий. Так, например, в области сильного изменения коэффициентов и правой части уравнения естественно сгустить сетку. В частности, вблизи точки (линии) разрыва коэффициентов — границы двух сред — сетка сгущается так, что наименьший шаг делается возле границы и затем по мере удаления от границы шаг сетки увеличивается, например, по закону геометрической прогрессии. Если информация о поведении решения отсутствует, то можно провести предварительный расчет на грубой сетке, после чего выбирается новая сетка так, чтобы в областях сильного изменения решения шаг сетки был помельче, и разностная задача решается на этой сетке. На практике неравномерные сетки применяются весьма часто. Мы уже убедились в п. 3, что при выборе специальных сеток $\hat{\omega}_h(K)$, таких, что все точки разрыва коэффициентов $k(x)$ уравнения

$$(k(x)u')' - q(x)u = -f(x)$$

являются узловыми точками сетки $\hat{\omega}_h(K)$, любая однородная разностная схема $(ay_x)_x - dy = -\varphi$ второго порядка аппроксимации (в классе гладких коэффициентов) будет иметь в классе разрывных коэффициентов $k(x)$ второй порядок точности.

Следует признать, что вопрос о точности разностных схем в зависимости от изменения реальных (т. е. тех, которые допустимы для практических машинных расчетов) сеток для уравнений с переменными коэффициентами нуждается в исследовании для каждой конкретной задачи.

§ 5. Другие задачи

1. Третья краевая задача. Построим однородную разностную схему для краевой задачи третьего рода:

$$\begin{aligned} Lu = (ku')' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \\ q \geq 0, \quad k(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, \quad -k(1)u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \quad (1) \\ \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0. \end{aligned}$$

Уравнение (1) аппроксимируем обычным образом:

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \Lambda y = (ay_x)_x - dy, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad (2)$$

где a, d, φ удовлетворяют условиям аппроксимации (5) из § 1.

Рассмотрим сначала простейшую аппроксимацию краевого условия при $x=0$: $a_1 y_{x,1} = \beta_1 y_0 - \mu_1$, и вычислим погрешность аппроксимации, подставив в это условие $y = z + u$:

$$a_1 z_{x,1} = \beta_1 z_0 - v_1, \quad v_1 = a_1 u_{x,1} - \beta_1 u_0 + \mu_1.$$

Учитывая, что

$$a_1 = k_0 + 0,5hk'_0 + O(h^2), \quad u_{x,1} = u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2),$$

получаем

$$v_1 = (k_0 u'_0 - \beta_1 u_0 + \mu_1) + 0,5h(ku')'_0 + O(h^2) = 0,5h(ku')'_0 + O(h^2).$$

Подставим сюда из уравнения (1) $(ku')'_0 = q_0 u_0 - f_0$:

$$v_1 = 0,5h(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что краевое условие

$$a_1 y_{x,1} = \bar{\beta}_1 y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1 + 0,5hq_0, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 - 0,5hf_0 \quad (3)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении $u(x)$ задачи (1). Аналогично получается разностное краевое условие второго порядка аппроксимации при $x=1$:

$$-a_N y_{x,N} = \bar{\beta}_2 y_N - \bar{\mu}_2, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 + 0,5hq_N, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 + 0,5hf_N. \quad (4)$$

Таким образом, исходной задаче (1) ставится в соответствие разностная краевая задача третьего рода (2)–(4), имеющая второй порядок аппроксимации на решении исходной задачи.

2. Задача с условиями периодичности. Рассмотрим сначала простейшую задачу: найти на отрезке $0 \leq x \leq 1$ решение уравнения

$$u''(x) - q_0 u = -f(x), \quad q_0 = \text{const} > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию периодичности с периодом 1:

$$u(x+1) = u(x) \quad \text{для любого } x \in (0, 1). \quad (6)$$

При этом предполагается, что $f(x)$ — периодическая функция $f(x+1) = f(x)$.

Условие (6) в любой точке $x \in (0, 1)$ эквивалентно двум условиям сопряжения в одной точке $x=0$:

$$u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0). \quad (7)$$

Задача (5)–(6) имеет единственное решение. Для ее решения, в силу принципа максимума, верна оценка

$$\|u\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{q_0}.$$

Пусть $q_0 = 0$. Тогда получим задачу

$$u'' = -f(x), \quad u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0),$$

которая разрешима при условии

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

и имеет единственное решение $u = u(x)$ при условии, что

$$\int_0^1 u(x) dx = 0. \quad (8)$$

В самом деле, общее решение уравнения $u'' = -f(x)$ имеет вид $u(x) = C_1 x + C_2 - \int_0^x \left(\int_0^t f(\alpha) d\alpha \right) dt = C_1 x + C_2 - \int_0^x (x-t) f(t) dt$,

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Условия (7) дают

$$\int_0^1 f(t) dt = 0, \quad C_1 = \int_0^1 t f(t) dt,$$

т. е. условиями (7) функция $u(x)$ определяется с точностью до постоянной C_2 . Требуя, чтобы выполнялось условие (8), получаем $C_2 = 0$, т. е. выделяем единственное решение задачи.

Напишем разностную схему, аппроксимирующую задачу (5), (7). Возьмем на отрезке $0 \leq x \leq 1$ равномерную с шагом $h = 1/N$

сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$$

и аппроксимируем уравнение (5) и условия сопряжения (7). Первое из условий (7) выполнено, если

$$y_0 = y_N.$$

В узлах $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1$, напишем трехточечное уравнение

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Рассмотрим теперь разностные производные

$$u_{\bar{x}, N} = u'(1-0) - 0,5hu''(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x, 0} = u'(0+0) + 0,5hu''(0+0) + O(h^2).$$

Подставляя сюда $u'' = q_0 u - f$ из (5), получаем

$$u_{\bar{x}, N} + 0,5h(q_0 u(1) - f(1-0)) = u'(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x, 0} - 0,5h(q_0 u(0) - f(0+0)) = u'(0+0) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что уравнение

$$y_{x, 0} - 0,5h q_0 y_0 + 0,5h f(0+0) = y_{\bar{x}, N} + 0,5h q_0 y_N - 0,5h f(1-0) \quad (9)$$

аппроксимирует второе условие сопряжения $u'(0+0) = u'(1-0)$ с точностью до величины $O(h^2)$.

Полагая затем

$$y_{N+1} = y_1,$$

перепишем условие (9) в виде

$$y_{\bar{x}x, N} - q_0 y_N = -\varphi_N, \quad \varphi_N = 0,5(f(1-0) + f(0+0)).$$

Таким образом, задаче (5), (7) мы ставим в соответствие следующую разностную схему:

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

с условиями периодичности

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1}. \quad (11)$$

Пусть теперь дано уравнение с переменными коэффициентами:

$$(ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (12)$$

причем $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ являются периодическими функциями:

$$k(x+1) = k(x), \quad q(x+1) = q(x), \quad f(x+1) = f(x), \quad (13)$$

непрерывными при $x=0$ ($x=1$), так что $k(1-0)=k(0+0)=k(0)$ и т. д.

Будем предполагать, что

$$k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq c_1 > 0. \quad (14)$$

Требуется найти решение уравнения (12), удовлетворяющее условию периодичности

$$u(x+1) = u(x).$$

Это условие эквивалентно требованию

$$u(0+0) = u(1-0), \quad ku'|_{x=0+0} = ku'|_{x=1-0}. \quad (15)$$

Из принципа максимума следует, что задача (12)–(15) имеет единственное решение. Напишем сначала схему для $0 < x = ih < 1$:

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

полагая

$$y_0 = y_N.$$

Коэффициенты a, d, φ выбираются из условий второго порядка аппроксимации (см. § 2, п. 4).

Учитывая равенства

$$(au_x)_i = (ku')_{i-0} + 0,5h(f - qu)_{i-0} + O(h^2),$$

$$a_{i+1}u_{x,i} = (ku')_{i+0} - 0,5h(f - qu)_{i+0} + O(h^2),$$

можно аппроксимировать условие $ku'|_{x=0+0} = ku'|_{x=1-0}$ со вторым порядком следующим соотношением:

$$a_1y_{x,0} - 0,5h(q(0)y_0 - f(0+0)) = \\ = a_Ny_{x,N} + 0,5h(q(1-0)y_N - f(1-0)).$$

Требуя, чтобы выполнялись условия

$$y_{N+1} = y_1, \quad a_{N+1} = a_1,$$

перепишем это соотношение в виде

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi(x), \quad x = x_N = 1,$$

где

$$d = d_N = 0,5(q(0+0) + q(1-0)), \quad \varphi = \varphi_N = 0,5(f(0+0) + f(1-0)).$$

В результате получаем следующую периодическую разностную схему:

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ a \geq c_1 > 0, \quad d \geq c_1 > 0, \quad (16)$$

с условиями

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1}, \quad a_1 = a_{N+1}. \quad (17)$$

Для определения y_i , $i = 1, 2, \dots, N$, получаем следующую систему уравнений:

$$a_i y_{i-1} - (a_i + a_{i+1} + d_i h^2) y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -\varphi_i h^2, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

с условиями периодичности

$$y_0 = y_N, \quad y_{N+1} = y_1.$$

Решение этой системы может быть найдено методом циклической прогонки (см. Дополнение, § 2).

Так как $a \geq c_1 > 0$, $d \geq c_1 > 0$, то для задачи (16)–(17) справедлив принцип максимума, в силу которого

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_C.$$

Это неравенство позволяет получить для погрешности $z = y - u$ оценку

$$\|z\|_C = O(h^2),$$

так как $\varphi_i = O(h^2)$ при $i = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, схема (16)–(17) имеет второй порядок точности в C в случае коэффициентов $k(x) \in C^{(3)}$, $q(x)$, $f(x) \in C^{(2)}$.

3. Монотонные схемы для уравнения общего вида. Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = (ku')' + r(x)u' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (18)$$

$$u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad |r(x)| \leq c_2, \quad q \geq 0.$$

Напишем для нее разностную схему второго порядка аппроксимации, для которой справедлив принцип максимума при любом шаге h . Это значит (см. гл. I, § 2), что схема может быть записана в виде

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (19)$$

где

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i - A_i - B_i = D_i \geq 0.$$

Такие схемы называют монотонными.

Оператор $Lu = (ku')'$ заменим, как обычно, однородной трехточечной схемой

$$\Lambda y = (ay_x)_x - dy$$

второго порядка аппроксимации.

Естественная замена первой производной $u'(x)$ центральной разностной производной u_x дает схему второго порядка аппро-

ксимации. Эта схема монотонна лишь при достаточно малых шагах сетки. Формулы прогонки применимы при достаточно малом h , когда $|r(x)| < 2k(x)$. Если воспользоваться односторонними разностными производными (правой u_x при $r > 0$ и левой $u_{\bar{x}}$ при $r < 0$) для аппроксимации u' , то получим монотонную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых h . Однако она имеет первый порядок аппроксимации.

Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные, учитывающие знак $r(x)$. Покажем, что для этого достаточно написать монотонную схему с односторонними первыми разностными производными для уравнения с возмущенными коэффициентами

$$\tilde{L}u = -f, \quad \tilde{L}u = \kappa (ku')' + ru' - qu, \quad (20)$$

где $\kappa = 1/(1+R)$, $R = 0,5h|r|/k$ — «разностное число Рейнольдса».

Представим $r(x)$ в виде суммы

$$r = r^+ + r^-, \quad r^+ = 0,5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0,5(r - |r|) \leq 0,$$

и аппроксимируем ru' выражением

$$(ru')_i = \left(\frac{r}{k} (ku') \right)_i \sim b_i^+ a_{i+1} u_{x,i} + b_i^- a_i u_{\bar{x},i},$$

где $b_i^{\pm} = F[\tilde{r}^{\pm}(x_i + sh)]$, $\tilde{r}^{\pm} = r^{\pm}/k$, а F — шаблонный функционал, используемый для вычисления коэффициентов d и φ . Можно, например, положить $b^+ = r^+/k$, $b^- = r^-/k$. В результате мы получаем однородную схему

$$\begin{aligned} \tilde{L}y &= \kappa (ay_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} y_x + b^- a y_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \\ y_0 &= u_1, \quad y_N = u_2; \quad a^{(+1)} = a(x+h), \quad a \geq c_1 > 0, \\ \kappa &= 1/(1+R), \quad R = 0,5|r|h/k. \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что схема (21) монотонна. Для этого запишем ее в виде

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = \varphi_i, \quad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{a_i}{h^2} (\kappa_i - hb_i^-), \quad B_i = \frac{a_{i+1}}{h^2} (\kappa_i + hb_i^+), \\ C_i &= A_i + B_i + d_i. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $A_i > 0$, $B_i > 0$ и $D_i \geq 0$, так как $b_i^- \leq 0$, $b_i^+ \geq 0$, $d_i \geq 0$.

Уравнения (22) разрешимы методом прогонки при любых h и r . Погрешность аппроксимации схемы (21)

$$\psi = \kappa (au_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} u_x + b^- a u_{\bar{x}} - du + \varphi - (Lu + f)$$

представим в виде суммы $\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$,

$$\psi^{(1)} = [(au_x)_x - du + \varphi] - [(ku')' - qu + f],$$

$$\psi^{(2)} = [(\kappa - 1)(au_x)_x + b^+ a^{(+1)} u_x + b^- a u_x] - ru'.$$

Для $\psi^{(1)}$ имеем оценку

$$\psi^{(1)} = O(h^2) \text{ при } k \in C^{(3)}, q, f \in C^{(2)}.$$

Учитывая, что

$$b^+ = \tilde{r}^+ + O(h^2), \quad b^- = \tilde{r}^- + O(h^2),$$

$$k\tilde{r}^\pm = r^\pm, \quad r^+ + r^- = r, \quad r^+ - r^- = |r|,$$

$$au_x = ku' - 0,5h(ku')' + O(h^2),$$

$$a^{(+1)} u_x = ku' + 0,5h(ku')' + O(h^2),$$

$$(au_x)_x = (ku')' + O(h^2),$$

получаем

$$b^+ a^{(+1)} u_x + b^- a u_x = ru' + 0,5h(ku')' \frac{|r|}{k} + O(h^2),$$

$$\psi^{(2)} = -\frac{R}{1+R}(ku')' + R(ku')' + O(h^2) = \frac{R^2}{1+R}(ku')' + O(h^2) = O(h^2),$$

так как $R = 0,5h|r|/k = O(h)$.

Таким образом, монотонная схема (21) имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(h^2). \quad (23)$$

Если $q \geq c_1 > 0$, то для решения задачи (21) при $y_0 = y_N = 0$ принцип максимума дает оценку

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_C,$$

из которой, в силу (23), следует равномерная сходимость схемы (21) со скоростью $O(h^2)$.

Монотонной схемой (21) целесообразно пользоваться в тех случаях, когда $r(x)$ является быстроменяющейся функцией x и в отдельных точках возможно нарушение условия $R < 1$ (что не сказывается существенно на точности схемы).

Можно написать монотонную схему и на неравномерной сетке.

Укажем еще один способ получения монотонной схемы для уравнения (18). Умножим уравнение (18) на функцию $\mu(x)$ и потребуем, чтобы

$$\mu(ku')' + r\mu u' = (k\mu u')'.$$

Это равенство возможно, если $r\mu = k\mu'$, так что

$$\mu(x) = \mu_0 \exp\left(\int_0^x \tilde{r}(t) dt\right), \quad \tilde{r} = r/k.$$

Уравнение

$$(\mu k u')' - \mu q u = -\mu f$$

аппроксимируем консервативной монотонной схемой

$$(\bar{\mu} a y_{\bar{x}})_x - \bar{\mu} dy = -\bar{\mu} \varphi, \quad \bar{\mu} = \mu(x - 0.5h), \quad (24)$$

где, например

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i.$$

Если отношение $\tilde{r} = r/k$ велико, то $\mu(x)$ может быть очень большим числом. Сократим обе части разностного уравнения

$$\frac{1}{h^2} [a_{i+1}\mu_{i+1/2}(y_{i+1} - y_i) - a_i\mu_{i-1/2}(y_i - y_{i-1})] - \mu_i q_i y_i = -\mu_i f_i \quad (24')$$

на $\mu_i = \mu_0 \exp\left(\int_0^{x_i} \tilde{r}(t) dt\right)$. В результате получим неконсервативную, но монотонную схему

$$\frac{1}{h} (\bar{b}_i y_{x,i} - \bar{a}_i y_{\bar{x},i}) - q_i y_i = -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (25)$$

$$y_0 = u_1, \quad y_N = u_2,$$

где

$$\bar{b}_i = a_{i+1} \exp\left(\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{r}(t) dt\right), \quad \bar{a}_i = a_i \exp\left(-\int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \tilde{r}(t) dt\right). \quad (25')$$

Нетрудно убедиться прямой проверкой, что эта схема имеет второй порядок аппроксимации, так как

$$\frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{h} = k_i + r_i + O(h^2), \quad \frac{\bar{b}_i + \bar{a}_i}{2} = k_i + O(h^2).$$

Заменяя интегралы в (25') с точностью до $O(h^2)$ выражениями $\frac{h}{8}(3\tilde{r}_i + \tilde{r}_{i+1})$ и $\frac{h}{8}(3\tilde{r}_i + \tilde{r}_{i-1})$ соответственно, получим монотонную схему с коэффициентами

$$\bar{b}_i = a_{i+1} \exp\left[\frac{h}{8}(3\tilde{r}_i + \tilde{r}_{i+1})\right] \text{ и } \bar{a}_i = a_i \exp\left[-\frac{h}{8}(3\tilde{r}_i + \tilde{r}_{i-1})\right],$$

имеющую второй порядок аппроксимации.

4. Разностные схемы для стационарного уравнения в цилиндрической системе координат. Стационарное уравнение диффузии или теплопроводности

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = -f(r, \varphi, z)$$

в цилиндрической системе координат (r, φ, z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z , ни от φ (имеет место осевая симметрия), принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk(r) \frac{du}{dr} \right) - q(r) u = -f(r), \quad 0 < r < R, \quad (26)$$

$$q(r) \geq 0, \quad 0 < c_1 \leq k(r) \leq c_2.$$

При $r = 0$ ставится условие ограниченности $|u(0)| < \infty$, которое эквивалентно условию *)

$$\lim_{r \rightarrow 0} rk(r) \frac{du}{dr} = 0. \quad (27)$$

При $r = 1$ ставится обычное краевое условие, например,

$$u(1) = \mu_2. \quad (28)$$

Пусть $u_1(r)$ и $u_2(r)$ — линейно независимые решения уравнения (26), причем $u_1(r)$ ограничено при $r \in [0, 1]$. Тогда справедливы свойства:

- 1) Если $q(0)$ и $f(0)$ конечны, то $u_1(0) \neq 0$, $u_1'(0) = 0$.
- 2) Если $q(r), f(r) \in C^{(2)}[0, 1]$, $k(r) \in C^{(3)}[0, 1]$, то производные u_1' , u_1'' , $u_1^{(3)}$, $u_1^{(4)}$ ограничены при $0 \leq r \leq 1$.
- 3) Второе, линейно независимое с $u_1(r)$ решение $u_2(r)$ уравнения (26) имеет при $r = 0$ логарифмическую особенность.

Условия (27) и (28) выделяют единственное решение уравнения (26). В силу свойства 1) условие (27) можно заменить требованием

$$u'(0) = 0. \quad (29)$$

Введем равномерную сетку $\omega_h = \{r_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = R\}$ на отрезке $0 \leq r \leq R$.

Разностную схему для уравнения (26) напишем, по аналогии с п. 2 § 2, при помощи метода баланса

$$\frac{1}{r_i h} [w_{i+1/2} - w_{i-1/2}] - \frac{1}{r_i h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} qur dr = -\frac{1}{r_i h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f(r) r dr, \quad (30)$$

*) См. дополнение II в книге: А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., «Наука», 1972.

и

$$r_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = R/N, \\ r_{i \pm 1/2} = r_i \pm 0.5h, \quad w = rk(r) du/dr.$$

Аппроксимируя поток w выражением

$$w_{i-1/2} \sim r_{i-1/2} a_i (u_i - u_{i-1})/h$$

и заменяя интегралы в уравнении баланса (30) выражениями $d_i u_i r_i h$ и $\varphi_i r_i h$ соответственно, получаем разностное уравнение

$$\Delta y_i = \frac{1}{r_i} (r_{i-1/2} a_i y_{i-1})_{r_i-1} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (31)$$

где

$$y_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_{r_i-1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

а коэффициенты a_i , d_i и φ_i выбираются так, чтобы

$$a_i = k_{i-1/2} + O(h^2), \quad d_i = q_i + O(h^2), \quad \varphi_i = f_i + O(h^2). \quad (32)$$

В простейшем случае

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i. \quad (33)$$

Аппроксимируем краевое условие при $r=0$. Его можно записать как условие равенства нулю потока при $r=0$: $w(0)=0$.

Покажем, что разностное краевое условие

$$a_1 y_r(0) = \frac{h}{4} (q(0) y(0) - f(0)) \quad (34)$$

имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$ на решении уравнения (26), удовлетворяющем краевому условию (27).

В самом деле, невязка для (34) равна

$$\tilde{v} = a_1 u_r(0) - \frac{h}{4} (q(0) u(0) - f(0)). \quad (35)$$

Поставив с.ода

$$a_1 = k_0 + 0.5h k'_0 + O(h^2), \\ u_r(0) = u'(0) + 0.5h u''(0) + O(h^2),$$

получаем

$$\tilde{v} = (k u')_0 + 0.5h (k u')'_0 - \frac{h}{4} (q_0 u_0 - f_0) + O(h^2). \quad (36)$$

Из уравнения (26) имеем

$$(k u')' = q u - f - \frac{f u'}{r}.$$

Так как $u' \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то $\frac{ku'}{r} \rightarrow (ku')_0$ при $r \rightarrow 0$ и

$$(ku')_0 = (qu - f)_0 - (ku')_0 = \frac{1}{2} (qu - f)_0. \quad (37)$$

Подставляя (37) в формулу (36) и учитывая (29), получаем

$$\tilde{v} = O(h^2).$$

Разностное краевое условие (34) будем записывать в виде

$$\frac{a_1 y_{r,0}}{h_*} - q_0 y_0 = -f_0, \quad h_* = \frac{h}{4}.$$

Таким образом, задаче (26)–(28) мы поставим в соответствие разностную схему

$$\begin{aligned} \Lambda y = \frac{1}{r} ((r - 0,5h) a y_r)_r - dy = -\varphi, \quad 0 < r = ih < 1, \\ \frac{a_1 y_{r,0}}{h_*} - q_0 y_0 = -f_0, \quad h_* = \frac{1}{4} h, \quad y_N = \mu_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Для определения y_i получаем разностную краевую задачу

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + A_{i+1} y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (39)$$

$$A_i = \frac{r_{i-1/2} a_i}{h^2}, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + r_i d_i, \quad F_i = \varphi_i r_i,$$

с краевыми условиями

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (40)$$

где

$$\kappa_1 = a_1 / \left(a_1 + \frac{h^2}{4} q_0 \right), \quad \mu_1 = \frac{h^2}{4} f_0 / \left(a_1 + \frac{h^2}{4} q_0 \right).$$

Эта задача решается методом прогонки (см. § 2 гл. I), условия устойчивости которой выполнены, так как $A_i > 0$, $C_i \geq A_i + A_{i+1}$, $0 < \kappa_1 \leq 1$, $\kappa_2 = 0$.

Перейдем к оценке точности схемы (38). Подставляя в (38) $y = z + u$, где u — решение задачи (26)–(28), а y — решение задачи (38), получим для погрешности $z = y - u$ задачу:

$$\Lambda z = \frac{1}{r} ((r - 0,5h) a z_r)_r - dz = -\psi, \quad 0 < r = ih < 1, \quad (41)$$

$$a_1 z_{r,0} / h_* - q_0 z_0 = -v, \quad z_N = 0,$$

где ψ и v — погрешности аппроксимации уравнения

$$\psi_i = \frac{1}{r_i} (r_{i-1/2} a_i u_{r,i}) - d_i u_i + \varphi_i \quad (42)$$

и краевого условия

$$v = a_1 u_{r,0} / h_* - q_0 u_0 + f_0. \quad (43)$$

Пользуясь уравнением баланса (30), преобразуем, как обычно, ψ к виду

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{r_i} \eta_{r,i} + \psi_i^*, \quad \eta_i = r_{i-1/2} (a_i u_{r,i} - (k u')_{i-1/2}), \\ \psi_i^* &= \varphi_i - \frac{1}{h r_i} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f(r) r dr - \left(d_i u_i - \frac{1}{h r_i} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} q u r dr \right). \end{aligned}$$

Положим $r = r_i + sh$ и получим разложение интегралов, входящих в формулу для ψ_i^* , по степеням h :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h r_i} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f(r) r dr &= \frac{1}{r_i} \int_{-0.5}^{0.5} f(r_i + sh) (r_i + sh) ds = \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} f(r_i + sh) ds + \frac{h}{r_i} \int_{-0.5}^{0.5} (f_i + sh f'_i + O(h^2)) s ds = \\ &= f_i + \frac{h^2}{12 r_i} f'_i + O(h^2), \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{1}{h r_i} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} q u r dr = q_i u_i + \frac{h^2}{12 r_i} (q u)'_i + O(h^2),$$

так что

$$\psi_i^* = \frac{h^2}{12 r_i} (q u - f)'_i + O(h^2), \quad (44)$$

т. е.

$$\|r \psi^*\|_C = O(h^2).$$

Очевидно, что функция $\dot{\eta}_i = a_i u_{r,i} - (k u')_{i-1/2} = O(h^2)$, т. е.

$$\eta_i = r_{i-1/2} \dot{\eta}_i, \quad \dot{\eta}_i = O(h^2). \quad (45)$$

Сравнивая формулы (35) и (43), находим, что $\tilde{v} = h_* v$. Отсюда следует, что $v = O(h)$, так как выше мы показали, что $\tilde{v} = O(h^2)$.

Перейдем к оценке погрешности $z = y - u$. Нам понадобится

Лемма. Пусть z — решение задачи (41), а v — решение той же задачи при $d_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $q_0 = 0$. Тогда имеет

место неравенство

$$\|z\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |z_i| \leq 2\|v\|_C. \quad (46)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой из п. 8 § 2 гл. I, записав уравнения для z и $z - v$ в форме (41).

Функция v_i находится в явном виде из условий:

$$\frac{w_{i+1} - w_i}{hr_i} = -\psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad w_i = b_i v_{r_{i+1}}, \quad b_i = c_i r_{i+1},$$

$$v_N = 0, \quad \frac{w_1}{h_{r_{1/2}}} = -v, \quad \text{т. е.} \quad w_1 = -\frac{h^2}{8} v,$$

где ψ_i определяется формулой (42) при $d_i = 0$.

Суммируя уравнения $w_{k+1} = w_k - hr_k \psi_k$ по $k = 1, 2, \dots, i$, получим

$$w_{i+1} = w_1 - \sum_{k=1}^i hr_k \psi_k, \quad w_1 = -\frac{h^2}{8} v. \quad (47)$$

Подставим в (47) $w_{i+1} = b_{i+1} (v_{i+1} - v_i)/h$:

$$v_i = v_{i+1} - \frac{w_1 h}{b_{i+1}} + \frac{h}{b_{i+1}} \sum_{k=1}^i hr_k \psi_k. \quad (48)$$

Просуммируем (48) по $j = i, i+1, \dots, N-1$ и учтем, что $v_N = 0$:

$$v_i = -w_1 \sum_{j=i}^{N-1} \frac{h}{b_{j+1}} + \sum_{j=i}^{N-1} \frac{h}{b_{j+1}} \sum_{k=1}^j hr_k \psi_k. \quad (49)$$

Подставляя в (49)

$$\psi_k = \frac{1}{r_k} \eta_{r_{k+1}} + \psi_k^*,$$

находим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b_{i+1}} \sum_{k=1}^i r_k \psi_k &= \frac{1}{b_{i+1}} (\eta_{i+1} - \eta_1) + \frac{1}{b_{i+1}} \sum_{k=1}^i hr_k \psi_k^*, \\ -\frac{1}{b_{i+1}} \left| \sum_{k=1}^i hr_k \psi_k^* \right| &\leq \frac{1}{a_{i+1}} (|\dot{\eta}_{i+1}| + |\dot{\eta}_1|) + \frac{\|r\psi^*\|_C}{a_{i+1} r_{i+1/2}} r_i \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} (|\dot{\eta}_{i+1}| + |\dot{\eta}_1|) + \frac{1}{c_1} \|r\psi^*\|_C, \end{aligned}$$

так как $\eta_{i+1} = r_{i+1/2} \dot{\eta}_{i+1}$, $\sum_{k=1}^i h = r_i < r_{i+1/2}$. Далее имеем

$$\left| \frac{w_1}{b_{i+1}} \right| = \left| \frac{h^2}{8} \cdot \frac{v}{r_{i+1/2} a_{i+1}} \right| < \frac{h^2}{8} \cdot \frac{|v|}{r_{i+1} c_1} = \frac{h}{4c_1} |v|.$$

В результате приходим к следующему неравенству:

$$\|v\|_C \leq \frac{Rh|\nu|}{4c_1} + \frac{1}{c_1} \sum_{j=0}^{N-1} h (|\dot{\eta}_{j+1}| + |\dot{\eta}_j|) + \frac{R}{c_1} \|r\Psi^*\|_C. \quad (50)$$

Подставляя в (50) оценки

$$\nu = O(h), \quad |\dot{\eta}_i| = O(h^2), \quad \|r\Psi^*\|_C = O(h^2),$$

убеждаемся в том, что

$$\|v\|_C = O(h^2),$$

и, следовательно,

$$\|z\|_C \leq 2\|v\|_C \leq Mh^2,$$

т. е. схема (38) имеет второй порядок точности в С.

Рассмотрим схему второго типа—«схему на потоковой сетке». Разобьем отрезок $[0, R]$ на N частей, введя узлы (потоковые точки)

$$r_0 = 0, \quad \bar{r}_1 = 0,5h, \quad \bar{r}_2 = 1,5h, \quad \dots, \quad \bar{r}_i = (i-0,5)h, \quad \dots, \\ \bar{r}_{N-1} = (N-1,5)h, \quad \bar{r}_N = (N-0,5)h = R.$$

Пусть $\bar{y}_i = y(\bar{r}_i)$ —значения искомой сеточной функции в этих узлах.

Для получения разностной схемы воспользуемся уравнением баланса для (26). Рассматривая уравнение баланса (аналог (30)) для интервала $r_{i-1} = \bar{r}_{i-1/2} < r < \bar{r}_{i+1/2} = r_i$, получаем

$$\frac{1}{\bar{r}_i} (r_{i-1} a_{i-1} \bar{y}_{\bar{r}_{i-1}})_{r,i} - d_i \bar{y}_i + \varphi(\bar{r}_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (51),$$

где $r_i = ih$, $\bar{r}_i = (i-0,5)h$, а a , d , φ выбираются по аналогии с (32)–(33), так что в простейшем случае

$$a_i = k(r_i), \quad \varphi_i = f(\bar{r}_i), \quad d_i = q(\bar{r}_i). \quad (52)$$

Из уравнения баланса для интервала $0 < r < r_1 = h$

$$\frac{w_1 - w_0}{\bar{r}_1 h} + \frac{1}{\bar{r}_1 h} \int_0^h (f(r) - q(r) u(r)) r dr = 0, \\ w(r) = rk(r) u'(r),$$

и условия $w_0 = 0$ следует разностное уравнение при $r = \bar{r}_1 = 0,5h$:

$$r_1 a_1 \bar{y}_{r_1} / (\bar{r}_1 h) - d_1 \bar{y}_1 + \varphi_1 = 0, \quad (53)$$

где a_1 , d_1 , φ_1 определяются по формулам (52).

При $r = R$ ставится обычное условие

$$\bar{y}_N = \mu_2. \quad (54)$$

В результате получаем разностное уравнение (51) с краевыми условиями (53) и (54).

Пусть $\bar{y} = y(\bar{r})$ — решение этой задачи. Для погрешности $z = \bar{y} - u$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{r}_i} (r_{i-1} a_{i-1} z_{\bar{r}_{i-1}})_{r,i} - d_i z_i + \psi(\bar{r}_i) &= 0, \\ \bar{r}_i &= (i - 0,5)h, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ z_N &= 0, \\ r_1 a_1 z_{r,1} / (\bar{r}_1 h) - d_1 z_1 + \psi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (55)$$

где ψ — погрешность аппроксимации, равная

$$\begin{aligned} \psi_i = \psi(\bar{r}_i) &= \frac{1}{\bar{r}_i} (r_{i-1} a_{i-1} \bar{u}_{\bar{r}_{i-1}})_{r,i} - d_i \bar{u}_i + \varphi_i, \\ i &= 2, 3, \dots, N-1, \\ \psi_1 &= \frac{r_1}{\bar{r}_1 h} a_1 \bar{u}_{r,1} - d_1 \bar{u}_1 + \varphi_1, \text{ причем } \bar{u}_i = u(\bar{r}_i) = u_{i-1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда из уравнения баланса для интервала $r_{i-1} \leq r < r^i$ следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{1}{\bar{r}_i} (r_{i-1} \dot{\eta}_i)_{r,i} + \psi_i^*, \\ \dot{\eta}_i &= a_{i-1} \bar{u}_{\bar{r}_{i-1}} - k_{i-1} u'_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \eta_1 = 0, \\ \psi_i^* &= \varphi_i - \dot{\varphi}_i - (d_i - \dot{d}_i) \bar{u}_i + \frac{1}{h \bar{r}_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r q(r) (u(r) - u(\bar{r}_i)) dr, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{\bar{r}_i h} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r f(r) dr, \quad \dot{d}_i = \frac{1}{\bar{r}_i h} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r q(r) dr.$$

Вычисления дают

$$\psi_i^* = \frac{\mu_i}{\bar{r}_i}, \quad \mu_i = O(h^2).$$

Для решения задачи (55) с правой частью

$$\Psi_i = \frac{1}{\bar{r}_i} (r_{i-1} \eta_i)_{r,i} + \frac{\mu_i}{\bar{r}_i}$$

справедлива оценка того же типа, что и для задачи (41).

Из этой оценки следует

$$\|z\|_c = \|y - u\|_c = O(h^2),$$

т. е. схема (51), (53), (54) имеет второй порядок точности, если $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$.

5. Разностные схемы для уравнения в сферической системе координат. Если решение уравнения $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = -f(r, \theta, \varphi)$ в сферической системе координат обладает центральной симметрией, т. е. не зависит от θ и φ , то для функции $u = u(r)$ мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k(r) \frac{du}{dr} \right) - q(r) u = -f(r), \quad 0 < r < R, \\ 0 < c_1 \leq k(r) \leq c_2, \quad q(r) \geq 0. \end{aligned} \quad (56)$$

При $r = 0$ ставится условие

$$r^2 k(r) \frac{du}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (57)$$

эквивалентное условию ограниченности $u(r)$ при $r = 0$, а при $r = R$, например, условие

$$u(R) = \mu_2. \quad (58)$$

Ограниченнное решение задачи (56)–(58) обладает теми же свойствами, что и в случае осевой симметрии (т. е. в случае задачи (26)–(28)).

На отрезке $0 \leq r \leq R$ введем равномерную сетку $\omega_h = \{r_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = R\}$. Схему напишем по аналогии с (31) в виде

$$\Lambda y_i = \frac{1}{r_i^2} (r_{i-1/2}^2 a_i y_{r_{i-1/2}})_{r_{i-1/2}} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (59)$$

При $r = 0$ напишем разностное краевое условие

$$a_1 y_{r_{1/2}}/h^* - q_0 y_0 = -f_0, \quad h^* = h/6, \quad (60)$$

а при $i = N$ положим

$$y_N = \mu_2. \quad (61)$$

Эти уравнения записываются в виде (39) и решаются методом прогонки. Отличие от цилиндрического случая появляется при выборе φ и d . Чтобы найти формулы для φ и d , рассмотрим невязку

$$\psi_i = \Lambda u_i + \varphi_i = \frac{1}{r_i^2} (r_{i-1/2}^2 a_i u_{r_{i-1/2}})_{r_{i-1/2}} - d_i u_i + \varphi_i. \quad (62)$$

Напишем на отрезке $r_{i-1/2} \leq r \leq r_{i+1/2}$ уравнение баланса

$$0 = \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{hr_i^2} - \frac{1}{hr_i^2} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} qur^2 dr + \frac{1}{hr_i^2} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} fr^2 dr, \quad w = r^2 ku',$$

и вычтем его из равенства (62):

$$\Psi_i = \frac{1}{r_i^2} \eta_{r, i} + \Psi_i^*, \quad \eta_i = r_{i-1/2}^2 \dot{\eta}_i, \quad \dot{\eta}_i = a_i u_{r, i} - (ku')_{i-1/2},$$

где

$$\Psi_i^* = \Psi_i - \frac{1}{hr_i^2} \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} fr^2 dr - \left(d_i u_i - \frac{1}{hr_i^2} \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} qur^2 dr \right). \quad (63)$$

Проводя замену переменной интегрирования $r = r_i + sh$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{hr_i^2} \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} fr^2 dr &= \frac{1}{r_i^2} \int_{-0.5}^{0.5} f(r_i + sh)(r_i + sh)^2 ds = \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} f(r_i + sh) ds + \frac{2h}{r_i} \int_{-0.5}^{0.5} sf(r_i + sh) ds + \frac{h^2}{r_i^2} \int_{-0.5}^{0.5} f(r_i + sh) s^2 ds = \\ &= f_i + O(h^2) + \frac{h^2 f'_i}{6r_i} + \frac{h^2}{12r_i^2} f_i + O(h^2) = \\ &= \left(1 + \frac{h^2}{12r_i^2} \right) f_i + \frac{h^2}{6r_i} f'_i + O(h^2). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение напишем для второго интеграла, заменив f на qu . Отсюда и из формулы (63) видно, что

$$\Psi_i^* = \frac{h^2}{6r_i} (qu - f)_i + O(h^2), \quad \|r\Psi^*\|_C = O(h^2),$$

если Ψ_i и d_i определить по формулам

$$\Psi_i = \left(1 + \frac{h^2}{12r_i^2} \right) f_i, \quad d_i = \left(1 + \frac{h^2}{12r_i^2} \right) q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (64)$$

или по формулам, отличающимся от этих на величину $O(h^2)$.

По аналогии с предыдущим пунктом убеждаемся в том, что невязка в краевом условии

$$v = a_1 u_{r, 0}/h^2 - q_0 u_0 + f_0 = O(h). \quad (65)$$

Для погрешности $z = y - u$ имеем задачу

$$\Lambda z = -\Psi, \quad r \in \omega_h, \quad a_1 z_{r, 0}/h^2 - q_0 z_0 = -v, \quad z_N = 0. \quad (66)$$

Оценка решения этой задачи проводится по аналогии с предыдущим пунктом; здесь будем иметь $b_i = r_{i-1/2}^2 a_i$. В результате убеждаемся в том, что схема (59)–(61) сходится равномерно со скоростью $O(h^2)$:

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = O(h^2).$$

§ 6. Разностная функция Грина

1. Разностная функция Грина. Для оценки решения краевой задачи для разностного уравнения второго порядка можно использовать представление этого решения через функцию Грина.

Поясним существо дела на примере краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u &= -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение этой задачи, как известно, может быть представлено в интегральной форме

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $G(x, \xi)$ —функция источника или функция Грина. Функция (2) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, если функция Грина $G(x, \xi)$ как функция x при фиксированном аргументе ξ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} L_x G(x, \xi) = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) - q(x) G(x, \xi) &= 0, \\ x \neq \xi, \quad 0 < x < 1, \\ G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$[G] = G(\xi + 0, \xi) - G(\xi - 0, \xi) = 0, \quad \left[k \frac{dG}{dx} \right] = -1 \quad \text{при } x = \xi.$$

Из этого определения следует неотрицательность и симметрия функции Грина:

$$G(x, \xi) \geq 0, \quad G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Выражение для функции $G(x, \xi)$ может быть получено в явном виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x) \beta(\xi)}{\alpha(1)} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\alpha(\xi) \beta(x)}{\alpha(1)} & \text{при } x \geq \xi, \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — решения следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} L\alpha &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha(0) = 0, \quad k(0)\alpha'(0) = 1, \\ L\beta &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad \beta(1) = 0, \quad k(1)\beta'(1) = -1. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ линейно независимы, так как определитель Вронского $\Delta(x) \neq 0$, причем $\alpha(x) > 0$ при $x > 0$, $\beta(x) > 0$ при $0 \leq x < 1$.

Перейдем теперь к разностному уравнению второго порядка. В § 2 гл. I было показано, что любое разностное уравнение второго порядка $A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$ может быть преобразовано к дивергентному виду

$$a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1}) - d_i y_i = -\varphi_i.$$

Заменяя здесь φ_i на $h^2 \varphi_i$, d_i на $h^2 d_i$, перепишем его в более удобной для сравнения с дифференциальным уравнением форме

$$\begin{aligned} \Lambda y_i &= \frac{1}{h^2} [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] - d_i y_i = -\varphi_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

или в безиндексной форме

$$\begin{aligned} \Lambda y &= (ay_x)_x - dy = -\varphi(x), \quad x = ih, \\ a_i &\geq c_1 > 0, \quad d_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть при $i=0$ ($x=0$) и $i=N$ ($x=1$) заданы краевые условия первого рода

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0. \quad (7)$$

Введем, как обычно,

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad [y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h.$$

Будем искать решение задачи (6) в виде

$$y_i = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik} \varphi_k h = (G_{ik}, \varphi_k). \quad (8)$$

Потребуем, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению $\Lambda y_i = -\varphi_i$. Из равенства $\Lambda y_i = \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda_{ik} G_{ik} \varphi_k h$ видно, что уравнение (6) удовлетворяется только при $\Lambda_{ik} G_{ik} = -\delta_{ik}/h$, где δ_{ik} — символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Условия $y_0 = y_N = 0$, очевидно, выполнены при $G_{0k} = G_{Nk} = 0$.

Таким образом, формула (8) дает решение задачи (6)–(7), если $G_{ik} = G(x_i, x_k)$ как функция i при фиксированном $k = 1, 2, \dots, N-1$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \Lambda_{ii} G_{ik} &= (a_i (G_{ik})_{\bar{x}, i})_{\bar{x}, i} - d_i G_{ik} = -\delta_{ik}/h, \quad i, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (9) \\ G_{0k} &= G_{Nk} = 0. \end{aligned}$$

Покажем, что так определенная функция Грина существует, и найдем для нее явное представление по аналогии с (4). Введем сначала функции α_i, β_i как решения задач Коши

$$\begin{aligned} \Lambda \alpha_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_0 = 0, \quad a_1 \alpha_{x, 0} = a_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} = 1, \\ \Lambda \beta_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_N = 0, \quad a_N \beta_{\bar{x}, N} = a_N \frac{\beta_N - \beta_{N-1}}{h} = -1. \quad (10) \end{aligned}$$

Покажем, что α_i, β_i обладают следующими свойствами:

1) α_i — монотонно возрастающая, β_i — монотонно убывающая положительные функции

$$\alpha_i \leq \alpha_{i+1} \leq \alpha_N, \quad \beta_i \leq \beta_{i-1} \leq \beta_0,$$

$\alpha_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, N$, $\beta_i > 0$ при $i = 0, 1, \dots, N-1$.

В самом деле, из условий (10) следует

$$a_i \alpha_{\bar{x}, i} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} h d_k \alpha_k, \quad \alpha_1 = h/a_1 > 0.$$

Если $\alpha_k > 0$ при $k = 1, 2, \dots, i-1$, то $\alpha_{\bar{x}, i} > 0$ и $\alpha_i > \alpha_{i-1} > 0$. Аналогично убеждаемся, что $\beta_{\bar{x}, i} < 0$, $0 < \beta_i < \beta_{i-1}$.

2) $\alpha_N = \beta_0$ или $\alpha(1) = \beta(0)$.

Рассмотрим вторую формулу Грина

$$(\alpha, \Lambda \beta) = (\beta, \Lambda \alpha) + a_N (\alpha \beta_{\bar{x}} - \beta \alpha_{\bar{x}})_N - a_1 (\alpha \beta_x - \beta \alpha_x)_0.$$

Отсюда, в силу условий (10), сразу следует, что $\alpha_N = \beta_0$.

3) Определитель $\Delta_i = a_i (\alpha_{\bar{x}, i} \beta_i - \alpha_i \beta_{\bar{x}, i}) = \text{const} = \alpha_N > 0$ при $0 < i \leq N$.

Применим вторую формулу Грина в области $0 \leq x_i = ih \leq x_{i_0} = x$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{i_0-1} (\alpha \Lambda \beta - \beta \Lambda \alpha)_i h = a_{i_0} (\alpha \beta_{\bar{x}} - \beta \alpha_{\bar{x}})_{i_0} - \\ &\quad - a_1 (\alpha \beta_x - \beta \alpha_x)_0 = -\Delta(x_{i_0}) + \beta(0) a_1 \alpha_{\bar{x}, 1} = -\Delta(x_{i_0}) + \beta_0. \end{aligned}$$

Так как $x_{i_0} = x$ — произвольный узел сетки ω_h , то $\Delta(x) = \text{const} = \beta(0) = \alpha(1)$.

Покажем теперь, что функция Грина может быть представлена в виде

$$G_{ik} = \begin{cases} \frac{\alpha_i \beta_k}{\alpha_N} & \text{при } i \leq k, \\ \frac{\alpha_k \beta_i}{\alpha_N} & \text{при } i \geq k. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда видно, что $G_{0k} = G_{Nk} = 0$.

Надо убедиться в том, что функция, определяемая формулами (11), есть решение уравнения $\Lambda_{(i)} G_{ik} = -\delta_{ik}/h$. Если $i \neq k$, то $\Lambda_{(i)} G_{ik} = 0$, так как $\Lambda \alpha_i = 0$, $\Lambda \beta_i = 0$.

Рассмотрим $\Lambda_{(i)} G_{ik}$ при $i = k$:

$$(\Lambda_{(i)} G_{ik})_{i=k} = \frac{1}{\alpha_N h^2} [a_{k+1} (\alpha_k \beta_{k+1} - \alpha_{k+1} \beta_k) - a_k (\alpha_k \beta_k - \alpha_{k-1} \beta_k)] - d_k G_{kk}. \quad (12)$$

Из условия $\Delta_{k+1} = a_{k+1} (\alpha_{k+1} \beta_k - \alpha_k \beta_{k+1})/h = \alpha_N$ найдем $a_{k+1} \alpha_k \beta_{k+1} = a_{k+1} \alpha_{k+1} \beta_k - h \alpha_N$ и подставим это выражение в правую часть формулы (12). В результате получим

$$(\Lambda_{(i)} G_{ik})_{i=k} = \frac{\beta_k}{\alpha_N} (a \alpha_x)_{x=k} - \frac{1}{h} - \frac{d_k \beta_k}{\alpha_N} \alpha_k = \frac{\beta_k}{\alpha_N} \Lambda \alpha_k - \frac{1}{h} = -\frac{1}{h},$$

что и требовалось.

Из формулы (11) видно, что $G_{ik} > 0$ при $i, k \neq 0, N$, $G_{ik} = G_{ki}$ и, кроме того, G_{ik} как функция k при любом фиксированном $i = 1, 2, \dots, N-1$ удовлетворяет условиям

$$\Lambda_{(k)} G_{ik} = -\delta_{ik}/h, \quad G_{i0} = G_{iN} = 0.$$

Аналогично строится функция Грина в случае краевых условий $y_0 = x_1 y_1$ и $y_N = x_2 y_{N-1}$.

Рассмотрим частный случай $d(x) \equiv 0$.

Тогда функции $\alpha = \dot{\alpha}(x)$, $\beta = \dot{\beta}(x)$ находятся в явном виде из уравнений (10):

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{s=1}^i h/a_s, \quad \dot{\beta}_i = \sum_{s=i+1}^N h/a_s, \quad (13)$$

и функция Грина задачи

$$(ay_x)_x = -\Phi, \quad x \in \omega_h, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0 \quad (14)$$

имеет вид

$$G_{ik} = \begin{cases} \sum_{s=1}^i \frac{h}{a_s} \sum_{s=k+1}^N \frac{h}{a_s} / \sum_{s=1}^N \frac{h}{a_s}, & i \leq k \\ \sum_{s=1}^k \frac{h}{a_s} \sum_{s=i+1}^N \frac{h}{a_s} / \sum_{s=1}^N \frac{h}{a_s}, & i \geq k \end{cases} \quad (15)$$

Для наилучшей схемы (15), (17) из § 2 G_{ik} совпадает на ω_h с функцией Грина для дифференциального уравнения.

2. Априорные оценки. Явное представление (8) решения задачи (6)–(7) при помощи функции Грина можно использовать для получения априорных оценок решения через правую часть. Из (8) видно, что

$$|y_i| \leq (G_{ik}, |\varphi_k|) = \sum_{k=1}^{N-1} G_{ik} |\varphi_k| h, \quad (16)$$

и равномерная оценка y_i будет получена, если оценить $\max_{i, k} G_{ik}$.

Представим φ_i в виде

$$\varphi = \eta_x, \quad \eta_i = \sum_{s=1}^{i-1} h \varphi_s, \quad \eta_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (17)$$

и подставим в формулу (8). Пользуясь формулой суммирования по частям, получим

$$y(x) = (G(x, \xi), \eta_\xi) = -[G_\xi(x, \xi), \eta(\xi)], \quad x, \xi \in \omega_h. \quad (18)$$

Здесь надо оценить $|G_\xi(x, \xi)|$.

Лемма. Для функции Грина $G(x, \xi)$ задачи (6)–(7) справедливы равномерные оценки

$$G(x, \xi) \leq \frac{1}{c_1}, \quad (19)$$

$$|G_x(x, \xi)| \leq 2/c_1, \quad |G_\xi(x, \xi)| \leq 2/c_1 \quad (20)$$

для всех $x, \xi \in \omega_h$.

Доказательство. 1. В § 2 гл. I была получена для решения задачи (6)–(7) оценка

$$\|y\|_C \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{a_{i+1}} \sum_{s=1}^i |h^2 \varphi_s| \leq \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{s=1}^i |h^2 \varphi_s|. \quad (21)$$

Подставляя в (21) вместо y_i функцию G_{ik} , а вместо φ_s функцию δ_{sk}/h , получим

$$\max_{i, k} G_{ik} \leq \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h S_{ik} \leq \frac{1-x_k}{c_1} \leq \frac{1}{c_1},$$

где

$$S_{ik} = \sum_{s=1}^i \delta_{sk}, \quad S_{ik} = 0 \quad \text{при } i < k, \quad S_{ik} = 1 \quad \text{при } i \geq k.$$

2. Предположим сначала, что $d(x) \equiv 0$ и функция Грина $G = G_0(x, \xi)$ определяется согласно (15). В этом случае

$$G_{0x}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\dot{\alpha}_x(x) \dot{\beta}(\xi)}{\dot{\alpha}(1)} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\dot{\alpha}(\xi) \dot{\beta}_x(x)}{\dot{\alpha}(1)} & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

Так как

$$\dot{\alpha}_{\bar{x}, i} = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \dot{\beta}_{\bar{x}, i} = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}, \quad \dot{\alpha}(\xi) \leq \dot{\alpha}(1) \text{ и } \dot{\beta}(\xi) \leq \dot{\beta}(1),$$

то

$$|G_{0\bar{x}}(x, \xi)| \leq \frac{1}{c_1}. \quad (22)$$

Аналогично находим $|G_{0\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq \frac{1}{c_1}$.

Пусть $v(x, \xi) = G_0(x, \xi) - G(x, \xi)$. Из уравнений для G_0 и G следует

$$\Lambda_x v(x, \xi) = -d(x) G_0(x, \xi), \quad v(0, \xi) = v(1, \xi) = 0.$$

Возьмем левую разностную производную по ξ от обеих частей этого уравнения. Тогда для $w(x, \xi) = v_{\bar{\xi}}$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_x w(x, \xi) &= (a(x) w_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x) w(x, \xi) = -d(x) G_{0\bar{\xi}}(x, \xi), \\ w(0, \xi) &= 0, \quad w(1, \xi) = 0. \end{aligned}$$

В силу леммы из гл. I, § 2 имеем

$$\max_x |w(x, \xi)| \leq \max_x |G_{0\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq \frac{1}{c_1}. \quad (23)$$

Учитывая оценки (22) и (23), из неравенства

$$|G_{\bar{\xi}}(x, \xi)| \leq |G_{0\bar{\xi}}(x, \xi)| + |w(x, \xi)|$$

получаем искомую оценку (20).

Теорема. Для решения задачи (6)–(7) имеют место оценки

$$\|y\|_c \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=i}^{N-1} h \varphi_s \right|, \quad (24)$$

$$\|y\|_c \leq \frac{2}{c_1} \left(1, \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right| \right) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{s=1}^i h \varphi_s \right|. \quad (25)$$

Если $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi = \eta_x + \varphi^*,$$

то для решения задачи (6)–(7) выполняется оценка

$$\|y\|_c \leq \frac{2}{c_1} \{(1, |\eta|) + (1, |\mu|)\}, \quad (26)$$

где

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h \varphi_k^*, \quad i = 2, 3, \dots, N, \mu_1 = 0.$$

Доказательство. Положим $\varphi = \eta_x$ и воспользуемся формулой (18). В силу леммы получим

$$|y_i(x)| \leq (|G_{\bar{x}}(x, \xi)|, |\eta(\xi)|) \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta(\xi)|). \quad (27)$$

Функция $\eta(x)$ определяется из условия $\eta_x = \varphi$ с точностью до произвольной постоянной. Решение разностного уравнения

$$\eta_{i+1} - \eta_i = h\varphi_i$$

можно представить в одной из форм:

$$\eta_i = \eta_N - \sum_{s=i}^{N-1} h\varphi_s = - \sum_{s=i}^{N-1} h\varphi_s, \quad \text{если положить } \eta_N = 0,$$

$$\eta_{i+1} = \eta_1 + \sum_{s=1}^i h\varphi_s = \sum_{s=1}^i h\varphi_s, \quad \text{если положить } \eta_1 = 0.$$

Подставляя затем эти выражения для η_i в правую часть неравенства (27), получаем оценки (24) и (25).

Для доказательства неравенства (26) достаточно положить $\varphi^* = \mu_x$, так что $\varphi = (\eta + \mu)_x$, и воспользоваться предыдущими рассуждениями.

Замечание. Из формулы (16) следует оценка

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} (1, |\varphi|) \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\| \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_C,$$

где $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Нетрудно убедиться в том, что $\left\| \sum_{k=1}^i h\varphi_k \right\| \leq \leq (1, |\varphi|) \leq \|\varphi\| \leq \|\varphi\|_C$.

Пользуясь оценкой

$$\|G_{\bar{x}}(x, \xi)\|_C \leq \frac{2}{c_1},$$

можно получить априорную оценку в C для разностной производной решения краевой задачи (6) — (7). В самом деле,

$$|y_{\bar{x}}| = |(G_{\bar{x}}(x, \xi), \varphi(\xi))| \leq \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|),$$

так что

$$\|y_{\bar{x}}\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|).$$

§ 7. Схемы повышенного порядка точности

1. Точная схема. Для уравнения (1) из § 1 можно построить однородную консервативную трехточечную схему, являющуюся точной, так что решение разностной задачи y_i совпадает в узлах любой сетки ω_h с точным решением $u = u(x)$ задачи (1)

из § 1:

$$y_i = u(x_i) \text{ для } k, q, f \in Q^{(0)}[0, 1].$$

Для удобства дальнейшего изложения перепишем задачу (1) из § 1 в виде

$$L^{(p, q)} u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) - q(x) u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \quad p(x) = k^{-1}(x), \quad 0 < p(x) < 1/c_1, \quad q(x) \geq 0.$$

Отметим прежде всего, что наилучшая схема (14)–(15) из § 2 при $q = f = 0$ является точной. В самом деле, решение задачи (1) при $q = f = 0$

$$u(x) = u_1 + c \int_0^x p(t) dt, \quad c = (u_2 - u_1) \left(\int_0^1 p(t) dt \right)^{-1}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что

$$u_{\tilde{x}, i} = \frac{c}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(t) dt = \frac{c}{\tilde{a}_i}, \quad \dot{a}_i u_{\tilde{x}, i} = c,$$

где $\dot{a}_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(t) dt \right)^{-1}$ и, следовательно, функция (2) удовлетворяет уравнению

$$(\dot{a}u_{\tilde{x}})_x = 0.$$

Обратимся к уравнению (1). Пусть $\bar{\omega}_h$ — равномерная сетка. Основная идея получения точной схемы состоит в том, что решение $u = u(x)$ уравнения второго порядка (1) в любой внутренней точке (и, в частности, при $x = x_i$) интервала (x_{i-1}, x_{i+1}) выражается через значения u_{i-1} , u_{i+1} и правую часть $f(x)$.

В самом деле, $u(x)$ можно представить в виде

$$u(x) = A_i v_1^i(x) + B_i v_2^i(x) + v_3^i(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, \quad (3)$$

где A_i и B_i — числа, $v_1^i(x)$ и $v_2^i(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения $L^{(p, q)} u = 0$ (шаблонные функции), а $v_3^i(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (1) при однородных условиях

$$L^{(p, q)} v_3^i = f(x), \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_3^i(x_{i+1}) = v_3^i(x_{i-1}) = 0. \quad (4)$$

Определим шаблонные функции $v_1^i(x)$, $v_2^i(x)$ как решения задач Коши:

$$L^{(p, q)} v_1^i = 0, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{1}{p(x_{i-1})} (v_1^i)'(x_{i-1}) = 1, \quad (5)$$

$$L^{(p, q)} v_2^i = 0, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_2^i(x_{i+1}) = 0, \quad \frac{1}{p(x_{i+1})} (v_2^i)'(x_{i+1}) = -1. \quad (6)$$

Полагая в (3) $x = x_{i-1}$ и $x = x_{i+1}$, найдем

$$A_i = \frac{u(x_{i+1})}{v_1^i(x_{i+1})}, \quad B_i = \frac{u(x_{i-1})}{v_2^i(x_{i-1})}. \quad (7)$$

Шаблонные функции обладают следующими свойствами (ср. со стр. 199):

1) $v_1^i(x) > 0$ и монотонно возрастает при $x_{i-1} < x < x_{i+1}$,
 $v_2^i(x) > 0$ и монотонно убывает при $x_{i-1} < x < x_{i+1}$,

2) имеет место равенство

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_2^i(x_{i-1}), \quad (8)$$

3) справедливо соотношение

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_1^i(x_i) + v_2^i(x_i) +$$

$$+ v_2^i(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i q(x) dx + v_1^i(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i q(x) dx, \quad (9)$$

4) и, наконец,

$$v_2^i(x_i) = v_1^{i+1}(x_{i+1}). \quad (10)$$

Докажем эти свойства.

1) Свойство 1) непосредственно следует из (5) и (6).

2) Учитывая (5) и (6), имеем (при $L = L^{(p, q)}$):

$$0 = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (v_1^i L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx = \\ = \left(v_1^i \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^i)' \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = -v_1^i(x_{i+1}) + v_2^i(x_{i-1}).$$

3) Напишем формулу Грина на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$0 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v_1^i L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx = \left(v_1^i \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^i)' \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ = \frac{1}{p_i} (v_2^i)'(x_i) v_1^i(x_i) - \frac{1}{p_i} (v_1^i)'(x_i) v_2^i(x_i) + v_2^i(x_{i-1}),$$

и подставим сюда

$$\frac{1}{p_i} (v_1^i)'(x_i) = 1 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) v_1^i(x) dx,$$

$$\frac{1}{p_i} (v_2^i)'(x_i) = -1 - \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) v_2^i(x) dx.$$

4) Учитывая, что $v_1^{i+1}(x)$ удовлетворяет условиям

$$L^{(p, q)} v_1^{i+1} = 0, \quad x_i < x < x_{i+2}, \quad v_1^{i+1}(x_i) = 0, \quad \frac{1}{p} \frac{dv_1^{i+1}}{dx} \Big|_{x=x_i} = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_1^{i+1} L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx = \\ &= \left[v_1^{i+1} \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^{i+1})' \right] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = -v_1^{i+1}(x_{i+1}) + v_2^i(x_i). \end{aligned}$$

Функцию $v_2^i(x)$ можно представить в виде

$$v_2^i(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (11)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (4) (см. (11) из § 6), равная

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{v_1^i(\xi) v_2^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}, & x_{i-1} < \xi \leq x, \\ \frac{v_1^i(x) v_2^i(\xi)}{v_1^i(x_{i+1})}, & x \leq \xi < x_{i+1}. \end{cases} \quad (12)$$

Подставим выражение (12) в (11) и положим $x = x_i$:

$$v_2^i(x_i) = \frac{1}{v_1^i(x_{i+1})} \left[v_2^i(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) f(\xi) d\xi + v_1^i(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) f(\xi) d\xi \right]. \quad (13)$$

Используя (7), (9) и (13), из (3) получим

$$\frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{v_2^i(x_i)} - \frac{u_i - u_{i-1}}{v_1^i(x_i)} \right] - d_i u_i = -\varphi_i, \quad (14)$$

где

$$d_i = \frac{1}{h v_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) q(\xi) d\xi + \frac{1}{h v_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) q(\xi) d\xi, \quad (15)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h v_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{h v_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Введем теперь в точке $x = x_i$ местную систему координат, полагая $x = x_i + sh$, $s = (x - x_i)/h$. Тогда отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ преобразуется в отрезок (шаблон) $-1 \leq s \leq 1$, точке $s = 0$ будет соот-

вествовать узел $x = x_i$. Положим $v_1^i(x) = v_1^i(x_i + sh) = h\alpha^i(s, h)$, $v_2^i(x) = v_2^i(x_i + sh) = h\beta^i(s, h)$, $-1 \leq s \leq 1$, $v_1^i(x_i) = ha_i$ и, в силу (10), $v_2^i(x_i) = ha_{i+1}$. Шаблонные функции $\alpha^i(s, h)$ и $\beta^i(s, h)$, очевидно, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \bar{L}\alpha &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{p(s)} \frac{d\alpha}{ds} \right) - h^2 \bar{q}(s) \alpha = 0, \quad -1 < s < 1, \\ \alpha(-1, h) &= 0, \quad \alpha'(-1, h) = \bar{p}(-1), \\ \bar{L}\beta &= 0, \quad -1 < s < 1, \quad \beta(1, h) = 0, \quad \beta'(1, h) = -\bar{p}(1), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$, $\bar{q}(s) = q(x_i + sh)$, и зависят только от значений $q(s)$, $p(s)$ ($p(x)$, $q(x)$) на отрезке $-1 \leq s \leq 1$ (на отрезке $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$). Опуская в (14) индекс i , получаем для $y(x) = u(x)$, $x \in \omega_h$, однородную консервативную схему

$$\left(\frac{1}{a} y_x \right)_x - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a(x) &= \alpha(0, h) = A[p(x + sh), q(x + sh)], \\ d(x) &= \frac{1}{a(x)} \int_{-1}^0 \alpha(s, h) q(x + sh) ds + \frac{1}{a(x+h)} \int_0^1 \beta(s, h) q(x + sh) ds, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{a(x)} \int_{-1}^0 \alpha(s, h) f(x + sh) ds + \frac{1}{a(x+h)} \int_0^1 \beta(s, h) f(x + sh) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты $d(x)$, $\varphi(x)$ вычисляются по одной и той же формуле

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= F[p(x + sh), q(x + sh); f(x + sh)], \\ d(x) &= F[p(x + sh), q(x + sh); q(x + sh)]. \end{aligned}$$

Шаблонные функционалы заданы в классе кусочно-непрерывных функций: $A[\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$ задан для $\bar{p}(s), \bar{q}(s) \in Q^{(0)}[-1, 0]$, $F[\bar{p}(s), \bar{q}(s); \bar{f}(s)]$ — для $\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$.

Из (17), (18) видно, что точная схема не принадлежит семейству схем (16) — (17) из § 2, у которых шаблонные функционалы $A[\bar{p}(s)]$ и $F[\bar{f}(s)]$ зависят только от одной функции.

В случае уравнения (1) с постоянными коэффициентами $p(x) = p_0 = \text{const}$ и $q(x) = q_0 = \text{const}$ шаблонные функции $\alpha(s, h)$, $\beta(s, h)$ находятся в явном виде

$$\alpha(s, h) = \frac{\sinh(x(1+s)h)}{xh}, \quad \beta(s, h) = \frac{\sinh(x(1-s)h)}{xh}, \quad x = \sqrt{\frac{q_0}{k_0}}.$$

Для коэффициентов $a(x)$ и $d(x)$ получаем постоянные значения

$$a(x) = \frac{\sin(xh)}{xh}, \quad d(x) = \frac{2q_0}{h} \operatorname{th} \frac{xh}{2}.$$

2. Схемы любого порядка точности. Исходя из выражения для коэффициентов точной схемы, нетрудно построить схему любого порядка точности.

Из (16) видно, что $\alpha(s, h)$ и $\beta(s, h)$ являются аналитическими функциями параметра h^2 и поэтому разлагаются в ряды

$$\alpha(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) h^{2k}, \quad (19)$$

где $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$ определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left(\int_{-1}^t \alpha_{k-1}(\lambda) \bar{q}(\lambda) d\lambda \right) dt, \quad k > 0, \quad \alpha_0(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) dt,$$

$$\beta_k(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) \left(\int_t^1 \beta_{k-1}(\lambda) \bar{q}(\lambda) d\lambda \right) dt, \quad k > 0, \quad \beta_0(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) dt.$$

Если в (19) взять конечное число членов

$$\alpha^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m \beta_k(s) h^{2k}$$

и вычислить по формулам (18) коэффициенты $a^{(m)}$, $d^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$, заменяя в этих формулах α и β полиномами $\alpha^{(m)}$ и $\beta^{(m)}$, то мы получим схему (называемую *усеченной схемой ранга m*), которая имеет точность $O(h^{2m+2})$ в классе кусочно-непрерывных функций $k(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$.

При $m=0$ получаем схему нулевого ранга. Она имеет точность $O(h^2)$ для k , q , $f \in Q^{(0)}$ и отличается от наилучшей схемы (14)–(15) из § 2 выражениями для d и φ :

$$a^{(0)} = \frac{1}{a} = \int_{-1}^0 p(x+sh) ds, \quad p = \frac{1}{k},$$

$$d^{(0)} = \dot{d} + (hd_*)_x, \quad \varphi^{(0)} = \dot{\varphi} + (h\varphi_*)_x,$$

$$d_* = \dot{a} \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-0,5}^s q(x+th) dt, \quad \varphi_* = \dot{a} \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-0,5}^s f(x+th) dt.$$

Усеченные схемы замечательны тем, что они позволяют получить любой порядок точности для произвольных кусочно-непрерывных функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Точная схема и усеченные схемы могут быть получены (теми же методами) на произвольной неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$.

Практическое использование усеченных схем в случае переменных коэффициентов уравнения (1) требует вычисления многократных интегралов на каждом интервале сетки. Заменяя эти интегралы конечными суммами, можно получить весьма простые схемы $O(h^4)$ и $O(h^6)$, коэффициенты которых выражаются через значения k , q и f в отдельных точках на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Эти схемы сохраняют свой порядок точности и в случае разрывных k , q , f на сетках $\hat{\omega}_h(K)$, когда точки разрыва являются узлами сетки $\hat{\omega}_h(K)$.

Точную и усеченную схемы можно использовать в качестве эталонных схем для исследования точности схем (16)–(17) из § 2. Это позволяет снизить требования гладкости k , q , f , которые использовались при оценке порядка точности схем (16)–(17) из § 2.

§ 8. Методы построения разностных схем

1. Общие замечания. Из предыдущего ясно, что разностные схемы должны отражать в пространстве сеточных функций основные свойства дифференциальных уравнений такие, как самосопряженность, знакоопределенность оператора, выполнение определенных априорных оценок (например, соблюдение принципа максимума) и др. Кроме того (и прежде всего), схема должна удовлетворять требованиям разрешимости и устойчивости, аппроксимации и, следовательно, точности определенного порядка, и, наконец, вычислительный алгоритм должен быть экономичным. Экономичность зависит не только от схемы, но и от выбора способа решения разностных уравнений и от выбора сетки, которая, вообще говоря, должна быть неравномерной и учитывать поведение решения.

Получение схем заданного качества является важнейшей задачей теории.

С некоторыми способами построения разностных аппроксимаций для дифференциальных уравнений мы уже познакомились.

Простейший и, так сказать, «естественный» способ состоит в выборе шаблона и задании на этом шаблоне разностного уравнения с неопределенными коэффициентами, которые могут зависеть от узла сетки и от шага сетки. Требования разрешимости и аппроксимации приводят к ограничениям на произвол в выборе коэффициентов, однако эти ограничения слабы, и мы получаем бесчисленное множество (например, многопараметрическое семейство) схем. Далее можно требовать однородности, консервативности схем и последовательно сужать класс допустимых схем.

По существу этот путь продемонстрирован в § 1—3.

В настоящее время получили распространение ряд методов получения разностных схем заданного качества:

1) интегро-интерполяционный метод (см. § 2, п. 2),

2) вариационно-разностные методы (методы Ритца и Бубнова—Галеркина) и метод конечных элементов,

3) метод сумматорного тождества,

4) метод аппроксимации вариационного функционала.

2. **Интегро-интерполяционный метод (ИИМ).** В § 2 мы уже рассматривали ИИМ, однако иллюстрировали его возможности недостаточно полно. Здесь мы остановимся на других вариантах его применения.

Пусть дана задача

$$(ku')' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$ku' - \sigma_1 u = \mu_1 \text{ при } x = 0, \quad -ku' - \sigma_2 u = \mu_2 \text{ при } x = 1, \quad (2)$$

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Введем равномерную сетку на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad hN = 1\}.$$

Проинтегрируем уравнение (1) на отрезке $x_i \leq x \leq x_{i+1}$:

$$w_{i+1} - w_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (qu - f) dx = \Phi_{i+1}, \quad w = ku'. \quad (3)$$

Поток w здесь, в отличие от § 2, берется в том же узле x_i , что и искомая функция. Поэтому вместо $w_{i+1/2}$ мы возьмем аппроксимацию $(w_{i+1} + w_i)/2$, полагая

$$0,5(w_{i+1} + w_i) \approx a_{i+1}u_{\bar{x}, i+1}, \quad (4)$$

где a_{i+1} — некоторый функционал от $k(x)$ на отрезке $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ такой, что $a_i = k(x_{i-0,5}) + O(h^2)$.

После исключения w_i из (3) и (4) найдем

$$w_{i+1} \approx a_{i+1}u_{\bar{x}, i+1} + \frac{1}{2}\Phi_{i+1}.$$

Вычитая отсюда

$$w_i \approx a_iu_{\bar{x}, i} + \frac{1}{2}\Phi_i$$

и учитывая (3), получаем

$$(au_{\bar{x}})_{x, i} \approx \frac{\Phi_i + \Phi_{i+1}}{2h} = \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (qu - f) dx. \quad (5)$$

Для аппроксимации интеграла, стоящего справа, можно использовать разные квадратурные формулы, например,

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (qu - f) dx \approx (qu - f)_i$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (qu - f) dx &\approx \frac{1}{4} ((qu - f)_{i-1} + 2(qu - f)_i + (qu - f)_{i+1}) = \\ &= (qu - f)_i + \frac{h^2}{4} (qu - f)_{xx, i} \quad (\text{формула трапеций}). \end{aligned}$$

В результате получим две схемы точности $O(h^2)$:

$$(ay_x)_x - qy = -f, \quad (6)$$

$$\left(ay_x - \frac{h^2}{4}(qy)_{xx}\right)_x - qy = -\left(f + \frac{h^2}{4}f_{xx}\right). \quad (7)$$

Для аппроксимации краевого условия, например при $x = 0$, возьмем (3) при $i = 0$:

$$w_1 - w_0 = \int_0^h (qu - f) dx,$$

и подставим сюда

$$w_1 \approx a_1 u_{x, 0} + \frac{1}{2} \int_0^h (qu - f) dx, \quad w_0 - (ku')_0 = \sigma_1 u_0 + \mu_1,$$

так что

$$a_1 u_{x, 0} - (\sigma_1 u_0 + \mu_1) \approx \frac{1}{2} \int_0^h (qu - f) dx.$$

После замены

$$\int_0^h (qu - f) dx \approx (qu - f)_0 h$$

получим для y_i краевое условие с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$ при $x = 0$:

$$a_1 y_{x, 0} = \bar{\sigma}_1 y_0 + \bar{\mu}_1, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0,5h q_0, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 - 0,5h f_0. \quad (8)$$

Аналогично запишется разностное краевое условие третьего рода (2) при $x = 1$.

До сих пор мы рассматривали варианты ИИМ, основанные на использовании уравнения баланса (метод баланса).

Перейдем теперь ко второму способу построения однородных разностных схем при помощи ИИМ, основанному на двукратном интегрировании уравнения (1).

Пронтегрируем уравнение (1) от x_i до x :

$$w(x) - w_i = \int_{x_i}^x (qu - f) dx. \quad (9)$$

Затем интегрируем это тождество по x от x_i до x_{i+1} и от x_{i-1} до x_i :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x) dx - w_i h = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \left(\int_{x_i}^x (qu - f) dt \right), \quad (10)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x) dx - w_i h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \left(\int_{x_i}^x (qu - f) dt \right). \quad (11)$$

Меняя порядок интегрирования, преобразуем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \left(\int_{x_i}^x (qu - f) dt \right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) (qu - f) dt$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \left(\int_{x_i}^x (qu - f) dt \right) = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1}) (qu - f) dt.$$

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ функцию $u(x)$ линейно интерполируем:

$$u(x) \approx u_i + (x - x_i) u_{x, i} \quad \text{при } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

$$u(x) \approx u_i + (x - x_i) u_{\bar{x}, i} \quad \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1},$$

после чего вычисляем интегралы

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ku' dx \approx u_{x, i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x) dx, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} w dx \approx u_{\bar{x}, i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) dx,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} qu(t - x_{i-1}) dt \approx -u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(t)(t - x_{i-1}) dt +$$

$$+ u_{\bar{x}, i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(t)(x_i - t)(t - x_{i-1}) dt,$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) qu dt \approx u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(t) (x_{i+1} - t) dt + \\ + u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(t) (x_{i+1} - t) (t - x_i) dt.$$

Подставляя эти выражения в тождества (10) и (11), вычитая из первого тождества второе, приходим к разностной схеме

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi, \\ a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(t) (x_i - t) (t - x_{i-1}) dt, \quad (12) \\ d_i = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1}) q(t) dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) q(t) dt \right].$$

Правая часть φ_i выражается по той же формуле, что и d_i , с заменой $q(t)$ на $f(t)$.

Формулы для a_i и d_i можно записать в виде

$$a_i = \int_{-1}^0 k(x_i + sh) ds + h^2 \int_{-1}^0 s(1+s) q(x_i + sh) ds, \\ d_i = \int_{-1}^0 (1+s) q(x_i + sh) ds + \int_0^1 (1-s) q(x_i + sh) ds. \quad (13)$$

Если k и q — постоянные, то

$$a_i = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = q. \quad (13')$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что схема (12) совпадает со схемой, получаемой вариационно-разностными методами (методом конечных элементов).

ИИМ удобен для получения разностных схем для задач с сосредоточенными факторами. Пусть, например, в точке $x = \xi$ сосредоточен источник тепла мощности Q , так что решение задачи (1) — (2) удовлетворяет условию

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{du}{dx} \right] = -Q \quad \text{при } x = \xi. \quad (14)$$

Пусть $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leq \theta \leq 1$, т. е. $x_n \leq \xi \leq x_{n+1}$, $n > 0$. Напишем уравнение баланса (3) на отрезке $x_n \leq x \leq x_{n+1}$:

$$w_{n+1} - w_n + [w] = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (qu - f) dx$$

или

$$w_{n+1} - w_n = \Phi_{n+1} + Q. \quad (15)$$

На всех других отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i \neq n$, выполняется тождество (3). В результате вместо (12) мы получим схему

$$(ay_x)_x, i - q_i y_i = -\varphi_i,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i &= f_i, \quad i \neq n, \quad i \neq n+1, \\ \varphi_n &= f_n + \frac{Q}{2h}, \quad \varphi_{n+1} = f_{n+1} + \frac{Q}{2h}, \end{aligned} \quad (16)$$

т. е. источник «размазан» на два интервала.

Если же писать тождество для отрезка $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, то мы получим схему

$$\begin{aligned} (ay_x)_x - dy &= -\varphi, \\ \varphi_{n+1} &= f_{n+1}, \quad \varphi_n = f_n + \frac{Q}{h} \quad \text{при } 0 \leq \theta < 0,5, \\ \varphi_{n+1} &= f_{n+1} + \frac{Q}{h}, \quad \varphi_n = f_n \quad \text{при } 0,5 \leq \theta < 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Следует отметить, что интегро-интерполяционный метод является весьма гибким и общим способом получения разностных схем для стационарных и нестационарных задач с одной или несколькими пространственными переменными.

Однако надо иметь в виду, что в принципе ИИМ может привести к неконсервативной схеме из-за неудачной аппроксимации младших членов, содержащих qu и f , однако неконсервативная добавка есть величина $O(h^2)$. Поэтому необходимо проверять самосопряженность полученного разностного оператора (впрочем, это следует делать всегда, хотя бы для контроля).

3. Вариационно-разностные методы (методы Ритца и Галеркина). Для получения разностных схем можно использовать вариационные методы Ритца и Бубнова—Галеркина.

Пусть A —самосопряженный и положительно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(,)$, а f —заданный элемент из H . Задача о минимуме функционала

$$I[u] = (Au, u) - 2(u, f) \quad (18)$$

эквивалентна задаче о решении уравнения

$$Au = f. \quad (19)$$

Элемент $u_0 \in H$, удовлетворяющий уравнению $Au_0 = f$ и реализующий $\min I(u) = I(u_0)$, единственный.

Вводится последовательность конечномерных пространств V_n с базисом $\{\varphi_i^{(n)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Метод Ритца заключается в том, что ищется элемент $u_n \in V_n$, минимизирующий функционал $I[u]$ в V_n .

Приближенное решение u_n представим в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^n y_j \varphi_j \quad (20)$$

с неизвестными коэффициентами y_1, y_2, \dots, y_n . Подставляя это выражение в формулу для $I[u]$, находим

$$I[u_n] = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} y_i y_j - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i y_i, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{ij} = (A \varphi_i, \varphi_j), \quad \beta_i = (f, \varphi_i). \quad (22)$$

Так как $A = A^*$ — самосопряженный оператор, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. $I[u_n]$ есть функция n коэффициентов y_1, y_2, \dots, y_n . Приравнивая нулю производные $\partial I[u_n]/\partial y_i$ и учитывая, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, получаем для определения y_i n уравнений

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j - \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Чтобы получить разностную схему методом Ритца для задачи

$$(ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (24)$$

рассмотрим функцию

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & s < -1, \quad s > 1, \\ 1+s, & -1 < s < 0, \\ 1-s, & 0 < s < 1, \end{cases} \quad (25)$$

и в качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ возьмем функции

$$\varphi_i(x) = \eta\left(\frac{x-x_i}{h}\right) = \eta_i(x), \quad (26)$$

где $x_i = ih$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, — узел сетки $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1\}$.

Из предыдущего ясно, что

$$\eta_i(x) = 0 \quad \text{при } x < x_{i-1} \quad \text{и} \quad x > x_{i+1},$$

$$\eta_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h} \quad \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \quad (25')$$

$$\eta_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h} \quad \text{при } x_i < x < x_{i+1}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1}, \quad x > x_{i+1}, \\ \frac{1}{h}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ -\frac{1}{h}, & x_i < x < x_{i+1}. \end{cases} \quad (27)$$

Подставляя в (22) $Au = -\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + qu$, находим

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 \left(k \frac{d\eta_i}{dx} \frac{d\eta_j}{dx} \right) + q\eta_i \eta_j \, dx, \quad \beta_i = \int_0^1 f(x) \eta_i(x) \, dx. \quad (28)$$

Из свойств функции $\eta_i(x)$ и ее производной следует, что матрица (α_{ij}) трехдиагональная, так как отличны от нуля лишь элементы с $j = i-1$, $j = i$ и $j = i+1$.

Вводя обозначения

$$a_i = -h\alpha_{i,i-1}, \quad h^2 d_i = h\alpha_{i,i} + h(\alpha_{i,i-1} + \alpha_{i,i+1}), \quad (29)$$

будем иметь

$$a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) (x - x_{i-1})(x_i - x) \, dx, \\ d_i = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) (x - x_{i-1}) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) (x_{i+1} - x) \, dx \right]. \quad (30)$$

В результате систему уравнений

$$\alpha_{i,i-1} y_{i-1} + \alpha_{i,i} y_i + \alpha_{i,i+1} y_{i+1} - \beta_i = 0$$

запишем в виде

$$a_i y_{i-1} - (a_i + a_{i+1} + h^2 d_i) y_i + a_{i+1} y_{i+1} + h^2 \varphi_i = 0$$

или

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi, \quad (31)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) (x - x_{i-1}) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) (x_{i+1} - x) \, dx \right], \quad (32)$$

т. е. φ_i вычисляется по той же формуле, что и d_i .

Таким образом, методом Ритца построена трехточечная схема (30)–(32), совпадающая со схемой (12), полученной при помощи ИИМ.

В отличие от метода Ритца метод Бубнова—Галеркина применим и для несамосопряженных и незнакоопределенных задач. В этом случае коэффициенты y_i приближенного решения (20) ищутся из условий ортогональности невязки $Au_n - f$ ко всем базисным функциям $\eta_i(x)$:

$$(Au_n - f, \eta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (33)$$

Рассмотрим несамосопряженную краевую задачу

$$(ku')' + r(x)u' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (34)$$

$$k(x) > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}$. Тогда размерность n пространства V_n равна $N - 1$. Выберем в качестве базиса функции

$$\eta_i(x) = \eta\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где $\eta(s)$ определена согласно (25).

Условие (33) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} y_j - \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (35)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 \left(k(x) \frac{d\eta_i}{dx} \frac{d\eta_j}{dx} - r(x) \frac{d\eta_i}{dx} \eta_j(x) + q(x) \eta_i(x) \eta_j(x) \right) dx, \quad$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x) \eta_i(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (36)$$

Коэффициенты α_{ij} в силу определения (25), (25') функции $\eta_i(x)$ отличны от нуля только при $j = -1, i, i + 1$.

Если воспользоваться обозначениями (30) для a_i и d_i , (32) для φ_i и положить

$$b_i^- = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x)(x - x_{i-1}) dx = \int_{-1}^0 r(x_i + sh)(1 + s) ds,$$

$$b_i^+ = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)(x_{i+1} - x) dx = \int_0^1 r(x_i + sh)(1 - s) ds, \quad (37)$$

то систему уравнений (35) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{h^2} [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] + \frac{b_i^-(y_i - y_{i-1})}{h} +$$

$$+ b_i^+ \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (38)$$

В результате мы получаем разностную схему

$$(ay_{\bar{x}})_x + b^- y_{\bar{x}} + b^+ y_x - dy = -\varphi(x), \quad 0 < x = ih < 1, \quad (39)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0,$$

коэффициенты которой определяются из (30), (31) и (37).

При $r(x) \equiv 0$ эта схема совпадает со схемой (31) — (32), полученной методом Ритца.

В случае постоянных коэффициентов $k(x)$, $r(x)$, $q(x)$ имеем

$$a_i = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = d = q, \quad b_i^- = b_i^+ = \frac{r}{2} \quad \text{и} \quad b^- y_{\bar{x}} + b^+ y_x = ry_x.$$

При указанном выше выборе координатных функций $\varphi_i(x) = -\eta\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ методы Ритца и Бубнова — Галеркина совпадают с методом конечных элементов.

4. Метод аппроксимации квадратичного функционала. Краевая задача

$$Lu = (ku')' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

эквивалентна задаче об отыскании минимизирующего элемента функционала (см. п. 3)

$$I[u] = \int_0^1 [k(u')^2 + qu^2] dx - 2 \int_0^1 fu dx. \quad (40)$$

Уравнение $Lu = -f(x)$ является уравнением Эйлера для этого функционала $I(u)$.

Введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$ и на ней аппроксимируем $I[u]$, записав его предварительно в виде

$$I[u] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(u')^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (qu^2 - 2fu) dx.$$

После этого аппроксимируем интегралы

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(u')^2 dx \approx a_i (u_{\bar{x},i})^2 h,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (qu^2 - 2fu) dx \approx \frac{h}{2} ((qu^2 - 2fu)_i + (qu^2 - 2fu)_{i-1}),$$

где a_i — функционал, зависящий от $k(x)$ на отрезке $x_{i-1} \leq x \leq x_i$,

например $a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) dx$, $a_i = k_{i-1/2}$ и др.

Таким образом, вместо $I[u]$ мы получаем функционал

$$I_h[y] = \sum_{i=1}^N a_i (y_{\bar{x},i})^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} (q_i y_i^2 - 2f_i y_i) h, \quad (41)$$

где y — произвольная сеточная функция, обращающаяся в нуль при $i=0, i=N$: $y_0=y_N=0$. $I_h[y]$ есть функция $(N-1)$ переменных y_1, y_2, \dots, y_{N-1} .

Приравнивая нулю первые производные

$$\frac{\partial I_h}{\partial y_i} = 2a_{i+1} y_{\bar{x},i} (-1) + 2a_i y_{\bar{x},i} + 2q_i y_i h - 2f_i h,$$

получаем разностные уравнения

$$(ay_{\bar{x}})_x - qy = -f(x), \quad x = ih. \quad (42)$$

Рассмотрим задачу (1) — (2), (14) о сосредоточенном источнике тепла. В этом случае в формуле (40) $f(x)$ надо заменить $f(x) + \delta(x-\xi)Q$, где $\delta(x-\xi)$ — дельта-функция Дирака

$(\delta(x-\xi)) = 0$ при $x \neq \xi$, $\delta(x-\xi) = \infty$ при $x = \xi$, $\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x-\xi) dx = 1$

при любом $\varepsilon > 0$). В результате получим

$$I[u] = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2 - 2fu) dx - 2Qu(\xi). \quad (43)$$

Если $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leq \theta \leq 1$, то $u(\xi)$ заменим u_n при $\theta < 0,5$ и u_{n+1} при $\theta > 0,5$.

Напишем

$$I_h[y] = \sum_{i=1}^N a_i (y_{\bar{x},i})^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} (d_i y_i^2 - 2\varphi_i y_i) h, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i &= f_i + \frac{Q}{h} \delta_{i,n} \quad \text{при } 0 < 0,5, \\ \varphi_i &= f_i + \frac{Q}{h} \delta_{i,n+1} \quad \text{при } \theta > 0,5 \end{aligned} \quad (45)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера). Приравнивая нулю $\partial I_h / \partial y_i$, получим схему

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi$$

с правой частью, определяемой формулами (45).

В случае неравномерной сетки $\omega_h = \{x_i, i=0, 1, \dots, N, x_0=0, x_N=1\}$ вместо (44) будем иметь

$$I_h[y] = \sum_{i=1}^N a_i (y_{\bar{x},i})^2 h_i + \sum_{i=1}^{N-1} (d_i y_i^2 - 2\varphi_i y_i) \tilde{h}_i.$$

В частности, всегда можно выбрать сетку так, что $\xi = x_n$ будет узлом сетки и

$$\Phi_n = f_n + \frac{Q}{h_n}, \quad \Phi_i = f_i, \quad i \neq n.$$

Приравнивая нулю производные $\partial I_h[y]/\partial y_i$, получаем схему

$$(ay_x)_{\bar{x}, i} - d_i y_i = -\Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

5. Метод сумматорных тождеств (метод аппроксимации интегрального тождества). Для решения задачи

$$\begin{aligned} Lu &= (ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ ku' &= \sigma_1 u - \mu_1, \quad x = 0, \quad -ku' = \sigma_2 u - \mu_2, \quad x = 1, \end{aligned} \quad (47)$$

справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} I[u, v] &= \int_0^1 (ku'v' + quv - fv) dx + \sigma_1 u(0)v(0) + \\ &\quad + \sigma_2 u(1)v(1) - \mu_1 v(0) - \mu_2 v(1) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где $v = v(x)$ — произвольная функция, непрерывная при $0 \leq x \leq 1$ и имеющая интегрируемую в $L_2[0, 1]$ производную. Оно служит для определения обобщенного решения задачи (47).

Для построения разностной схемы на равномерной сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$ аппроксимируем интегральное тождество (48) сумматорным тождеством для сеточных функций, например,

$$\begin{aligned} I_h[y, v] &= \sum_{i=1}^N a_i y_{\bar{x}, i} v_{\bar{x}, i} h + \sum_{i=1}^{N-1} (q_i y_i - f_i) v_i h + \\ &\quad + \bar{\sigma}_1 y_0 v_0 + \bar{\sigma}_2 y_N v_N - \bar{\mu}_1 v_0 - \bar{\mu}_2 v_N = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

где v_i — произвольная сеточная функция.

Здесь a_i — любой из коэффициентов вида $a_i = A[k(x_i + sh)]$, $-1 \leq s \leq 0$, обеспечивающий второй порядок аппроксимации:

$$a_i = k_{-1/2} + O(h^2).$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 + 0,5h q_0, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 + 0,5h q_N, \\ \bar{\mu}_1 &= \mu_1 + 0,5h f_0, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 + 0,5h f_N, \end{aligned}$$

если воспользоваться формулой трапеций для вычисления интегралов

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (qu - f) dx,$$

так как

$$\int_0^h (qu - f) dx = 0,5h (qu - f)_0 + 0,5h (qu - f)_1$$

и т. д.

Полагая, например, $v_i = \delta_{i, i_0}$, $0 < i_0 < N$, и учитывая, что $v_{\tilde{x}, i} = 0$ при $i < i_0$ и $i > i_0 + 1$, $v_{\tilde{x}, i_0} = 1/h$, $v_{\tilde{x}, i_0+1} = -1/h$, получаем при $i = i_0$

$$\left[-\frac{a_{i+1}y_{\tilde{x}, i}}{h} + \frac{a_iy_{\tilde{x}, i}}{h} \right] h + (d_iy_i - f_i)h = 0$$

или

$$(ay_{\tilde{x}})_x - dy = -f.$$

Если $v_i = \delta_{i, i_0}$, то $v_{\tilde{x}, i} = -\frac{1}{h}\delta_{i, i_1}$ и тождество (49) дает $a_1y_{\tilde{x}, 1}(-1/h) + \bar{\sigma}_1y_0 - \bar{\mu}_1 = 0$ или $a_1y_{\tilde{x}, 1} = \bar{\sigma}_1y_0 - \bar{\mu}_1$, и аналогично при $v_i = \delta_{i, N}$ получаем

$$-(ay_{\tilde{x}})_N = \bar{\sigma}_2y_N - \bar{\mu}_2.$$

Таким образом, мы приходим к разностной краевой задаче

$$(ay_{\tilde{x}})_x - dy = -f, \quad 0 < x = ih < 1, \\ a_1y_{\tilde{x}, 0} = \bar{\sigma}_1y_0 - \bar{\mu}_1, \quad a_Ny_{\tilde{x}, N} = \bar{\sigma}_2y_N - \bar{\mu}_2.$$

§ 9. Коэффициентная устойчивость

1. Коэффициентная устойчивость разностных схем. При решении задачи для дифференциального уравнения может оказаться, что коэффициенты уравнения заданы не точно, а приближенно (находятся при помощи некоторого вычислительного алгоритма, в результате физических измерений и т. п.). Коэффициенты однородной разностной схемы являются функционалами от коэффициентов дифференциального уравнения. Погрешность в определении коэффициентов схемы может быть вызвана несколькими причинами: погрешностью в вычислении шаблонных функционалов, погрешностью в задании коэффициентов дифференциального уравнения, ошибками округления.

Будем называть схему *коэффициентно-устойчивой* (*ко-устойчивой*), если при малом возмущении коэффициентов схемы решение краевой задачи меняется также мало,

Пусть задана схема с коэффициентами a , d , φ :

$$Ay = (ay_{\tilde{x}})_x - dy = -\varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим эту же схему с возмущенными коэффициентами \tilde{a} , \tilde{d} , $\tilde{\varphi}$ (для упрощения считаем граничные значения $y(0)$ и $y(1)$ невозмущенными):

$$\tilde{\Lambda}\tilde{y} = (\tilde{a}\tilde{y}_x)_x - \tilde{d}\tilde{y} = -\tilde{\varphi}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}(1) = 0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что выполнены условия

$$a(x) \geq c_1 > 0, \quad \tilde{a}(x) \geq c_1 > 0, \quad d(x) \geq 0, \quad \tilde{d}(x) \geq 0, \quad c_1 = \text{const} > 0, \quad (3)$$

c_1 не зависит от сетки.

Оценим разность $z = \tilde{y} - y$ через величины возмущения коэффициентов. Подставляя $\tilde{y} = z + y$ в (2) и учитывая (1), получаем

$$\tilde{\Lambda}z = (\tilde{a}z_x)_x - \tilde{d}z = -\Psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad (4)$$

где

$$\Psi = \tilde{\varphi} - \varphi + (\tilde{\Lambda} - \Lambda)y = \tilde{\varphi} - \varphi + ((\tilde{a} - a)y_x)_x - (\tilde{d} - d)y. \quad (5)$$

Из (4) видно, что Ψ можно записать в виде

$$\Psi = \mu_x + \eta_x, \quad (6)$$

где

$$\mu = (\tilde{a} - a)y_x, \quad (7)$$

а η определяется из условий

$$\eta_x = \tilde{\varphi} - \varphi - (\tilde{d} - d)y, \quad \eta_1 = 0,$$

так что

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{i-1} h [(\tilde{\varphi}_k - \varphi_k) - (\tilde{d}_k - d_k)y_k], \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \eta_1 = 0. \quad (8)$$

Воспользуемся оценкой, полученной в § 3, п. 3 для (4)–(7). Тогда из (6), (7) и (8) находим для решения задачи (4)–(7)

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} \{(1, |\tilde{a} - a|y_x) + (1, |\eta|)\}$$

Нам потребуются оценки для y и y_x :

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} (1, |\varphi|), \quad \|y_x\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|).$$

Они получены в § 6, п. 2.

Учитывая теперь неравенства

$$(1, |\eta|) \leq (1, |\dot{\eta}|) + (1, |\tilde{d} - d|) \|y\|_C \leq (1, |\dot{\eta}|) + \frac{1}{c_1} (1, |\tilde{d} - d|) (1, |\varphi|),$$

где

$$\dot{\eta}_i = \sum_{k=1}^{i-1} h (\tilde{\varphi}_k - \varphi_k), \quad \dot{\eta}_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

а также

$$(1, |(\tilde{a} - a) y_{\tilde{x}}|) \leq \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|) (1, |\tilde{a} - a|),$$

убеждаемся в том, что верна оценка

$$\|\tilde{y} - y\|_c \leq \frac{2}{c_1} \{ (1, |\dot{\eta}|) + \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|) ((1, |\tilde{d} - d|) + (1, |\tilde{a} - a|)) \}, \quad (9)$$

где y_i — решение задачи (1), \tilde{y}_i — решение задачи (2), если при этом выполнены условия (3).

Вместо (9) можно написать более грубую оценку

$$\|\tilde{y} - y\|_c \leq \frac{2}{c_1} \left\{ (1, |\tilde{\varphi} - \varphi|) + \frac{2}{c_1} (1, |\varphi|) ((1, |\tilde{a} - a|) + (1, |\tilde{d} - d|)) \right\}. \quad (10)$$

Если

$$(1, |\dot{\eta}|) = \rho(h), \quad (1, |\tilde{a} - a|) = \rho(h), \quad (1, |\tilde{d} - d|) = \rho(h),$$

где $\rho(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то схемы (1) и (2) *ко-эквивалентны* и при $\rho(h) = O(h^m)$ имеют m -й порядок *ко-эквивалентности*. Если схемы (1) и (2) ко-эквивалентны и схема (1) сходится, то и схема (2) сходится. Это следует из неравенства

$$\|\tilde{y} - y\|_c \leq \|\tilde{y} - y\|_c + \|y - u\|_c \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Свойство ко-эквивалентности однородных схем (1) позволяет оценивать порядок точности данной конкретной схемы путем сравнения, согласно (9) или (10), ее коэффициентов a, d, φ с коэффициентами $\tilde{a}, \tilde{d}, \tilde{\varphi}$ некоторой эталонной схемы, порядок точности которой известен (см. § 7, п. 2).

2. Коэффициентная устойчивость операторных уравнений первого рода. Дадим общую формулировку введенного в п. 1 понятия коэффициентной устойчивости разностной схемы. Для этого рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (11)$$

где A — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H , $A:H \rightarrow H$, $f \in H$ — заданный вектор, $u \in H$ — искомый вектор.

Задача (11) называется *корректно поставленной*, если существует единственное решение уравнения (11) для любых $f \in H$

и это решение непрерывно зависит от правой части f , так что

$$\|\tilde{u} - u\|_{(1)} \leq M_0 \|\tilde{f} - f\|_{(2)}, \quad (12)$$

где \tilde{u} — решение уравнения (11) с возмущенной правой частью \tilde{f} :

$$A\tilde{u} = \tilde{f}, \quad (13)$$

$\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы на множестве H .

При постановке задачи (11) задается не только правая часть, но и оператор A . Если, например, A — дифференциальный или разностный оператор, то должны быть заданы коэффициенты уравнения.

Естественно требовать, чтобы решение задачи (11) непрерывно зависело не только от возмущения правой части, но и от возмущения оператора A задачи (например, от коэффициентов разностного оператора). Это свойство операторных уравнений также, как и в случае разностных схем (см. п.1), мы будем называть свойством *коэффициентной устойчивости* или *ко-устойчивости* операторного уравнения.

Устойчивость решения уравнения (11) относительно возмущения правой части f и возмущения оператора A будем называть *сильной устойчивостью*.

Вопрос ставится так: даны две задачи

$$Au = f, \quad \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}, \quad (14)$$

где A и \tilde{A} — линейные операторы, область определения которых совпадает с H , f и \tilde{f} — произвольные векторы из H . Требуется найти оценку для величины возмущения решения

$$z = \tilde{u} - u \quad (15)$$

через величины возмущений f и A .

Предположим, что операторы A^{-1} и \tilde{A}^{-1} существуют. Будем считать, кроме того, что A и \tilde{A} — самосопряженные положительные операторы. Подставим $u = A^{-1}f$ и $\tilde{u} = \tilde{A}^{-1}\tilde{f}$ в (15):

$$z = \tilde{A}^{-1}\tilde{f} - A^{-1}f = \tilde{A}^{-1}(\tilde{f} - f) + (\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f. \quad (16)$$

Применим $\tilde{A}^{1/2}$ к обеим частям равенства (16):

$$\tilde{A}^{1/2}z = \tilde{A}^{-1/2}(\tilde{f} - f) + \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f.$$

Вектор z будем оценивать в норме $\|z\|_{\tilde{A}} = \sqrt{(Az, z)}$ пространства $H_{\tilde{A}}$, а f и $\tilde{f} - f$ — в негативной норме $\|f\|_{\tilde{A}^{-1}} = \sqrt{(\tilde{A}^{-1}f, f)}$ энергетического пространства $H_{\tilde{A}^{-1}}$.

Преобразуем выражение

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f = (E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2})(\tilde{A}^{-1/2}f)$$

и оценим его по норме

$$\|\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f\| \leq \|E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}\| \|\tilde{A}^{-1/2}f\|. \quad (17)$$

В качестве меры возмущения оператора A возьмем относительное изменение энергии (Ax, x) оператора A , т. е. будем предполагать, что

$$|((\tilde{A} - A)x, x)| \leq \alpha(Ax, x), \quad \alpha > 0 \quad (18)$$

для всех $x \in H$.

Отсюда следуют неравенства

$$(1 - \alpha)A \leq \tilde{A} \leq (1 + \alpha)A, \quad (19)$$

$$(1 - \alpha)\tilde{A}^{-1} \leq A^{-1} \leq (1 + \alpha)\tilde{A}^{-1}. \quad (20)$$

Покажем, что из (19) следует (20).

Рассмотрим разность $J = (1 + \alpha)(Ax, x) - (\tilde{A}x, x)$ и положим $A^{1/2}x = y$:

$$J = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (A^{-1/2}\tilde{A}A^{-1/2}y, y) = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (Dy, y),$$

где $D = A^{-1/2}\tilde{A}A^{-1/2}$. Положим $D^{1/2}y = z$:

$$\begin{aligned} J &= (1 + \alpha)(D^{-1}z, z) - \|z\|^2 = (1 + \alpha)(A^{1/2}\tilde{A}^{-1}A^{1/2}z, z) - \|z\|^2 = \\ &= (1 + \alpha)(\tilde{A}^{-1}v, v) - (A^{-1}v, v), \quad v = A^{1/2}z. \end{aligned}$$

Так как $J \geq 0$, то $(1 + \alpha)\tilde{A}^{-1} \geq A^{-1}$. Тем самым доказано, что из неравенства $\tilde{A} \leq (1 + \alpha)A$ следует неравенство $A^{-1} \leq (1 + \alpha)\tilde{A}^{-1}$ для любых $A = A^* > 0$, $\tilde{A} = \tilde{A}^* > 0$. Неравенства (20) эквивалентны неравенствам

$$(1 - \alpha)E \leq C \leq (1 + \alpha)E, \quad C = \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)(\tilde{A}^{-1}x, x) - (A^{-1}x, x) &= (1 + \alpha)\|y\|^2 - (\tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}y, y) = \\ &= (1 + \alpha)\|y\|^2 - (Cy, y) \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, из (18) следует

$$-\alpha E \leq E - C \leq \alpha E, \quad C = \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}.$$

По определению нормы самосопряженного оператора

$$\|E - C\| = \|E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}\| \leq \alpha.$$

Подставляя эту оценку в (17), получаем из (16):

$$\|z\|_{\tilde{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\tilde{A}^{-1}} + \alpha \|f\|_{\tilde{A}^{-1}},$$

или

$$\|\tilde{u} - u\|_{\tilde{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\tilde{A}^{-1}} + \alpha \|f\|_{\tilde{A}^{-1}}.$$

Пусть известен некоторый оператор $A_0 = A_0^* > 0$, имеющий более простую структуру, чем \tilde{A} , и удовлетворяющий условию

$$\tilde{A} \geq c_1 A_0, \quad c_1 > 0.$$

Тогда, если оператор A_0^{-1} существует, то

$$\tilde{A}^{-1} \leq \frac{1}{c_1} A_0^{-1}, \quad \|f\|_{\tilde{A}^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|f\|_{A_0^{-1}}.$$

Таким образом доказана следующая теорема сравнения:

Теорема. Пусть u — решение уравнения (11), \tilde{u} — решение уравнения (14), A , \tilde{A} , A_0 — самосопряженные положительные операторы, имеющие обратные. Тогда, если выполнено условие (18) и неравенство $\tilde{A} \geq c_1 A_0$, $c_1 > 0$, то справедливы оценки

$$\|\tilde{u} - u\|_{\tilde{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\tilde{A}^{-1}} + \alpha \|f\|_{\tilde{A}^{-1}}, \quad (21)$$

$$\|\tilde{u} - u\|_{A_0} \leq \frac{1}{c_1} \|\tilde{f} - f\|_{A_0^{-1}} + \frac{\alpha}{c_1} \|f\|_{A_0^{-1}}. \quad (22)$$

Первое слагаемое в правой части (21) есть величина возмущения правой части f , второе слагаемое содержит коэффициент α — величину относительного возмущения оператора.

Пример. (Ср. с п. 1.) Пусть H — множество сеточных функций, заданных на $\omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$ и обращающихся в нуль при $i = 0, i = N$. Рассмотрим разностные операторы

$$Ay = -(ay_x)_x + dy, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0,$$

$$\tilde{A}y = -(\tilde{a}y_x)_x + \tilde{d}y, \quad \tilde{a} \geq c_1 > 0, \quad \tilde{d} \geq 0,$$

$$A_0y = -y_{xx}.$$

Вводя обычным образом скалярное произведение и используя разностные формулы Грина, получим неравенства

$$\tilde{A} \geq c_1 A_0, \quad A \geq c_1 A_0.$$

Согласно гл. 2, § 4, п. 5 имеем

$$\|f\|_{A_0^{-1}} \leq \|f\|_{k-1} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{k=i}^{N-1} h f_k \right)^2 \right)^{1/2}, \quad f \in H.$$

Таким образом, оценка (22) принимает вид

$$\|z_{\tilde{x}}\| \leq \frac{1}{c_1} \|\tilde{f} - f\|_{(-1)} + \frac{\alpha}{c_1} \|f\|_{(-1)},$$

или, в силу неравенства $\|z\|_C \leq 0,5 \|z_{\tilde{x}}\|$,

$$\|z\|_C = \|\tilde{y} - y\|_C \leq \frac{1}{2c_1} \|\tilde{f} - f\|_{(-1)} + \frac{\alpha}{2c_1} \|f\|_{(-1)}.$$

Выясним, что означает условие (18). Его можно записать в виде

$$(1-\alpha) \left((a, y_{\tilde{x}}^2) + (d, y^2) \right) \leq (\tilde{a}, y_{\tilde{x}}^2) + (\tilde{d}, y^2) \leq (1+\alpha) \left((a, y_{\tilde{x}}^2) + (d, y^2) \right),$$

откуда следует, что (18) будет выполнено, если потребовать

$$|\tilde{a} - a| \leq \alpha a, \quad |\tilde{d} - d| \leq \alpha d.$$

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе изучаются разностные аппроксимации эллиптических уравнений второго порядка. В параграфах 1—3 детально исследована разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона. Изложены способы аппроксимации оператора Лапласа и постановки разностных краевых условий в случае области произвольной формы. Для сеточных уравнений общего вида установлены принцип максимума (§ 2) и все его следствия; эти результаты использованы для доказательства равномерной сходимости со скоростью $O(|h|^2)$ построенной в § 1 разностной схемы в случае произвольной области. В § 4 исследованы свойства разностного оператора Лапласа, построены разностные операторы, соответствующие эллиптическим операторам общего вида с переменными коэффициентами. § 5 посвящен изучению схемы повышенного порядка точности для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

§ 1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона

Перейдем к изучению разностных схем для решения задачи Дирихле: найти непрерывную в $G + \Gamma$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G, \quad (1)$$

и краевому условию

$$u|_{\Gamma} = \mu(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, G есть p -мерная конечная область с границей Γ .

1. **Разностная аппроксимация оператора Лапласа.** Начнем с построения разностного аналога оператора Лапласа

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

на плоскости $x = (x_1, x_2)$.

В точке $x = (x_1, x_2)$ каждый из операторов $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ или $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ аппроксимируем трехточечным оператором Λ_1

или Λ_2 :

$$L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1, x_1} = \frac{1}{h_1^2} (v(x_1 + h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 - h_1, x_2)), \quad (3)$$

$$L_2 v \sim \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_2, x_2} = \frac{1}{h_2^2} (v(x_1, x_2 + h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 - h_2)), \quad (4)$$

где \sim знак аппроксимации, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ — заданные числа (шаги по осям x_1 и x_2).

Оператор Λ_1 определен на регулярном трехточечном шаблоне

$$(x_1 - h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2),$$

оператор Λ_2 — на регулярном трехточечном шаблоне

$$(x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2).$$

Используя (3) и (4), заменим оператор Лапласа (2) разностным оператором

$$\Delta v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_1, x_1} + v_{\bar{x}_2, x_2}, \quad (5)$$

который определен на пятиточечном шаблоне «крест», состоящем из узлов $(x_1 \pm h_1, x_2)$, (x_1, x_2) , $(x_1, x_2 \pm h_2)$. Этот регулярный шаблон изображен на рис. 6. Здесь 0 — точка (x_1, x_2) , 1 — точка $(x_1 + h_1, x_2)$ и т. д.

Из (3) — (5) и рис. 6 следует, что

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h_1^2} (v_1 - 2v_0 + v_3) + \frac{1}{h_2^2} (v_2 - 2v_0 + v_4). \quad (6)$$

В частности, при $h_1 = h_2 = h$ (на квадратном шаблоне) имеем

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h^2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0). \quad (7)$$

Вычислим погрешность аппроксимации оператора Лапласа (2) разностным оператором (5). Так как (см. гл. II, § 1) при $\alpha = 1,2$

$$\Lambda_\alpha v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4) = L_\alpha^2 v + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^4 v + O(h_\alpha^4), \quad (8)$$

то

$$\Delta v - \Delta v_0 = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 v + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 v + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta v - \Delta v_0 = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

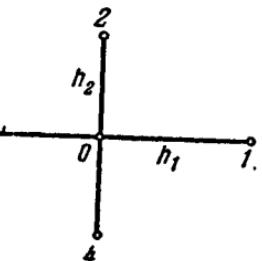


Рис. 6. Регулярный шаблон «крест».

если $v(x)$ — любая функция, имеющая не менее четырех ограниченных (хотя бы в прямоугольнике $x_\alpha - h_\alpha \leq x'_\alpha \leq x_\alpha + h_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, при $h_\alpha \leq h_\alpha$) производных по x_α , $\alpha = 1, 2$. Таким образом, разностный оператор (5) аппроксимирует оператор Лапласа (2) со вторым порядком на регулярном шаблоне «крест».

Аналогично строится разностная аппроксимация p -мерного ($p > 2$) оператора Лапласа

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}. \quad (9)$$

Заменяя L_α трехточечным разностным оператором Λ_α , получаем

$$\Lambda v = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha v, \quad \Lambda_\alpha v = v_{x_\alpha x_\alpha}, \quad (10)$$

так что

$$\Lambda_\alpha v = v_{x_\alpha x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^2} (v^{(+1)_\alpha} - 2v + v^{(-1)_\alpha}), \quad (11)$$

где $v^{(\pm 1)_\alpha} = v(x^{(\pm 1)_\alpha})$. Здесь $x^{(+1)_\alpha}$ (или $x^{(-1)_\alpha}$) — точка, в которую переходит точка $x = (x_1, \dots, x_p)$ при сдвиге по направлению x_α направо (или налево) на отрезок длины h_α (рис. 7).

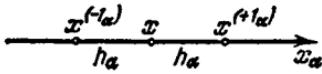


Рис. 7.

Шаблон для оператора (10) состоит,

очевидно, из $2p+1$ точек $x, x^{(\pm 1)_\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, p$ (из 7 точек при $p=3$),

а погрешность аппроксимации имеет второй порядок.

2. Аппроксимация оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне «крест». Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию

оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне «крест». В случае двух измерений ($p=2$) этот шаблон состоит из пяти точек

$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}),$$

где $h_{1\pm} > 0, h_{2\pm} > 0$, причем $h_{\alpha+} \neq h_{\alpha-}$, по крайней мере, для одного α (рис. 8).

Каждый из операторов L_1 и L_2 аппроксимируем по трем точкам

$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2) \text{ (точки 3, 1, 0)}$$

и

$$(x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}), (x_1, x_2) \text{ (точки 4, 2, 0)}$$

и

соответственно. Для этого воспользуемся выражениями (см. гл. II, § 1):

$$\begin{aligned} L_1 v \sim \Lambda_1^* v &= \\ &= \frac{1}{h_1} \left[\frac{v(x_1 + h_{1+}, x_2) - v(x_1, x_2)}{h_{1+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1 - h_{1-}, x_2)}{h_{1-}} \right], \\ L_2 v \sim \Lambda_2^* v &= \\ &= \frac{1}{h_2} \left[\frac{v(x_1, x_2 + h_{2+}) - v(x_1, x_2)}{h_{2+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h_{2-})}{h_{2-}} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\hbar_\alpha = 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+})$, $\alpha = 1, 2$.

Разностный оператор Лапласа на нерегулярном шаблоне будет иметь вид

$$\Lambda^* v = \Lambda_1^* v + \Lambda_2^* v = v_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}. \quad (13) \quad \begin{array}{c} x^{(-1\alpha)} \\ \hbar_{\alpha-} \\ x \\ \hbar_{\alpha+} \\ x^{(+1\alpha)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{x_\alpha} \end{array}$$

Если, например, $h_{1-} = h_{1+} = h_1$, то $\Lambda_1^* v = \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 x_1}$ и т. д.

Рис. 9.

Чтобы не выписывать аргументов (это слишком громоздко при $p > 2$), введем обозначения

$$\begin{aligned} x^{(+1\alpha)} &= (x_1 + h_{1+}, x_2), \quad x^{(-1\alpha)} = (x_1 - h_{1-}, x_2), \quad x^{(\pm 1\alpha)} = (x_1, x_2 \pm h_{2\pm}), \\ v^{(+1\alpha)} &= v(x^{(+1\alpha)}), \quad v = v(x), \quad v^{(-1\alpha)} = v(x^{(-1\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

На рис. 9 показано расположение точек x и $x^{(\pm 1\alpha)}$. Выражение для Λ_α^* можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^* v &= v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha} \left[\frac{v^{(+1\alpha)} - v}{h_{\alpha+}} - \frac{v - v^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha-}} \right], \\ \hbar_\alpha &= 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+}), \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

В гл. II, § 1 п. 2 (формула (27)) было получено выражение для $v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} - v''$. Используя его, сразу напишем

$$\Lambda_\alpha^* v - L_\alpha v = \frac{1}{3} (h_{\alpha+} - h_{\alpha-}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2). \quad (15)$$

Таким образом, на нерегулярном шаблоне разностный оператор Λ^* , определяемый по формуле (13), аппроксимирует оператор Лапласа с первым порядком.

Аппроксимация вида (12) используется на неравномерной сетке, а также в приграничных узлах в случае произвольной области (см. п. 4).

Нам понадобится второй способ аппроксимации оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне (рис. 8). Вместо формулы (14)

будем пользоваться для Λ_α^* выражением

$$\Lambda_\alpha^* v = \frac{1}{h_\alpha} \left[\frac{v^{(+1)_\alpha} - v}{h_{\alpha+}} - \frac{v - v^{(-1)_\alpha}}{h_{\alpha-}} \right], \quad h_\alpha = \max(h_{\alpha-}, h_{\alpha+}), \quad (16)$$

так что

$$\Lambda_\alpha^* v = \frac{\frac{h_\alpha}{h_\alpha}}{h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}.$$

В этом случае оператор Λ_α^* имеет нулевой порядок локальной аппроксимации

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = O(1).$$

В самом деле, учитывая (15), получим

$$\begin{aligned} \psi_\alpha = \Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u &= - \left(1 - \frac{\frac{h_\alpha}{h_\alpha}}{h_\alpha} \right) L_\alpha u + \frac{1}{3} (h_{\alpha+} - h_{\alpha-}) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(h_\alpha^2) = \\ &= \pm \frac{h_{\alpha+} - h_{\alpha-}}{2 h_\alpha} L_\alpha u + O(h_\alpha^2) = O(1). \end{aligned}$$

Поясним ситуацию, в какой может быть использована аппроксимация (16), на следующем примере.

Пример. Первая краевая задача.

$$u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Выберем сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, x_1 = h_1, x_{i+1} = x_i + h, i = 1, 2, \dots, N-1, x_{N+1} = x_N + h_2\},$$

неравномерную только вблизи границы, $h_1 < h$, $h_2 < h$, $h_1 + h_2 + (N-1)h = 1$.

В регулярных узлах x_i , $1 < i < N$,

$$u_i'' \sim u_{\bar{x}x, i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Далее имеем

$$u_1'' \sim \Lambda^* u_1 = \frac{1}{h} \left[\frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{u_1 - u_0}{h_1} \right],$$

$$u_N'' \sim \Lambda^* u_N = \frac{1}{h} \left[\frac{u_{N+1} - u_N}{h_2} - \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \right].$$

В результате получим разностную схему

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x} &= -f(x), \quad x_i = h_1 + (i-1)h, \quad 1 < i \leq N, \\ \Lambda^* y_1 &= -f(x_1), \quad \Lambda^* y_N = -f(x_N), \quad y_0 = y_{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для $z = y - u$ получаем

$$\Lambda z = -\psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad z_0 = z_{N+1} = 0, \quad (18)$$

где $\Lambda z = z_{xx}$ при $x_1 < x_i < x_N$, $\Lambda z_1 = \Lambda^* z_1$, $\Lambda z_N = \Lambda^* z_N$, $\psi_i = O(h^2)$ при $i = 2, 3, \dots, N-1$, $\psi_i = O(1)$, $i = 1, N$.

Несмотря на то, что схема не имеет аппроксимации в приграничных узлах $i = 1, i = N$, эта схема (17) имеет второй порядок точности в C :

$$\|z\|_C = O(h^2).$$

Чтобы получить эту оценку, перепишем уравнения (18) при $x = x_1, x_N$ в виде

$$\frac{1}{h} \left(\frac{z_2 - z_1}{h} - \frac{z_1 - \bar{z}_0}{h_1} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\bar{z}_{N+1} - z_N}{h_2} - \frac{z_N - z_{N-1}}{h} \right) = 0,$$

где $\bar{z}_0 = h h_1 \psi_1$, $\bar{z}_{N+1} = h h_2 \psi_N$. Таким образом, задача (18) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\psi(x), \quad x_1 < x_i < x_N, \quad \Lambda^* z_1 = 0, \quad \Lambda^* z_N = 0, \\ z_0 &= h h_1 \psi_1, \quad z_{N+1} = h h_2 \psi_N. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь полученной в § 2 гл. I априорной оценкой

$$\|z\|_C \leq \max(|z_0|, |z_{N+1}|) + \sum_{i=1}^N h \sum_{k=1}^i h |\psi_k|.$$

Отсюда следует

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq h h_1 |\psi_1| + h h_2 |\psi_N| + \max_{1 \leq i \leq N} |\psi_i| \leq M h^2,$$

т. е. схема (17) имеет второй порядок точности.

3. Разностная задача Дирихле в прямоугольнике. Пусть

$$\bar{G}_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$$

— прямоугольник со сторонами l_1 и l_2 (рис. 10), Γ — его граница. Рассмотрим в $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$ задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G_0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (1')$$

Построим в \bar{G}_0 сетку $\bar{\omega}_h$ с шагами $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$, где $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$ — целые числа. Для этого построим два

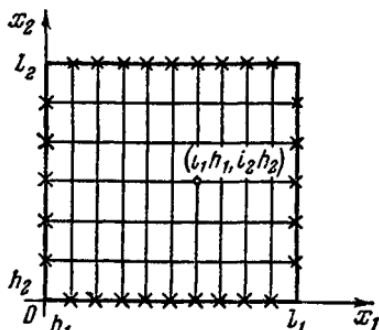


Рис. 10.

семейства прямых

$$x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, 1, \dots, N_1, \quad x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, 1, \dots, N_2.$$

Точки пересечения этих прямых $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ с координатами $i_1 h_1$ и $i_2 h_2$ назовем *узлами*. Если $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ лежит внутри прямоугольника (т. е. $0 < i_1 < N_1$, $0 < i_2 < N_2$), то такой узел назовем *внутренним*. Пусть ω_h — множество всех внутренних узлов. Общее число внутренних узлов равно $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$.

Узлы, лежащие на границе прямоугольника (при $i_1 = 0, N_1$ или $i_2 = 0, N_2$), кроме четырех узлов $(0, 0), (0, l_2), (l_1, 0), (l_1, l_2)$, назовем *границочными* (они обозначены на рис. 10 крестиками). Они образуют множество $\gamma_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$. Совокупность всех внутренних и границочных узлов назовем сеткой $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ в прямоугольнике \bar{G}_0 . В каждом внутреннем узле $x \in \omega_h$ может быть построен пятиточечный регулярный шаблон «крест», все узлы которого $x^{(\pm 1, \alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, принадлежат $\bar{\omega}_h$ (т. е. либо ω_h , либо γ_h). Поэтому во всех внутренних узлах можно заменить оператор Лапласа Δ разностным оператором

$$\Lambda u = u_{x_1, x_1}^- + u_{x_2, x_2}^-.$$

Правую часть — $f(x)$ уравнения (1') можно аппроксимировать сеточной функцией — $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x) - f(x) = O(|h|^2)$, $f(x) \in C^{(2)}$. Считая $f(x)$ непрерывной функцией, полагаем $\varphi(x) = f(x)$.

В результате задаче (1') ставим в соответствие разностную задачу Дирихле: найти сеточную функцию $y(x)$, определенную на $\bar{\omega}_h$, удовлетворяющую во внутренних узлах (на ω_h) уравнению

$$\Lambda y = -f(x), \quad \Lambda y = y_{x_1, x_1}^- + y_{x_2, x_2}^-, \quad x \in \omega_h \quad (19)$$

и принимающую на границе γ_h заданные значения

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (20)$$

Отметим, что сетка $\bar{\omega}_h (\bar{G}_0)$ при $h_1 \neq h_2$ называется *прямоугольной*, а при $h_1 = h_2 = h$ — *квадратной* сеткой.

Напишем подробное выражение для Λy на квадратной сетке

$$\Lambda y = \frac{1}{h^2} (y^{(+1,1)} + y^{(-1,1)} + y^{(+1,-1)} + y^{(-1,-1)} - 4y).$$

Пусть $\varphi = 0$. Разрешим уравнение $\Lambda y = 0$ относительно y :

$$y = \frac{1}{4} (y^{(-1,1)} + y^{(+1,1)} + y^{(-1,-1)} + y^{(+1,-1)}).$$

Значение y в центре шаблона есть среднее арифметическое значений y в остальных четырех узлах шаблона. Эта формула является разностным аналогом формулы среднего значения для гармонической функции.

Из (19), (20) видно, что значения $\mu(x)$ в вершинах прямоугольника не используются. Это и определило выбор γ_h . В случае третьей краевой задачи и схемы $O(|h|^4)$ (см. § 5) граница γ_h состоит из всех узлов, лежащих на границе прямоугольника, включая его вершины.

Методы численного решения системы $(N_1-1)(N_2-1)$ алгебраических уравнений (19) будут рассмотрены отдельно (см. гл. X).

Для оценки точности разностной схемы (19)–(20) образуем разность $z = y - u$, где y — решение задачи (19)–(20), u — решение задачи (1'). Подставляя $y = z + u$ в (1'), получим для z задачу

$$\Delta z = -\psi \text{ на } \omega_h, \quad z = 0 \text{ на } \gamma_h, \quad (21)$$

где $\psi = \Delta u + f$ — погрешность аппроксимации уравнения (1') схемой (19).

Так как $Lu + f = 0$, то

$$\psi = \Delta u + f - Lu + Lu = \Delta u - Lu,$$

т. е. $\psi = \Delta u - Lu$.

Из (8) следует, что

$$\psi = \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \quad \text{при } u \in C^4,$$

где черта сверху означает, что берутся значения аргументов в некоторых средних точках на интервалах $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$ и $(x_1, x_2 - h_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$ соответственно. Обозначая

$$M_4 = \max_{\bar{\Omega}, \alpha} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} \right|,$$

получаем

$$|\psi| \leq M_4 \frac{|h|^2}{12}.$$

Доказательство сходимости схемы (19) сводится к оценке решения задачи (21) через погрешность аппроксимации. Такая оценка будет получена в дальнейшем при помощи принципа максимума для произвольной области и любого числа измерений.

В прямоугольнике может быть введена и неравномерная сетка

$$\hat{\omega}_h = \left\{ x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, \alpha = 1, 2 \right\}$$

с шагами $h_1^{(i_1)} = x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}$, $h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}$.

В этом случае используем разностный оператор (13) и вместо (19)–(20) получаем задачу

$$\Delta y = -f(x), \quad \Delta y = y_{\bar{x}, \hat{x}_1} + y_{\bar{x}, \hat{x}_2}, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x). \quad (22)$$

Эта схема имеет первый локальный порядок аппроксимации

$$\psi_i = (\Lambda u + f(x))_i = (u_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} + f(x))_i =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^2 (h_{\alpha}^{(i_{\alpha}+1)} - h_{\alpha}^{(i_{\alpha})}) \frac{\partial^3 u}{\partial x_{\alpha}^3} + O(|\hbar|^2) = O(|\hbar|), \quad |\hbar|^2 = \hbar_1^2 + \hbar_2^2.$$

Однако ψ_i можно по аналогии с гл. III, § 4 представить в виде

$$\psi_i = \sum_{\alpha=1}^2 (\eta_{\alpha})_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + O(|\hbar|^2), \quad \eta_{\alpha} = \frac{h_{\alpha}^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{\alpha}^3} = O(h_{\alpha}^2).$$

Отсюда видно, что схема (22) имеет второй суммарный порядок аппроксимации (в негативной форме).

4. Разностная задача Дирихле в области сложной формы. Если область \bar{G} , в которой ищется решение задачи Дирихле (1), имеет криволинейную границу, то сетка $\bar{\omega}_h(\bar{G})$, вообще говоря, неравномерна вблизи границы. Ниже дается описание такой сетки и классификация ее узлов.

Рассмотрим произвольную конечную область G с границей Γ в пространстве p измерений; $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точка с координатами x_1, x_2, \dots, x_p . Построим сетку в области $\bar{G} = G + \Gamma$.

Для простоты изложение проведем для двумерной области ($p=2$). Конструктивно будем использовать следующее предположение о форме области \bar{G} : пересечение области G с любой прямой, проведенной через внутреннюю точку $x \in G$ параллельно оси координат Ox_{α} ($\alpha=1, 2$), состоит из конечного числа интервалов.

Пусть начало координат лежит внутри области G . Построим два семейства эквидистантных прямых

$$x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ — фиксированные числа. Плоскость (x_1, x_2) разобьется этими прямыми на прямоугольники со сторонами h_1 и h_2 . Вершины этих прямоугольников с координатами $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$ назовем *узлами*, а множество всех узлов — *решеткой* на плоскости (x_1, x_2) . Узлы $x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2)$, лежащие внутри области G , назовем *внутренними*; множество всех внутренних узлов обозначим $\omega_h = \{x_i \in G\}$. Точки пересечения прямых $x_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = i_{\alpha} h_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, с границей Γ области G суть *граничные по направлению x_{α} узлы*. Множество всех граничных по направлению x_{α} узлов обозначим γ_h . Пусть $\gamma_h = \gamma_{h,1} + \gamma_{h,2}$ — множество всех *граничных* узлов, т. е. узлов, граничных хотя бы по одному направлению x_{α} . Множество всех внутренних и граничных узлов называется *сеткой* $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ в области G (рис. 11).

Проведем детальную классификацию внутренних узлов. Возьмем какой-либо внутренний узел $x \in \omega_h$ и проведем через него прямую, параллельную оси Ox_α . Ее пересечением с областью G будет интервал (или несколько интервалов), концы которого являются граничными по направлению Ox_α узлами. Рассмотрим узлы на этом интервале. Ближайший к концу интервала узел назовем *приграничным по направлению Ox_α (по x_α) узлом*. Если его расстояние от границы γ_h , α есть $h_\alpha^* \neq h_\alpha$, то такой узел является *нерегулярным по x_α* . Пусть $\omega_{h, \alpha}^*$ — множество всех приграничных по x_α узлов, а $\omega_{h, \alpha}^{**}$ — множество тех приграничных узлов, которые являются нерегулярными по направлению x_α . Очевидно, что $\omega_{h, \alpha}^{**} \subseteq \omega_{h, \alpha}^*$. Обозначим через ω_h^* множество всех *приграничных узлов* (т. е. приграничных хотя бы по одному направлению), а через ω_h^{**} совокупность всех *нерегулярных узлов* (т. е. нерегулярных хотя бы по одному направлению x_1 или x_2). Пусть ω_h — дополнение ω_h^* до ω_h , т. е. $\omega_h = \omega_h^* + \omega_h^*$. Узлы, принадлежащие ω_h , будем называть *строго внутренними узлами*. Введем также обозначение $\omega_{h, \alpha}$ для строго внутренних по x_α узлов (т. е. для узла $x \in \omega_{h, \alpha}$, соседние по направлению Ox_α узлы являются внутренними).

На рис. 11 значками \circ отмечены узлы ω_h , Δ_α — нерегулярные только по x_α узлы ($\alpha = 1, 2$), $\Delta_{1,2}$ — нерегулярные как по x_1 , так и по x_2 узлы, \square — приграничные узлы, регулярные как по x_1 , так и по x_2 .

Будем предполагать, что сетка $\bar{\omega}_h$ является *связной*, т. е. любые два внутренних узла можно соединить ломаной, звенья которой параллельны координатным осям, а вершинами являются внутренние узлы сетки. Тогда, по крайней мере, один из четырех узлов $x^{(\pm 1)_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, пятиточечного шаблона

$$(x^{(\pm 1)_1}, x, x^{(\pm 1)_2})$$

(регулярного или нерегулярного) является внутренним.

Требование связности сетки накладывает ограничения как на выбор h_1 и h_2 , так и на форму области и на ее расположение относительно сетки ω_h при заданных h_1 и h_2 .

Примеры несвязной и связной сеточных областей показаны на рис. 12, а и б соответственно. Если имеется область с узкой

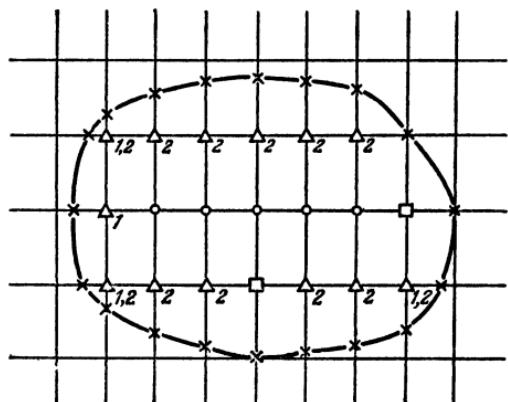


Рис. 11.

перемычкой, то требование связности области может быть выполнено при достаточно малом шаге h_α (или при сгущении сетки в этой части области). На рис. 12, б показан тот случай, когда связность сетки достигается не путем ее сгущения, а при соответствующем выборе шага h_1 .

Мы провели детальное описание сетки для области на плоскости. Все проведенные выше построения легко переносятся на

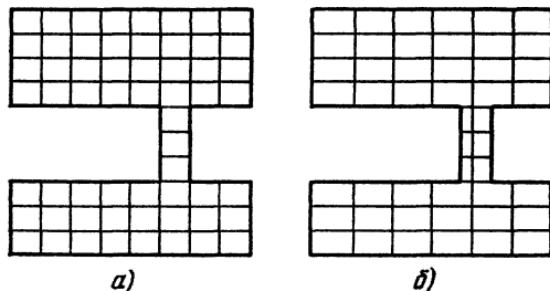


Рис. 12. а) Несвязная сетка. б) Связная сетка.

случай p -мерной области. Сетка образуется в результате пересечения гиперплоскостей (плоскостей при $p=3$, прямых при $p=2$)

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \dots, \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

где $h_\alpha > 0$. Указанная выше классификация узлов остается без изменений.

Нашей целью является написание разностной схемы для решения задачи Дирихле в области $\bar{G} = G + \Gamma$: найти непрерывное в замкнутой области $\bar{G} = G + \Gamma$ решение уравнения

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_\Gamma = \mu(x).$$

Аппроксимируем в каждом внутреннем узле $x \in \omega_h$ дифференциальный оператор $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$ трехточечным разностным оператором Λ_α .

Если узел $x \in \omega_h$ — регулярен по x_α , то разностный оператор Λ_α записывается на регулярном шаблоне $(x^{(-1)_\alpha}, x, x^{(+1)_\alpha})$:

$$\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha} = \frac{y^{(+1)_\alpha} - 2y + y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^2}. \quad (11)$$

Если же узел $x \in \omega_{h,\alpha}^{**}$, т. е. нерегулярен по x_α , то Λ_α записывается на нерегулярном шаблоне

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^*} \right) \quad \text{при } x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}, \quad (23a)$$

где h_α^* — расстояние между узлами x и $x^{(-1)_\alpha}$ или

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha^*} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha} \right) \quad \text{при } x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}, \quad (23b)$$

где h_α^* — расстояние между узлами x и $x^{(+1)_\alpha}$.

Возможен случай, когда $x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}$ и $x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}$; тогда

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha^* +} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^-} \right) \quad \text{при } x^{(\pm 1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}, \quad (23b)$$

где $h_\alpha^* \neq h_\alpha$ — расстояние между x и $x^{(\pm 1)_\alpha}$.

На рис. 13 указаны типичные ситуации, соответствующие случаям (23a) — (23b).

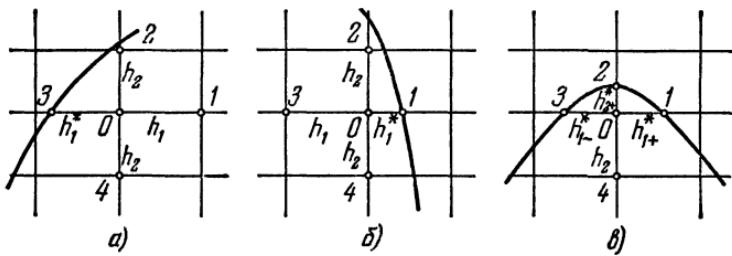


Рис. 13.

$$a) \quad \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^*} \right), \quad \Lambda_2 y = y \frac{\cdot}{x_2 x_3}, \quad \Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2.$$

$$b) \quad \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1^*} - \frac{y_0 - y_3}{h_1} \right), \quad \Lambda_2 y = y \frac{\cdot}{x_2 x_3}, \quad \Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2.$$

$$c) \quad \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1^* +} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-} \right), \quad \Lambda_2^* y = \frac{1}{h_2} \left(\frac{y_2 - y_0}{h_2^*} - \frac{y_0 - y_1}{h_2} \right), \quad \Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2^*.$$

Аппроксимируя $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$ разностным оператором по одной из формул (11), (23), получим вместо (1) разностное уравнение $\Lambda y + \Phi(x) = 0$ для всех $x \in \omega_h$, где $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha$. На сеточной границе γ_h будем задавать точное значение $y|_{\gamma_h} = \mu(x)$.

В результате приходим к следующей разностной задаче Дирихле: найти сеточную функцию $y(x)$, определенную для

$x \in \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнению

$$\Lambda y + \varphi(x) = 0 \text{ в регулярных узлах,} \quad (24)$$

$$\Lambda^* y + \varphi(x) = 0 \text{ в нерегулярных узлах} \quad (25)$$

и принимающую в граничных узлах $x \in \gamma_h$ заданные значения

$$y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (26)$$

По аналогии с п. 3 напишем условия для погрешности схемы; здесь $y(x)$ — решение разностной задачи (24) — (26), $u = u(x)$ — решение исходной задачи (1). После подстановки $y = z + u$ в (24) — (26) получим

$$\begin{aligned} \Lambda z &= -\psi \text{ в регулярных узлах,} \\ \Lambda^* z &= -\psi^* \text{ в нерегулярных узлах,} \\ z &= 0 \quad \text{на } \gamma_h, \end{aligned} \quad (27)$$

где ψ — погрешность аппроксимации, равная (при $\varphi(x) = f(x)$)

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda u + \varphi = \Lambda u - Lu \text{ в регулярных узлах,} \\ \psi^* &= \Lambda^* u - Lu \quad \text{в нерегулярных узлах.} \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть $u \in C^{(4)}(\bar{G})$, где $C^{(4)}$ — класс функций $u(x)$, имеющих четыре непрерывные в \bar{G} производные по x_1, \dots, x_p . Тогда, как показано в п. 3, в регулярных узлах имеем

$$|\psi| \leq M_4 |h|^2 / 12, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2. \quad (29)$$

Представим погрешность аппроксимации в нерегулярных узлах в виде суммы

$$\psi^* = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^*, \quad \psi_{\alpha}^* = \Lambda_{\alpha} u - L_{\alpha} u. \quad (30)$$

Как было показано в п. 2,

$$\psi_{\alpha}^* = \frac{h_{\alpha+} - h_{\alpha-}}{2h_{\alpha}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + O(h_{\alpha}) = O(1), \quad \psi^* = O(1), \quad (31)$$

т. е. в нерегулярных узлах схема не аппроксимирует уравнения

$$\Delta u + f(x) = 0.$$

Очевидно, что и в p -мерном случае задаче (1) ставится в соответствие аналогичная разностная схема

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y = -f(x) \text{ в регулярных узлах,}$$

$$\Lambda^* y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}^* y = -f(x) \text{ в нерегулярных узлах,}$$

где $\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}$, Λ_α^* определяется по формуле

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha} \left[\frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_{\alpha+}} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_{\alpha-}} \right].$$

Замечание. Весьма распространенным является способ аппроксимации задачи Дирихле, основанный на использовании в приграничных узлах разностной аппроксимации оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне, когда в узлах $x \in \omega_h^*$ вместо (16) используются формулы (14). Однако построенный таким образом разностный оператор в некоторых случаях теряет ряд важных свойств, присущих исходному дифференциальному уравнению: самосопряженность и знакопределенность. Отсутствие этих свойств затрудняет применение эффективных итерационных методов решения сеточных уравнений.

5. Запись разностного уравнения в канонической форме. Рассмотрим $(2p+1)$ -точечную схему $\Lambda y = -f$ в регулярном узле

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1)_\alpha} - 2y + y^{(-1)_\alpha}) = -f.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_\alpha^2} y(x) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1)_\alpha} + y^{(-1)_\alpha}) + f(x). \quad (32)$$

Остановимся на случае двух измерений. На рис. 6 видно, что в регулярном узле

$$2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y_0 = \frac{1}{h_1^2} (y_1 + y_3) + \frac{1}{h_2^2} (y_2 + y_4) + f_0.$$

Пусть узел $x \in \omega_{h,1}^*$ нерегулярен. В случае, соответствующем рис. 13, a, имеем

$$\Lambda_1^* y_0 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^*} \right) = \frac{1}{h_1} \left(\frac{y_1}{h_1} + \frac{y_3}{h_1^*} - \frac{2h_1}{h_1 h_1^*} y_0 \right),$$

где $h_1 = 0,5 (h_1 + h_1^*)$,

$$\Lambda_2 y_0 = \frac{1}{h_2^2} (y_2 - 2y_0 + y_4).$$

Из уравнения

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2 y = -f$$

находим

$$\left(\frac{2h_1}{h_1^2 h_1^*} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_0 = \frac{1}{h_1^2} y_1 + \frac{1}{h_1 h_1^*} y_3 + \frac{1}{h_2^2} (y_2 + y_4) + f_0.$$

В случае, соответствующем рис. 13, σ , будем иметь

$$\left(\frac{2\tilde{h}_1}{h_1 h_{1-}^* - h_{1+}^*} + \frac{2\tilde{h}_2}{h_2 h_2^*} \right) y_0 = \frac{1}{h_1 h_{1+}^*} y_1 + \frac{1}{h_1 h_{1-}^*} y_3 + \frac{1}{h_2 h_2^*} y_2 + \frac{1}{h_2^2} y_4 + f_0,$$

где $\tilde{h}_1 = 0,5(h_{1-}^* + h_{1+}^*)$, $\tilde{h}_2 = 0,5(h_2 + h_2^*)$.

Пусть $\omega_h(\bar{G})$ — сетка в p -мерной области и $x \in \omega_{h,\alpha}^*$ — приграничный нерегулярный узел. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^* y &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha-}^*} \right) = \\ &= \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}^*} y^{(+1\alpha)} + \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha-}^*} y^{(-1\alpha)} - \frac{2\tilde{h}_\alpha}{h_\alpha h_{\alpha-}^* - h_{\alpha+}^*} y. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя это выражение в уравнение $\Lambda^* y = -f$ и формально считая, что узел x нерегулярен по всем x_α , получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \frac{2\tilde{h}_\alpha}{h_\alpha h_{\alpha-}^* - h_{\alpha+}^*} y(x) &= \sum_{\alpha=1}^p \left(\frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}^*} y^{(+1\alpha)} + \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha-}^*} y^{(-1\alpha)} \right) + f(x), \\ \tilde{h}_\alpha &= 0,5(h_{\alpha+}^* + h_{\alpha-}^*). \end{aligned} \quad (34)$$

Если x регулярен по некоторому направлению x_β , то в этой формуле следует положить $h_{\beta-}^* = h_{\beta+}^* = \tilde{h}_\beta = h_\beta$. Если же x — регулярный по всем x_α узел, то полагаем $h_{\alpha-}^* = h_{\alpha+}^* = \tilde{h}_\alpha = h_\alpha$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots, p$, что дает формулу (32). Сравнивая (32) и (34), видим, что эти уравнения можно записать в канонической форме

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (35)$$

где $\mathcal{W}'(x)$ — множество $2p$ узлов $(2p+1)$ -точечного шаблона «крест» с центром в точке x , исключая сам узел x , т.е. $\xi \neq x$; множество $\mathcal{W}'(x)$ будем называть *окрестностью* узла x . $A(x)$ и $B(x, \xi)$ — заданные коэффициенты уравнения. Из (32) и (34) видно, что

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) = A(x) \text{ для всех } x \in \omega_h. \quad (36)$$

К уравнению (35) следует присоединить граничное условие

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x). \quad (37)$$

Разностная задача Дирихле является частным случаем более общей задачи: найти сеточную функцию $y(x)$, определенную на

$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ и удовлетворяющую на ω_h уравнению

$$\begin{aligned} A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(x) &= \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) \geq 0 \quad (39)$$

для всех $x \in \omega_h$.

Замечание. Третья разностная краевая задача для уравнения Пуассона приводится также к виду (38), причем уравнение (38) выполнено для всех $x \in \bar{\omega}_h$ и имеют место условия (39); кроме того, требуется, чтобы $D \geq \delta > 0$ на γ_h .

Для доказательства существования и единственности решения задачи (38), (39) достаточно убедиться в том, что однородное уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) = 0, \quad x \in \omega_h, \\ y(x) &= 0, \quad x \in \gamma_h \end{aligned} \quad (40)$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}_h$. Этот факт, как будет показано ниже, следует из принципа максимума, который имеет место для схем (38) — (39).

§ 2. Принцип максимума

1. Каноническая форма сеточного уравнения общего вида. Для оценок в C решений разностных эллиптических и параболических уравнений применяется принцип максимума. Он справедлив для сеточных уравнений общего вида, которые мы и рассмотрим в этом параграфе.

Пусть ω — конечное множество узлов (сетка) в некоторой ограниченной области n -мерного евклидова пространства, $P \in \omega$ — точка сетки ω .

Рассмотрим уравнение

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega, \quad (1)$$

для функции $y(P)$, заданной на сетке ω .

Здесь $A(P)$ и $B(P, Q)$ (коэффициенты уравнения), $F(P)$ (правая часть уравнения) — заданные сеточные функции, $\mathcal{W}'(P) \subset \omega$ — множество узлов сетки ω , не содержащее узла P , — окрестность узла P . Шаблон сеточного уравнения (1) в узле P , очевидно, состоит из самого узла P и его окрестности $\mathcal{W}'(P)$.

Подобные уравнения могут возникнуть и при сеточной аппроксимации интегральных уравнений.

В дальнейшем всюду подразумевается, что коэффициенты $A(P)$ и $B(P, Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0 \text{ для любых } P \in \omega \text{ и } Q \in \mathcal{W}'(P), \quad (2)$$

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q) \geq 0.$$

Точка P называется *границным узлом сетки* ω , если в этой точке задано значение функции $y(P)$, т. е.

$$y(P) = \mu(P) \quad \text{при } P \in \gamma, \quad (3)$$

где γ — множество граничных узлов.

Сравнивая (3) с (1), видим, что на границе γ следует формально положить $A(P) = 1$, $B(P, Q) = 0$, $F(P) = \mu(P)$.

Узлы, в которых выполняется уравнение (1) при условиях (2), назовем *внутренними узлами сетки*, ω — множество внутренних узлов, а $\bar{\omega} = \omega + \gamma$ — множество всех узлов сетки.

Первая краевая задача, определяемая условиями (1) — (3), занимает особое место в теории уравнений (1). В случае краевых условий второго или третьего рода, например, для уравнений эллиптического типа, граничных узлов нет, т. е. $\bar{\omega} = \omega$.

Будем предполагать, что *сетка* $\bar{\omega}$ *связная*, т. е. для любых заданных точек $\bar{P} \in \bar{\omega}$ и $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}$ существует такая последовательность окрестностей $\{\mathcal{W}'(P)\}$, что можно совершить переход от \bar{P} к $\bar{\bar{P}}$, используя лишь узлы этих окрестностей, иными словами, *найдутся такие узлы* P_1, P_2, \dots, P_m *сетки* ω , что

$$P_1 \in \mathcal{W}'(\bar{P}), \quad P_2 \in \mathcal{W}'(P_1), \quad \dots, \quad P_m \in \mathcal{W}'(P_{m-1}), \quad \bar{\bar{P}} \in \mathcal{W}'(P_m),$$

причем

$$\begin{aligned} B(P_{i+1}, P_i) &\neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad B(\bar{P}, P_1) \neq 0, \\ B(P_m, \bar{\bar{P}}) &\neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае разностной схемы для задачи Дирихле (24) — (26) из § 1 определение связности (4) совпадает с определением, данным в § 1, п. 4.

Из этого определения ясно, что точка $\bar{\bar{P}}$ может быть граничной и, следовательно, связность означает, что каждая точка границы принадлежит окрестности $\mathcal{W}'(P)$, по крайней мере, одного внутреннего узла.

Вводя обозначение

$$\mathcal{L}y(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q)y(Q), \quad (5)$$

можно записать уравнение (1) так:

$$\mathcal{L}y(P) = F(P). \quad (6)$$

Нам понадобится и другая форма записи $\mathcal{L}y(P)$:

$$\mathcal{L}y(P) = D(P)y(P) + \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q)(y(P) - y(Q)). \quad (7)$$

В предыдущем параграфе разностная задача Дирихле была приведена к виду (1), (3).

Рассмотрим в качестве примера для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t)$$

так называемую схему с весами.

Эта схема на сетке $\bar{\omega}_{ht} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1, \quad j = 0, 1, \dots\}$ имеет вид

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda (y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \varphi_i^j, \quad (8)$$

$$\Lambda y = y_{xx}, \quad y_i^0 = u_0(x_i),$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j).$$

Запишем эти разностные уравнения в канонической форме (1). В этом случае P есть узел сетки $\bar{\omega}_{ht}$: $P = P(x_i, t_{j+1})$, $\mathcal{W}'(P)$ состоит из узлов $Q_1 = (x_i, t_j)$, $Q_2 = (x_{i-1}, t_{j+1})$, $Q_3 = (x_{i+1}, t_{j+1})$, $Q_4 = (x_{i-1}, t_j)$, $Q_5 = (x_{i+1}, t_j)$, граница γ состоит из узлов $(x_i, 0)$ и $(0, t_j)$, $(1, t_j)$, $i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots$. Фиксируем некоторый момент $t = t_{j+1}$ и перепишем (8) в виде

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma}{h^2} \right) y_i^{j+1} = \frac{2\sigma}{h^2} (y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2(\sigma-1)}{h^2} \right) y_i^j + \frac{(1-\sigma)}{h^2} (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \varphi_i^j.$$

Отсюда видно, что коэффициенты $B(P, Q) \geq 0$ только при

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)} \quad \text{и} \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Кроме того, получаем

$$D(P) = 0.$$

2. Принцип максимума. Теорема 1 (принцип максимума). Пусть $y(P) \not\equiv \text{const}$ — сеточная функция, определенная на связной сетке ω , и пусть выполнены условия (2), (4). Тогда из условия $\mathcal{L}y(P) \leq 0$ ($\mathcal{L}y(P) \geq 0$) на ω следует, что $y(P)$ не

может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах $P \in \omega$.

Доказательство. Пусть дано $\mathcal{L}y(P) \leq 0$ во всех внутренних узлах $P \in \omega$. Предположим, что $y(P)$ принимает наибольшее положительное значение во внутреннем узле $\bar{P} \in \omega$, так что

$$y(\bar{P}) = \max_{\omega} y(P) = M_0 > 0.$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что существует внутренняя точка \tilde{P} , в которой $\mathcal{L}y(\tilde{P}) > 0$, что противоречит условию $\mathcal{L}y(P) \leq 0$.

Так как $y(\bar{P}) \geq y(Q)$ для всех $Q \in \mathcal{W}'(\bar{P})$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y(\bar{P}) = D(\bar{P})y(\bar{P}) + \sum_{Q \in \mathcal{W}'(\bar{P})} B(\bar{P}, Q)(y(\bar{P}) - y(Q)) \geq \\ \geq D(\bar{P})y(\bar{P}) \geq 0, \end{aligned}$$

так как

$$D(\bar{P}) \geq 0 \quad \text{и} \quad y(\bar{P}) > 0.$$

Из сказанного выше ясно, что надо рассмотреть лишь случай $\mathcal{L}y(\bar{P}) = 0$. Это возможно, как показывает формула (7), лишь при $D(\bar{P}) = 0$, $y(Q) = y(\bar{P})$ для всех $Q \in \mathcal{W}'(\bar{P})$.

Возьмем теперь узел $P_1 \in \mathcal{W}'(\bar{P})$, в котором $y(P_1) = y(\bar{P}) = M_0$, и повторим рассуждения.

Так как $y(P) \neq \text{const}$ на ω и сетка связная, то существует такая последовательность узлов $P_1, P_2, \dots, P_m, \bar{\bar{P}}$, для которых выполнены условия (4), что

$$y(P_m) = y(\bar{P}) = M_0, \quad \text{а} \quad y(\bar{\bar{P}}) < M_0, \quad \bar{\bar{P}} \in \mathcal{W}'(P_m).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y(P_m) \geq D(P_m)y(P_m) + B(P_m, \bar{\bar{P}})(y(P_m) - y(\bar{\bar{P}})) \geq \\ \geq B(P_m, \bar{\bar{P}})(y(\bar{P}) - y(\bar{\bar{P}})) > 0, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{\bar{P}} = P_m$ и первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение сводится к первому, если заменить $y(P)$ на $-y(P)$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (2), (4) и сеточная функция $y(P)$, заданная на $\omega + \gamma$, неотрицательна на границе ($y(P) \geq 0$ при $P \in \gamma$) и $\mathcal{L}y(P) \geq 0$ на ω .

Тогда $y(P)$ неотрицательна на $\omega + \gamma$, т. е. $y(P) \geq 0$ для всех $P \in \omega + \gamma$.

Если же $y(P) \leq 0$ на γ , $\mathcal{L}y(P) \leq 0$ на ω , то $y(P) \leq 0$ на $\omega + \gamma$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}y(P) \geq 0$ на ω , $y(P) \geq 0$ на γ .

Предположим, что $y(P_0) < 0$ хотя бы в одном внутреннем узле $P_0 \in \omega$. Тогда $y(P)$ должна принимать наименьшее отрицательное значение внутри ω , что невозможно в силу теоремы 1, так как $y(P) \neq \text{const}$ на ω ($y(P_0) < 0$, $y|_{\gamma} \geq 0$).

Второе утверждение доказывается аналогично.

Следствие 2. Однородное уравнение (1) с однородным краевым условием

$$\mathcal{L}y(P) = 0 \text{ на } \omega, y(P) = 0 \text{ на } \gamma \quad (9)$$

имеет только тривиальное решение $y(P) \equiv 0$.

Нетрудно заметить, что $y(P) \equiv 0$ есть решение задачи (9). Пусть существует решение задачи (9) $y(P) \not\equiv 0$. Если $y(P) \neq 0$ хотя бы в одной точке, то, в силу следствия 1, должны одновременно выполняться неравенства $y(P) \geq 0$ и $y(P) \leq 0$, что возможно только при $y(P) \equiv 0$.

Там самым доказано

Следствие 3. Существует и притом единственное решение задачи (1) — (4).

3. Теорема сравнения. Мажоранта. **Теорема 2.** Пусть $y(P)$ — решение задачи (1) — (4), а $Y(P)$ — решение задачи

$$\mathcal{L}Y(P) = \bar{F}(P), \quad P \in \omega, \quad Y(P) = \bar{\mu}(P) \quad \text{при } P \in \gamma. \quad (10)$$

Тогда из условий

$$|F(P)| \leq \bar{F}(P), \quad P \in \omega, \quad |\mu(P)| \leq \bar{\mu}(P), \quad P \in \gamma \quad (11)$$

следует неравенство

$$|y(P)| \leq Y(P) \quad \text{при } P \in \omega + \gamma. \quad (12)$$

Доказательство. В силу следствия 1 справедливо неравенство $Y(P) \geq 0$ на $\omega + \gamma$. Функции $u(P) = Y(P) + y(P)$ и $v(P) = Y(P) - y(P)$ удовлетворяют уравнениям $\mathcal{L}u = F_u = \bar{F} + F \geq 0$, $\mathcal{L}v = F_v = \bar{F} - F \geq 0$ и граничным условиям $u|_{\gamma} = (Y + y)|_{\gamma} = \bar{\mu} + \mu \geq 0$ и $v|_{\gamma} = (Y - y)|_{\gamma} = \bar{\mu} - \mu \geq 0$.

Так как условия следствия 1 выполнены, то $u \geq 0$ или $y \geq -Y$, $v \geq 0$ или $y \leq Y$. Отсюда следует, что $-Y \leq y \leq Y$ или $|y(P)| \leq Y(P)$ на $\omega + \gamma$.

Функция $Y(P)$ называется *мажорантой* для решения задачи (1) — (3). Если она найдена, то мы сразу получаем оценку для $\|y\|_C$.

Следствие. Для решения задачи

$$\mathcal{L}y = 0 \text{ на } \omega, \quad y(P) = \mu(P) \text{ на } \gamma \quad (13)$$

справедлива оценка

$$\max_{P \in \omega + \gamma} |y(P)| = \|y\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad (14)$$

где $\|\mu\|_{C_\gamma} = \max_{P \in \gamma} |\mu(P)|$.

В самом деле, определим мажоранту $Y(P)$ условиями $\mathcal{L}Y = 0$ на ω , $Y = \|\mu\|_{C_\gamma}$ на γ .

Функция $Y(P) \geq 0$ на $\omega + \gamma$ и принимает наибольшее значение в некотором узле сетки. Этот узел не может быть внутренним, если $Y(P) \neq \text{const}$ и, следовательно, $\|Y\|_{\bar{C}} = \max_{P \in \omega + \gamma} Y(P) = \max_{P \in \gamma} Y(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$. Если $Y(P) = \text{const}$, то $Y(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$. В обоих случаях $\|Y\|_{\bar{C}} = \|\mu\|_{C_\gamma}$. Отсюда и из неравенства $\|y\|_{\bar{C}} \leq \|Y\|_{\bar{C}}$ следует (14).

4. Оценка решения неоднородного уравнения. Решение задачи (1)–(3) представим в виде суммы

$$y = \bar{y} + v,$$

где $\bar{y}(P)$ —решение однородного уравнения

$$\mathcal{L}\bar{y} = 0 \text{ на } \omega, \quad \bar{y} = \mu(P) \text{ на } \gamma, \quad (15)$$

а $v = v(P)$ —решение неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}v(P) = F(P) \text{ на } \omega, \quad v(P) = 0 \text{ на } \gamma. \quad (16)$$

Для $\bar{y}(P)$ уже получена оценка (14).

Перейдем к оценке функции $v(P)$.

Теорема 3. *Если $D(P) > 0$ всюду на ω , то для решения задачи (16) верна оценка*

$$\|v\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C. \quad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим мажоранту $Y(P)$:

$$\mathcal{L}Y = |F(P)|, \quad Y|_\gamma = 0, \quad Y(P) \geq 0 \text{ при } P \in \omega + \gamma.$$

Пусть $Y(P)$ принимает наибольшее значение в узле $P_0 \in \omega$. Так как $Y(P_0) = \|Y\|_C$, то из уравнения

$$D(P_0)Y(P_0) + \sum_{Q \in \bar{M}'(P_0)} B(P_0, Q)(Y(P_0) - Y(Q)) = |F(P_0)|$$

следует $D(P_0)Y(P_0) \leq |F(P_0)|$, $Y(P_0) \leq \frac{|F(P_0)|}{D(P_0)} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка (17) справедлива для решения задачи (16) и в том случае, когда вместо (2) выполнены условия $|A(P)| \neq 0$,

$|B(P, Q)| \neq 0$,

$$D(P) = |A(P)| - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} |B(P, Q)| > 0.$$

В самом деле, пусть $|v(P)| \geq 0$ принимает наибольшее значение в узле P_0 . Тогда

$$\begin{aligned} |A(P_0)| |v(P_0)| &= \left| \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P_0)} B(P_0, Q) v(Q) + F(P_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P_0)} |B(P_0, Q)| |v(P_0)| + |F(P_0)|, \end{aligned}$$

откуда заключаем

$$\begin{aligned} D(P_0) |v(P_0)| &\leq |F(P_0)|, \\ \|v\|_C = |v(P_0)| &\leq \frac{|F(P_0)|}{D(P_0)} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C. \end{aligned}$$

Может оказаться, что $D(P) = 0$ на подмножестве $\dot{\omega}$ сетки ω и $D(P) > 0$ на дополнении $\dot{\omega}$ до ω , $\omega + \omega^* = \omega$.

Тогда имеет место

Теорема 4. Пусть выполнены условия

$$D(P) = 0 \text{ при } P \in \dot{\omega}, \quad D(P) > 0 \text{ при } P \in \omega^*,$$

где $\dot{\omega}$ — связная сетка. Тогда для решения задачи (16) с правой частью

$$F(P) = 0 \text{ при } P \in \dot{\omega}, \quad F(P) \neq 0 \text{ при } P \in \omega^*$$

верна оценка

$$\|v\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_{C^*}, \quad (18)$$

где

$$\|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|.$$

Доказательство. Пусть $Y(P)$ — мажорантная функция, $\mathcal{Y} = |F(P)|$ на ω , $Y|_{\dot{\omega}} = 0$, $Y \geq 0$.

Функция $Y(P)$ должна принимать наибольшее значение на конечном множестве $\omega + \gamma$ в некотором узле. Этот узел не может быть ни граничным, так как $Y|_{\gamma} = 0$, ни узлом сетки $\dot{\omega}$ в силу связности $\dot{\omega}$ и принципа максимума. Следовательно, $\max_{P \in \omega} Y(P) = \max_{P \in \omega^*} Y(P) = Y(P_0)$, где P_0 — узел на ω^* .

По условию $D(P_0) > 0$. Поэтому, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, получим (18). Справедлив аналог замечания к теореме 3.

§ 3. Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле

1. Оценка решения разностной задачи Дирихле. Воспользуемся априорными оценками, полученными в § 2 для сеточного уравнения общего вида, чтобы равномерно оценить решение разностной задачи Дирихле (24)–(26) из § 1:

$$\begin{aligned} \Lambda y &= -\varphi && \text{в регулярных узлах,} \\ \Lambda^* y &= -\varphi && \text{в нерегулярных узлах,} \\ y &= \mu(x) && \text{на границе,} \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda y &= \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \\ \Lambda^* y &= \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha^* y, \\ \Lambda_\alpha^* y &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_{\alpha+}} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_{\alpha-}} \right). \end{aligned}$$

Вводя оператор $\bar{\Lambda}$, совпадающий с Λ^* в приграничных узлах и с Λ в остальных внутренних узлах, получим

$$\bar{\Lambda} y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x). \quad (2)$$

Запишем (1) в виде (см. п. 5, § 1)

$$\begin{aligned} A(x) y(x) &= \sum_{\xi \in \bar{W}'(x)} B(x, \xi) y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega, \\ y|_{\gamma_h} &= \mu(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \bar{W}'(x)} B(x, \xi) \geq 0.$$

Представим решение задачи (1) в виде суммы

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где \bar{y} и \tilde{y} — решения задач

$$\bar{\Lambda} \bar{y} = 0, \quad x \in \omega_h, \quad \bar{y} = \mu \text{ при } x \in \gamma_h, \quad (4)$$

$$\bar{\Lambda} \tilde{y} = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad \tilde{y} = 0 \text{ при } x \in \gamma_h. \quad (5)$$

Для решения задачи (4) в п. 3 § 2 получена оценка

$$\|\bar{y}\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}. \quad (6)$$

Представим теперь правую часть φ в виде

$$\varphi = \dot{\varphi} + \varphi^*,$$

где $\dot{\varphi} = \varphi$, $\varphi^* = 0$ в строго внутренних узлах, $x \in \dot{\omega}_h$ (см. § 1 п. 4), $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi^* = \varphi$ в приграничных узлах $x \in \dot{\omega}_h$.

В соответствии с этим положим

$$\tilde{y} = v + w,$$

где v и w — решения задач:

$$\bar{\Lambda}v = -\dot{\varphi} \text{ при } x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = 0, \quad (7)$$

$$\bar{\Lambda}w = -\varphi^* \text{ при } x \in \omega_h, \quad w|_{\gamma_h} = 0. \quad (8)$$

Каждую из функций $v(x)$ и $w(x)$ оценим отдельно. Для оценки $v(x)$ построим мажорантную функцию $Y(x)$. Предполагая, что начало координат лежит внутри области G , возьмем мажорантную функцию в виде

$$Y(x) = K(R^2 - r^2), \quad r^2 = \sum_{\alpha=1}^p x_{\alpha}^2,$$

где $K > 0$ — постоянная, которая будет выбрана позже, а R — радиус p -мерного шара (круга при $p=2$) с центром в начале координат, целиком содержащего область G .

Учитывая, что $\Lambda_{\alpha}x_{\beta}^2 = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и

$$\Lambda_{\alpha}x_{\alpha}^2 = [(x_{\alpha} + h_{\alpha})^2 - 2x_{\alpha}^2 + (x_{\alpha} - h_{\alpha})^2]/h_{\alpha}^2 = 2,$$

$$\Lambda_{\alpha}^*x_{\alpha}^2 = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[\frac{(x_{\alpha} + h_{\alpha+})^2 - x_{\alpha}^2}{h_{\alpha+}} - \frac{x_{\alpha}^2 - (x_{\alpha} - h_{\alpha-})^2}{h_{\alpha-}} \right] = \\ = 2\theta_{\alpha}, \quad 0_{\alpha} = (h_{\alpha+} + h_{\alpha-})/2h_{\alpha},$$

получим

$$\Lambda Y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}Y = -2pK \text{ при } x \in \dot{\omega}_h,$$

$$\Lambda^*Y = -2p\theta K \text{ при } x \in \omega_h^*,$$

где $\theta = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p \theta_{\alpha}$, причем $\theta_{\alpha} = 1$, если узел $x \in \omega_h^*$ является регулярным по направлению x_{α} .

Таким образом, Y есть решение задачи

$$\bar{\Lambda}Y = -\bar{F}(x), \quad Y|_{\gamma_h} = K(R^2 - r^2)|_{\gamma_h} \geq 0,$$

где $\bar{F}(x) = 2pK$ при $x \in \dot{\omega}_h$, $\bar{F}(x) = 2p\theta K$ при $x \in \omega_h^*$.

Сравнение с задачей (7), где $F = \dot{\phi}$, т. е. $F = 0$ при $x \in \omega_h^*$, а $v|_{\gamma_h} = 0$, показывает, что $\bar{F}(x) \geq |F(x)| = |\dot{\phi}(x)|$, если положить $K = \frac{1}{2p} \|\dot{\phi}\|_C$, при этом выполнены условия теоремы сравнения 2 из § 2; так как $\bar{F}(x) \geq |F(x)| = 0$ при $x \in \omega^*$, следовательно, $\|v\|_C \leq \|Y\|_C$.

Из выражения для Y видно, что $\|Y\|_C \leq KR^2$, поэтому для решения задачи (7) справедлива оценка

$$\|v\|_C \leq \frac{R^2}{2p} \|\dot{\phi}\|_C = \frac{R^2}{2p} \|\phi\|_C, \quad (9)$$

где

$$\|\phi\|_C = \max_{x \in \dot{\omega}_h} |\phi(x)|.$$

Перейдем теперь к оценке функции $w(x)$. Покажем сначала, что для задачи (8)

$$D(x) \geq \frac{1}{h^2}, \quad \text{где } h = \max_{\alpha} h_{\alpha}, \quad x \in \omega_h^*, \quad (10)$$

$$D(x) = 0 \quad \text{при } x \in \dot{\omega}_h. \quad (11)$$

Утверждение (11) очевидно.

Рассмотрим теперь приграничный узел $x \in \omega_h^*$ и уравнение (8) в этом узле

$$\begin{aligned} A(x)w(x) &= \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)w(\xi) + F(x), \\ F(x) &= \psi^*(x), \quad w|_{\gamma_h} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если один из узлов $\xi = \xi_0$, например $\xi_0 = x^{(+1_{\alpha})}$, является граничным, то $w(\xi_0) = 0$ и окрестность $\mathcal{W}'(x)$ не будет содержать точки ξ_0 . Тогда для $D(x)$ получим значение

$$\begin{aligned} D(x) &= A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) = \\ &= A(x) - \left[\sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) - B(x, \xi_0) \right] = B(x, \xi_0), \end{aligned}$$

так как для уравнения Лапласа

$$A(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi).$$

Таким образом,

$$D(x) = B(x, x^{(+1_{\alpha})}) > 0.$$

Если узел x является приграничным не только по x_α , но и по другим направлениям, то в сумме (12) будут отсутствовать и другие слагаемые при $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. В этом случае

$$D(x) = B(x, \xi_0) + B(x, \xi_1) + \dots + B(x, \xi_k) > 0.$$

Пусть узел $x \in \omega_h$ — приграничный и нерегулярный только по направлению x_α и $\xi_0 = x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_h$, $x^{(-1)_\alpha} \in \omega_h$. Из уравнения

$$\Lambda_\alpha^* w + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \Lambda_\beta w = -\varphi^*(x),$$

где

$$\Lambda_\beta y = y_{\bar{\gamma}_\beta x_\beta}.$$

$$\Lambda_\alpha^* w = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{w^{(+1)_\alpha} - w}{h_{\alpha+}} - \frac{w - w^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha} \right) = -\frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{w}{h_{\alpha+}} + \frac{w - w^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha} \right)$$

видно, что

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2}{h_\alpha h_{\alpha+}} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2}, \\ \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) &= \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2}, \\ D(x) &= \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}} \geq \frac{1}{h^2}. \end{aligned}$$

Если x — регулярный приграничный только по x_α узел, то

$$D(x) = \frac{1}{h_\alpha^2} \geq \frac{1}{h^2}.$$

Если же он приграничен и по другим направлениям, то $D(x)$ может только увеличиться. Поэтому оценка (10) верна всегда. Воспользуемся теперь для задачи (8) теоремой 4 из § 2:

$$\|w\|_C \leq \left\| \frac{\varphi^*}{D} \right\|_{C^*} \leq h^2 \|\varphi^*\|_C. \quad (13)$$

Учитывая оценки (6), (9) и (13) и неравенство

$$\|y\|_C \leq \|\bar{y}\|_C + \|v\|_C + \|w\|_C,$$

убеждаемся в том, что верна

Теорема 1. Для решения разностной задачи Дирихле (1) справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \|\mu\|_{C_\gamma} + \frac{R^2}{2p} \|\varphi\|_C + h^2 \|\varphi\|_{C^*}, \quad (14)$$

где

$$\|f\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \omega_h + \gamma_h} |f(x)|, \quad \|f\|_{\dot{C}} = \max_{x \in \dot{\omega}_h} |f(x)|,$$

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in \omega_h^*} |f(x)|, \quad \|f\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |f(x)|.$$

Эта теорема выражает устойчивость разностной задачи Дирихле (1) по краевым данным и по правой части.

2. Равномерная сходимость и порядок точности разностной схемы. Для изучения вопроса о сходимости и точности схемы (2) рассмотрим задачу для погрешности

$$z = y - u,$$

где y — решение задачи (1), а $u = u(x)$ — решение задачи (1) из § 1. Подставляя $y = z + u$ в (1) или (2), найдем

$$\bar{\Lambda}z = -\psi(x), \quad x \in \omega, \quad z|_{\gamma} = 0, \quad (15)$$

где $\psi(x) = \bar{\Lambda}u + \varphi(x)$ — невязка.

Как мы видели в § 1,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= O(|h|^2) = O(h^2) && \text{в регулярных узлах,} \\ \psi(x) &= O(1) && \text{в нерегулярных узлах,} \end{aligned}$$

точнее,

$$|\psi| \leq \frac{M_4 |h|^2}{12} \leq p \frac{M_4}{12} h^2 \quad \text{в регулярных узлах,}$$

$$|\psi| \leq p M_2 \quad \text{в нерегулярных узлах,}$$

где

$$M_k = \max_{\substack{x \in \bar{\omega} \\ 1 \leq \alpha \leq p}} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_\alpha^k} \right|, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2, \quad h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha.$$

Воспользуемся теперь теоремой 1 из п. 1. Оценка (14) принимает вид

$$\|z\|_C \leq \frac{R^2}{2p} \|\psi\|_{\dot{C}} + h^2 \|\psi\|_{C^*}.$$

Подставляя сюда написанные выше оценки для $|\psi|$, получаем

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq \left(\frac{R^2}{24} M_4 + p M_2 \right) h^2. \quad (16)$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Если решение $u(x) \in C^4(\bar{G})$ (имеет непрерывные в $\bar{G} = G + \Gamma$ производные до четвертого порядка включительно), то разностная схема равномерно сходится со скоростью $O(h^2)$ (имеет второй порядок точности), так что верна оценка (16).*

§ 4. Некоторые свойства разностных эллиптических операторов

В этом параграфе мы исследуем свойства разностных операторов, аппроксимирующих оператор Лапласа в прямоугольнике, а также получим некоторые оценки для разностных аппроксимаций эллиптических операторов второго порядка с переменными коэффициентами и смешанными производными.

1. Задачи на собственные значения для разностного оператора Лапласа в прямоугольнике. Пусть $\bar{G}_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, $\omega_h = \{x = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$ — сетка в \bar{G}_0 , γ_h — множество граничных узлов сетки. Сетка ω_h равномерна по каждому направлению x_α с шагом h_α .

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в прямоугольнике \bar{G}_0 с краевыми условиями первого рода

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad x \in G_0, \quad v|_{\gamma} = 0, \quad v(x) \not\equiv 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_k = \lambda_{k_1, k_2} = \pi^2 \left(\frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2} \right), \quad k_\alpha = 1, 2, \dots \quad (\alpha = 1, 2),$$

которым соответствует ортонормированная система собственных функций

$$v_{k_1, k_2}(x) = \sqrt{\frac{4}{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi k_1}{l_1} x_1 \sin \frac{\pi k_2}{l_2} x_2,$$

так что

$$(v_{k_1, k_2}, v_{k'_1, k'_2}) = \delta_{k_1, k'_1} \delta_{k_2, k'_2},$$

где

$$(u, v) = \int_0^{l_1} dx_1 \int_0^{l_2} dx_2 u(x_1, x_2) v(x_1, x_2).$$

Решение этой задачи находится методом разделения переменных (см. [14]).

Для разностного оператора Лапласа

$$\Delta y = y_{x_1, x_1}^- + y_{x_2, x_2}^-$$

с краевыми условиями первого рода задача на собственные значения ставится аналогично.

Требуется найти значения параметра λ (собственные значения), которым соответствуют нетривиальные решения однородного уравнения с однородными краевыми условиями

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = 0, \quad v(x) \not\equiv 0. \quad (1)$$

Следует отметить, что γ_h (и, следовательно, $\bar{\omega}_h$) не содержит узлов $(0, 0)$, $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, (N_1, N_2) , являющихся вершинами прямоугольника.

Решение задачи (1) будем искать методом разделения переменных в виде произведения

$$v(x_1, x_2) = \mu(x_1) \eta(x_2) \quad (x_1 = i_1 h_1, x_2 = i_2 h_2).$$

После подстановки этого выражения в уравнение

$$\Lambda v + \lambda v = v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2} + \lambda v = 0,$$

находим

$$\mu_{x_1 x_1}(x_1) \eta(x_2) + \mu(x_1) \eta_{x_2 x_2}(x_2) + \lambda \mu(x_1) \eta(x_2) = 0. \quad (2)$$

Так как мы ищем нетривиальные решения задачи (1), то можно разделить обе части уравнения (2) на $\mu(x_1) \eta(x_2) \neq 0$. В результате получим $\mu_{x_1 x_1}/\mu + \eta_{x_2 x_2}/\eta + \lambda = 0$ или

$$\mu_{x_1 x_1}/\mu = -\eta_{x_2 x_2}/\eta - \lambda = -\lambda^{(1)}, \quad (3)$$

причем $\lambda^{(1)} = \text{const}$ не зависит ни от x_1 , ни от x_2 . Тем самым для $\mu(x_1)$ получаем задачу на собственные значения на сетке $\omega_h^{(1)} = \{x_1 = i_1 h_1, i_1 = 0, 1, \dots, N_1; h_1 N_1 = l_1\}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \mu + \lambda^{(1)} \mu &= \mu_{x_1 x_1} + \lambda^{(1)} \mu = 0, \quad x_1 = i_1 h_1, \\ i_1 &= 1, 2, \dots, N_1 - 1, \mu_0 = 0, \quad \mu_{N_1} = 0 \end{aligned}$$

(условия $\mu_0 = \mu_{N_1} = 0$ следуют из того, что $\mu(0) \eta(x_2) = 0$, $\mu(l_1) \eta(x_2) = 0$ и $\eta(x_2) \neq 0$). Решение этой задачи имеет вид (см. § 3 гл. II)

$$\lambda_{k_1}^{(1)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1}, \quad \mu_{k_1}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1,$$

причем $\{\mu_{k_1}(x_1)\}$ — ортонормированная система собственных функций:

$$(\mu_{k_1}, \mu_{k'_1})_1 = \delta_{k_1 k'_1},$$

где

$$(y, v)_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} y(i_1 h_1) v(i_1 h_1) h_1.$$

Из (3) получаем аналогичную задачу для $\eta(x_2)$:

$$\eta_{x_2 x_2} + \lambda^{(2)} \eta(x_2) = 0, \quad x_2 = i_2 h_2, \quad i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_{N_2} = 0,$$

где $\lambda^{(2)} = \lambda - \lambda^{(1)}$. Ее решение имеет вид

$$\lambda_{k_2}^{(2)} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2},$$

$$\eta_{k_2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2}, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

причем

$$(\eta_{k_1}, \eta_{k'_2})_2 = \delta_{k_1 k'_2},$$

где

$$(y, v)_2 = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_2 h_2) v(i_2 h_2) h_2.$$

Тем самым найдены решения задачи (1).

Собственные значения

$$\lambda_k = \lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)}$$

или

$$\lambda_{k_1 k_2} = 4 \left(\frac{1}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi k_1 h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k_2 h_2}{2l_2} \right), \quad (4)$$

$$k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Собственные функции

$$v_k(x) = v_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = \mu_{k_1}(x_1) \mu_{k_2}(x_2) = \sqrt{\frac{4}{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi k_1 x_1}{l_1} \sin \frac{\pi k_2 x_2}{l_2}, \quad (5)$$

$$k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Общее число собственных функций равно $(N_1 - 1)(N_2 - 1) = N$. Они образуют ортонормированную систему

$$(v_{k_1 k_2}, v_{k'_1 k'_2}) = \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} \quad (6)$$

в смысле скалярного произведения

$$(y, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2 = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2. \quad (7)$$

Следовательно, по системе функций $\{v_{k_1 k_2}(x_1, x_2)\}$ можно разлагать любую функцию $f(x_1, x_2)$, заданную на сетке ω_h и обращающуюся в нуль на границе сетки γ_h :

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k v_k(x), \quad c_k = (f, v_k).$$

В случае второй краевой задачи, когда $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$, следует сначала написать на γ_h краевое условие второго порядка аппроксимации.

Нетрудно непосредственной проверкой убедиться в том, что разностная задача второго порядка аппроксимации на собственные значения с краевыми условиями второго рода ставится так:

$$\begin{aligned} \Lambda v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h, \quad \Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v, \quad \Lambda_\alpha v = v_{x_\alpha x_\alpha}, \\ \frac{2}{h_1} v_{x_1} + \Lambda_2 v + \lambda v = 0, \quad x_1 = 0; \\ -\frac{2}{h_1} v_{\bar{x}_1} + \Lambda_2 v + \lambda v = 0, \quad x_1 = l_1; \\ \Lambda_1 v + \frac{2}{h_2} v_{x_2} + \lambda v = 0, \quad x_2 = 0; \\ \Lambda_1 v - \frac{2}{h_2} v_{\bar{x}_2} + \lambda v = 0, \quad x_2 = l_2. \end{aligned} \quad (8)$$

В самом деле, предполагая, что $u(x)$ есть решение уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ с условием $\partial u / \partial n \Big|_{\Gamma} = 0$, найдем погрешность аппроксимации краевого условия

$$\begin{aligned} v_1^- = (u_{x_1} + 0,5h_1\Lambda_2 u + 0,5h_1\lambda u) \Big|_{x_1=0} = \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + 0,5h_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 0,5h_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 0,5h_1\lambda u \right) \Big|_{x_1=0} + O(h_1^2) = \\ = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} + 0,5h_1 (\Delta u + \lambda u) \Big|_{x_1=0} + O(h_1^2) = O(h_1^2). \end{aligned}$$

Аналогично находим $v_1^+ = (-u_{\bar{x}_1} + 0,5h_1\Lambda_2 u + 0,5h_1\lambda u) \Big|_{x_1=l_1} = O(h_1^2)$ и т. д.

Метод разделения переменных сводит задачу (8) к двум одномерным задачам для $\mu(x_1) = \mu(i_1 h_1)$ и $\eta(x_2) = \eta(i_2 h_2)$ на собственные значения:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda^{(1)} \mu = 0, \quad (\mu_{x_1} + 0,5h_1\lambda^{(1)}\mu_1) \Big|_{x_1=0} = 0, \\ (-\mu_{\bar{x}_1} + 0,5h_1\lambda^{(1)}\mu) \Big|_{x_1=l_1} = 0; \\ \eta_{\bar{x}_2 x_2} + \lambda^{(2)} \eta = 0, \quad (\eta_{x_2} + 0,5h_2\lambda^{(2)}\eta_1) \Big|_{x_2=0} = 0, \\ (-\eta_{\bar{x}_2} + 0,5h_2\lambda^{(2)}\eta) \Big|_{x_2=l_2} = 0, \end{aligned}$$

для каждой из которых решение было найдено в гл. II, § 3.

Таким образом, можно сразу написать собственные значения и ортонормированные собственные функции

$$\lambda_k = \lambda_{k_1, k_2} = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)}, \quad (9)$$

$$v_k(x) = v_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \mu_{k_1}(x_1) \eta_{k_2}(x_2), \quad (10)$$

$$k_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_0^{(1)} &= \lambda_0^{(2)} = 0, \\ \lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{k_\alpha \pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2; \quad 1 \leq k_\alpha \leq N_\alpha;\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\mu_0(x_1) &= \sqrt{\frac{1}{l_1}}, \quad \mu_{N_1}(x_1) = \sqrt{\frac{1}{l_1}} \cos \frac{N_1 \pi x_1}{l_1}, \\ \mu_{k_1}(x_1) &= \sqrt{\frac{2}{l_1}} \cos \frac{\pi k_1 x_1}{l_1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1;\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\eta_0(x_2) &= \sqrt{\frac{1}{l_2}}, \quad \eta_{N_2}(x_2) = \sqrt{\frac{1}{l_2}} \cos \frac{N_2 \pi x_2}{l_2}, \\ \eta_{k_2}(x_2) &= \sqrt{\frac{2}{l_2}} \cos \frac{\pi k_2 x_2}{l_2}, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1,\end{aligned}$$

причем

$$\left[\begin{matrix} v_{k_1 k_2}, & v_{k'_1 k'_2} \end{matrix} \right] = \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}[y, v] &= (y, v) + \\ &+ 0,5 h_1 \sum_{i_2=1}^{N_2-1} [y(0, i_2 h_2) v(0, i_2 h_2) + y(N_1 h_1, i_2 h_2) v(N_1 h_1, i_2 h_2)] h_2 + \\ &+ 0,5 h_2 \sum_{i_1=1}^{N_1-1} [y(i_1 h_1, 0) v(i_1 h_1, 0) + y(i_1 h_1, N_2 h_2) v(i_1 h_1, N_2 h_2)] h_1,\end{aligned}\quad (14)$$

а (y, v) определяется согласно (7).

2. Свойства разностных операторов. Введем пространство сеточных функций $\dot{\Omega}_h$, заданных на $\omega_h = \omega_h + \gamma_h$ и равных нулю на γ_h , и пространство Ω_h функций, заданных на ω_h ; введем в Ω_h скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2. \quad (15)$$

Исследуем свойства разностного оператора Лапласа

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v, \quad \Lambda_\alpha v = v_{x_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

действующего из $\dot{\Omega}_h$ в $\Omega_h \subset \dot{\Omega}_h$.

1. Оператор Λ самосопряжен:

$$(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v) \quad \text{для любых } y, v \in \dot{\Omega}_h. \quad (16)$$

Для доказательства учтем, что

$$\begin{aligned}(\Lambda_1 y, v) &= \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 (v \Lambda_1 y)_{i_1 i_2} = \\ &= \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 (y \Lambda_1 v)_{i_1 i_2} = (y, \Lambda_1 v),\end{aligned}$$

так как оператор Λ_1 самосопряжен на сетке

$$\bar{\omega}_h^{(1)} = \{x_1 = i_1 h_1, i_1 = 0, 1, \dots, N_1; N_1 h_1 = l_1\},$$

и, кроме того, можно менять порядок суммирования по i_1 и i_2 .
Аналогично убеждаемся в том, что

$$(\Lambda_2 y, v) = (y, \Lambda_2 v).$$

Отсюда и следует (16).

2. Оператор $(-\Lambda)$ положительно определен:

$$(-\Lambda y, y) \geq \delta \|y\|^2, \quad (17)$$

где

$$\delta = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} \geq \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} = \delta_0.$$

Это следует из того, что

$$\lambda_{\min} \|y\|^2 \leq (-\Lambda y, y),$$

а $\delta = \lambda_{\min}$ (см. Дополнение, § 1).

3. Для оператора Λ справедливы оценки

$$\delta \|y\|^2 \leq (-\Lambda y, y) \leq \Delta \|y\|^2, \quad (18)$$

где δ указано выше, а

$$\Delta = \lambda_{\max} = \frac{4}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} = \Delta_0.$$

Отсюда, а также из оценки снизу для δ следует, что

$$\delta_0 \|y\|^2 \leq (-\Lambda y, y) < \Delta_0 \|y\|^2. \quad (19)$$

Из сказанного выше ясно, что удобнее вместо Λ пользоваться оператором $A = -\Lambda$, который можно трактовать как оператор из $H_h = \dot{\Omega}_h$ на $\Omega_h \subset H_h$ или из $H_h = \Omega_h$ на H_h , если определить его так:

$$Ay = -\tilde{\Lambda}y, \quad y \in \Omega_h, \quad \text{где } \tilde{\Lambda}y = \Lambda y \text{ при } y \in \dot{\Omega}_h.$$

Таким образом, мы установили, что в Ω_h

$$A = A^*, \quad \delta E \leq A \leq \Delta E,$$

где E — единичный оператор.

Любую функцию $f \in \dot{\Omega}_h$ (заданную на $\bar{\omega}_h$ и равную нулю на γ_h или заданную только на ω_h) можно разложить по собственным функциям оператора A :

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k v_k, \quad c_k = (f, v_k),$$

так что

$$\sum_{k=1}^N c_k^2 = \|f\|^2,$$

где v_k — собственные векторы оператора A : $Av_k = \lambda_k v_k$, $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$.

В случае второй краевой задачи на собственные значения (8) пространство $H_h = \bar{\Omega}_h$ состоит из всех функций, заданных на ω_h ; скалярное произведение (\cdot, \cdot) в H_h вводится согласно (14), оператор A определяется так:

$$A = A_1 + A_2,$$

где

$$A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha} \quad \text{при } 0 < x_\alpha = i_\alpha h_\alpha < l_\alpha,$$

$$A_\alpha y = -\Lambda_\alpha^- y = -2y_{x_\alpha}/h_\alpha \quad \text{при } x_\alpha = 0,$$

$$A_\alpha y = -\Lambda_\alpha^+ y = 2y_{x_\alpha}/h_\alpha \quad \text{при } x_\alpha = N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда задачу (8) можно записать в операторной форме

$$Ay = \lambda y.$$

Этот оператор является самосопряженным и неотрицательным

$$0 \leq A \leq \Delta E, \quad A = A^*,$$

где

$$\Delta = \lambda_{\max} = 4(h_1^{-2} + h_2^{-2}).$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 являются перестановочными самосопряженными как для первой, так и для второй краевой задач, поэтому они, в силу общей теории (см. Дополнение, § 1), имеют общую систему собственных функций, совпадающую с системой собственных функций для $A = A_1 + A_2$, при этом собственные значения оператора A являются суммой собственных значений A_1 и A_2 :

$$\lambda(A) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2).$$

3. Оператор Лапласа в области, составленной из прямоугольников. Рассмотрим теперь область, состоящую из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, как показано на рис. 14. Предположим, что стороны прямоугольников, составляющих область G , соизмеримы.

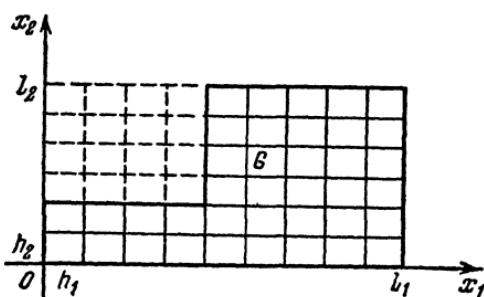


Рис. 14.

Тогда можно построить сетку (с шагами h_1 и h_2) так, что граница сеточной области лежит на границе области G . Дополним область G до прямоугольника, который обозначим через \tilde{G} , как это показано на рис. 14. Построим в области G разностную сетку ω_h и продолжим ее в \tilde{G} . Сетку в области \tilde{G} будем обозначать $\tilde{\omega}_h$.

Пусть v — сеточная функция, заданная на ω_h , такая, что $v|_{\gamma_h} = 0$. Определим функцию

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \omega_h, \\ 0, & x \in \tilde{\omega}_h \setminus \omega_h. \end{cases}$$

Тогда из определения функции \tilde{v} следует, что

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{\omega}_h} = \|v\|_{\omega_h} = \|v\|,$$

где

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v), \quad (v, y) = \sum_{x \in \omega_h} v(x) y(x) h_1 h_2, \\ \|\tilde{v}\|_{\tilde{\omega}_h}^2 &= \sum_{x \in \tilde{\omega}_h} \tilde{v}^2(x) h_1 h_2; \\ \sum_{\alpha=1}^2 \|\tilde{v}_{x_\alpha}\|_{\tilde{\omega}_h}^2 &= \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{x_\alpha}\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, убеждаемся, что для функции $v(x)$, определенной на сетке ω_h в области G , справедлива оценка (19).

При этом

$$\delta_0 = 8(l_1^{-2} + l_2^{-2}), \quad \Delta_0 = 4(h_1^{-2} + h_2^{-2}),$$

где l_1 и l_2 — длины сторон прямоугольника \tilde{G} .

4. Теорема вложения. Зная свойства эллиптических операторов, можно получить различные априорные оценки в энергетических нормах для уравнения $Ay = \varphi$.

Из энергетических оценок может следовать равномерная оценка, т. е. оценка в норме

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|.$$

Справедлива следующая сеточная

Теорема вложения. Для любой функции $y(x) \in \dot{\Omega}_h$, заданной на сетке $\tilde{\omega}_h = \{x_\alpha = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ и обращающейся в нуль на границе (при $x_\alpha = 0, l_\alpha$;

$\alpha = 1, 2$), имеет место оценка

$$\|y\|_c \leq M_0 \|Ay\|, \quad (20)$$

где

$$Ay = -y_{x_1 x_1} - y_{x_2 x_2}, \quad M_0 = \frac{l_0^2}{2\sqrt{l_1 l_2}}, \quad l_0 = \max(l_1, l_2).$$

Доказательство. Пусть $v_{k_1 k_2}(x)$ и $\lambda_{k_1 k_2}$ — собственные функции и собственные значения оператора A , найденные в п. 1, $k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1$, $\alpha = 1, 2$. Разложим функцию $y(x)$ по системе ортонормированных функций $\{v_{k_1 k_2}(x)\}$:

$$y(x) = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2} v_{k_1 k_2}(x).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} Ay &= \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2} \lambda_{k_1 k_2} v_{k_1 k_2}, \\ \|y\|^2 &= \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2}^2, \quad \|Ay\|^2 = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2}^2 \lambda_{k_1 k_2}^2. \end{aligned}$$

Оценим модуль функции $y(x)$:

$$|y(x)| \leq \left(\sum_{k_1, k_2} |c_{k_1 k_2}| \right) \max_{k_1, k_2} |v_{k_1 k_2}(x)|.$$

Из формулы (5) находим $|v_{k_1 k_2}(x)| \leq 2/\sqrt{l_1 l_2}$.

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |y(x)|^2 &\leq \frac{4}{l_1 l_2} \left(\sum_{k_1, k_2} |c_{k_1 k_2}| \right)^2 = \frac{4}{l_1 l_2} \left(\sum_{k_1, k_2} |c_{k_1 k_2}| \lambda_{k_1 k_2} \frac{1}{\lambda_{k_1 k_2}} \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1 k_2}^2 c_{k_1 k_2}^2 \sum_{k_1, k_2} \frac{1}{\lambda_{k_1 k_2}^2} = \frac{4}{l_1 l_2} \|Ay\|^2 \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1 k_2}^{-2}. \quad (21) \end{aligned}$$

Теперь остается лишь оценить сумму

$$S = \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1 k_2}^{-2} = \lambda_{1, 1}^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{\substack{N_1-1 \\ N_2-1}} \sum_{k_2=1}^{\substack{N_2-1 \\ k_1+k_2>2}} \lambda_{k_1 k_2}^{-2}.$$

Обратимся к формуле (4) для $\lambda_{k_1 k_2}$ и учтем, что функция $(\sin \varphi/\varphi)$ монотонно убывает при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, и поэтому $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$:

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{\pi^2 k_1^2}{l_1^2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\varphi_1} \right)^2 + \frac{\pi^2 k_2^2}{l_2^2} \left(\frac{\sin \varphi_2}{\varphi_2} \right)^2 \geq 4 \left(\frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2} \right),$$

где $\varphi_\alpha = \pi h_\alpha k_\alpha / 2l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Воспользуемся этой оценкой и напишем

$$\sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \lambda_{k_1 k_2}^{-2} \leq \frac{l_0^4}{16} \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} (k_1^2 + k_2^2)^{-2} = \frac{l_0^4}{16} J,$$

а сумму J мажорируем интегралом

$$J \leq \int_1^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{r dr d\Phi}{r^4} = \frac{\pi}{4}.$$

Учитывая затем, что

$$\lambda_{1,1} \geq \delta_0 = \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \geq \frac{16}{l_0^2},$$

получаем

$$S \leq \frac{l_0^4}{16^2} + \frac{\pi l_0^4}{4 \cdot 16} = \frac{l_0^4}{64} \left(\pi + \frac{1}{4} \right) \leq \frac{l_0^4}{16}. \quad (22)$$

Подстановка (22) в (21) приводит к неравенству (20).

5. Уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения в области $G + \Gamma = \bar{G}$:

$$Lu = -f(x), \quad x \in G, \quad u = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \quad (23)$$

Пусть $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, а

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

$k_\alpha(x)$ — достаточно гладкие функции, $0 < c_1 \leq k_\alpha(x) \leq c_2$, $\alpha = 1, 2$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — постоянные. Обозначим $\omega_h = \omega_h + \gamma_h$ сетку с шагами h_1 и h_2 , введенную в п. 1.

Оператор L_α аппроксимируем разностным оператором

$$\Lambda_\alpha u = \left(a_\alpha u_{x_\alpha} \right)_{x_\alpha} \sim L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

где $a_\alpha(x)$ выбирается так, чтобы

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha u - L_\alpha u &= O(h_\alpha^2), \\ 0 < c_1 \leq a_\alpha(x) &\leq c_2, \end{aligned} \quad (24)$$

т. е. Λ_α имеет второй порядок аппроксимации, например,

$$a_\alpha = k_\alpha^{(-0.5\alpha)}$$

или

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= k_1(x_1 - 0,5h_1, x_2), \\ a_2(x_1, x_2) &= k_2(x_1, x_2 - 0,5h_2). \end{aligned}$$

Оператору Lu ставим в соответствие оператор $\Lambda u = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} u$, а задаче (23) — разностную задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \Lambda y &= -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \\ \Lambda y &= (\Lambda_1 + \Lambda_2) y, \quad \Lambda_{\alpha} y = (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (25)$$

имеющую погрешность аппроксимации (невязку) $\psi = \Lambda u + \varphi = O(|h|^2)$.

Аппроксимация такого вида является естественным обобщением на многомерный случай однородных консервативных схем, введенных в гл. III для одномерного уравнения. Схему можно получить интегро-интерполяционным методом.

Нас будут интересовать свойства оператора Λ в пространстве сеточных функций Ω_h со скалярным произведением (15). Обозначим

$$Ay = -\Lambda y \quad \text{для любых}$$

Лемма. Оператор

$$Ay = -\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y, \quad y \in H,$$

самосопряжен и положительно определен и для него верны оценки

$$c_1(\dot{A}v, v) \leq (Av, v) \leq c_2(\dot{A}v, v), \quad (26)$$

$$c_1 \delta \|v\|^2 \leq (Av, v) \leq c_2 \Delta \|v\|^2. \quad (27)$$

для любого $v \in H$, где

$$\dot{A}y = -\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}},$$

$a, \delta > 0, \Delta > 0$ — постоянные, определяемые согласно (18) и (19).

В самом деле, так как $v|_{\gamma_h} = 0$, то из первой формулы Грина для оператора $\Lambda_{\alpha} v = (a_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}$ следует, что

$$(\Lambda_{\alpha} v, v) = - (a_{\alpha} v_{\bar{x}_{\alpha}}, v_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}},$$

где

$$(w, z)_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} w(i_1 h_1, i_2 h_2) z(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2 \text{ и}$$

$$(w, z)_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} w(i_1 h_1, i_2 h_2) z(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2.$$

Поэтому

$$(Av, v) = \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha} v_{x_{\alpha}}, v_{x_{\alpha}})_{\alpha}.$$

С другой стороны, имеем

$$(\hat{A}v, v) = \sum_{\alpha=1}^2 (v_{x_{\alpha}}, v_{x_{\alpha}})_{\alpha}.$$

Используя условие (24), приходим к (26).

Теперь остается подставить в (26) двустороннюю оценку $\delta \|v\|^2 \leq (\hat{A}v, v) \leq \Delta \|v\|^2$ из п. 2 и получить (27). Здесь

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_{\alpha}^2} \sin^2 \frac{\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}}, \quad \Delta = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_{\alpha}^2} \cos^2 \frac{\pi h_{\alpha}}{2l_{\alpha}}.$$

Неравенства (26) и (27) в дальнейшем будем записывать в операторной форме

$$c_1 \hat{A} \leq A \leq c_2 \hat{A}, \quad (28)$$

$$c_1 \delta E \leq A \leq c_2 \Delta E, \quad (29)$$

где E — единичный оператор.

Самосопряженность оператора $A = A_1 + A_2$ доказывается по аналогии с п. 2. Сначала устанавливаем, что

$$A_{\alpha}^* = A_{\alpha} > 0, \quad A_{\alpha} y = -\Lambda_{\alpha} y = -(a_{\alpha} y_{x_{\alpha}})_{x_{\alpha}} \quad \text{при } y \in \mathcal{O}_h.$$

Достаточно рассмотреть, например, при $\alpha = 1$ сумму по строке (при фиксированном $i_2 = 1, 2, \dots, N_2$)

$$\sum_{i_1=1}^{N_1-1} (A_1 y)_{i_1} v_{i_1} h_1 = - \sum_{i_1=1}^{N_1-1} (a_1 y_{x_1})_{x_1, i_1} v_{i_1} h_1 =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} y_{i_1} (a_1 v_{x_1})_{x_1, i_1} h_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} y_{i_1} (A_1 v)_{i_1} h_1.$$

Умножая это тождество на h_2 и суммируя по $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, получаем

$$(A_1 y, v) = (y, A_1 v)$$

и аналогично $(A_2y, v) = (y, A_2v)$, отсюда следует $(Ay, v) = ((A_1 + A_2)y, v) = (y, Av)$, т. е. $A^* = A$.

6. Уравнения со смешанными производными. Рассмотрим задачу (23) с эллиптическим оператором L , содержащим смешанные производные

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right). \quad (30)$$

Предполагается, что выполнены условия эллиптичности

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad x \in G, \quad (31)$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — постоянные, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — любой вектор.

Полагая здесь сначала $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, а затем $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, убеждаемся в том, что

$$0 < c_1 \leq k_{\alpha\alpha} \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Оператор $L_{\alpha\beta}u$ аппроксимируется разностным оператором

$$\Lambda_{\alpha\beta}u = \frac{1}{2} ((k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}), \quad (32)$$

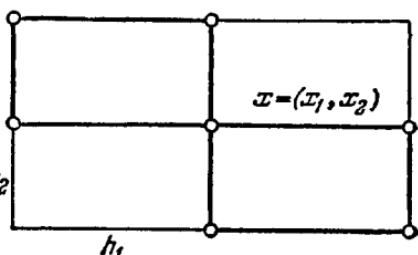


Рис. 15.

определенным при $\alpha \neq \beta$ на 7-точечном шаблоне

$$(x_1, x_2), \quad (x_1 \pm h_1, x_2), \quad (x_1, x_2 \pm h_2), \quad (x_1 - h_1, x_2 + h_2), \\ (x_1 + h_1, x_2 - h_2)$$

(рис. 15). Представим $\Lambda_{\alpha\beta}$ в виде суммы

$$\Lambda_{\alpha\beta} = 0,5 (\Lambda_{\alpha\beta}^- + \Lambda_{\alpha\beta}^+), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-u = (k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^+u = (k_{\alpha\beta}u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}.$$

Покажем, что Λ_{12}^\pm имеют первый, а $\Lambda_{\alpha\beta}$ — второй порядок аппроксимации

$$\Lambda_{12}^\pm u = L_{12}u + O(h_1 + h_2), \quad \Lambda_{12}u = L_{12}u + O(|h|^2). \quad (33)$$

Рассмотрим оператор

$$\Lambda_{12}^-u = (k_{12}u_{\bar{x}_2})_{x_1}.$$

Подставляя сюда разложения

$$u_{\bar{x}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_2^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} (x_1, \bar{x}_2), \\ \bar{x}_2 \in [x_2 - h_2, x_2], \\ v_{x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + O(h_1^3)$$

при $v = k_{12}u_{\bar{x}_2}$, получаем

$$\Lambda_{12}u = L_{12}u + \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} L_{12}u - \frac{h_2}{2} L_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + O(|h|^2).$$

Аналогично находим

$$\Lambda_{12}^+u = L_{12}u - \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} L_{12}u + \frac{h_2}{2} L_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + O(|h|^2).$$

Отсюда и следуют оценки (33).

При $\beta = \alpha = 1$ и $\beta = \alpha = 2$ имеем

$$\Lambda_{11}u = 0,5 ((k_{11}u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (k_{11}u_{x_1})_{\bar{x}_1}) = (a_{11}u_{\bar{x}_1})_{x_1},$$

$$\Lambda_{22}u = 0,5 ((k_{22}u_{\bar{x}_2})_{x_2} + (k_{22}u_{x_2})_{\bar{x}_2}) = (a_{22}u_{\bar{x}_2})_{x_2},$$

где

$$a_{11} = 0,5 [k_{11}(x_1 - h_1, x_2) + k_{11}(x_1, x_2)],$$

$$a_{22} = 0,5 [k_{22}(x_1, x_2 - h_2) + k_{22}(x_1, x_2)].$$

Отсюда видно, что $\Lambda_{\alpha\alpha}u - L_{\alpha\alpha}u = O(h_{\alpha}^2)$, $\alpha = 1, 2$.

Таким образом, разностный оператор

$$\Lambda y = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} y$$

аппроксимирует дифференциальный оператор (30) со вторым порядком

$$\Lambda u - Lu = O(|h|^2).$$

Наряду с (32) можно рассматривать также оператор

$$\Lambda y = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} y, \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} y = \frac{1}{2} [(k_{\alpha\beta}y_{x\beta})_{x\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}\beta})_{\bar{x}\alpha}],$$

имеющий аппроксимацию $O(|h|^2)$.

Исследуем свойства оператора $Ay = -\Lambda y$ для любого $y \in \mathring{Q}_h = H$.

Оператор

$$Ay = \frac{1}{2} (A^-y + A^+y),$$

$$A^-y = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta}y_{x\beta})_{\bar{x}\alpha},$$

$$A^+y = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}\beta})_{x\alpha}$$

является самосопряженным

$$A = A^* \quad \text{при} \quad k_{12} = k_{21}$$

и для него верны оценки (28), (29).

Рассмотрим отдельно A^- и A^+ . Для любых $y, v \in H$ формула суммирования по частям дает

$$(A^-y, v) = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 ((k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}, v) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha})_\alpha, \quad (34)$$

$$(A^+y, v) = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 ((k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}, v) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 [k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}, v_{x_\alpha}]_\alpha. \quad (35)$$

Меняя y и v , а затем α и β местами, получим

$$(A^-v, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta}v_{\bar{x}_\beta}, y_{\bar{x}_\alpha})_\alpha = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\beta\alpha}y_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha})_\beta.$$

Отсюда и из (34) видно, что $(A^-)^* = A^-$ только при $k_{12} = k_{21}$. Аналогично убеждаемся, что при этом $(A^+)^* = A^+$ и, следовательно, $A^* = A$. Необходимо только учесть, что $y_{x_1} = 0$ при $x_2 = 0$, $y_{\bar{x}_1} = 0$ при $x_2 = l_2$, а $y_{x_2} = 0$ при $x_1 = 0$, $y_{\bar{x}_2} = 0$ при $x_1 = l_1$.

Рассмотрим теперь выражение (A^-y, y) . Его можно записать в виде

$$(A^-y, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}, y_{\bar{x}_\alpha}) + \\ + \sum_{i_1=1}^{N_2-1} (k_{11}(y_{\bar{x}_1})^*)_{i_1=N_1} h_1 h_2 + \sum_{i_2=1}^{N_1-1} (k_{22}(y_{\bar{x}_2})^*)_{i_2=N_2} h_1 h_2.$$

В первом слагаемом сумму по α, β внесем под знак скалярного произведения и учтем (31)

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 ((y_{\bar{x}_\alpha})^*, 1) \leq \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta}, y_{\bar{x}_\alpha} \right) \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 ((y_{\bar{x}_\alpha})^*, 1).$$

Таким же способом можно преобразовать выражение для (A^+y, y) . Вспоминая теперь, что $c_1 \leq k_{\alpha\alpha} \leq c_2$ и

$$(\hat{A}y, y) = \sum_{\alpha=1}^2 (y_{\bar{x}_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha})_\alpha,$$

получаем $c_1 \hat{A} \leq A \leq c_2 \hat{A}$, т. е. неравенства (28).

Используя оценку $\delta E \leq \hat{A} \leq \Delta E$, можно получить отсюда неравенство (29).

§ 5. Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона

В этом параграфе рассмотрим схему повышенного порядка точности для задачи Дирихле (1) из § 1 в прямоугольнике.

1. Постановка разностной задачи Дирихле повышенного порядка. Исходя из схемы «крест», можно построить схему с погрешностью аппроксимации на решении $O(|h|^4)$ (или $O(h^6)$ в случае

квадратной (кубической) сетки). Для повышения порядка аппроксимации используется тот факт, что $u = u(x)$ есть решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x). \quad (1)$$

Проведем рассуждения для двумерного случая ($p = 2$), когда

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}.$$

Рассмотрим разностный оператор

$$\Lambda u = (\Lambda_1 + \Lambda_2) u, \quad \Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}.$$

Пусть $u = u(x)$ имеет нужное по ходу изложения число производных. Тогда

$$\Lambda u - Lu = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(|h|^4). \quad (2)$$

Из уравнения $L_1 u + L_2 u = -f(x)$ находим

$$L_1^2 u = -L_1 f - L_1 L_2 u, \quad L_2^2 u = -L_2 f - L_1 L_2 u,$$

так что

$$\Lambda u = Lu - \frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4). \quad (3)$$

Подставим сюда $Lu = -f$ и заменим $L_1 L_2 u$ разностным оператором

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = u_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2} \sim L_1 L_2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

Этот оператор определен на девятиточечном шаблоне, изображенном на рис. 16.

Напишем выражение для $\Lambda_1 \Lambda_2 u$:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Lambda_2 u &= \Lambda_1 \left[\frac{u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h_2)}{h_2^2} \right] = \\ &= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \{u(x_1 - h_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2 - h_2) + u(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + \\ &\quad + 4u(x_1, x_2) - 2u(x_1 - h_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - \\ &\quad - 2u(x_1, x_2 + h_2) - 2u(x_1 + h_1, x_2) + u(x_1 + h_1, x_2 + h_2)\}. \end{aligned}$$

Для оценки погрешности аппроксимации

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u - L_1 L_2 u$$

воспользуемся разложениями (см. лемму на стр. 75)

$$\Lambda v = v_{xx} = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = v''(\xi),$$

$$\xi = x + \theta h, \quad |\theta| \leq 1, \quad (4)$$

если $v(x)$ имеет непрерывную вторую производную на отрезке $[x-h, x+h]$;

$$\Lambda v = v_{xx} = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi^*), \quad \xi^* = x + \theta^* h, \quad |\theta^*| \leq 1, \quad (5)$$

если $v(x)$ имеет непрерывную четвертую производную по x на отрезке $[x-h, x+h]$.

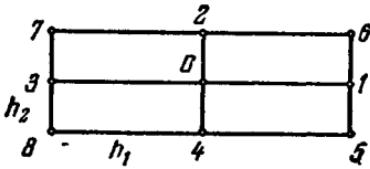


Рис. 16.

При фиксированном x_1 имеем

$$\Lambda_2 u = L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2), \quad \xi_2 = x + \theta_2 h_2, \quad |\theta_2| \leq 1.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u(x_1, x_2) = \Lambda_1 L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2).$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой (5), где $v = L_2 u$, $x = x_1$:

$$\Lambda_1 L_2 u(x_1, x_2) = L_1 L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\xi_1^*, x_2),$$

$$\xi_1^* = x_1 + \theta_1^* h_1, \quad |\theta_1^*| \leq 1.$$

Для второго слагаемого применим формулу (4)

$$\frac{h_2^2}{12} \Lambda_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2) = \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4}(\xi_1, \xi_2),$$

$$\xi_1 = x_1 + \theta_1 h_1, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

В результате получаем

$$(\Lambda_1 \Lambda_2 - L_1 L_2) u = O(h_1^2) + O(h_2^2) = O(|h|^2).$$

Подставляя в (3) вместо $L_1 L_2 u$ выражение $\Lambda_1 \Lambda_2 u$:

$$L_1 L_2 u = \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(|h|^2),$$

и учитывая, что $Lu = -f(x)$, получим

$$\begin{aligned} \Lambda u &= Lu - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u - \frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f + O(|h|^4) = \\ &= -\left(f + \frac{h_1^2}{12} L_1 f + \frac{h_2^2}{12} L_2 f\right) - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(|h|^4). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\begin{aligned} \Lambda' y &= -\varphi, \quad \Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \\ \varphi &= f + \frac{h_1^2}{12} L_1 f + \frac{h_2^2}{12} L_2 f \end{aligned} \quad (7)$$

имеет четвертый порядок аппроксимации на решении $u = u(x)$ уравнения Пуассона (1). В самом деле, формула (6) дает

$$\Lambda' u + \varphi = (\Lambda' u + \varphi) - (Lu + f) = O(|h|^4), \quad L = L_1 + L_2.$$

Оператор Λ' определен на девятиточечном шаблоне (рис. 16) «ящик», состоящем из узлов $(x_1 + m_1 h_1, x_2 + m_2 h_2)$, $m_1, m_2 = -1, 0, 1$. Запишем схему (7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y &= \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1,1)} + y^{(-1,1)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) (y^{(+1,2)} + y^{(-1,2)}) + \\ &+ \frac{1}{12} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1,1, +1,2)} + y^{(+1,1, -1,2)} + y^{(-1,1, -1,2)} + y^{(-1,1, +1,2)}) + \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $y^{(\pm 1,1)} = y(x_1 \pm h_1, x_2)$, $y^{(+1,1, -1,2)} = y(x_1 + h_1, x_2 - h_2)$ и т. д. На квадратной сетке ($h_1 = h_2 = h$) это уравнение принимает вид

$$y_0 = \frac{4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{20} + \frac{3}{10} h^2 \varphi$$

(см. рис. 16).

Для вычислений удобно в формуле для φ заменить $L_1 f$ на $\Lambda_1 f$ и $L_2 f$ на $\Lambda_2 f$, изменив при этом φ на $O(|h|^4)$, что не нарушит порядка аппроксимации $\varphi = \Lambda' u + \varphi = O(|h|^4)$, так что

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f.$$

2. Оценка решения разностной краевой задачи. Рассмотрим теперь разностную задачу Дирихле для схемы $O(|h|^4)$ в прямоугольнике $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$:

$$\Lambda' y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x); \quad \varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f, \quad (9)$$

где $\Lambda' y$ дается формулой (7).

Каждый из узлов сетки является регулярным, так как девятиточечный шаблон (рис. 16) принадлежит \bar{G} . Граница γ_h сетки содержит все узлы на Γ , в том числе и вершины прямоугольника. Для $z = y - u$ получаем задачу

$$\Lambda' z = -\psi, \quad x \in \omega_h, \quad z = 0 \text{ на } \gamma_h, \quad (10)$$

где $\psi = \Lambda' u + \varphi = O(|h|^4)$ при $x \in \omega_h$, если $u \in C^{(6)}$. Проверим условия принципа максимума. Сравнивая (8) с (1) из § 2, видим, что

$$B(x, \xi) \geq 0 \text{ при } \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}. \quad (11)$$

Для оценки решения задачи (10) строим мажорантную функцию

$$Y(x) = K(l_1^2 - x_1^2 + l_2^2 - x_2^2).$$

Учитывая, что $\Lambda Y = -4K$, $\Lambda_1 \Lambda_2 Y = 0$, $\|Y\| \leq K(l_1^2 + l_2^2)$, выбирая $4K = \|\psi\|_C$ и пользуясь теоремой 3, получаем для решения задачи (10) оценку

$$\|z\|_C \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_C \text{ при условии } \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}.$$

Отсюда следует, что схема (9) имеет четвертый порядок точности, если $u \in C^{(6)}$, $f \in C^{(4)}$ и выполнено условие (11).

На квадратной сетке ($h_1 = h_2 = h$) это условие автоматически выполнено. Выбирая соответствующим образом φ , можно добиться того, что на квадратной сетке схема (9) будет иметь шестой порядок точности.

Можно доказать сходимость схемы (9) с четвертым порядком в C без условия (11). Для этого надо получить априорную оценку для $\|\Lambda z\|^2$ и затем воспользоваться теоремой вложения (см. § 4, п. 4).

Пусть Ω_h — пространство сеточных функций, заданных во внутренних узлах $x \in \omega_h$ сетки $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2), 0 \leq i_\alpha \leq N_\alpha, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, $\bar{\Omega}_h$ — пространство сеточных функций, заданных на ω_h и равных нулю на γ_h . Введем на Ω_h скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2 = \\ = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2, \quad y, v \in \Omega_h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Определим операторы A_1 и A_2 так:

$$A_1 y = -\tilde{\Lambda}_1 y, \quad A_2 y = -\tilde{\Lambda}_2 y, \quad \text{где} \quad \tilde{\Lambda}_\alpha y = \Lambda_\alpha y \quad \text{при} \quad y \in \bar{\Omega}_h.$$

$\tilde{\Lambda}_\alpha$ действует из Ω_h в Ω_h и совпадает с Λ_α в Ω_h .

Поэтому A_1 и A_2 —линейные операторы, заданные на $H_h = \Omega_h$ (их можно также рассматривать как операторы, действующие из Ω_h в $\Omega_h \subset \dot{\Omega}_h$); область определения и множество значений этих операторов совпадает с $\Omega_h = H_h$.

Задачу (10) можно переписать в виде операторного уравнения

$$A'z = A_1z + A_2z - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 z = \psi, \quad y, \psi \in H_h, \quad (12)$$

где

$$\kappa_1 = h_1^2/12, \quad \kappa_2 = h_2^2/12.$$

Операторы A_1 и A_2 —самосопряженные

$$(A_\alpha y, v) = (y, A_\alpha v), \quad \alpha = 1, 2, \quad y, v \in H,$$

положительно определенные

$$(A_\alpha y, y) \geq \lambda_1^{(\alpha)} \|y\|^2,$$

$$\lambda_1^{(\alpha)} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \geq \frac{8}{l_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

и перестановочные, $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Отсюда следует $A_1 A_2 = (A_1 A_2)^* > 0$. Учитывая, что

$$A_\alpha \leq \|A_\alpha\| E, \quad \|A_\alpha\| = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} < \frac{4}{h_\alpha^2}, \quad \kappa_\alpha \|A_\alpha\| < 1/3,$$

получаем

$$A_1 A_2 \leq \|A_1\| \|A_2\|, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1 \leq \|A_2\| \|A_1\|,$$

$$(\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 =$$

$$= \kappa_1 A_1 A_2 + \kappa_2 A_2 A_1 \leq \kappa_1 \|A_1\| \|A_2\| + \kappa_2 \|A_2\| \|A_1\| < \frac{1}{3} (A_1 + A_2).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{2}{3} A \leq A' = A_1 + A_2 - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 \leq A, \quad A = A_1 + A_2,$$

$$\frac{2}{3} \|Az\| \leq \|A'z\| \leq \|Az\|.$$

Операторы A и A' —перестановочные и самосопряженные, поэтому для уравнения $A'z = \psi$ справедлива оценка

$$\|Az\| \leq \frac{3}{2} \|\psi\|.$$

В силу теоремы вложения (см. § 4, п. 4)

$$\|z\|_C \leq \frac{l_0^2}{2 \sqrt{l_1 l_2}} \|Az\| \leq \frac{3l_0^2}{4 \sqrt{l_1 l_2}} \|\psi\|,$$

т. е. для решения задачи (12) при любых h_1 и h_2 верна оценка

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq M \|\psi\|,$$

где

$$M = \frac{3l_0^2}{4\sqrt{l_1 l_2}}, \quad l_0 = \max(l_1, l_2).$$

Отсюда следует равномерная сходимость схемы (9) со скоростью $O(|h|^4)$ при любых h_1/h_2 .

3. Многомерный случай. Метод построения схемы четвертого порядка точности, указанный в п. 1, применим и в случае нескольких переменных. Он позволяет для задачи (1) из § 1 в p -мерном параллелепипеде $\bar{G}_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ на сетке $\omega_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p), i_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha\}$ получить следующую разностную схему четвертого порядка аппроксимации:

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (13)$$

$$\Lambda' y = \Lambda y + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \sum_{\beta \neq \alpha}^{1+p} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y,$$

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad (14)$$

$$\varphi = f + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} \Lambda_\alpha f.$$

Вводя по аналогии с предыдущим пунктом пространство $H_h = \Omega_h$ и операторы A_α , убеждаемся в том, что оператор

$$A' = A - \sum_{\alpha=1}^p \kappa_\alpha \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p A_\alpha A_\beta, \quad \kappa_\alpha = \frac{h_\alpha^2}{12}, \quad A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha \quad (15)$$

самосопряжен и для него справедливы оценки

$$\frac{4-p}{3} A \leq A' \leq A, \quad p > 1.$$

В самом деле,

$$0 < \sum_{\alpha=1}^p \kappa_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} A_\alpha A_\beta < \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta \neq \alpha} A_\alpha = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^p (A - A_\alpha) = \frac{p-1}{3} A.$$

При $p \geq 4$ разностный оператор (15) теряет свойство знакопределенности (эллиптичности).

Можно, не нарушая порядка аппроксимации, выбрать другой оператор Λ' , который сохраняет свойство эллиптичности при

любом p :

$$\Lambda'y = \sum_{\alpha=1}^p \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \left(E + \frac{h_\beta^3}{12} \Lambda_\beta \right) \Lambda_\alpha y$$

или

$$A'y = \sum_{\alpha=1}^p \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p (E - \kappa_\beta A_\beta) A_\alpha y. \quad (16)$$

Очевидно, что с точностью до членов $O(|h|^4)$ он совпадает с написанным выше оператором (15).

С другой стороны, так как $E - \kappa_\beta A_\beta > \frac{2}{3} E$, то

$$A' > \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha \left(\frac{2}{3} \right)^{p-1} = \left(\frac{2}{3} \right)^{p-1} A,$$

и следовательно,

$$\left(\frac{2}{3} \right)^{p-1} A < A' < A.$$

Наличие этих операторных неравенств позволяет получить нужные априорные оценки и убедиться в сходимости схемы со скоростью $O(|h|^4)$.

Заметим, что при $p=2$ оператор (16) совпадает с оператором (15).

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе изучаются разностные схемы для простейших нестационарных уравнений: уравнения теплопроводности с одной или несколькими пространственными переменными, одномерного уравнения переноса, уравнения колебаний струны. Построены двухслойные и трехслойные схемы для первой, второй и третьей краевой задач. Исследование устойчивости проводится разными способами: методом разделения переменных, методом энергетических неравенств, с помощью принципа максимума. Рассмотрен вопрос об асимптотической устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности.

§ 1. Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для выяснения методов построения разностных схем в случае нестационарных задач, а также методов их исследования рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами.

1. Исходная задача. Процесс распространения тепла на прямой описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{f}, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — температура, c — теплоемкость единицы массы, ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности, \bar{f} — плотность тепловых источников, т. е. количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единице длины. Коэффициенты теплопроводности и теплоемкости могут зависеть не только от x, t , но и от температуры u (в этом случае уравнение называется квазилинейным). Если k и $c\rho$ постоянны, то уравнение (1) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{f}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad \bar{f} = \frac{f}{c\rho}, \quad (2)$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности.

Без ограничения общности можно считать $a = 1$ и записывать уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (3)$$

В самом деле, вводя $x' = x/a$ и вновь обозначая x' через x , получим (3). Если ищется решение уравнения (2) на отрезке $0 \leq x \leq l$, то обычно пользуются безразмерными переменными

$$x' = x/l, \quad t' = a^2 t / l^2.$$

В этих переменных уравнение (2) записывается в виде (3), причем $0 \leq x' \leq 1$, а $f = l^2 \tilde{f} / a^2$.

Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (3) в прямоугольнике

$$\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T).$$

Требуется найти непрерывное в \bar{D} решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (I)$$

2. Семейство шеститочечных схем. Введем сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

и сетку в \bar{D} :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/j_0$. Обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y , определенной на $\bar{\omega}_{h\tau}$. Заменяя производную du/dt первой разностной производной, а $\partial^2 u / \partial x^2$ — второй разностной производной $u_{xx} = \Lambda u$ и вводя произвольный вещественный параметр σ , рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda (\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \varphi_i^j, \quad 0 < i < N, \quad 0 \leq j < j_0. \quad (4)$$

Схему (4) будем называть иногда *схемой с весами*.

Краевые и начальные условия аппроксимируем точно

$$y_0^j = u_1^j, \quad y_N^j = u_2^j, \quad (5)$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \quad (6)$$

Здесь φ_i^j — сеточная функция, аппроксимирующая правую часть f уравнения (3), например,

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+0.5}), \quad t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau,$$

а

$$\Lambda y_i = y_{xx, i} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2.$$

Разностную задачу, определяемую условиями (4)–(6), будем называть задачей (II).

Разностная схема (4) написана на шеститочечном шаблоне, состоящем из узлов

$$(x_{i \pm 1}, t_{j+1}), \quad (x_i, t_{j+1}), \quad (x_{i \pm 1}, t_j), \quad (x_i, t_j)$$

(см. рис. 4, *в*) с центром в точке (x_i, t_{j+1}) . Уравнение (4) пишется в узлах (x_i, t_{j+1}) , $i=1, 2, \dots, N-1$, $j+1=1, 2, \dots, j_0$, называемых внутренними узлами. Множество всех внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_{ht}$ будем обозначать

$$\bar{\omega}_{ht} = \{(x_i, t_j), 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq j_0\}.$$

Краевые и начальные условия (5) и (6) пишутся в граничных узлах сетки $\bar{\omega}_{ht}$.

Множество узлов сетки $\bar{\omega}_{ht}$, лежащих на прямой $t=t_i$, обычно называют *слоем*. Схема (4) содержит значения искомой функции u на двух слоях и поэтому называется *двухслойной* схемой.

От выбора параметра σ , как мы убедимся в дальнейшем, зависят точность и устойчивость схемы (4).

Рассмотрим схемы, соответствующие частным значениям σ . При $\sigma=0$ получаем четырехточечную схему (рис. 4, *а*)

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j,$$

или

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma) y_i^j + \gamma (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^j, \quad \gamma = \tau/h^2, \quad (7)$$

определенную на шаблоне (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_j) , $(x_{i \pm 1}, t_j)$. Значение y_i^{j+1} в каждой точке слоя $t=t_{j+1}$ (нового слоя) выражается по явной формуле (7) через значения y_i^j на слое $t=t_j$ (на старом слое). Так как при $t=0$ задано начальное значение $y_i^0 = u_0(x_i)$, то формула (7) позволяет последовательно определить значения u на любом слое. Схема (7) называется *явной*.

Если $\sigma \neq 0$, то схема (4) называется *неявной двухслойной схемой*. При $\sigma \neq 0$ для определения y_i^{j+1} на новом слое получаем систему алгебраических уравнений

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$y_0^{j+1} = u_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = u_3^{j+1}.$$

Решение этой системы находится методом прогонки (см. гл. I, § 2, п. 5). Укажем еще две схемы.

При $\sigma = 1$ имеем *схему с опережением* или *чисто неявную схему*

$$\frac{y_i^{l+1} - y_i^l}{\tau} = \Lambda y_i^{l+1} + \varphi_i^l. \quad (9)$$

При $\sigma = 0,5$ получаем *шеститочечную симметричную схему*

$$\frac{y_i^{l+1} - y_i^l}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_i^{l+1} + y_i^l) + \varphi_i^l \quad (10)$$

(называемую иногда схемой Кранка—Никольсона).

Перейдем к выяснению вопросов о погрешности аппроксимации и точности схемы с весами (4).

3. Погрешность аппроксимации. Чтобы ответить на вопрос о точности схемы (4)–(6), нужно сравнить решение $y = y_i^l$ задачи (4)–(6) с решением $u = u(x, t)$ задачи (I). Так как $u(x, t)$ —непрерывное решение задачи (I), то положим $u_i^l = u(x_i, t_j)$ и рассмотрим разность

$$z_i^l = y_i^l - u_i^l.$$

Для оценки сеточной функции z_i^l на слое выберем некоторую норму $\|\cdot\|$, например, одну из следующих норм:

$$\|z\| = \|z\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |z_i|, \quad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} z_i^2 h \right)^{1/2}.$$

Перейдем к безиндексным обозначениям, полагая (см. гл. II, § 1, п. 2 и стр. 11)

$$y_i^l = y, \quad y_i^{l+1} = \hat{y}, \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Перепишем задачу (4)–(6) в виде

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{ht}, \\ y(0, t) &= u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \omega_t, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \Lambda y = y_{xx}. \end{aligned} \quad (II)$$

Найдем условия, определяющие $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в (II) и считая u заданной функцией, получим для z задачу

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - \sigma)z) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_{ht}, \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0, \quad t \in \omega_t, \\ z(x, 0) &= 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (III)$$

где

$$\psi = \Lambda (\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) u) - u_t + \varphi \quad (11)$$

— погрешность аппроксимации (невязка) схемы (II) на решении $u = u(x, t)$ уравнения (I).

Напомним определение порядка аппроксимации (см. гл. II, § 1, п. 3). Схема (II) аппроксимирует уравнение (I) с порядком (m, n) или имеет аппроксимацию $O(h^m + \tau^n)$ на решении $u = u(x, t)$ уравнения (I), если $\|\psi(x, t)\|_{(2)} = O(h^m + \tau^n)$ или $\|\psi\|_{(2)} \leq M(h^m + \tau^n)$ для всех $t \in \omega_\tau$, где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ , а $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторая норма на сетке ω_h .

Перейдем к оценке порядка аппроксимации схемы (II), предполагая, что $u = u(x, t)$ имеет нужное по ходу изложения число производных по x и t . Будем пользоваться обозначениями:

$$u = \partial u / \partial t, \quad u' = \partial u / \partial x, \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+0.5}), \quad t_{j+0.5} = t_j + \tau/2.$$

Разложим $u = u(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(x_i, \bar{t} = t_{j+0.5})$. Пользуясь формулами

$$\hat{u} = 0.5(\bar{u} + u) + 0.5(\bar{u} - u) = 0.5(\bar{u} + u) + 0.5\tau u_t,$$

$$u = 0.5(\bar{u} + u) - 0.5\tau u_t,$$

$$\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) u = 0.5(\bar{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau u_t,$$

перепишем ψ в виде

$$\psi = 0.5\Lambda(\bar{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau \Lambda u_t - u_t + \varphi.$$

Подставляя сюда выражения

$$\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2u + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\hat{u} = \bar{u} + 0.5\tau \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{u} + O(\tau^3),$$

$$u = \bar{u} - 0.5\tau \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{u} + O(\tau^3),$$

$$0.5(\bar{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{u} + O(\tau^3), \quad u_t = \bar{u} + O(\tau^3),$$

получим

$$\psi = (Lu - \bar{u} + \varphi) + (\sigma - 0.5)\tau Lu + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^3 + h^4). \quad (12)$$

Отсюда видно, что $\psi = (\sigma - 0.5)\tau Lu + O(h^2 + \tau^2)$ при $\varphi = \bar{f} = f(x, t_{j+0.5})$, так как $\dot{u} = Lu + f$. Учитывая, что $Lu = L^2u + Lf = u^{(4)} + f''$ и $L^2u = Lu - Lf$, из (12) получаем

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[(\sigma - 0.5)\tau + \frac{h^2}{12} \right] Lu - \frac{h^2}{12}L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2). \quad (13)$$

Приравняем нулю выражение в квадратных скобках и найдем

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \quad (14)$$

При этом значении $\sigma = \sigma_*$ и φ , равном

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f},$$

схема (II) имеет аппроксимацию $O(h^4 + \tau^2)$, т. е. $\psi = O(h^4 + \tau^2)$. Порядок аппроксимации схемы не нарушится, если мы заменим f'' выражением $f_{\bar{x}\bar{x}} = \Lambda f$, т. е. положим $\varphi = \bar{f} + (h^2 \Lambda \bar{f})/12$ или

$$\varphi_i^j = \frac{5}{6} f_i^{j+1/2} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{j+1/2} + f_{i+1}^{j+1/2}). \quad (15)$$

Эта формула удобнее для вычислений.

Пусть $C_n^m(\bar{D})$ — класс функций, имеющих m производных по x и n производных по t , непрерывных в \bar{D} . Из формул (13) и (14) ясно, что схема (II) имеет аппроксимацию 1) $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0,5$, $\varphi = \bar{f}$ или $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$, если $u \in C_3^4$, 2) $O(h^2 + \tau)$ при любом $\sigma \neq 0,5$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$, например, $\varphi = \bar{f}$ или $\varphi = f$, если $u \in C_2^4$, 3) $O(h^4 + \tau^2)$ при $\sigma = \sigma_*$ и φ , заданной формулой (15), если $u \in C_3^8$.

Схему (II) с $\sigma = \sigma_*$ и $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda \bar{f}$ называют обычно *схемой повышенного порядка точности*.

Выбор правой части φ должен быть подчинен требованию соблюдения порядка аппроксимации при данном σ . Так, при $\sigma = 0,5$ можно полагать φ равным $\varphi = 0,5(\bar{f} + f)$, $\varphi = \bar{f}$ и т. д.

Из (13) видно, что погрешность $O(h^2 + \tau^2)$ может достигаться и при $\sigma \neq 0,5$, если положить

$$\sigma = 0,5 + h^2 \alpha / \tau,$$

где α — любая постоянная, не зависящая от h и τ . В этом случае σ зависит от h и τ . Произвол в выборе α ограничен условием устойчивости схемы (достаточно взять $\alpha > -1/4$, см. п. 4).

4. Устойчивость по начальным данным. Исследуем устойчивость схемы (II) методом разделения переменных (при однородных граничных условиях). Пользуясь тождествами

$$\hat{y} = y + \tau y_t, \quad \sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y = y + \sigma \tau y_t,$$

перепишем схему (II) с однородными краевыми условиями в виде

$$y_t - \sigma \tau \Lambda y_t = \Lambda y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{ht}, \quad (16)$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad t \in \omega_t, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Схема (16) устойчива, если для решения задачи (16) верна оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (17)$$

где M_1, M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h и τ , $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы на слое (на сетке ω_h).

Пусть $\varphi = 0$. Тогда оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (18)$$

выражает *устойчивость схемы (16) по начальным данным*. Если $y(x, 0) = 0$, то неравенство

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (19)$$

означает *устойчивость схемы (16) по правой части*.

Оценка (17) для решения задачи (16) выражает *устойчивость схемы (16) по начальным данным и по правой части*.

Решение задачи (16) представим в виде суммы $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где \bar{y} — решение однородного уравнения

$$y_t - \sigma \tau \Lambda y_t = \Lambda y, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (16a)$$

а \tilde{y} — решение неоднородного уравнения с начальным условием $\tilde{y}(x, 0) = 0$:

$$y_t - \sigma \tau \Lambda y_t = \Lambda y + \varphi, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0. \quad (16b)$$

Для исследования устойчивости схемы (16) по начальным данным надо найти оценку для решения задачи (16a). Для этого воспользуемся методом разделения переменных и получим оценку (18) в сеточной норме $L_2(\omega_h)$:

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|, \quad \text{где} \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Будем искать решение уравнения (16a) в виде произведения функций, одна из которых $T = T(t_j)$ зависит только от $t = t_j$, а вторая $X = X(x_i)$ — только от $x = x_i$, полагая $y(x, t) = X(x)T(t)$. Подставим это выражение в (16a) и учтем, что

$$\Lambda y = T \Lambda X, \quad y_t = X T_t.$$

Тогда получим

$$\frac{\hat{T} - T}{\tau(\sigma \hat{T} + (1 - \sigma) T)} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \quad \hat{T} = T(t_{j+1}), \quad T = T(t_j),$$

где λ — параметр разделения. Отсюда находим

$$\hat{T} = qT, \quad \text{где} \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda}{1 + \sigma \tau \lambda}.$$

Для X получаем разностную задачу на отыскание собственных значений (разностную задачу Штурма—Лиувилля):
 $\Delta X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x = ih < 1, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0$,
рассмотренную в гл. II, § 3, п. 2. Там было показано, что эта задача имеет нетривиальные решения — собственные функции

$$X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi k x}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Собственные функции $\{X^{(k)}\}$ образуют ортонормированную систему

$$(X^{(k_1)}, X^{(k_2)}) = \delta_{k_1 k_2}.$$

Имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2, \quad (20)$$

где f_k — коэффициенты разложения любой сеточной функции $f(x)$, заданной на ω_h и равной нулю при $x=0, x=1$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}(x), \quad f_k = (f, X^{(k)}).$$

Таким образом, задача (16а) имеет нетривиальные решения $y_{(k)} = T_k X^{(k)} \not\equiv 0$, где T_k определяется из уравнения

$$\hat{T}_k = q_k T_k, \quad \text{или} \quad T_k^{i+1} = q_k T_k^i = \dots = q_k^{i+1} T_k^0, \quad (21)$$

$$q_k = \frac{1 - (1-\sigma)/\tau \hat{T}_k}{1 + \sigma \hat{T}_k},$$

T_k^0 — произвольная постоянная.

Решение уравнения (16а) вида $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ называют гармоникой номера k . Оно является решением задачи (16а) с начальным условием $u_0(x) = T_k^0 X^{(k)}(x)$. Выясним, при каких условиях устойчива каждая из гармоник $y_{(k)}$ при $k = 1, 2, \dots, N-1$. Из формул

$$y_{(k)}^{j+1} = X^{(k)} T_k^{j+1} = q_k X^{(k)} T_k^j, \quad y_{(k)}^{j+1} = q_k y_{(k)}^j \quad (22)$$

видно, что при $|q_k| \geq 1 + \epsilon$, где $\epsilon = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ , имеем

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| = |q_k| \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \epsilon) \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \epsilon)^{j+1} \|y_{(k)}^0\| \rightarrow \infty$$

при $\tau \rightarrow 0$, т. е. задача неустойчива. Если $|q_k| \leq 1$, то $\|y_{(k)}\|$ не возрастает с ростом $j(\tau \rightarrow 0)$ при фиксированном $t = j\tau$:

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| \leq \|y_{(k)}^j\| \leq \dots \leq \|y_{(k)}^0\|$$

и гармоника устойчива.

Если все $|q_k| \leq 1$ и, следовательно, $\|y_{(k)}^j\| \leq \|y_{(k)}^0\|$, то будем говорить, что схема «устойчива на каждой гармонике».

Выясним теперь, при каких значениях σ выполняется условие $|q_k| \leq 1$ или $-1 \leq q_k \leq 1$, обеспечивающее устойчивость схемы на каждой гармонике. Из формулы $q_k = 1 - \tau \lambda_k / (1 + \sigma \tau \lambda_k)$ видно, что $q_k < 1$, если $1 + \sigma \tau \lambda_k > 0$, т. е. $\sigma > -1 / (\tau \lambda_k)$. Требование $q_k \geq -1$ или

$$q_k + 1 = \frac{2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \geq 0$$

выполнено при $2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k \geq 0$ или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}.$$

Условие $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$ при этом автоматически выполняется. Так как

$$\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}, \quad \text{то} \quad -\frac{1}{\tau\lambda_k} \leq -\frac{1}{\tau\lambda_{N-1}} < -\frac{h^2}{4\tau},$$

и следовательно, условие $|q_k| \leq 1$ будет выполнено для всех $k = 1, 2, \dots, N-1$ при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0. \quad (23)$$

Таким образом, все гармоники $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ устойчивы при одном и том же условии $\sigma \geq \sigma_0$.

Покажем, что из устойчивости схемы (16a) на каждой гармонике (из спектральной устойчивости) следует ее устойчивость в сеточной норме L_2 по начальным данным $y(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — любая сеточная функция, заданная при $0 \leq x \leq 1$ и равная нулю при $x = 0, x = 1$.

Общее решение задачи (16a) ищем в виде суммы частных решений вида (22), полагая

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{y}_{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \quad \text{так что} \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2.$$

Подставляя сюда $\hat{T}_k = q_k T_k$ и учитывая (20), находим

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)},$$

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \leq \max_k q_k^2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 = \max_k q_k^2 \|y\|^2.$$

Если $\sigma \geq \sigma_0$, то $\max_k |q_k| \leq 1$ и $\|\hat{y}\| \leq \|y\|$ или

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y^0\| = \|u_0\|.$$

Таким образом, для решения задачи (16а) верна оценка

$$\|y^j\| \leq \|u_0\|, \quad j = 1, 2, \dots, \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad (24)$$

т. е. схема (16) устойчива в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ по начальным данным при $\sigma \geq \sigma_0$.

Разностная схема называется *условно устойчивой*, если она устойчива лишь при наличии связи между τ и h и *безусловно устойчивой* — в противоположном случае. Схема, устойчивая при любых τ и h , называется *абсолютно устойчивой* (имеются схемы, устойчивые при достаточно малых h и τ , $h \leq h_0$, $\tau \leq \tau_0$; эти схемы не являются абсолютно устойчивыми, хотя могут быть и безусловно устойчивыми).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Явная схема ($\sigma = 0$). Условие (23) дает $0 \geq 0,5 - h^2/(4\tau)$, т. е.

$$\tau/h^2 \leq 0,5. \quad (25)$$

Явная схема устойчива лишь при условии (25), связывающем шаги h и τ (условно устойчива).

2. Неявная схема при $\sigma \geq 0,5$ устойчива при любых h и τ , так как $\sigma \geq 0,5 > \sigma_0$. Таким образом, схема с опережением ($\sigma = 1$) и симметричная схема ($\sigma = 0,5$) устойчивы при любых h и τ (абсолютно устойчивы).

3. Схема повышенного порядка аппроксимации ($\sigma = \sigma_*$, $\sigma_* = 0,5 - h^2/(12\tau)$) абсолютно устойчива. В самом деле,

$$\sigma_* - \sigma_0 = -\frac{h^2}{12\tau} + \frac{h^2}{4\tau} = \frac{h^2}{6\tau} > 0$$

при любых h и τ .

4. Неявные схемы с $0 < \sigma < 0,5$ при σ , не зависящем от $\gamma = \tau/h^2$, условно устойчивы при $\gamma \leq 1/(2-4\sigma)$.

5. Схема (16) с $\sigma = 0,5 + h^2\alpha/\tau$, имеющая аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, устойчива при любых h и τ , если $\alpha > -1/4$.

Таким образом, параметр σ управляет не только порядком аппроксимации, но и устойчивостью схемы (16).

При исследовании устойчивости мы фактически имели дело только с двумя временными слоями t_j , t_{j+1} и шагом $\tau = t_{j+1} - t_j$. Все рассуждения сохраняют силу, если сетка ω_τ неравномерна, т. е. шаг $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$, зависит от номера слоя. В этом случае параметр σ можно считать зависящим от номера $j+1$ слоя, $\sigma = \sigma^{j+1}$. Тогда вместо (23) получим условие $\sigma \geq \sigma_0^{j+1} = 0,5 -$

$-h^2/(4\tau_{j+1})$. Для схемы $O(h^4 + \tau_{j+1}^2)$, в частности, следует положить $\sigma_0^{j+1} = 0.5 - h^2/(12\tau_{j+1})$. Условие $\sigma \geq \sigma_0^{j+1}$ достаточно для устойчивости схемы с весами при неравномерной сетке ω_τ .

5. Устойчивость по правой части. Покажем, что условие (23)

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$$

достаточно для устойчивости схемы (16) и по правой части при $\sigma \geq 0$. Для этого рассмотрим задачу (16б). Ее решение ищем в виде

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \quad \text{так что } \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2. \quad (26)$$

Правую часть φ разложим по $\{X^{(k)}\}$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}, \quad \text{так что } \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2. \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в (16б) и учитывая, что $\Lambda X^{(k)} = -\lambda_k X^{(k)}$, найдем

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{T_{k1}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k\} X^{(k)} = 0.$$

Отсюда, в силу ортогональности системы собственных функций, следует, что выражение в фигурных скобках равно нулю, т. е.

$$\hat{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau \varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}, \quad q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}. \quad (28)$$

Подставим (28) в (26):

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} X^{(k)}.$$

Пользуясь неравенством треугольника ($\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$), находим

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \left(\sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 \right)^{1/2} + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \right)^{1/2},$$

или

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \|\varphi\|. \quad (29)$$

Пусть одновременно выполняются условия

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad \sigma \geq 0. \quad (30)$$

Тогда $|q_k| \leq 1$, $1 + \sigma \tau \lambda_k \geq 1$ и

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\varphi\| \text{ или } \|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| + \tau \|\varphi^j\|.$$

Суммируя по $j' = 0, 1, 2, \dots, j$, приходим к оценке

$$\|y^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|, \quad (31)$$

так как $\|y^0\| = 0$ для решения задачи (16б).

Оценка (31) получена при условии (30). Откажемся теперь от требования $\sigma \geq 0$ и вместо (30) потребуем

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (32)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$ не зависит от h, τ . Тогда

$$\begin{aligned} |q_k| &\leq 1, \quad 1 + \sigma \tau \lambda_k = 1 + (\sigma - \sigma_\varepsilon) \tau \lambda_k + \sigma_\varepsilon \tau \lambda_k \geq 1 + \sigma_\varepsilon \tau \lambda_k = \\ &= 1 + 0,5 \tau \lambda_k - \frac{(1-\varepsilon) h^2 \lambda_k}{4} > 1 - \frac{(1-\varepsilon) h^2 \lambda_{N-1}}{4} > 1 - \frac{(1-\varepsilon) h^2}{4} \cdot \frac{4}{h^2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $1 + \sigma \tau \lambda_k > \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \dots, N-1$. Поэтому из (29) следует оценка $\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\varphi\|/\varepsilon$ и

$$\|y^{j+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|. \quad (33)$$

Если $\sigma = \sigma_*$, то условие $\sigma_* < 0$ означает, что $\tau < h^2/6$. В этом случае можно выбрать $\varepsilon = 2/3$, так как $(1-\varepsilon)/4 = 1/12$ при $\varepsilon = 2/3$. Объединяя оценки (24) и (31), (33), видим, что верно следующее утверждение.

Если выполнены условия

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0, \quad \sigma \geq 0,$$

то схема (16) устойчива по начальным данным и по правой части, так что для решения задачи (16) справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

Если $\sigma < 0$, то для устойчивости схемы (16) по правой части достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon) h^2}{4\tau} = \sigma_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольная постоянная, не зависящая от h и τ . При этом для решения задачи (16) имеет место оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|.$$

Для схемы $O(h^4 + \tau^2)$ постоянная $\varepsilon = 2/3$, а $\sigma_* < 0$ при $\tau < h^2/6$.

6. Сходимость и точность в $L_2(\omega_h)$. Сходимость схемы (II) следует из ее устойчивости и аппроксимации. Погрешность $z = y - u$ является решением задачи (III). Пользуясь априорной оценкой (31), получаем

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\Psi^{j'}\| \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \sigma \geq 0. \quad (34)$$

Отсюда видно, что верна теорема:

Если схема (II) устойчива по правой части и аппроксимирует задачу (I), то она сходится, причем порядок ее точности совпадает с порядком аппроксимации.

Подставляя в (34) оценки из п. 3 для погрешности аппроксимации, получаем, что

$$\|y^j - u^j\| = \begin{cases} O(h^2 + \tau^2), & \sigma = 0,5 \quad u \in C_3^4, \\ O(h^4 + \tau^2), & \sigma = \sigma_*, \quad u \in C_3^6, \\ O(h^2 + \tau), & \sigma \neq 0,5, \sigma \neq \sigma_*, \quad u \in C_2^4. \end{cases} \quad (35)$$

До сих пор всюду шла речь об устойчивости и сходимости в среднем, т. е. в сеточной норме $L_2(\omega_h)$. Между тем для практики важно иметь равномерную, т. е. в норме $\|y^j - u^j\|_C = \max_{\lambda \in \omega_h} |y^j - u^j|$, оценку для погрешности решения.

7. Устойчивость и сходимость в C . Для получения равномерной оценки решения разностной задачи (16) можно воспользоваться одним из трех методов: 1) принципом максимума, 2) энергетическим методом, который позволяет установить (при помощи теорем вложения) устойчивость в C по правой части, 3) представлением решения в «интегральной» форме через сеточную функцию мгновенного точечного источника (функцию Грина).

Чтобы воспользоваться принципом максимума, в частности теоремой 3 из гл. I, § 2, запишем задачу (II) с однородными граничными условиями (схему (16)) в виде

$$\begin{aligned} \sigma \tau \hat{L} \hat{y} - \hat{y} &= -y - (1 - \sigma) \tau \hat{L} y - \tau \varphi = -F, \\ \hat{y}_0 &= 0, \quad \hat{y}_N = 0, \quad y_i^0 = u_0(x_i) \end{aligned} \quad (36)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma \gamma \hat{y}_{i-1} - (2\sigma\gamma + 1) \hat{y}_i + \sigma\gamma \hat{y}_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ F_i &= (1 - \sigma) \gamma y_{i-1} + (1 - 2(1 - \sigma)\gamma) y_i + (1 - \sigma) \gamma y_{i+1} + \tau \varphi_i, \\ \gamma &= \tau/h', \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (37)$$

Указанная теорема утверждает, что для решения разностного уравнения

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad |A_i| \neq 0, \quad |B_i| \neq 0,$$

справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C,$$

если только

$$D_i = |C_i| - |A_i| - |B_i| > 0.$$

Для задачи (36) эти условия ($|A_i| \neq 0, |B_i| \neq 0, D_i > 0$) выполнены при $\sigma > 0$, причем $D_i = 1$, так что для решения уравнения (37) верна оценка

$$\|\hat{y}\|_C \leq \|F\|_C, \quad \text{если } \sigma \geq 0$$

(при $\sigma = 0 \hat{y}_i = F_i$).

Замечая, что

$$\|F\|_C \leq \|y\|_C + \tau \|\varphi\|_C \quad \text{при } 1 - 2(1 - \sigma)\gamma \geq 0,$$

получаем для схемы (36) неравенство

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C \quad (38)$$

при условии

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)}. \quad (39)$$

Суммируя (38) по $j' = 0, 1, 2, \dots, j$, приходим к оценке решения задачи (16):

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C. \quad (40)$$

Тем самым доказано, что схема (16) устойчива по начальным данным и по правой части при условии (39).

Применяя априорную оценку (40) к задаче (III), получаем

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\|_C.$$

Отсюда следует, что схема (II) равномерно сходится с той же скоростью, что и в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ (см. (35)), если только выполнено условие (39).

Условие устойчивости (39) в C для явной схемы ($\sigma = 0$)

$$\tau \leq h^2/2$$

совпадает с условием устойчивости (25) в $L_2(\omega_h)$, полученным ранее для случая $\sigma < 0,5$. Схема с опережением ($\sigma = 1$) абсолютно устойчива в C . Симметричная схема ($\sigma = 0,5$) устойчива в C при $\tau \leq h^2$.

8. Метод энергетических неравенств. Используем описанный в гл. II метод энергетических неравенств для исследования устойчивости схемы с весами (II).

Проиллюстрируем этот метод сначала на примере дифференциального уравнения. Рассмотрим задачу (I) с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \quad (41)$$

Введем скалярное произведение и норму

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — функции, заданные при $0 \leq x \leq 1$ и равные нулю при $x = 0, x = 1$. Умножим уравнение на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Интегрируя второе слагаемое по частям и учитывая равенство $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^1 = 0$, находим

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 = \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши—Буняковского и ε -неравенством

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + 1/(4\varepsilon) b^2$$

при $\varepsilon = 1$:

$$\left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \leq \left| \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \|f\| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|f\|^2.$$

Используя эту оценку, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f(x, t)\|^2,$$

откуда, после интегрирования по t , следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} (0) \right\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^t \|f(t')\|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} (0) \right\| + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{0 < t < T} \|f(t)\|. \end{aligned}$$

Учитывая затем, что $\|u\|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq 0,5 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|$, получим

$$\|u(t)\|_C \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u(0)}{\partial x} \right\| + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|.$$

Получим теперь аналогичную оценку для разностной задачи (16). Введем, как обычно, скалярные произведения и нормы

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y]}.$$

Пользуясь тождествами

$$y = \frac{1}{2} (\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2} y_t, \quad \hat{y} = \frac{1}{2} (\hat{y} + y) + \frac{\tau}{2} y_t, \\ \sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y = (\sigma - 0,5) \tau y_t + 0,5 (\hat{y} + y),$$

перепишем (16б) в виде

$$y_t - (\sigma - 0,5) \tau \Lambda y_t - 0,5 \Lambda (\hat{y} + y) = \varphi, \quad (42) \\ y(x, 0) = 0, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0.$$

Умножим уравнение (42) на $2\tau y_t h = 2(\hat{y} - y)h$ и просуммируем полученное равенство по внутренним узлам $x = ih$ сетки ω_h :

$$2\tau \|y_t\|^2 - 2(\sigma - 0,5) \tau^2 (\Lambda y_t, y_t) - (\Lambda (\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau (\varphi, y_t). \quad (43)$$

Пользуясь разностной формулой Грина (см. стр. 110)

$$(\Lambda v, w) = (v_{\bar{x}x}, w) = - (v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}), \quad v_0 = w_0 = 0, \quad v_N = w_N = 0,$$

при $v = y_t$, $w = y_t$ и $v = \hat{y} + y$, $w = \hat{y} - y$ соответственно, учитывая затем, что $y_0 = y_N = 0$, будем иметь

$$(\Lambda y_t, y_t) = - \|y_{\bar{x}x}\|^2,$$

$$(\Lambda (\hat{y} + y), \hat{y} - y) = - (\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}, \hat{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}}) = - (\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 - \|y_{\bar{x}}\|^2).$$

Подставив эти выражения в (43), получим *энергетическое тождество*

$$2\tau (\|y_t\|^2 + (\sigma - 0,5) \tau \|y_{\bar{x}x}\|^2) + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau (\varphi, y_t). \quad (44)$$

Оно справедливо при любых σ . Предположим, что $\sigma \geq \sigma_0$. Рассмотрим выражение

$$J = \|v\|^2 + (\sigma - 0,5) \tau \|v_{\bar{x}}\|^2, \quad \text{где } v = y_t,$$

и покажем, что $J \geq 0$ при $\sigma \geq \sigma_0$. Нам понадобится оценка (см. гл. II, § 3)

$$\|v_x\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|v\|^2. \quad (45)$$

Итак, пусть $\sigma \geq \sigma_0 = 0,5 - h^2/(4\tau)$. Тогда

$$J = \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_0) \tau \|v_x\|^2 + (\sigma_0 - 0,5) \tau \|v_x\|^2 \geq \|v\|^2 - \frac{h^2}{4} \|v_x\|^2 \geq 0$$

в силу (45). Отсюда и из (44) следует *энергетическое неравенство*

$$\|\hat{y}_x\|^2 \leq \|y_x\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t) \text{ при } \sigma \geq \sigma_0.$$

Если $\varphi = 0$, y — решение задачи (16a), то $\|y_x^{j+1}\| \leq \dots \leq \|y_x^0\|$, т. е. схема (16) при $\sigma \geq \sigma_0$ устойчива по начальным данным в норме $\|y\|_{(1)} = \|y_x\|$, являющейся сеточным аналогом нормы \hat{W}_2^1 .

Однако нас интересует устойчивость по правой части. Пусть

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (46)$$

Покажем, что

$$J \geq \varepsilon \|v\|^2 \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_\varepsilon. \quad (47)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} J &= \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_\varepsilon) \tau \|v_x\|^2 + (\sigma_\varepsilon - 0,5) \tau \|v_x\|^2 \geq \\ &\geq \|v\|^2 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4} \|v_x\|^2 \geq \|v\|^2 - (1-\varepsilon) \|v\|^2 = \varepsilon \|v\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя (47) в (44), получим *энергетическое неравенство*

$$2\tau\varepsilon \|y_t\|^2 + \|\hat{y}_x\|^2 \leq \|y_x\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t), \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon. \quad (48)$$

Воспользуемся теперь неравенством Коши — Буняковского и ε -неравенством

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\| \|y_t\| \leq 2\tau\varepsilon \|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2. \quad (49)$$

После подстановки (49) в (48) будем иметь

$$\|y_x^{j+1}\|^2 \leq \|y_x^j\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi^{j'}\|^2.$$

Просуммируем по $j' = 0, 1, \dots, j$ и учтем, что $y^0 = 0$:

$$\|y_x^{j+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2.$$

Согласно лемме 1, гл. II, § 3 имеем $\|y\|_C \leq 0,5 \|y_x\|$, поэтому

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \frac{1}{2\sqrt{2e}} \left[\sum_{i'=0}^j \tau \|\varphi^{i'}\|^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma \geq \sigma_e.$$

Применим эту оценку к задаче (III):

$$\|z^{j+1}\|_C \leq M_2 \max_{0 \leq i' \leq j} \|\varphi^{i'}\|, \quad M_2 = \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2e}}, \quad \sigma \geq \sigma_e.$$

Отсюда следует равномерная сходимость схемы (II):

$$\|y^j - u^j\|_C \leq \begin{cases} M(h^2 + \tau) & \text{при } \sigma > 0,5, u \in C_2^4, \\ M(h^2 + \tau^2) & \text{при } \sigma = 0,5, u \in C_3^4, \\ M(h^4 + \tau^2) & \text{при } \sigma = \sigma_*, u \in C_3^6. \end{cases}$$

Для явной схемы ($\sigma = 0$) из (46) не следует равномерная сходимость при условии $\tau \leq h^2/2$. Однако для нее можно воспользоваться полученной ранее, в п. 7, априорной оценкой

$$\|y^j\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{i'=0}^{j-1} \tau \|\varphi^{i'}\|_C, \quad \tau \leq \frac{h^2}{2},$$

так, что

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \sum_{i'=0}^j \tau \|\varphi^{i'}\|_C.$$

Отсюда и следует равномерная сходимость явной схемы со скоростью $O(\tau + h^2)$.

9. Краевые условия третьего рода. Краевые условия первого рода, которые мы рассматривали до сих пор, удовлетворяются на сетке точно.

В гл. II было показано, как аппроксимировать третье краевое условие для схемы с опережением ($\sigma = 1$) и явной схемы ($\sigma = 0$), чтобы обеспечить порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Здесь мы рассмотрим схему с весами (II) с произвольным σ .

Пусть при $x = 0$ задано краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} > 0. \quad (50)$$

Разностное краевое условие будем писать на четырехточечном шаблоне, состоящем из узлов $(0, t_{j+1})$, (h, t_{j+1}) , $(0, t_j)$, (h, t_j) . Покажем, что разностное условие

$$\sigma(\hat{y}_x - \beta_1 \hat{y})_0 + (1 - \sigma)(y_x - \beta_1 y)_0 = 0,5 h y_{t,0} - \tilde{\mu}_1, \quad \tilde{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 + 0,5 h \bar{f}_0, \quad (51)$$

где $\bar{f}_0 = f(0, t_{j+1/2})$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1(t_{j+1/2})$, аппроксимирует условие (50) на решении $u = u(x, t)$ уравнения (3), удовлетворяющем условию (50), причем с тем же порядком, с которым при данном значении σ схема (II) аппроксимирует уравнение (3).

Подставим $y = z + u$ в (51):

$$\sigma(\bar{z}_x - \beta_1 \bar{z})_0 + (1 - \sigma)(z_x - \beta_1 z)_0 = 0,5h z_{t,0} - \bar{v}_1, \quad (52)$$

где

$$\bar{v}_1 = \sigma(\bar{u}_x - \beta_1 \bar{u})_0 + (1 - \sigma)(u_x - \beta_1 u)_0 - 0,5h u_{t,0} + \bar{\mu}_1$$

— погрешность аппроксимации условия (50) разностным условием (51) на решении u .

Разлагая u в окрестности узла $(0, t_j + 0,5\tau)$ по формуле Тейлора и обозначая \bar{v}_0 значения функции v в этом узле, получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = & (\bar{u}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0 + \bar{\mu}_1)_0 + \\ & + (\sigma - 0,5) \tau (\bar{u}' - \beta_1 \bar{u})_0 - 0,5h \bar{u}'_0 + 0,5h \bar{u}'_0 + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Подставим сюда $\bar{u}'_0 = \beta_1 \bar{u}_0 - \bar{\mu}_1$ и $\bar{u}'_0 = \bar{u}_0 - \bar{f}_0$ из уравнения

$$\bar{v}_1 = (\sigma - 0,5) \tau (\bar{u}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0) + O(\tau^2 + h^2).$$

Отсюда видно, что

$$\bar{v}_1 = O(h^2 + \tau) \text{ при } \sigma \neq 0,5, \quad \bar{v}_1 = O(h^2 + \tau^2) \text{ при } \sigma = 0,5. \quad (53)$$

Нетрудно проверить, что краевое условие при $x = 1$

$$-\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_2 u(1, t) - \bar{\mu}_2(t), \quad \beta_2 = \text{const} > 0, \quad (54)$$

аппроксимируется с тем же порядком разностным условием

$$-\left[\sigma(\bar{y}_x + \beta_2 \bar{y})_N + (1 - \sigma)(y_x + \beta_2 y)_N\right] = 0,5h y_{t, N} - \bar{\mu}_2, \quad (55)$$

где

$$\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + 0,5h \bar{f}_N, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2(t_{j+1/2}), \quad \bar{f}_N = \bar{f}(1, t_{j+1/2}).$$

Выбирая

$$\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + \frac{h^2}{12} \bar{\mu}_1 + \frac{h^2}{6} (\bar{f}'_0 - \beta_1 \bar{f}_0) + \frac{h^2}{2} \rho_1 \Phi_0,$$

$$\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + \frac{h^2}{12} \bar{\mu}_2 - \frac{h^2}{6} (\bar{f}'_N + \beta_2 \bar{f}_N) + \frac{h^2}{2} \rho_2 \Phi_N,$$

$$\Phi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \bar{f}''$$

и заменяя соответственно $0,5hy_{t,0}$, $0,5hy_{t,N}$ в (51), (55) на $0,5h\rho_1y_{t,0}$, $0,5h\rho_2y_{t,N}$, где $\rho_k = 1 + h\beta_k/3$, $k = 1, 2$, получим разностные граничные условия, имеющие при $\sigma = \sigma_* = 0,5 - h^2/(12\tau)$ аппроксимацию $O(h^4 + \tau^2)$.

Вводя обозначения

$$\Lambda^-y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \Lambda^+y = -\frac{y_x + \beta_2 y}{0,5h},$$

запишем разностные краевые условия (51) и (55) в том же виде, что и схему (II):

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda^-(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y) + \varphi^- \quad \text{при } x=0, \\ y_t &= \Lambda^+(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y) + \varphi^+ \quad \text{при } x=1, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\varphi^- = 2\tilde{\mu}_1/h$, $\varphi^+ = 2\tilde{\mu}_2/h$.

При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем разностную аппроксимацию краевых условий второго рода. Порядок аппроксимации остается тем же самым, что и для третьей краевой задачи.

Приведем условие (51) к счетному (т. е. удобному для вычислений) виду. Разрешая (51) относительно $\hat{y}_0 = y_0^{i+1}$, получим

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \kappa_1 \hat{y}_1 + v_1, \quad \kappa_1 = \frac{\sigma}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \sigma(1 + \beta_1 h) + \frac{h^2}{2\tau}, \\ v_1 &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ (1-\sigma)y_1 + \left[\frac{h^2}{2\tau} - (1-\sigma)(1 + \beta_1 h) \right] y_0 + h\tilde{\mu}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Условие (55) приводится к виду

$$\begin{aligned} \hat{y}_N &= \kappa_2 \hat{y}_{N-1} + v_2, \quad \kappa_2 = \frac{\sigma}{\Delta_2}, \quad \Delta_2 = \sigma(1 + \beta_2 h) + \frac{h^2}{2\tau}, \\ v_2 &= \frac{1}{\Delta_2} \left\{ (1-\sigma)y_{N-1} + \left[\frac{h^2}{2\tau} - (1-\sigma)(1 + \beta_2 h) \right] y_N + h\tilde{\mu}_2 \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

Отсюда видно, что $0 < \kappa_\alpha \leq 1$ при $\beta_\alpha \geq 0$, $\sigma > 0$, $\alpha = 1, 2$. Для определения \hat{y} на новом слое получаем разностное уравнение (8) с краевыми условиями (57) и (58). Эта задача решается методом прогонки (см. гл. I, § 2, п. 5).

Устойчивость схемы (II) с краевыми условиями третьего рода устанавливается либо методом разделения переменных, либо методом энергетических неравенств, либо на основе принципа максимума.

10. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности. Одной из первых схем, применявшихся для численного решения уравнения теплопроводности $du/dt = \partial^2 u / \partial x^2$, была явная трехслойная схема Ричардсона

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda y^j \quad \text{или} \quad y_t = \Lambda y, \quad (59)$$

где

$$y_i^j = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad y = y^j, \quad \Lambda y = y_{xx}.$$

Эта схема, как нетрудно убедиться, имеет второй порядок аппроксимации по τ и h , $\psi = \Lambda u - u_i^j = O(\tau^2 + h^2)$. Однако она является абсолютно неустойчивой (т. е. неустойчивой при любом законе стремления h и τ к нулю).

Перепишем уравнение (59) в виде

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}. \quad (60)$$

Если в правой части уравнения (60) заменить $2y_i^j$ суммой $y_i^{j+1} + y_i^{j-1}$, то получим трехслойную схему «ромб» (схему Дюфорта и Франкела):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i+1}^j}{h^2}, \quad (61)$$

которая остается явной относительно y_i^{j+1} и является абсолютно (при любых h и τ) устойчивой. Схема «ромб» может быть записана в виде

$$y_i^j + \frac{\tau^2}{h^2} y_{i,t} = \Lambda y, \quad (62)$$

где

$$y_{i,t} = (y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1})/\tau^2.$$

В самом деле, преобразуем правую часть уравнения (61):

$$\frac{y_{i-1}^j - \hat{y}_i^j - \check{y}_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} - \frac{\hat{y}_i^j - 2y_i^j + \check{y}_i^j}{h^2} = y_{xx} - \frac{\tau^2}{h^2} y_{i,t}.$$

Подставляя это выражение в (61), получаем (62). Таким образом, схема «ромб» получается из схемы Ричардсона добавлением к левой части (61) члена $\frac{\tau^2}{h^2} y_{i,t}$, обеспечивающего устойчивость. Доказательство устойчивости схемы (62) следует из общей теории гл. VI, поэтому мы его здесь не касаемся. Погрешность аппроксимации схемы (62) есть

$$\begin{aligned} \psi = \Lambda u - u_i^j - \frac{\tau^2}{h^2} u_{i,t} &= u'' - \dot{u} - \frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= -\frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что схема «ромб» обладает условной аппроксимацией

$$\Psi = O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2) = O(h^2) \quad \text{при } \tau = O(h^2).$$

Если взять $\tau = \alpha h (1 + O(h))$, где $\alpha = \text{const}$, то очевидно, что схема (62) аппроксимирует уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обычно для уравнения (3) используются неявные трехслойные схемы с весами:

а) симметричные схемы

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, \quad (63)$$

б) несимметричные схемы

$$y_t + \sigma \tau y_{tt} = \Lambda \hat{y} + \varphi. \quad (64)$$

Уравнения (63) и (64) содержат три слоя (t_{j-1}, t_j, t_{j+1}) . Поэтому они пишутся при $t_j \geq \tau$, $j \geq 1$. Значение $y(x, 0) = u_0(x)$ известно, значение $y(x, \tau)$ надо задавать дополнительно, например, можно положить

$$y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad \text{или} \quad y(x, \tau) = y(x, 0) + \tau \bar{u}_0(x),$$

где $\bar{u}_0(x) = u_0''(x) + f(x, 0)$ выбирается из условия (см. гл. II, § 1)

$$y(x, \tau) - u(x, \tau) = O(\tau^2).$$

Иногда для определения $y(x, \tau)$ используют двухслойные схемы.

Так как

$$\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u} = u + \sigma \tau^2 u_{tt} = u + O(\tau^2),$$

то симметричная схема (63) при любом σ имеет второй порядок аппроксимации по τ и h . Напишем выражение погрешности аппроксимации для схемы (64)

$$\begin{aligned} \Psi = \Lambda \hat{u} + \varphi - (u_t + \sigma t u_{tt}) &= L \hat{u} + \varphi - (\hat{u} - 0,5 \tau \hat{u} + \sigma \tau \hat{u}) + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= (L \hat{u} + \hat{f} - \hat{u}) + (\varphi - \hat{f}) - (\sigma - 0,5) \tau \hat{u} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (65)$$

Отсюда видно, что и для схемы (64)

$$\Psi = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{при } \sigma = 0,5 \quad \varphi = \hat{f},$$

$$\Psi = O(h^2 + \tau) \quad \text{при } \sigma \neq 0,5 \quad \varphi = \hat{f}.$$

Выписывая в (65) члены $O(h^2)$ и учитывая уравнение $\dot{u} = u'' + f$, нетрудно убедиться в том, что схема (64) имеет аппроксимацию $O(h^4 + \tau^2)$ при

$$\sigma = 0,5 + h^2/(12\tau) \quad \text{и} \quad \varphi = \hat{f} + \frac{h^2}{12}(\hat{f}'' + \hat{f}).$$

Для определения \hat{y} из (63) и (64) получаем трехточечные уравнения

$$A\hat{y}_{i-1} - C\hat{y}_i + B\hat{y}_{i+1} = -F_i \quad (66)$$

с правой частью $-F_i$, зависящей от y , \hat{y} , φ , и с обычными краевыми условиями при $i=0$, $i=N$. Эта задача решается методом прогонки. В процессе счета надо хранить в оперативной памяти ЭВМ значения y и \hat{y} для двух предыдущих слоев. В случае двухслойных схем достаточно запоминать лишь один предыдущий слой.

Устойчивость трехслойных схем доказывается в гл. VI. Приведем лишь достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &> 1/4 \text{ для симметричной схемы (63),} \\ \sigma &\geq -0,5 \text{ для схемы (64).} \end{aligned}$$

Так же, как и в случае двухслойных схем, можно построить разностные краевые условия повышенного порядка аппроксимации для граничных условий третьего рода (50), (54). Для симметричной схемы (63) краевые условия порядка аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} y_i &= \Lambda^-(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}) + \varphi^-, \quad i=0, \\ y_i &= \Lambda^+(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}) + \varphi^+, \quad i=N, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^-y &= \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \Lambda^+y = -\frac{y_x + \beta_2 y}{0,5h}, \\ \varphi^- &= f(0, t) + \frac{\mu_1(t)}{0,5h}, \quad \varphi^+ = f(1, t) + \frac{\mu_2(t)}{0,5h}. \end{aligned}$$

Выпишем, далее, разностные краевые условия третьего рода для несимметричной схемы (64)

$$\begin{aligned} \rho_1(y_i + \sigma t y_{ii}) &= \Lambda^-\hat{y} + \varphi^-, \quad i=0, \\ \rho_2(y_i + \sigma t y_{ii}) &= \Lambda^+\hat{y} + \varphi^+, \quad i=N. \end{aligned} \quad (67)$$

Эти краевые условия имеют аппроксимацию $O(\tau + h^2)$ при любом σ , если положить

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \varphi^- = f(0, t + \tau) + \frac{\mu_1(t + \tau)}{0,5h}, \quad \varphi^+ = f(1, t + \tau) + \frac{\mu_2(t + \tau)}{0,5h}.$$

Если при этом $\sigma = 0,5$, то краевые условия (67) имеют аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$. Наконец, если положить

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau}, \quad \rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3},$$

$$\varphi^- = \rho_1 \varphi + \frac{v_1}{0,5h}, \quad \varphi^+ = \rho_2 \varphi + \frac{v_2}{0,5h},$$

$$\varphi = f(x, t + \tau) + \frac{h^2}{12} (f''(x, t + \tau) + \dot{f}(x, t + \tau)),$$

$$v_1 = \mu_1(t + \tau) + \frac{h^2}{6} (\dot{\mu}_1(t + \tau) + f'(0, t + \tau) - \beta_1 \cdot f(0, t + \tau)),$$

$$v_2 = \mu_2(t + \tau) + \frac{h^2}{6} (\dot{\mu}_2(t + \tau) - f'(1, t + \tau) - \beta_2 \cdot f(1, t + \tau)),$$

то получим схему (64), имеющую точность $O(\tau^2 + h^4)$ (погрешность аппроксимации в узлах $x = 0, x = 1$ есть $O\left(\frac{\tau^2 + h^4}{h}\right)$).

§ 2. Асимптотическая устойчивость

1. ρ -устойчивость. При изучении схем для уравнения теплопроводности мы убедились, что простейшим способом ослабления условия устойчивости (ограничения сверху на шаг по времени τ) является переход к неявным схемам.

Все неявные схемы с весом верхнего слоя

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$$

устойчивы. В частности, схемы с $\sigma = 0,5$ и $\sigma = 1$ абсолютно устойчивы.

В конечном счете нас интересует точность, с которой мы находим приближенное решение дифференциального уравнения. Понятно стремление добиться заданной точности с затратой как можно меньшего числа машинных операций (арифметических и логических), т. е. затратой как можно меньшего машинного времени. Минимизация числа операций может быть достигнута за счет усовершенствования разностных схем. Естественно добиваться улучшения качества схем, требуя, чтобы разностная схема как можно лучше моделировала в пространстве сеточных функций основные свойства дифференциального уравнения.

Одним из таких типичных свойств является асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение решения дифференциального уравнения. Поясним это на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Решение этой задачи находится методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi kx,$$

где

$$\lambda_k = k^2 \pi^2, \quad c_k = (u_0, X_k) = \int_0^1 u_0(x) X_k(x) dx,$$

$$\|u(x, t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t} \|X_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t},$$

так как $\|X_k\| = 1$.

В силу возрастания λ_k с ростом k имеем $\lambda_k > \lambda_1$ и

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = e^{-2\lambda_1 t} \|u_0\|^2,$$

т. е. для решения задачи (1) верна оценка

$$\|u(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|u(0)\| \quad \text{при любых } t > 0. \quad (2)$$

С ростом t гармоники $u_{(k)} = c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x)$ при $k > 1$ затухают быстрее, чем первая гармоника, так что при достаточно больших значениях t имеем

$$u(x, t) \approx c_1 e^{-\lambda_1 t} X_1(x), \quad c_1 \neq 0. \quad (3)$$

Эта стадия процесса называется *регулярным режимом*.

Будем требовать, чтобы решение разностной схемы для задачи (1) также обладало аналогичными свойствами (2) и (3). В этом случае схему будем называть *асимптотически устойчивой*.

Обратимся к схеме с весами

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad x \in \omega_h, \quad t = j\tau > 0,$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$\Lambda y = y_{xx}.$$

Решение этой задачи было в § 1, п. 4 найдено методом разделения переменных:

$$y_t^j = y(x_i, t_j) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k q_k^j X_k(x_i),$$

где

$$q_k = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_k^h}{1 + \sigma \tau \lambda_k^h}, \quad \lambda_k^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2},$$

$$X_k(x_i) = \sqrt{2} \sin \pi k x_i,$$

$$c_k = (u_0, X_k), \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

В силу ортонормированности $\{X_k\}$ имеем

$$\|y^j\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2 q_k^{2j} \leq \rho^{2j} \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2 = \rho^{2j} \|y^0\|^2,$$

т. е.

$$\|y^j\| \leq \rho^j \|y^0\|, \quad (5)$$

где

$$\rho = \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k|.$$

Будем говорить, что схема (4) ρ -устойчива по начальным данным, если выполнена оценка (5).

Оценка вида (3) возможна для решения задачи (4), если $\rho < 1$.

2. Асимптотическая устойчивость. Найдем условия, при которых решение y^j разностной задачи (4) выходит на регулярный режим (при больших $t_j = j\tau$):

$$y_i^j = y(x_i, t_j) \approx c_1 q_1^j X_1(x_i). \quad (6)$$

Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда преобладает первая гармоника, т. е. $\max_k |q_k|$ достигается при $k=1$, так что

$$\max_{1 \leq k \leq N-1} q_k = \rho = \left| \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_1^h}{1 + \sigma \tau \lambda_1^h} \right|. \quad (7)$$

Чтобы найти условия, при которых справедлива формула (7), рассмотрим функцию

$$f(\mu) = \left(\frac{1 - (1 - \sigma) \mu_1}{1 + \sigma \mu_1} \right)^2 - \left(\frac{1 - (1 - \sigma) \mu}{1 + \sigma \mu} \right)^2,$$

где $\mu_1 = \tau \lambda_1^h$, $\mu = \tau \lambda_k^h \geq \mu_1$, и потребуем, чтобы $f(\mu) \geq 0$ при $\mu \geq \mu_1$. Сначала преобразуем выражение для $f(\mu)$:

$$f(\mu) = f_1(\mu) f_2(\mu) / K,$$

$$K = (1 + \sigma \mu_1)^2 (1 + \sigma \mu)^2 > 0,$$

$$f_1(\mu) = (1 - (1 - \sigma) \mu_1) (1 + \sigma \mu) - (1 - (1 - \sigma) \mu) (1 + \sigma \mu_1) = \mu - \mu_1 \geq 0,$$

$$f_2(\mu) = (1 - (1 - \sigma) \mu_1) (1 + \sigma \mu) + (1 - (1 - \sigma) \mu) (1 + \sigma \mu_1) = 2 + (2\sigma - 1) (\mu + \mu_1) - 2(1 - \sigma) \sigma \mu \mu_1.$$

Отсюда видно, что

$$f_2(\mu) = 2 + \mu + \mu_1 > 0 \quad \text{при } \sigma = 1,$$

$$f_2(\mu) = 2 - (\mu + \mu_1) \geq 2 - \tau(\Delta + \delta) \geq 0 \quad \text{при } \sigma = 0,$$

если $\tau \leq \bar{\tau}_0$, где $\bar{\tau}_0 = \frac{2}{\delta + \Delta}$, $\delta = \lambda_1^h$, $\Delta = \lambda_{N-1}^h$.

Для симметричной схемы ($\sigma = 0,5$)

$$f_2(\mu) = 2 - 0,5\mu\mu_1 \geq 2 - 0,5\mu_{N-1}\mu_1 = 2 - 0,5\tau^2\Delta\delta \geq 0,$$

если $\tau \leq \tau_0$, $\tau_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$.

Таким образом, имеем

$$\rho = \frac{1}{1 + \tau\delta} \quad \text{при } \sigma = 1 \quad \text{и любых } \tau > 0,$$

$$\rho = 1 - \tau\delta \quad \text{при } \sigma = 0 \quad \text{и } \tau \leq \bar{\tau}_0 = \frac{2}{\delta + \Delta},$$

$$\rho = \frac{1 - 0,5\tau\delta}{1 + 0,5\tau\delta} \quad \text{при } \sigma = 0,5 \quad \text{и } \tau \leq \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}.$$

В этом случае верна оценка

$$\|y'\| \leq \rho^j \|y^0\|,$$

причем $\rho^j \rightarrow 0$ при $t_j = j\tau \rightarrow \infty$.

Представим ρ в виде

$$\rho = e^{-\mu_1 + \tau\varphi}, \quad \tau\varphi = \mu_1 - \ln \frac{1}{\rho}, \quad \text{где } \mu_1 = \tau\delta.$$

Пусть $\sigma = 0,5$, тогда

$$\tau\varphi = \mu_1 - \ln \frac{1 + 0,5\mu_1}{1 - 0,5\mu_1} = -\left(\frac{\mu_1^3}{12} + \frac{\mu_1^6}{80} + \dots\right) = -\tau\left(\frac{\tau^2\delta^3}{12} + \frac{\tau^4\delta^5}{80} + \dots\right).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^j = \exp\left(-\delta t_j - \left(\frac{\delta^3\tau^2}{12} + \frac{\delta^5\tau^4}{80} + \dots\right)t_j\right) < e^{-\delta t_j}.$$

Регулярный режим для симметричной схемы ($\sigma = 0,5$) имеет вид

$$y(x_i, t_j) \approx c_1 e^{-\delta t_j + \beta t_j} X_1(x_i),$$

где

$$\beta = -\left(\frac{\tau^2\delta^3}{12} + \frac{\tau^4\delta^5}{80} + \dots\right) = O(\tau^2), \quad \delta = \lambda_1^h.$$

Для чисто неявной схемы

$$\rho = \frac{1}{1 + \tau\delta} > e^{-\tau\delta}, \quad \rho^j = e^{-\delta t_j + \beta t_j},$$

где

$$\beta = \frac{\tau \delta^2}{2} - \frac{\tau^2 \delta^3}{3} + \dots = O(\tau).$$

В этом случае ρ' плохо аппроксимирует $e^{-\delta t_j}$ по сравнению со схемой $\sigma = 0,5$.

Приведем пример. Пусть $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}$ и $\tau \delta = 2 \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}$: Предполагая, что $\delta/\Delta = 0,01$, вычислим

$$\rho|_{\sigma=0.5} = \rho_{0.5} = \frac{0.9}{1.1} = 0,8182, \quad \rho|_{\sigma=1} = \rho_1 = \frac{1}{1.2} = 0,8333$$

и сравним эти значения с $e^{-\tau \delta} = e^{-0.2} = 0,8187$,

$$\rho_{0.5} = e^{-\tau \delta} (1 - 0,0006), \quad \rho_1 = e^{-\tau \delta} (1 + 0,018).$$

Отсюда следует, что при $\delta t_j = 1$ ($j = 5$)

$$\rho'_{0.5} \approx e^{-\delta t_j} \cdot 0,997, \quad \rho'_1 \approx e^{-\delta t_j} \cdot 1,09,$$

т. е. при $\delta t_j = 1$ величина $\rho'_{0.5}$ отличается от $e^{-\delta t_j}$ на 0,3%, а ρ'_1 — на 9%.

Из приведенного примера видно, что хотя схема с $\sigma = 1$ абсолютно устойчива и может быть использована при любых τ , однако она недостаточно точна при больших τ в стадии регулярного режима. Чтобы поддерживать точность (относительную — здесь только такая мера точности имеет смысл), надо с ростом t_j уменьшать шаг $\tau = \tau_j$, что не позволяет в полной мере использовать основное достоинство схемы с $\sigma = 1$ — устойчивость при любых $\tau > 0$.

Симметричная схема ($\sigma = 0,5$), будучи абсолютно устойчивой в обычном смысле

$$\|y'\| \leq \|y^0\|,$$

является условно асимптотически устойчивой при $\tau \leq \tau_0$.

Что касается явной схемы ($\sigma = 0$), то условие асимптотической устойчивости $\tau \leq \frac{2}{\delta + \Delta}$ практически совпадает с условием $\tau \leq \frac{2}{\Delta}$ обычной устойчивости, если $\frac{\delta}{\Delta}$ мало.

Для уравнения теплопроводности

$$\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \delta + \Delta = \frac{4}{h^2},$$

и условие устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ означает, что $\tau \leq \frac{2}{\delta + \Delta}$.

В случае симметричной схемы $\tau_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \frac{h^2}{\sin \pi h} \approx \frac{h}{\pi}$, и условие $\tau < h/\pi$ не является обременительным. В этом случае характерное отношение $\gamma = \tau/h^2 < 1/(\pi h)$, так что $\gamma < 10/\pi$ при $h = 1/10$, $\gamma < 100/\pi$ при $h = 1/100$.

Первое собственное значение $\lambda_1^h = \delta$ разностной задачи равно

$$\lambda_1^h = \delta = \pi^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 = \pi^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{3} + \frac{2}{45} \xi^4 + \dots \right),$$

где $\xi = \pi h/2$, так что

$$\lambda_1^h = 0,97\lambda_1 \text{ при } h = 1/10,$$

$$\lambda_1^h = 0,9997\lambda_1 \text{ при } h = 1/100, \text{ где } \lambda_1 = \pi^2.$$

Что произойдет, если для симметричной схемы ($\sigma = 0,5$) использовать шаг $\tau > \tau_0$, например, $\tau = m\tau_0$, $m > 1$? Тогда $\max_k |q_k|$ достигается при $k = N - 1$:

$$\rho = |q_{N-1}| = \frac{0,5\tau\Delta - 1}{0,5\tau\Delta + 1} = \frac{1 - 2/\tau\Delta}{1 + 2/\tau\Delta}.$$

Подставляя сюда

$$\frac{1}{\tau\Delta} = \frac{1}{m\tau_0\Delta} = \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} = \frac{\delta}{4m} \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \frac{\delta\tau_0}{4m} = \frac{\tau\delta}{4m^2} = \tau\bar{\delta},$$

получим

$$\rho = e^{-\tau\bar{\delta} + i\beta(\tau, \bar{\delta})}$$

где

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{4m^2}, \quad \beta = O(\tau^2).$$

Таким образом, при $m > 1$ симметричная схема ($\sigma = 0,5$) дает неправильную асимптотику

$$y(x_i, t_j) \approx c_{N-1} e^{-\frac{\delta}{4m^2} t_j} \tilde{X}_{N-1}(x_i),$$

где

$$\tilde{X}_{N-1}(x_i) = \sin \pi (N-1) x_i = \sin \pi (N-1) ih =$$

$$= \sin \pi (1-h) i = (-1)^{i-1} \sin \pi x_i = (-1)^{i-1} \tilde{X}_1(x_i),$$

так что

$$y(x_i, t_j) \approx c_{N-1} e^{-\frac{\delta}{4m^2} t_j} (-1)^{i-1} \tilde{X}_1(x_i) \quad (\tilde{X}_1(x_i) = \sin \pi x_i),$$

т. е. решение полностью искажается.

Отсюда ясно, что асимптотическая устойчивость схемы тесно связана с ее точностью. Нарушение асимптотической устойчивости приводит к потере точности схемы при больших временах.

С другой стороны, хотя схема с опережением ($\sigma = 1$) и асимптотически устойчива при любых τ , однако ее точность падает с ростом t_j , поскольку эта схема имеет первый порядок по t , и сохранение заданной точности возможно при уменьшении τ фактически до того же значения, при котором применима явная схема. Следовательно, схему с опережением нецелесообразно применять при решении задачи (1) на больших временных интервалах $0 \leq t \leq T$.

3. Схема второго порядка точности, безусловно устойчивая в асимптотическом смысле. Рассмотрим схему для уравнения теплопроводности, обладающую безусловной асимптотической устойчивостью и имеющую второй порядок точности.

Эта схема имеет вид

$$(E - 0,5\sigma\tau\Lambda) \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = (1 - 0,5\sigma) \Lambda y^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = 0,5\sigma\Lambda y^{j+1}, \quad (8)$$

где $\Lambda y = y_{xx}$, E — единичный оператор, $y^{j+1/2}$ — промежуточное значение, $\sigma = 2 - \sqrt{2}$.

При $i=0$ и $i=N$ заданы нулевые граничные условия

$$y_0^{j+1/2} = y_N^{j+1/2} = 0, \quad y_0^j = y_N^j = 0. \quad (9)$$

Исключим из (8) $y^{j+1/2}$. Для этого запишем уравнения в виде

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2} \Lambda \right) y^{j+1/2} = (E + \tau(1 - \sigma)\Lambda) y^j, \\ \left(E - \frac{\sigma\tau}{2} \Lambda \right) y^{j+1} = y^{j+1/2}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2} \Lambda \right)^2 y^{j+1} = (E + \tau(1 - \sigma)\Lambda) y^j. \quad (10)$$

Подставив сюда тождество

$$y^{j+1} = y^j + \tau \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} \quad \text{или} \quad \hat{y} = y + \tau y_t,$$

запишем схему (10) в виде

$$\left(E - \frac{\sigma\tau}{2} \Lambda \right)^2 y_t = \left(\Lambda - \frac{\sigma^2\tau}{4} \Lambda^2 \right) y. \quad (11)$$

Найдем погрешность аппроксимации схемы (11) на решении $u = u(x, t)$ уравнения (1):

$$\Psi = \Lambda u - \frac{\sigma^2 \tau}{4} \Lambda^2 u - u_t + \sigma \tau \Lambda u_t - \frac{\tau^2 \sigma^2}{4} \Lambda^2 u_t. \quad (12)$$

После подстановки в (12) выражений

$$\begin{aligned} u &= \frac{\bar{u} + u}{2} - \frac{\tau}{2} u_t = \bar{u} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + O(\tau^2), \quad \Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4), \\ \Lambda^2 u &= \Lambda(\Lambda u) = \Lambda(Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u(\xi, t)) = \Lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t) \right) = \\ &= L^2 u + O(h^4). \end{aligned}$$

где

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \bar{u} = u|_{t=t_{j+1/2}},$$

получим

$$\Psi = L\bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \tau \left(\frac{\sigma^2}{4} - \sigma + 0,5 \right) L^2 \bar{u} + O(h^4 + \tau^2).$$

Отсюда видно, что

$$\Psi = O(\tau^2 + h^4) \quad \text{при} \quad \sigma = 2 - \sqrt{2},$$

так как при этом значении σ

$$\frac{\sigma^2}{4} - \sigma + 0,5 = 0.$$

Будем искать решение уравнения (10) с однородными граничными условиями

$$y_0 = y_N = 0$$

методом разделения переменных, полагая

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} T_k^j X_k(x), \quad X_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x.$$

Подставляя это выражение в (10), получим уравнение для определения T_k^j :

$$(1 + 0,5 \sigma \tau \lambda_k^j)^2 T_k^{j+1} = (1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_k^j) T_k^j,$$

т. е.

$$T_k^{j+1} = q_k T_k^j,$$

где

$$q_k = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_k^j}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \tau \lambda_k^j\right)^2}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше для схемы с весами, приходим к неравенству

$$\|y^{j+1}\| \leq \rho \|y^j\| \leq \dots \leq \rho^{j+1} \|y^0\|,$$

где

$$\rho = \max_k |q_k|.$$

Покажем, что $\max_k |q_k|$ достигается при $k=1$, тогда

$$\rho = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \lambda_1^h}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \tau \lambda_1^h\right)^2},$$

где

$$\lambda_1^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Введем функцию

$$f(\mu) = \frac{1 - (1 - \sigma) \mu}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu\right)^2}$$

и покажем, что

$$|f(\mu)| - f(\mu_1) < 0 \quad \text{при } \mu > \mu_1, \quad \text{если } \mu_1 < 1.$$

Необходимо рассмотреть случай, когда $(1 - \sigma) \mu > 1$, так как в противном случае сразу получим, что

$$|f(\mu)| = f(\mu) < f(\mu_1), \quad \mu > \mu_1.$$

Преобразуем разность

$$\begin{aligned} f(\mu_1) - |f(\mu)| &= \frac{1 - (1 - \sigma) \mu_1}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu_1\right)^2} - \frac{(1 - \sigma) \mu - 1}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu\right)^2} = \\ &= \frac{1}{D} \left\{ 2 + (2\sigma - 1) \mu_1 + \frac{\sigma^2}{4} \mu_1^2 - ((1 - 2\sigma) + 2\sigma(1 - \sigma) \mu_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4} (1 - \sigma) \mu_1^2) \mu + \frac{\sigma^2}{4} (1 - (1 - \sigma) \mu_1) \mu^2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$D = \left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu\right)^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu_1\right)^2.$$

Учитывая, что $\sigma = 2 - \sqrt{2}$, $\sigma^2 = 4\sigma - 2$ и $\mu_1 < 1$, получим оценку снизу:

$$f(\mu_1) - |f(\mu)| >$$

$$\begin{aligned} &> \frac{1}{D} \left\{ 2 - (2\tau(1 - \sigma) + \frac{\sigma^2}{4}(1 - \sigma) - (2\sigma - 1)) \mu + \frac{\sigma^3}{4} \mu^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{D} \{2 - (6,5 - 10,5\sigma) \mu + (3,5\sigma - 2) \mu^2\}. \end{aligned}$$

Квадратный трехчлен в фигурных скобках равен $0,050\mu^2 - 0,349\mu + 2$ и имеет отрицательный дискриминант $d = 0,349^2 - 0,402 < 0$. Отсюда следует, что $f(\mu_1) - |f(\mu)| > 0$, т. е.

$$\rho = \frac{1 - (1 - \sigma) \mu_1}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \mu_1\right)^2} = \frac{1 - (1 - \sigma) \tau \delta}{\left(1 + \frac{\sigma}{2} \tau \delta\right)^2}$$

при ограничении $\mu_1 = \tau \delta < 1$, которое выполнено, если заменить его условием

$$\tau \lambda_1 = \tau \pi^2 < 1.$$

Нетрудно получить следующее разложение:

$$\ln \rho = -\mu_1 - \frac{\mu_1^3}{24,6} - \frac{\mu_1^4}{271,7} + \dots,$$

$$\rho = e^{-\tau \delta + \tau \beta},$$

$$\beta = -\frac{\tau^2 \delta^3}{24,6} - \frac{\tau^3 \delta^4}{271,7} + \dots$$

и, следовательно,

$$\rho^j < e^{-\delta t_j + \beta t_j} < e^{-\delta t_j}.$$

Тем самым доказано, что для схемы (8) справедлива априорная оценка

$$\|y^j\| \leq e^{-\delta t_j} \|y^0\|$$

при условии $\tau \delta < 1$.

4. Асимптотическая устойчивость трехслойной схемы. Трехслойная схема

$$\frac{3}{2}y_t - \frac{1}{2}y_{\bar{t}} + \hat{Ay} = 0, \quad A = A^*, \quad A \geq \delta E, \quad \delta > 0, \quad (13)$$

безусловно асимптотически устойчива при $\tau < 1/(2\delta)$. Запишем ее в виде

$$y_t + \tau y_{\bar{t}} + \hat{Ay} = 0.$$

Она имеет второй порядок аппроксимации в случае уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами ($\dot{u} = Lu$) (1):

$$\begin{aligned} \psi &= u_t + \tau u_{\bar{t}} + \hat{A}\dot{u} = \\ &= u_t + \tau u_{\bar{t}} - \Lambda u - \tau \Lambda u_t - \frac{\tau^2}{2} \Lambda u_{\bar{t}} = \\ &= \dot{u} + \tau \ddot{u} - Lu - \tau L\dot{u} - \frac{\tau^2}{2} L\ddot{u} + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= (\dot{u} - Lu) + \tau(\ddot{u} - L\dot{u}) + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2), \end{aligned}$$

так как $\dot{u} = Lu$, $\ddot{u} = L\dot{u}$.

Применяя метод разделения переменных

$$y_k^j = T_k(t_j) X_k,$$

где X_k — собственная функция оператора A :

$$AX_k = \lambda_k^h X_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

получаем

$$\frac{3}{2} T_k^{j+1} - 2T_k^j + \frac{1}{2} T_k^{j-1} + \lambda_k^h \tau T_k^{j+1} = 0,$$

или

$$(3 + 2\tau\lambda_k^h) T_k^{j+1} - 4T_k^j + T_k^{j-1} = 0.$$

Его решение ищем в виде

$$T_k^j = q_k^j.$$

Для q_k получаем квадратное уравнение

$$(3 + 2\mu) q^2 - 4q + 1 = 0, \quad \mu = \tau\lambda.$$

Индекс k мы пока опускаем.

Дискриминант квадратного уравнения

$$D = 1 - 2\mu.$$

Пусть $D < 0$. Тогда корни $q^{(1,2)}$ уравнения — комплексно сопряженные и $q^{(1)}q^{(2)} = |q|^2 = 1/(3 + 2\mu)$, т. е.

$$|q_k^{(1,2)}| = \frac{1}{\sqrt{3 + 2\tau\lambda_k}} < \frac{1}{\sqrt{3 + 2\tau\lambda_1}} = |q_1^{(1,2)}|.$$

Пусть $D > 0$. Тогда

$$q^{(1,2)} = \frac{2 \pm \sqrt{1 - 2\mu}}{3 + 2\mu}, \quad q^{(1)} > 0, \quad q^{(2)} > 0,$$

$$q^{(2)} = \frac{2 - \sqrt{1 - 2\mu}}{3 + 2\mu} < 1.$$

Покажем, что $|q_{k_1}^{(1)}| < |q_{k_2}^{(1)}|$ при $k_1 > k_2$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\mu) = \frac{2 + \sqrt{1 - 2\mu}}{3 + 2\mu}, \quad \text{где } \mu_1 \leq \mu \leq \mu_N.$$

Вычислим ее производную

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{d\mu} = -\frac{1}{(2 + \sqrt{1 - 2\mu}) \sqrt{1 - 2\mu}} - \frac{2}{3 + 2\mu} < 0.$$

Следовательно, $\max_{\mu_1 < \mu < \mu_N} \Phi(\mu)$ достигается при $\mu = \mu_1 = \tau\lambda_1$:

$$\max_{\mu_1 < \mu < \mu_N} \Phi(\mu) = \Phi(\mu_1) = \frac{2 + \sqrt{1 - 2\mu_1}}{3 + 2\mu_1}, \quad \text{если } 1 - 2\mu_1 > 0.$$

Может оказаться, что $D_k = 1 - 2\mu_k < 0$; тогда

$$|q_k^{(1,2)}| = \frac{1}{3+2\mu_k}.$$

Так как $\frac{1}{3+2\mu_k} < \Phi(\mu_k)$, то $\max_k |q_k^{(1,2)}|$ всегда достигается при $k=1$; он равен

$$\rho = \frac{2 + \sqrt{1 - 2\mu_1}}{3 + 2\mu_1} \text{ при } \mu_1 < 0,5.$$

В решении

$$y^j = \sum_{k=1}^N (\alpha_k (q_k^{(1)})^j + \beta_k (q_k^{(2)})^j) X_k$$

при больших j останется первая гармоника

$$y^j \approx \alpha_1 \rho^j X_1.$$

Рассмотрим

$$\rho^j = e^{-j \ln \frac{1}{\rho}}.$$

Представляя ρ в виде

$$\rho = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_1}}}{1 + \frac{2}{3} \mu_1},$$

вычислим

$$\ln \frac{1}{\rho} = \ln \left(1 + \frac{2}{3} \mu_1 \right) - \ln \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{1 + \sqrt{1 - 2\mu_1}} \right).$$

Разлагая по степеням μ_1 , получаем

$$\ln \frac{1}{\rho_1} = \mu_1 + \frac{1}{3} \mu_1^2 + \dots$$

так, что

$$\rho^j = e^{-\delta t_j - \frac{1}{3} \tau^2 \delta^2 t_j}.$$

Таким образом, трехслойная схема (13) имеет правильную асимптотику при $t_j \rightarrow \infty$ с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ при единственном ограничении

$$\tau \delta < 1/2,$$

которое не является обременительным.

Сравнивая с двухслойной схемой (4), видим, что трехслойная схема имеет формальное преимущество перед симметричной двухслойной схемой ($\sigma = 0,5$), которая условно асимптотически устойчива: кроме $\tau b < 1$, для нее требуется $\tau \leq \tau_0 = 1/\sqrt{\delta\Delta}$, $\tau_0 = \tau_0(h)$. Однако на практике это ограничение является слабым. Поэтому говорить о практическом преимуществе трехслойной схемы не имеет смысла. Лучше пользоваться двухслойной схемой.

§ 3. Схемы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными

1. Явная разностная схема. Рассмотренные в § 1 схемы могут быть обобщены на случай уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными.

Пусть $\bar{G} = G + \Gamma$ — p -мерная область с границей Γ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$ требуется найти непрерывную функцию $u(x, t)$, $x \in \bar{G}$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad (1)$$

и дополнительным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

где

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Введем в \bar{G} сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i \in \bar{G}\}$ и обозначим γ_h множество узлов ω_h , принадлежащих Γ , ω_h — множество внутренних узлов $x_i \in G$, так что $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$.

Построение разностной схемы надо начинать с аппроксимации эллиптического оператора Δu . Во внутренних узлах

$$\Delta u \sim \Lambda u \quad \text{при } x \in \omega_h \quad (\text{см. § 1 гл. IV}).$$

Заменяя в (1) оператор Лапласа разностным оператором Λ , получим систему дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \Lambda v + \varphi(x, t), \quad x \in \omega_h, \quad (2)$$

где $v(x, t)$ при любом $t \geq 0$ определена на сетке $\bar{\omega}_h$. Порядок системы (2) равен N — числу внутренних узлов сетки ω_h , $\varphi(x, t)$ — функция, аппроксимирующая $f(x, t)$ на ω_h .

Введем теперь сетку по переменному t

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0, j_0\tau = T\}$$

с шагом τ .

Чтобы перейти к разностной схеме для функции $y(x, t)$, заданной на сетке

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \bar{\omega}_h, t \in \bar{\omega}_\tau\},$$

надо заменить систему дифференциальных уравнений (2) какой-либо разностной по t схемой. Выбирая, например, схему Эйлера, получим явную схему

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} &= \Lambda y^j + \varphi^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ y^0 &= y(x, 0) = u_0(x), \quad y^j|_{\gamma_h} = \mu^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Значение y^{j+1} на новом слое определяется по формуле

$$y^{j+1} = y^j + \tau (\Lambda y^j + \varphi^j), \quad j = 0, 1, \dots$$

Для упрощения изложения будем предполагать, что \bar{G} — параллелепипед $\{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}$ — сетка, равномерная по каждому из направлений x_α .

В качестве Λ возьмем $(2p+1)$ -точечный оператор второго порядка аппроксимации

$$\begin{aligned} \Lambda y &= \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \\ \Lambda_\alpha y &= y_{x_\alpha x_\alpha} = \frac{y^{(+1)_\alpha} - 2y + y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где y — значение функции $y(x, t)$ в фиксированном узле $x = (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_p h_p)$, $y^{(\pm 1)_\alpha} = y(x^{(\pm 1)_\alpha}, t)$, $x^{(\pm 1)_\alpha} = (i_1 h_1, \dots, i_{\alpha-1} h_{\alpha-1}, (i_\alpha \pm 1) h_\alpha, i_{\alpha+1} h_{\alpha+1}, \dots, i_p h_p)$ — узел, соседний с x ($x^{(+1)_\alpha}$ — справа от x , $x^{(-1)_\alpha}$ — слева от x).

Учитывая, что

$$\Lambda u = \Delta u + \sum_{\alpha=1}^p \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 u + O(|h|^4),$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2,$$

находим невязку

$$\psi = \Lambda u^j + \varphi^j - \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = O(|h|^2 + \tau),$$

если $\varphi^j = f(x, t_j) + O(|h|^2 + \tau)$.

Схема (3) условно устойчива в C по начальным данным, по правой части и по граничным данным. В этом можно убедиться с помощью принципа максимума для разностной задачи (3). Запишем ее в каноническом виде

$$y'^{+1} = \left(1 - 2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2} \right) y' + \\ + \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2} (y' (x^{(+1)\alpha}) + y' (x^{(-1)\alpha})) + \varphi'. \quad (5)$$

Сравнивая с общим разностным уравнением

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \mathcal{W}(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P) \quad (6)$$

из § 2 гл. IV, видим, что в нашем случае

$$P = (x, t_{j+1}), \quad Q = (x, t_j), \quad (x^{(+1)\alpha}, t_j), \quad (x^{(-1)\alpha}, t_j), \\ \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$A(P) = 1, \quad B(P, Q) = 1 - 2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2}, \quad \frac{\tau}{h_\alpha^2}.$$

Граница γ сетки $\bar{\omega}$ для уравнения (5) состоит из узлов $(x, 0)$, $x \in \bar{\omega}_h$ и $(x, t_{j'})$, $x \in \gamma_h$, $t_{j'} \leq t_{j+1}$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q) = 0, \quad B(P, Q) \geq 0$$

при

$$1 - 2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2} \geq 0. \quad (7)$$

Решение задачи представим в виде суммы

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где \bar{y} — решение однородного уравнения

$$\bar{y}_t = \Lambda \bar{y}, \quad \bar{y}|_{\gamma_h} = \mu, \quad \bar{y}(x, 0) = u_0(x),$$

а \tilde{y} — решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y}_t = \Lambda \tilde{y} + \varphi, \quad \tilde{y}|_{\gamma_h} = 0, \quad \tilde{y}(x, 0) = 0.$$

Для \bar{y} получаем уравнение (6) с $F = 0$.

В силу принципа максимума (следствия теоремы 2 в п. 3 § 2 гл. IV) имеем

$$\|\tilde{y}(x, t_j)\|_C \leq \max \left(\max_{x \in \gamma_h} \max_{t_{j'} < t_j} |\mu(x, t_{j'})|, \|u_0(x)\|_C \right),$$

если выполнено условие (7).

Отсюда следует неравенство

$$\|\tilde{y}^j\|_C \leq \max_{0 \leq j' \leq j} \|\mu^{j'}\|_{C_y} + \|u_0\|_C, \quad (8)$$

где

$$\|\mu\|_{C_y} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x, t)|,$$

выражающее устойчивость явной схемы (3) по граничным и начальным данным при условии

$$\tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Для оценки \tilde{y} , по аналогии с одномерным случаем (см. § 1, п. 7), запишем разностное уравнение в виде

$$\tilde{y}^{j+1} = F^j.$$

Здесь

$$F = \left(1 - 2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2} \right) \tilde{y} + \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_\alpha^2} (\tilde{y}^{(+1)\alpha} + \tilde{y}^{(-1)\alpha}) + \tau \varphi$$

$$\text{и } \|F\|_C \leq \|\tilde{y}\|_C + \tau \|\varphi\|_C \text{ при } \tau \leq \tau_0.$$

Отсюда видно, что

$$\|\tilde{y}^{j+1}\|_C = \|F^j\|_C \leq \|\tilde{y}^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C$$

при $\tau \leq \tau_0$. Суммируя по $j' = 0, 1, \dots, j$, получаем неравенство

$$\|\tilde{y}^{j+1}\|_C \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C \text{ при } \tau \leq \tau_0, \quad (10)$$

выражающее устойчивость явной схемы по правой части.

Из (8) и (10) следует оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|u_0\|_C + \max_{0 \leq j' \leq j+1} \|\mu^{j'}\|_{C_y} + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C \quad (11)$$

при условии $\tau \leq \tau_0$.

Если обозначить $h = \min h_\alpha$, то условие устойчивости (9) принимает вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{2p},$$

т. е. с ростом числа измерений p допустимый для явной схемы шаг τ уменьшается.

2. Явная трехслойная схема. Простейшей явной трехслойной схемой является схема Ричардсона — аналог схемы (59) из § 1:

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda y^j + \varphi^j. \quad (12)$$

Однако она абсолютно неустойчива.

Заменяя в правой части y_i^j полусуммой $0,5(y_i^{j-1} + y_i^{j+1}) = 0,5(y_i^{j-1} - 2y_i^j + y_i^{j+1}) + y_i^j = 0,5\tau^2 y_{tt}^j + y_i^j$, где

$$y_{tt}^j = \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2},$$

получим p -мерный аналог трехслойной схемы Дюфорта — Франкала. Учитывая, что

$$\Lambda y^j = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y^j(x^{(\alpha)}) - y^j(x^{(-\alpha)})}{h_\alpha^2} - 2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} y^j(x),$$

после указанной замены получим в правой части уравнения (12) выражение

$$\Lambda y - \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} y_{tt}^j.$$

Таким образом мы приходим к явной схеме:

$$y_i^j + \frac{\tau^2 \Delta}{4} y_{tt}^j = \Lambda y + \varphi, \quad (13)$$

где

$$\Delta = 4 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Если $h_1 = h_2 = \dots = h_p = h$ (кубическая сетка), то $\Delta = 4p/h^2$, и можно вместо (13) написать

$$y_i^j + \frac{p\tau^2}{h^2} y_{tt}^j = \Lambda y + \varphi. \quad (13')$$

Отсюда для определения $\hat{y} = y^{j+1}$ получаем формулу

$$(1 + 2\gamma) \hat{y} = (1 - 2\gamma) \check{y} + 4\gamma y + 2\tau \Lambda y + 2\tau \varphi,$$

где $y = y^j$, $\check{y} = y^{j-1}$, $\gamma = p\tau/h^2$.

Схема (13) устойчива при любых τ и h , это следует из общей теории устойчивости гл. VI.

Однако эта схема обладает условной аппроксимацией, так как невязка

$$\psi = \Lambda u + \varphi - u_t - \frac{p\tau^2}{h^2} u_{tt} = O(h^2)$$

при $\tau = O(h^2)$, если $\varphi = f$, $h_1 = h_2 = \dots = h_p = h$.

3. Схемы с весами. При дискретизации по t уравнений (2) естественно получается схема с весами

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j) + \varphi^j,$$

или

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t - j\tau > 0, \\ y|_{\gamma_h} &= \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем $\varphi = \tilde{f} = f(x, t_{j+1/2})$.

Будем по-прежнему считать, что \bar{G} — параллелепипед, а Λ определяется согласно (4).

Для оценки порядка аппроксимации схемы представим $\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) u$ в виде $\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) u = \frac{\hat{u} + u}{2} + (\sigma - 0,5) \tau u_t$ и вычислим невязку

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma) u) + \varphi - u_t = \\ &= \Lambda \frac{u + \hat{u}}{2} + (\sigma - 0,5) \tau \Lambda u_t + \varphi - u_t = \\ &= L\bar{u} + (\sigma - 0,5) \tau L\dot{u} + \tilde{f} - \dot{u} + (\varphi - \tilde{f}) + O(\tau^2 + |h|^2) = \\ &= (\sigma - 0,5) \tau L\dot{u} + O(\tau^2 + |h|^2), \end{aligned}$$

где $Lu = \Delta u$, $\bar{u} = u(x, t_{j+1/2})$, $\varphi = \tilde{f}$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi &= O(\tau^2 + |h|^2) \quad \text{при } \sigma = 0,5, \\ \psi &= O(\tau + |h|^2) \quad \text{при } \sigma \neq 0,5. \end{aligned}$$

Принцип максимума для схемы с весами применим при условии $\tau \leq \tau_0$,

$$\tau_0 = \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right)^{-1}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

из которого видно, что при $\sigma = 1$ ограничений на τ нет. Если выполнено это условие, то для решения задачи справедлива априорная оценка (11).

Для доказательства оценки (11) необходимо привести (14) к виду (6). Тогда

$$A(P) = 1 + 2\sigma \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_{\alpha}^2}, \quad \sigma \geq 0,$$

$$B(P, Q) = \sigma \cdot \frac{\tau}{h_{\alpha}^2}, \quad (1 - \sigma) \frac{\tau}{h_{\alpha}^2}, \quad 1 - 2(1 - \sigma) \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau}{h_{\alpha}^2}.$$

Условие $\tau \leq \tau_0$ следует из требования неотрицательности коэффициентов $B(P, Q)$. Нетрудно заметить, что $D(P) = 0$.

Вместо (14) можно рассматривать схемы с различными по направлениям x_{α} весами σ_{α} :

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} (\sigma_{\alpha} \hat{y} + (1 - \sigma_{\alpha}) y).$$

В этом случае

$$\tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{1 - \sigma_{\alpha}}{h_{\alpha}^2} \right)^{-1}.$$

4. Схема повышенного порядка точности. Для стационарной задачи

$$\Delta u = -f(x), \quad u|_{\Gamma} = \mu(x)$$

в параллелепипеде была построена в гл. IV схема, обладающая точностью $O(|h|^4)$.

В двумерном случае ($p = 2$) она имеет вид

$$\Lambda' y = -\varphi,$$

где

$$\Lambda' y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y,$$

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f.$$

Покажем, что схема

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} (\sigma_{\alpha} \hat{y} + (1 - \sigma_{\alpha}) y) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y + \varphi, \quad (15)$$

$$y|_{\Gamma_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x),$$

где

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{h_{\alpha}^2}{12\tau}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (16)$$

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 \bar{f} + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 \bar{f},$$

$$\bar{f} = f^{i+1/2},$$

имеет погрешность аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + |h|^4).$$

Запишем невязку ψ в виде

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\Lambda_\alpha \frac{\hat{u} + u}{2} + (\sigma_\alpha - 0,5) \tau \Lambda_\alpha u_t \right) + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u + \varphi - u_t.$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u} + u}{2} &= \bar{u} + O(\tau^2), \quad u_t = \bar{u} + O(\tau^2), \\ \Lambda_\alpha \bar{u} &= L_\alpha \bar{u} + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 \bar{u}, \\ \Lambda_\alpha u_t &= L_\alpha \bar{u} + O(\tau^2 + h_\alpha^2), \\ L_\alpha^2 \bar{u} &= L_\alpha \bar{u} - L_1 L_2 \bar{u} - L_\alpha \bar{f}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

получаем

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{h_\alpha^2}{12} + (\sigma_\alpha - 0,5) \tau \right] L_\alpha \bar{u} + O(\tau^2 + |h|^4) = O(\tau^2 + |h|^4),$$

если выбрать σ_α согласно (16).

Чтобы доказать сходимость схемы со скоростью $O(\tau^2 + |h|^4)$, надо получить априорную оценку для задачи с однородными начальными и граничными условиями. Такая оценка, приведена в гл. VI. Схема (15) устойчива при любых τ и h_α .

Второй не менее важный вопрос — как решать систему разностных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^2 \tau \sigma_\alpha \Lambda_\alpha \hat{y} - \hat{y} = -F.$$

Для этого можно использовать метод матричной прогонки. Однако он требует большого числа действий $O(N^2)$, где N — число узлов сетки φ_h . Поэтому использование схемы (15) нецелесообразно. Как будет показано в гл. IX, она может быть заменена схемой того же порядка аппроксимации $O(\tau^2 + |h|^4)$, но требующей для определения \hat{y} последовательного применения скалярной прогонки для трехточечного уравнения и затраты $O(N)$ арифметических действий. Такая схема называется *экономичной*.

При ее написании используется приведенная здесь схема.

§ 4. Нестационарное уравнение Шредингера

1. Двухслойная схема с весами. Рассмотрим разностные схемы для уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Применяя метод разделения переменных (по аналогии с уравнением теплопроводности), найдем решение этой задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i \lambda_k t} X_k(x),$$

где

$$c_k = (u_0, X_k) = \int_0^1 u_0(x) X_k(x) dx,$$

$$\lambda_k = k^2 \pi^2, \quad X_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_s = sh, s = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots\}$ построим разностную схему с весами

$$iy_t = \Lambda (\hat{\sigma} \bar{y} + (1 - \sigma) y), \quad (2)$$

$$y(x, 0) = u_0(x),$$

$$y_0 = y_N = 0,$$

где $\Lambda y = y_{xx}$, $\sigma = \sigma_0 + i\sigma_1$ — комплексное число.

Найдем невязку

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda (\hat{\sigma} \bar{u} + (1 - \sigma) u) - iu_t = \\ &= \Lambda \frac{u + \bar{u}}{2} + \tau (\sigma - 0,5) \Lambda u_t - u_t = \\ &= \Lambda \bar{u} + (\sigma - 0,5) \tau \Lambda \bar{u} - i \bar{u} + O(\tau^2) = \\ &= (L \bar{u} - i \bar{u}) + \frac{h^2}{12} L^2 \bar{u} + (\sigma - 0,5) \tau L \bar{u} + O(\tau^2 + h^4) = \\ &= \left(\frac{h^2}{12} i + (\sigma - 0,5) \tau \right) L \bar{u} + O(\tau^2 + h^4), \end{aligned}$$

где $\bar{u} = u(x, t, +0,5\tau)$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $L u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \psi &= O(\tau^2 + h^2) & \text{при} & \sigma = 0,5, \\ \psi &= O(\tau^2 + h^4) & \text{при} & \sigma = \frac{1}{2} - \frac{ih^2}{12\tau} = \sigma_*, \\ \psi &= O(\tau + h^2) & \text{при} & \sigma \neq 0,5, \sigma \neq \sigma_*. \end{aligned}$$

Таким образом, при

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{i\hbar^2}{12\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_1 = -\frac{\hbar^2}{12\tau}$$

мы получаем схему повышенного порядка точности.

Найдем $y(x, t)$ методом разделения переменных, полагая

$$y^j(x_s) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^j X_k(x_s),$$

где $X_k(x_s)$ — собственные функции оператора Λ :

$$\Lambda X_k + \lambda_k X_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad X_k(0) = X_k(1) = 0,$$

равные $X_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi kx, \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}$.

Подставляя предполагаемое выражение для решения в разностное уравнение, находим

$$c_k^{j+1} = q_k c_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$q_k = \frac{i - (1 - \sigma) \tau \lambda_k}{i + \sigma \tau \lambda_k} = \frac{-(1 - \sigma_0) \tau \lambda_k + i(1 + \sigma_1 \tau \lambda_k)}{\sigma_0 \tau \lambda_k + i(1 + \sigma_1 \tau \lambda_k)}.$$

Для y^{j+1} получаем

$$y^{j+1} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k c_k^j X_k,$$

$$\|y^{j+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} |q_k|^2 |c_k^j|^2 \leq \max_k |q_k|^2 \|y^j\|^2.$$

Вычисления дают

$$|q_k|^2 = \frac{(1 + \sigma_1 \tau \lambda_k)^2 + (1 - \sigma_0)^2 \tau^2 \lambda_k^2}{(1 + \sigma_1 \tau \lambda_k)^2 + \sigma_0^2 \tau^2 \lambda_k^2} = 1 - \frac{(2\sigma_0 - 1) \tau^2 \lambda_k^2}{(1 + \sigma_1 \tau \lambda_k)^2 + \sigma_0^2 \tau^2 \lambda_k^2}.$$

Отсюда видно, что

$$|q_k| \leq 1,$$

и следовательно, схема устойчива

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y^0\| \quad \text{при } \sigma_0 \geq 0,5.$$

Если $\sigma_0 < 0,5$, то $|q_k| > 1$ и схема неустойчива. В частности, явная схема ($\sigma = 0$) неустойчива при любых $\tau/h^2 = \text{const}$.

В отличие от схем для уравнения теплопроводности среди схем с $\tau/h^2 = \text{const}$ нет условно устойчивых: все схемы с $\sigma_0 \geq 0,5$ устойчивы, и все схемы с $\sigma_0 < 0,5$ неустойчивы.

Так как для схемы $O(h^4 + \tau^2)$ имеем

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{ih^2}{12\tau},$$

т. е. $\sigma_0 = 0,5$, то она безусловно устойчива.

Если допустить устойчивость

$$\|y^j\| \leq M \|y^0\|$$

с постоянной $M > 1$, то это эквивалентно требованию

$$\max_k |q_k| \leq 1 + c_0 \tau < e^{c_0 \tau}, \quad c_0 > 0.$$

Такую оценку для $|q_k|$ можно получить и при $\sigma_0 < 0,5$, если положить $\tau = O(h^4)$, или

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{c_0}{\tau \Delta^2}, \quad \text{где } \Delta = \frac{4}{h^2}.$$

В самом деле, пусть $\sigma_0 < 0,5$. Тогда

$$K = \frac{(1-2\sigma_0) \tau^2 \lambda_k^2}{(1+\sigma_1 \tau \lambda_k)^2 + \sigma_0^2 \tau^2 \lambda_k^2} \leq \frac{(1-2\sigma_0) \tau^2 \Delta^2}{(1+\sigma_1 \tau \lambda_k)^2 + \sigma_0^2 \tau^2 \lambda_k^2} \leq (1-2\sigma_0) (\tau \Delta^2) \tau \leq c_0 \tau,$$

если

$$\tau \leq \frac{c_0}{(1-2\sigma_0) \Delta^2} = \frac{c_0 h^4}{(1-2\sigma_0) 16},$$

или

$$K \leq \frac{c_0 \tau}{(1+\sigma_1 \tau \Delta)^2 + \sigma_0^2 \tau^2 \Delta^2} < c_0 \tau \quad \text{при } \sigma = \frac{1}{2} - \frac{c_0}{\tau \Delta^2}.$$

Явная схема ($\sigma = 0$) устойчива

$$\|y^j\| \leq e^{c_0 t_j} \|y^0\|,$$

если

$$\tau \leq \frac{c_0}{\Delta^2} = \frac{c_0 h^4}{16},$$

где $c_0 > 0$ — произвольное число. Условие $\tau \leq \frac{c_0}{16} h^4$ очень жесткое и неестественное, поскольку безразмерным является отношение τ/h^2 , а не τ/h^4 . Поэтому явной схемой пользоваться для уравнения Шредингера не рекомендуется.

2. Трехслойные схемы. Рассмотрим трехслойную схему с ве-сами

$$iy_i = \Lambda (\hat{\sigma} \hat{y} + (1-2\sigma) y + \check{\sigma} \check{y}), \quad (3)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad y^0(x) = u_0(x), \quad y^1 = \bar{u}_0(x),$$

где $\hat{y} = y^{j+1}$, $\check{y} = y^{j-1}$, $y = y^j$, $\sigma = \sigma_0$ — вещественное число.

При любых σ схема имеет второй порядок аппроксимации
 $\psi = O(h^2 + \tau^2)$.

Будем искать частное решение для нее в виде

$$y_k^l(x_s) = c_k q_k^l X_k(x_s).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3) и учитывая, что $\Delta X_k = -\lambda_k X_k$, получаем для q (индекс k у q_k и λ_k опускаем)

$$(i + 2\mu\sigma) q^2 - 2\mu(2\sigma - 1)q + 2\mu\sigma - i = 0, \quad \mu = \tau\lambda.$$

Найдем дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D = \mu^2(2\sigma - 1)^2 - 1 - 4\mu^2\sigma^2 = (1 - 4\sigma)\mu^2 - 1.$$

Отсюда видно, что

$$D < 0 \quad \text{при} \quad \sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2 \Delta^2}.$$

Корни квадратного уравнения

$$q^{(1, 2)} = \frac{(2\sigma - 1)\mu \pm i\sqrt{1 - 4\mu^2\sigma^2 - (2\sigma - 1)^2\mu^2}}{i + 2\mu\sigma}$$

и

$$|q^{(1, 2)}| = 1.$$

Таким образом, частные решения y_k^l не нарастают с ростом j :

$$\|y_k^{l+1}\| \leq \|y_k^l\|,$$

если $\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2 \Delta^2}$, $\Delta = \frac{4}{h^2}$. Полагая

$$q_k^{(1, 2)} = e^{\pm i\varphi_k},$$

будем искать общее решение нашей задачи в виде

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k \cos j\varphi_k + \beta_k \sin j\varphi_k) X_k(x),$$

где α_k и β_k находятся из начальных условий

$$y^0 = u_0, \quad y^1 = \bar{u}_0$$

или

$$y_1^0 = \frac{y^1 - y^0}{\tau} = u_1,$$

$$\alpha_k = (u_0, X_k),$$

$$\beta_k = \left((u_1, X_k) + \frac{2\alpha_k \sin^2(\varphi_k/2)}{\tau} \right) \frac{\tau}{\sin \varphi_k}.$$

Мы не будем останавливаться на последующих рассуждениях, приводящих к оценке вида

$$\|y^j\| \leq M (\|y^0\| + \|y^0\|) \text{ при } \sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^4}{16\tau^2}.$$

Такого рода рассуждения проводятся в § 6 при изучении устойчивости схем для уравнения колебаний струны.

§ 5. Уравнение переноса

1. Явные схемы для задачи Коши. Уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

называют *уравнением переноса*.

Такое уравнение получается, например, для плотности $\rho = \rho(x, t)$ несжимаемой жидкости, движущейся вдоль оси Ox со скоростью v :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, кинетических интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов, нелинейных уравнений газовой динамики и др. Поэтому изложение в этом параграфе представляет прежде всего методический интерес.

Рассмотрим сначала задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

предполагая, что $a = \text{const} \neq 0$.

Решением задачи (1) является «бегущая волна»

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

(если $u_0(\xi)$ — дифференцируемая функция), где a — скорость волны.

На плоскости (x, t) введем сетку

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots\}$$

с шагами h (по x) и τ (по t).

Для задачи Коши естественно использовать явные схемы. Начнем со следующей схемы:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} = 0, \quad y_i^0 = u_0(x_i) \quad (2)$$

или

$$y_t + ay_x = 0.$$

Шаблон этой схемы состоит из точек (рис. 17, а) (x_i, t_j) , (x_{i+1}, t_j) , (x_i, t_{j+1}) .

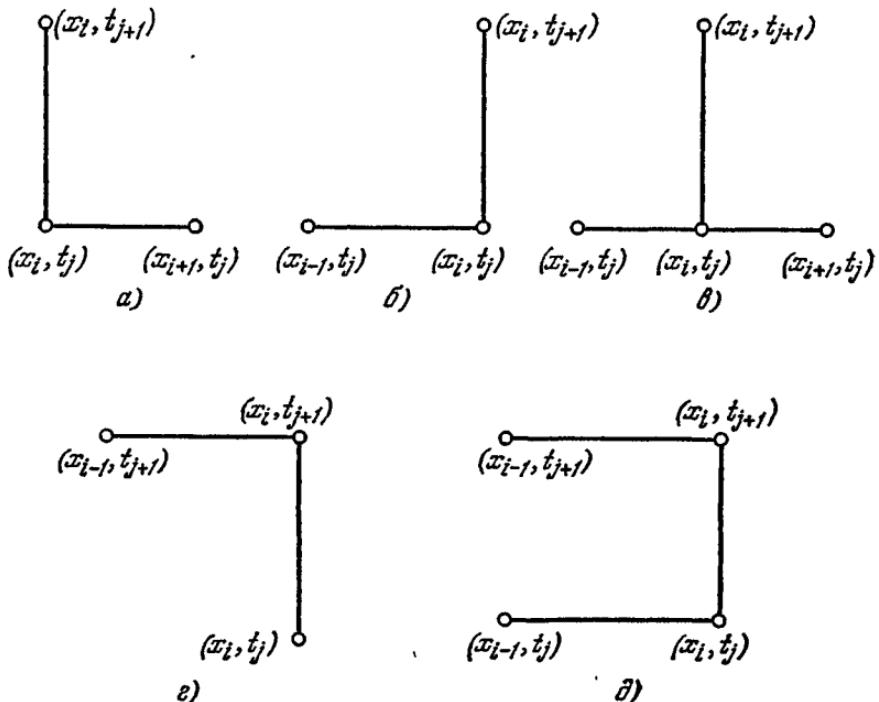


Рис. 17.

Схема (2), очевидно, имеет первый порядок аппроксимации по τ и h , так как невязка

$$\psi = u_t + au_x = (u + au') + 0,5\tau\ddot{u} + 0,5ahu'' + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h).$$

Покажем, что при

$$a > 0$$

эта схема абсолютно неустойчива. Для этого достаточно убедиться в неустойчивости какого-либо частного решения.

Перепишем уравнение (2) в виде

$$y_k^{j+1} = -\gamma y_{k+1}^j + (1 + \gamma) y_k^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}. \quad (3)$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде гармоники

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi} \quad (\text{здесь } i = \sqrt{-1}), \quad \varphi \neq 0. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$q = -\gamma e^{i\varphi} + \gamma + 1 = 1 + (1 - \cos \varphi) \gamma - i\gamma \sin \varphi$$

и вычислим

$$|q|^2 = (1 + (1 - \cos \varphi) \gamma)^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi = 1 + 4\gamma (\gamma + 1) \sin^2 (\varphi/2).$$

Отсюда видно, что $|q| > 1$ при любом фиксированном γ (ограниченном снизу при $\tau \rightarrow 0$), если только $\sin(\varphi/2) \neq 0$ (случай $\sin(\varphi/2) = 0$ соответствует $y_k^0 = 1 = \text{const}$).

Тогда

$$|y_k^j| = |q|^j \rightarrow \infty \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Замечание. Если предположить, что $\gamma = a\tau/h = O(h)$, т. е. $\tau = O(h^2)$, то $|q| \leq 1 + c_0\tau$, где $c_0 > 0$ не зависит ни от τ , ни от h , и гармоника остается ограниченной:

$$|y_k^j| \leq e^{c_0\tau} = e^{c_0\tau_j} \leq e^{c_0\tau} = M \quad \text{при } 0 < t_j \leq T,$$

иными словами,

$$|y_k^j| \leq M |y_k^0| \quad \text{при } \frac{a\tau}{h^2} \leq c_1$$

(в нашем примере $|y_k^0| = 1$), где $c_1 = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ .

Рассмотрим еще одну явную схему с шаблоном (x_i, t_j) , (x_i, t_{j+1}) , (x_{i-1}, t_j) (см. рис. 17, б):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = 0, \quad a > 0, \quad (5)$$

или

$$y_t + a y_x = 0.$$

Эта схема тоже имеет первый порядок аппроксимации:

$$\psi = u_t + a u_x = O(\tau + h).$$

Из уравнения

$$y_i^{j+1} = (1 - \gamma) y_i^j + \gamma y_{i-1}^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h} > 0$$

видно, что при $\gamma \leq 1$

$$\|y^{j+1}\|_C \leq (1 - \gamma) \|y^j\|_C + \gamma \|y^j\|_C = \|y^j\|_C,$$

т. е. схема устойчива в C :

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C \quad \text{при } 0 < \gamma \leq 1. \quad (6)$$

Аналогично можно убедиться, что при $a < 0$ схема (5) неустойчива (по аналогии со схемой (2) при $a > 0$), а схема (2)

устойчива при $|\gamma| = |a|\tau/h \leq 1$, так что для нее выполнено неравенство $\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

2. Явные схемы более высокого порядка аппроксимации. Рассмотрим теперь явную схему с погрешностью $O(\tau + h^2)$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} = 0 \quad (7)$$

или

$$y_t + ay_x^* = 0,$$

где

$$y_{x, i}^* = \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h}.$$

Эта схема задана на четырехточечном шаблоне (рис. 17, 8), состоящем из узлов $(x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i-1}, t_j), (x_{i+1}, t_j)$.

Схема (7), очевидно, неустойчива при любых фиксированных $\gamma = at/h$ и любом знаке коэффициента a .

В самом деле, возьмем гармонику (4), подставим ее в уравнение (7) и получим уравнение для q :

$$q - 1 + \gamma \frac{e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}}{2} = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h},$$

$$q = 1 + 2i\gamma \sin \frac{\Phi}{2},$$

откуда следует

$$|q|^2 = 1 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} > 1,$$

так что $|y_k^j| = |q|^j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Чтобы получить на том же шаблоне устойчивую схему, заменим по аналогии с п. 10 § 1 значение y_k^j полусуммой $0,5(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)$:

$$\frac{y_k^{j+1} - 0,5(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0. \quad (8)$$

Отсюда находим

$$y_k^{j+1} = 0,5(1 + \gamma)y_{k-1}^j + 0,5(1 - \gamma)y_{k+1}^j,$$

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C \leq \dots \leq \|y^0\|_C \quad \text{при } |\gamma| \leq 1$$

и любом знаке a .

В самом деле, при $a < 0$ имеем $1 + \gamma = 1 - |\gamma| \geq 0$, $1 - \gamma = 1 + |\gamma| > 0$.

Чтобы оценить невязку для схемы (8), перепишем ее в виде

$$y_t + \frac{0,5h^2}{\tau} y_{xx} + a y_x^* = 0,$$

учитывая при этом, что $0,5(y_{k+1} + y_{k-1}) = 0,5(y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k) + y_k = y_k + 0,5h^2 y_{xx,k}$.

Невязка на решении $u(x, t)$

$$\psi = u_t + au_x - \frac{0,5h^2}{\tau} u_{xx} = 0,5\tau\ddot{u} - 0,5\frac{h^2}{\tau} u'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Подставим сюда найденное из уравнения $\ddot{u} = a^2 u''$:

$$\psi = \left(\frac{a^2\tau}{2} - \frac{h^2}{2\tau} \right) u'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Отсюда заключаем, что схема (8) обладает условной аппроксимацией; она аппроксимирует уравнение только при $h^2/\tau \rightarrow 0$, если $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$. Если выбрать $\tau = O(h)$, то

$$\psi = O(\tau + h).$$

При $\tau = h/|a|$ получаем второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(h^2).$$

Рассмотрим теперь четырехточечную схему, имеющую второй порядок точности

$$y_t + ay_x - 0,5\tau a^2 y_{xx} = 0. \quad (9)$$

Шаблон (рис. 17, в) здесь тот же, что и у схемы (7).

Вычислим невязку

$$\begin{aligned} \psi &= u_t + au_x - 0,5\tau a^2 u_{xx} = \\ &= \dot{u} + 0,5\tau\ddot{u} + O(\tau^2) + au' + O(h^2) - 0,5a^2\tau u'' + O(\tau h^2) = \\ &= (\dot{u} + au') + 0,5\tau(\ddot{u} - a^2 u'') + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2), \end{aligned}$$

так как $\dot{u} + au' = 0$, $\ddot{u} = -a\dot{u}' = a^2 u''$, так что

$$\psi = O(\tau^2 + h^2).$$

Исследуем устойчивость схемы (9) спектральным методом, записав ее предварительно в виде

$$y_k^{l+1} = (1 - \gamma^2) y_k^l + 0,5\gamma(\gamma - 1) y_{k+1}^l + 0,5\gamma(\gamma + 1) y_{k-1}^l.$$

Подставив сюда

$$y_k^l = q^l e^{ik\varphi},$$

получим для q выражение

$$\begin{aligned} q &= 1 - \gamma^2(1 - \cos \varphi) - i\gamma \sin \varphi, \\ |q|^2 &= 1 - \gamma^2(1 - \gamma^2)(1 - \cos \varphi)^2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $|\gamma| \leq 1$ является необходимым условием устойчивости, а $|\gamma| > 1$ — достаточным условием неустойчивости, если $|\gamma|$ фиксировано, $|\gamma| = \text{const}$ при изменении τ и h .

3. Краевая задача. Рассмотрим теперь краевую задачу, когда при $x=0$ задано граничное значение $\mu(t)$ и решение ищется при $x>0$, $t>0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty, \quad a = \text{const} > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) &= \mu(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

причем

$$u_0(0) = \mu(0).$$

Если $u_0(x)$ и $\mu(t)$ — дифференцируемые функции, то задача имеет решением функцию

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{при } t \leq x/a, \\ \mu(t - x/a) & \text{при } t \geq x/a. \end{cases}$$

Выберем сетку $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots\}$ с шагом h и сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ с шагом τ .

Напишем на шаблоне (рис. 17, ε) неявную схему

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h}, \quad (11)$$

т. е. $y_t + a\hat{y}_x = 0$. Перепишем ее в виде

$$y_k^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} y_{k-1}^{j+1} + \frac{1}{\gamma+1} y_k^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h} > 0.$$

Отсюда видно, что счет можно начинать с точки $k=1$, $j=0$. Тогда

$$y_1^1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} y_0^1 + \frac{1}{\gamma+1} y_1^0 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \mu(t_1) + \frac{1}{\gamma+1} u_0(x_1).$$

Зная y_1^1 , можно вычислить все значения y_1^j до некоторого $j=j_0$, затем, положив $k=2$, найти y_2^j при $0 < j \leq j_0$ и т. д.

Рассмотрим семейство схем, заданных на четырехточечном шаблоне (рис. 17, δ):

$$\begin{aligned} y_t + \sigma \hat{y}_x + (1-\sigma) y_{\bar{x}} &= 0, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \\ y(0, t_j) &= 0, \quad a = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Схема (11) принадлежит этому семейству и соответствует $\sigma=1$.

Вычислим невязку для этой схемы:

$$\psi = u_t + \sigma \hat{u}_x + (1-\sigma) u_{\bar{x}}.$$

Подставляя сюда $u_t = \bar{u} + O(\tau^2)$, $u_{\bar{x}} = u' - 0,5hu'' + O(h^2)$,
 $\hat{v} = \bar{v} + 0,5\tau\bar{v} + O(\tau^2)$,

$$v = \bar{v} - 0,5\tau\bar{v} + O(\tau^2), \quad \text{где } \bar{v} = v|_{t_j + 0,5\tau}, \quad v = u_{\bar{x}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi &= 0,5\tau(2\sigma - 1)\bar{u}' - 0,5hu'' + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= 0,5(2\sigma\tau + h - \tau)\bar{u}' + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что схема с весами имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h^2),$$

если

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0,$$

а при $\sigma \neq \sigma_0$ — первый порядок, $\psi = O(\tau + h)$.

Покажем теперь, что схема (12) устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0.$$

На отрезке $0 \leq x \leq l$ вводим сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$. Скалярное произведение и норму определяем так:

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, h]}.$$

Учитывая, что $\hat{v} = 0,5(\hat{v} + v) + 0,5(\hat{v} - v)$, $v = 0,5(\hat{v} - v) - 0,5(v - v)$, и полагая $v = y_{\bar{x}}$, перепишем схему в виде

$$y_t + (\sigma - 0,5)\tau y_{\bar{x}t} + 0,5(\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}) = 0, \quad y(0, t) = 0.$$

Умножим это уравнение на $2\tau y_{\bar{x}t} = 2(\hat{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}})$ и учтем, что $2y_t y_{\bar{x}t} = 2v v_{\bar{x}} = (v^2)_{\bar{x}} + h(v_{\bar{x}})^2 = (y_t^2)_{\bar{x}} + h(y_{\bar{x}t})^2$ (здесь $v = y_t$).

Тогда получим

$$\tau(y_t^2)_{\bar{x}} + 2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)(y_{\bar{x}t})^2 + (\hat{y}_{\bar{x}})^2 - (y_{\bar{x}})^2 = 0,$$

Умножая на h и суммируя по всем узлам сетки $x = ih$, $i = 1, 2, \dots, N$, получаем

$$\tau(y_t^2)_N + 2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)\|y_{\bar{x}t}\|^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad (13)$$

так как

$$\sum_{i=1}^N (y_i^2)_{\tilde{x}, i} h = \sum_{i=1}^N [(y_i)_i^2 - (y_i)_{i-1}^2] = (y_N)_N^2 - (y_0)_0^2,$$

а

$$y_{t, 0} = y_t(0, t) = 0, \text{ т. к. } y(0, t) \equiv 0.$$

Из тождества (13) видно, что

$$\|y_{\tilde{x}}^{j+1}\| \leq \|y_{\tilde{x}}^j\| \leq \dots \leq \|y_{\tilde{x}}^0\|,$$

если $(\sigma - 0,5)\tau + 0,5h \geq 0$, т. е. $\sigma \geq \sigma_0$.

Схема устойчива в энергетической норме

$$\|y\|_{(1)} = \|y_{\tilde{x}}\|.$$

В гл. VI для двухслойной схемы общего вида

$$By_t + Ay = 0 \quad (14)$$

с операторами $A, B: H \rightarrow H$, где H — евклидово пространство, $A = A^* > 0$, $B > 0$, будет получено необходимое и достаточное условие устойчивости в виде

$$B \geq \frac{\tau}{2} A, \quad (15)$$

при этом $\|y^{j+1}\|_A \leq \|y^0\|_A$, где $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$.

Введем для задачи (12) H — пространство сеточных функций, заданных на ω_h и равных нулю при $i=0$, и оператор

$$\tilde{A}y = y_{\tilde{x}}.$$

Так как

$$yy_{\tilde{x}} = 0,5(y^2)_{\tilde{x}} + 0,5h(y_{\tilde{x}})^2,$$

то

$$(\tilde{A}y, y) = 0,5y_N^2 + 0,5h\|y_{\tilde{x}}\|^2 > 0.$$

Запишем схему (12) в виде

$$(E + \sigma\tau\tilde{A})y_t + \tilde{A}y = 0. \quad (16)$$

Так как $\tilde{A} > 0$, то существует $\tilde{A}^{-1} > 0$.

Применяя \tilde{A}^{-1} к (16), получаем

$$(\tilde{A}^{-1} + \sigma\tau E)y_t + y = 0. \quad (17)$$

Сравнивая (17) с (14), видим, что $B = \tilde{A}^{-1} + \sigma t E$, $A = E$, и условие (15) означает, что

$$((\tilde{A}^{-1} + \sigma t E)x, x) - 0,5\tau(x, x) = (\tilde{A}^{-1}x, x) + (\sigma - 0,5)\tau(x, x) \geq 0.$$

Подставим сюда $\tilde{A}^{-1}x = y$:

$$(\tilde{A}y, y) + (\sigma - 0,5)\tau \|\tilde{A}y\|^2 \geq 0.$$

В нашем случае

$$(\tilde{A}y, y) = 0,5y_N^2 + 0,5h \|\tilde{A}y\|^2$$

и условие устойчивости (15) примет вид

$$0,5y_N^2 + (0,5h + (\sigma - 0,5)\tau) \|Ay\|^2 \geq 0. \quad (18)$$

Условие (18) выполнено при $\sigma \geq \sigma_0$, при этом справедлива априорная оценка

$$\|y'\| \leq \|y^0\|.$$

Аналогично можно построить схему с весами для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

эквивалентной уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и найти условия устойчивости полученной схемы.

§ 6. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

1. Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации. Рассмотрим уравнение колебаний однородной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1(x, t), \quad 0 < x_1 < l, \quad t_1 > 0.$$

Вводя безразмерные переменные $x = x_1/l$, $t = at_1/l$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

В начальный момент заданы условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \quad (2)$$

(начальное отклонение $u_0(x)$ и начальная скорость $\bar{u}_0(x)$). Концы струны движутся по заданным законам

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

Введем в области $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ прямоугольную сетку $\bar{\omega}_{ht}$ (по аналогии с § 1, п. 2). Так как уравнение (1) содержит вторую производную по t , то число слоев не может быть меньше трех. Пользуемся, как и выше, обозначениями

$$y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad \Lambda y = y_{xx},$$

$$y_{\bar{tt}} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \quad y_{\bar{t}}^* = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}.$$

Заменим производные, входящие в уравнение (1), по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim u_{\bar{tt}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \Lambda u = u_{xx}, \quad f \sim \Phi.$$

Рассмотрим семейство схем с весами

$$y_{\bar{t}} = \Lambda(\hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \check{y}) + \Phi, \quad \Phi = f(x, t_j), \quad (4)$$

$$y_0 = \mu_1(t), \quad y_N = \mu_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x),$$

где $\bar{u}_0(x)$ определим ниже.

Краевые условия и первое начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ на сетке $\bar{\omega}_{ht}$ удовлетворяются точно. Выберем $\bar{u}_0(x)$ так, чтобы погрешность аппроксимации $\bar{u}(x) - \partial u(x, 0)/\partial t = \bar{u}(x) - \bar{u}_0(x)$ была величиной $O(\tau^2)$. Из формулы

$$u_t(x, 0) = \dot{u}(x, 0) + 0,5\tau \ddot{u}(x, 0) + O(\tau^2) =$$

$$= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) =$$

$$= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u''_0(x) + f(x, 0)) + O(\tau^2)$$

видно, что $\bar{u}(x) - u_t(x, 0) = O(\tau^2)$, если положить

$$\bar{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u''_0(x) + f(x, 0)). \quad (5)$$

Таким образом, разностная задача (4) — (5) поставлена. Для определения $\hat{y} = y^{j+1}$ получаем из (4) краевую задачу

$$\sigma\gamma^2(y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (1 + 2\sigma\gamma^2)y_i^{j+1} = -F_i, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$

$$\gamma = \tau/h, \quad F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2(1 - 2\sigma)\Lambda y^j + \sigma\tau^2\Lambda y^{j-1} + \tau^2\Phi,$$

которая решается методом прогонки. Прогонка устойчива при $\sigma > 0$ (см. гл. I, § 2, п. 6).

Вычислим погрешность аппроксимации схемы (4) при $\phi = f(x, t_i)$. Пусть y — решение задачи (4) — (5), $u = u(x, t)$ — решение задачи (1) — (3). Подставляя $y = z + u$ в (4), получим

$$\begin{aligned} z_{\bar{u}} &= \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - 2\sigma)z + \sigma \check{z}) + \psi, \\ z_0 &= z_N = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = v(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u}) + \varphi - u_{\bar{u}}$$

— погрешность аппроксимации для схемы (4) на решении $u = u(x, t)$, $v = \bar{u}_0(x) - u_t(x, 0)$ — погрешность аппроксимации для второго начального условия $y_t = \bar{u}_0(x)$. Из предыдущего ясно, что $v = O(\tau^2)$.

Учитывая, что $\hat{u} = u + \tau u_t$, $\check{u} = u - \tau u_{\bar{u}}$, имеем

$$\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma u = u + \sigma \tau^2 u_{\bar{u}},$$

т. е.

$$\psi = \Lambda u + \sigma \tau^2 \Lambda u_{\bar{u}} + \varphi - u_{\bar{u}} = Lu + \sigma \tau^2 L \ddot{u} + f - \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2), \quad (7)$$

$\psi = O(\tau^2 + h^2)$ при любом значении постоянной σ (σ не зависит от τ и h).

Пусть $\sigma = \bar{\sigma} - h^2/(12\tau^2)$, где $\bar{\sigma}$ — постоянная, которая не зависит от h и τ и выбирается так, чтобы схема (4) была устойчивой (достаточно потребовать $\bar{\sigma} \geq 1/(4(1-\varepsilon))$), так как схема устойчива при $\sigma \geq 1/(4(1-\varepsilon)) - 1/(4\gamma^2)$, $\gamma = \tau/h$, $\varepsilon > 0$).

Тогда при

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} f'' \quad (8)$$

схема (4) имеет повышенный порядок аппроксимации, $\psi = O(h^4 + \tau^2)$.

Краевые условия третьего рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \\ -\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} &= \beta_2 u(1, t) - \mu_2(t) \end{aligned}$$

аппроксимируются следующими разностными уравнениями:

$$\rho_1 y_{\bar{u}} = \Lambda^-(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi^-, \quad i = 0,$$

$$\rho_2 y_{\bar{u}} = \Lambda^+(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi^+, \quad i = N,$$

где

$$\Lambda^- y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \Lambda^+ y = -\frac{y_x + \beta_2 y}{0,5h},$$

$$\varphi^- = \rho_1 \varphi + \frac{v_1}{0,5h}, \quad \varphi^+ = \rho_2 \varphi + \frac{v_2}{0,5h}.$$

При этом погрешность аппроксимации краевых условий есть величина $O(\tau^4 + h^2)$, если

$$\varphi = f(x, t), \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad v_1 = \mu_1(t), \quad v_2 = \mu_2(t).$$

Если же

$$\sigma = -\frac{h^2}{12\tau^2} + \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = \text{const}, \quad \rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3},$$

$$\varphi = f(x, t) + \frac{h^2}{12} f'',$$

$$v_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\ddot{\mu}_1(t)}{2} + f'(0, t) - \beta_1 f(0, t) \right),$$

$$v_2(t) = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\ddot{\mu}_2(t)}{2} - f'(1, t) - \beta_2 f(1, t) \right),$$

то получим схему точности $O(h^4 + \tau^2)$. Эта схема аппроксимирует исходное уравнение в узлах $x=0, x=1$ с погрешностью $O\left(\frac{\tau^2 + h^4}{h}\right)$, краевые условия с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$.

2. Исследование устойчивости. Переходим к изучению устойчивости схемы (4) по начальным данным (при однородных краевых условиях и пулевой правой части уравнения). Для этого рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) = \Lambda y^{(\sigma)}, \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x). \end{aligned} \tag{4a}$$

Ее решение будем искать методом разделения переменных. Для этого, по аналогии с § 1, п. 4, ищем частные решения вида $y(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$. После подстановки $y = XT$ в уравнение (4a) получим

$$\frac{\Lambda X}{X} = \frac{T_{tt}}{T^{(\sigma)}} = -\lambda. \tag{9}$$

Отсюда и из краевых условий $y_0 = y_N = 0$ получаем для $X(x)$ задачу на собственные значения

$$\Lambda X + \lambda X = 0, \quad x \in \omega_h, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \neq 0.$$

Она имеет решения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x.$$

Из (9) для $T_k(t)$ получим разностное уравнение второго порядка

$$(T_k)_{tt} + \lambda_k T_k^{(\sigma)} = 0,$$

или

$$(1 + \sigma \tau^2 \lambda_k) \tilde{T}_k - 2(1 + (\sigma - 0,5) \tau \lambda_k) T_k + (1 + \sigma \tau^2 \lambda_k) \check{T}_k = 0,$$

которое перепишем в виде

$$\hat{T}_k - 2(1 - \alpha_k) T_k + \check{T}_k = 0, \quad \alpha_k = \frac{0,5 \tau^2 \lambda_k}{1 + \sigma \tau^2 \lambda_k}. \quad (10)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $T_k = T_k(t_j) = q_k^j$. Для q из (10) найдем квадратное уравнение $q^2 - 2(1 - \alpha)q + 1 = 0$ (индекс k временно опускаем). Его корни равны $q_{1,2} = 1 - \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha}$. Если $0 < \alpha < 2$, то корни $q_{1,2} = 1 - \alpha \pm i\sqrt{\alpha(2 - \alpha)}$ комплексные и $|q_{1,2}| = 1$. Введем новую переменную φ_k , полагая

$$\cos \varphi_k = 1 - \alpha_k, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{\alpha_k(2 - \alpha_k)}.$$

Тогда получим $q_1^{(k)} = e^{i\varphi_k}$, $q_2^{(k)} = e^{-i\varphi_k}$. Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$T_k(t_j) = C_k(q_1^{(k)})^j + D_k(q_2^{(k)})^j = A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Решение задачи (4a) ищем в виде суммы частных решений

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k) X^{(k)}(x). \quad (11)$$

Пусть u_{0k} и \tilde{u}_{0k} — коэффициенты разложений $u_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x)$:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} X^{(k)}(x), \quad \tilde{u}_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{0k} X^{(k)}(x). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы сумма (11) удовлетворяла начальным условиям $y^0 = u_0$, $y_t^0 = (y^1 - y^0)/\tau = \tilde{u}_0(x)$. Тогда для определения A_k и B_k получим условия:

$$A_k = u_{0k}, \quad A_k \frac{\cos \varphi_k - 1}{\tau} + B_k \frac{\sin \varphi_k}{\tau} = \tilde{u}_{0k}.$$

Отсюда находим

$$A_k = u_{0k}, \quad B_k = \frac{1 - \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k}. \quad (13)$$

Подставив A_k и B_k в (11), после очевидных преобразований имеем

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\cos(j-0.5)\varphi_k}{\cos 0.5\varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau \sin j\varphi_k}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k} \right) X^{(k)}(x). \quad (14)$$

Получим сначала оценку $\|y^j\|$ для схемы (4а) при $\sigma = 0$, т. е. для схемы

$$y_{tt} = \Lambda y, \quad y_0 = y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x). \quad (15)$$

При $\sigma = 0$ имеем

$$\alpha_k = 0.5\tau^2\lambda_k = \mu_k, \quad \cos \varphi_k = 1 - \mu_k, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{\mu_k(2 - \mu_k)}.$$

Потребуем, чтобы шаги сетки $\omega_{k\tau}$ удовлетворяли соотношению

$$\frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad (16)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число. Тогда

$$\mu_k \leq \frac{2}{1+\varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (17)$$

и следовательно,

$$\cos 0.5\varphi_k = \sqrt{1 - \mu_k/2} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \quad (18)$$

Далее,

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} = \frac{2 \sin 0.5\varphi_k}{\tau} \cos 0.5\varphi_k \geq \frac{2 \sin 0.5\varphi_k}{\tau} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

и так как

$$\frac{2 \sin 0.5\varphi_k}{\tau} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_k)}}{\tau} = \frac{\sqrt{2\mu_k}}{\tau} = \sqrt{\lambda_k},$$

то справедлива оценка

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} \geq \sqrt{\lambda_k \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \quad (19)$$

Из (14) следует неравенство

$$\|y^j\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos(j-0.5)\varphi_k}{\cos 0.5\varphi_k} u_{0k} X^{(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tau \sin j\varphi_k}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k} X^{(k)} \right\|,$$

подставляя в которое оценки (18) и (19), имеем

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|u_0\| + \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \right).$$

Заметим теперь, что выражение

$$\left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k} \right)^{1/2}$$

есть не что иное, как «негативная» норма (норма в $H_{A^{-1}}$)

$$\|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}} = (A^{-1}\tilde{u}_0, \tilde{u}_0)^{1/2},$$

где $Ay = -\Lambda y = -y_{\bar{x}^*}$ в пространстве функций y , заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $x=0, x=1$.

Действительно,

$$A^{-1}\tilde{u}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{0k} A^{-1} X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{0k}}{\lambda_k} X^{(k)},$$

и следовательно,

$$(A^{-1}\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k}.$$

Итак, если выполнено условие (16), то для схемы (15) справедлива оценка

$$\|y^J\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|u_0\| + \|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}}). \quad (20)$$

Эта же оценка имеет место и для схемы (4a), если потребовать, чтобы параметр σ удовлетворял условию

$$\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \quad (21)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число.

Чтобы убедиться в этом, достаточно в приведенном выше доказательстве заменить всюду μ_k на

$$\alpha_k = \frac{0,5\tau^2\lambda_k}{1+\sigma\tau^2\lambda_k}.$$

Для исследования устойчивости схемы (4) по правой части применим принцип суперпозиции. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \Lambda y^{(0)} + \varphi, \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Ее решение будем искать в виде

$$y^J = \sum_{l'=0}^J \tau Y^{l, l'}, \quad (22)$$

где $Y^{i, i'}$ как функция i при фиксированном i' удовлетворяет однородному уравнению

$$Y_{ii}^{i, i'} = \Lambda(\sigma Y^{i+1, i'} + (1-2\sigma) Y^{i, i'} + \sigma Y^{i-1, i'}), \quad 0 \leq i' < i, \quad (23)$$

краевым условиям

$$Y_0^{i, i'} = Y_N^{i, i'} = 0, \quad (24)$$

начальным условиям

$$Y^{i', i'} = 0, \quad Y_t^{i', i'} = \frac{Y^{i'+1, i'} - Y^{i', i'}}{\tau} = \frac{Y^{i'+1, i'}}{\tau} = \Phi^{i'}, \quad (25)$$

где $\Phi^{i'}$ выбирается так, чтобы удовлетворялось неоднородное уравнение (46).

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция Φ^i . Из определения $Y^{i, i'}$ следует, что

$$y_{ii}^i = \frac{1}{\tau} Y^{i+1, i} + \sum_{i'=0}^{i-1} \tau Y_{ii}^{i, i'}, \quad \Lambda y^{(0)} = \sigma \tau \Lambda Y^{i+1, i} + \sum_{i'=0}^{i-1} \tau \Lambda (Y^{i, i'})^{(0)}.$$

Подставим эти выражения в (23) и найдем

$$Y^{i+1, i} - \sigma \tau^2 \Lambda Y^{i+1, i} = \tau \varphi^i, \quad (26)$$

откуда получаем уравнение для $\Phi = \Phi^i = Y^{i+1, i}/\tau$:

$$\Phi - \sigma \tau^2 \Lambda \Phi = \varphi, \quad \Phi_0 = \Phi_N = 0. \quad (27)$$

Перейдем теперь к получению оценки решения y^i задачи (46) через правую часть φ . Пусть выполнено условие устойчивости (21). Тогда для решения задачи (23) справедлива оценка (20), которая в данном случае имеет вид

$$\|Y^{i, i'}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|Y_t^{i', i'}\|_{A^{-1}} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|Y^{i'+1, i'}\|_{A^{-1}}.$$

Поэтому из (22), используя неравенство треугольника, получаем

$$\|y^i\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{i'=0}^{i-1} \|Y^{i'+1, i'}\|_{A^{-1}}.$$

Оценку для $\|Y^{i'+1, i'}\|_{A^{-1}}$ получим из уравнения (27). Разложим Φ и φ по собственным функциям $\{X^{(k)}\}$:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k X^{(k)}, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), найдем $\Phi_k = \varphi_k / (1 + \sigma \tau^2 \lambda_k)$, так что при $\sigma \geq 0$ имеем

$$\|\Phi\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Phi_k^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{(1 + \sigma \tau^2 \lambda_k)^2 \lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{\lambda_k} = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2,$$

т. е.

$$\|Y^{i'+1, i'}\|_{A^{-1}} \leq \tau \|\varphi^{i'}\|_{A^{-1}}.$$

Таким образом, если $\sigma \geq 0$ и выполнено условие (21), то для схемы (4б) справедлива оценка

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{i'=0}^{i-1} \tau \|\varphi^{i'}\|_{A^{-1}}.$$

Для задачи (4) с однородными граничными условиями $y_0 = y_N = 0$ справедлива оценка

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|y^0\| + \|y_t^0\|_{A^{-1}} + \sum_{i'=0}^{i-1} \tau \|\varphi^{i'}\|_{A^{-1}} \right),$$

если $\sigma \geq 0$ и выполнено условие (21).

Интересно заметить, что при специальном выборе $y^1 = y(\tau)$ удается доказать устойчивость в L_2 схемы (15) при условии $\tau \leq h$.

Рассмотрим разностную схему

$$y_{tt}^j = y_{xx}^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$y^0 = u_0, \quad y_t^0 = \bar{u}_0 + 0,5\tau y_{xx}^0. \quad (30)$$

Согласно п. 1 задача (29)–(30) аппроксимирует уравнение (1)–(2) с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Выразим решение y^j через $y^0 = u_0$ и \bar{u}_0 . Поступая как и ранее, найдем

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} \left(u_{0k} \cos j\varphi_k + \frac{\tau \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \sin j\varphi_k \right) X^{(k)}, \quad (31)$$

где \bar{u}_{0k} — коэффициенты Фурье $\bar{u}_0(x)$, а величины u_{0k} , φ_k имеют тот же смысл, что и прежде.

Возводя (31) в квадрат и используя оценку

$$2 \left(\frac{\tau \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \cos j\varphi_k \right) (u_{0k} \sin j\varphi_k) \leq \tau^2 \frac{\bar{u}_{0k}^2}{\sin^2 \varphi_k} \cos^2 j\varphi_k + u_{0k}^2 \sin^2 j\varphi_k,$$

имеем

$$\|y^j\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{u}_{0k}^2}{\sin^2 \varphi_k}.$$

Оценим снизу выражение $\frac{\tau^2}{\sin^2 \varphi_k} = \frac{1}{\lambda_k (1 - \tau^2 \lambda_k / 4)}$. Пусть $\gamma = \tau/h \leq 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_k (1 - \tau^2 \lambda_k / 4) &= \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \left(1 - \gamma^2 \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \right) \geq \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \right) = \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \cos^2 \frac{\pi kh}{2} \geq \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = \frac{\sin^2 \pi h}{h^2}. \end{aligned}$$

В гл. II было показано, что $\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2} \geq 8$, если $h_1 \leq 0,5$. Поэтому, обозначив $h_1 = 2h$, имеем

$$\frac{\sin^2 \pi h}{h^2} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2} \geq 8, \quad h \leq \frac{1}{4}.$$

Итак, если $\tau \leq h$ и $h \leq \frac{1}{4}$, то для решения задачи (29) — (30) имеем оценку

$$\|y'\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{8} \|\bar{u}_0\|^2.$$

3. Метод энергетических неравенств. Исследование устойчивости разностных схем для уравнения колебаний можно провести и с помощью метода энергетических неравенств (см. § 1, п. 8). Ограничимся здесь изучением устойчивости по начальным данным.

Будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}), \\ y_0 = y_N &= 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x). \end{aligned} \tag{32}$$

Замечая, что

$$\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{tt},$$

перепишем уравнение (32) в виде

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{tt} = \Lambda y, \tag{33}$$

где E — единичный оператор.

Умножим (33) скалярно на $y_i = (y_t + y_{\bar{t}})/2$:

$$((E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{tt}, y_i) = (\Lambda y, y_i). \tag{34}$$

Воспользовавшись очевидными тождествами

$$\begin{aligned} (y_{tt}, y_i) &= 0,5 (\|y_t\|^2)_i, \\ -(\Lambda y_{tt}, y_i) &= (y_{\bar{t}tt}, y_{\bar{t}i}) = 0,5 (\|y_{\bar{t}t}\|^2)_i, \end{aligned}$$

преобразуем левую часть равенства (34) следующим образом:

$$((E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{tt}, y_i) = 0,5 (\|y_t\|^2 + \sigma \tau^2 \|y_{\bar{t}t}\|^2)_i. \tag{35}$$

Покажем, далее, что для любых функций $y = y(x, t_n)$, обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, справедливо тождество

$$-(\Lambda y, y_i) = \frac{1}{8} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2)_t - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{i\bar{x}}\|^2)_t. \quad (36)$$

Действительно, из первой формулы Грина (см. гл. II, § 3, п. 1) следует, что

$$-(\Lambda y, y_i) = (v, v_i],$$

где $v = y_{\bar{x}}$, и так как

$$v \cdot v_i = \frac{1}{8} ((v + \check{v})^2)_t - \frac{\tau^2}{8} ((v_i)^2)_t,$$

то получаем (36).

Подставляя (35) и (36) в (34), получим следующее энергетическое тождество:

$$(\|y_i\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{i\bar{x}}\|^2) + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2_t = 0, \quad (37)$$

или

$$\mathcal{E}^{j+1} = \mathcal{E}^j,$$

где

$$\mathcal{E}^j = \|y_i^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{i\bar{x}}^j\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j-1}\|^2. \quad (38)$$

Найдем значения σ , при которых величина \mathcal{E}^j неотрицательна для любых y^j и y^{j-1} . Для этого заметим (см. гл. II, § 3, п. 4), что

$$\|y_{i\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y_i\|^2,$$

и поэтому

$$\|y_i\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{i\bar{x}}\|^2 \geq \left(\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2\right) \|y_{i\bar{x}}\|^2.$$

Следовательно, правая часть (38) будет неотрицательна, если потребовать

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h}. \quad (39)$$

При этом выражение $(\mathcal{E}^j)^{1/2} = \|y^j\|_*$ можно считать нормой (или, точнее, полуформой):

$$\mathcal{E}^j = \|y^j\|_*^2 = \|y_i^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{i\bar{x}}^j\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j-1}\|^2. \quad (40)$$

Заметим, что такие «комбинированные» нормы, зависящие от значений u на нескольких слоях, характерны для многослойных (и, в частности, трехслойных) схем.

Тождество (37) означает устойчивость по начальным данным в норме (40)

$$\|y^{j+1}\|_* = \|y^0\|_*, \quad j = 0, 1, \dots$$

Итак, условие (39) достаточно для устойчивости схемы (32) по начальным данным в норме (40).

В частности, схема (32) с $\sigma = 0$ устойчива по начальным данным при условии

$$\tau \leq h. \quad (41)$$

Это условие устойчивости часто называется *условием Куранта* (и было получено впервые в работе Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви в 1928 г.).

Для уравнения в размерных переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (42)$$

оно принимает вид

$$\tau \leq h/a,$$

где a — скорость звука.

4. О нахождении негладких решений разностным методом. Многие задачи математической физики, описывающие ударные процессы в газах, жидкостях и твердых телах, приводят к проблеме нахождения негладких решений уравнений гиперболического типа второго порядка, простейшим представителем которых является уравнение колебаний струны (42). Поскольку такие решения не имеют производных второго порядка, входящих в уравнение, то слова «решение удовлетворяет уравнению» следует понимать в обобщенном смысле. Одно из возможных определений обобщенных решений основывается на том факте, что дифференциальное уравнение является следствием интегрального закона сохранения, если существуют непрерывные производные, входящие в уравнение (42). В этом случае обобщенное решение определяется как функция $u(x, t)$, имеющая в области $\bar{G} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ ограниченные кусочно-непрерывные производные du/dx , du/dt и удовлетворяющая интегральному соотношению

$$\oint_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

где C — произвольная замкнутая кривая, лежащая в области \bar{G} . Если первые производные разрывны, то на характеристиках

$x \pm at = \text{const}$ должны выполняться условия на скачке

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = \pm a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad \text{где } [f] = f(\xi + 0) - f(\xi - 0) \quad \text{при } \xi = x \pm at.$$

Для отыскания обобщенного решения задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (43)$$

будем пользоваться схемой с весами

$$y_{\bar{t}\bar{x}} = \Lambda(\hat{\sigma}y + (1 - 2\sigma)y + \check{\sigma}y), \quad \Lambda y = a^2 y_{xx} \quad (44)$$

с соответствующими дополнительными условиями. При изучении сходимости схемы с весами мы предполагали существование и достаточную гладкость решения задачи (43). Это возможно при выполнении определенных условий гладкости начальных данных.

Сходится ли та же схема при условии, что $u = u(x, t)$ есть обобщенное решение? Оказывается, что сеточное решение задачи (44) сходится к обобщенному решению со скоростью $O(\sqrt{\tau} + \sqrt{h})$.

На доказательство этого утверждения мы останавливаться не будем.

При отыскании обобщенных решений задачи (43) появляются осцилляции сеточного решения и его «производных» («рябь»), сильно снижающие точность схем. Кроме того происходит размазывание линий разрыва производных на несколько интервалов сетки, что затрудняет определение истинной скорости распространения разрывов (это — результат введения фиктивного трения (диссипации) при разностной аппроксимации).

Рябь вызвана тем, что разностные гармоники обладают дисперсией, т. е. скорости гармоник зависят от их номера, в то время как для дифференциального уравнения все гармоники обладают одинаковой скоростью, равной a . Чтобы улучшить схему, надо уменьшить дисперсию. Среди схем с весами (44) наименьшей дисперсией обладает схема с весом

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad \gamma = \frac{at}{h}.$$

Она имеет четвертый порядок аппроксимации $\Psi = O(\tau^4 + h^4)$ на достаточно гладких решениях $u = u(x, t)$. На негладких обобщенных решениях погрешность аппроксимации схемы (44) с весом $\sigma = \sigma_*$ так же плоха, как и для схем с весом $\sigma \neq \sigma_*$. Однако, благодаря меньшей дисперсии схема с весом $\sigma = \sigma_*$ является более точной и лучше передает особенности обобщенных решений.

Условие устойчивости схемы (44)

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

выполнено для схемы с весом $\sigma = \sigma_*$, если

$$\gamma \leq 1 \quad \text{или} \quad \tau \leq h/a,$$

т. е. при том же условии, что и в случае явной схемы. При этом

$$\sigma_* = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \leq 0.$$

Заметим, что попытки уменьшить «рябь» путем введения вязкости приводят к искажению профиля решения, к потере точности.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В этой главе изучается устойчивость по начальным данным и по правой части двухслойных и трехслойных разностных схем, трактуемых как операторно-разностные схемы с операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости и при помощи метода энергетических неравенств построены соответствующие априорные оценки. Развит метод регуляризации для получения схем заданного качества (по точности, экономичности) в классе устойчивых схем. Рассмотрено большое число конкретных схем для уравнений параболического и гиперболического типов.

§ 1. Операторно-разностные схемы

1. Введение. В § 4 гл. II краевые задачи для дифференциальных уравнений $Lu = -f(x)$ мы трактовали как операторные уравнения $Au = f$, где A — линейный оператор, заданный в банаховом пространстве \mathcal{B} .

При изучении нестационарных процессов, описываемых уравнениями в частных производных параболического и гиперболического типов

$$\frac{du}{dt} = Lu + f(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < t \leq t_0,$$

переменная t (время) играет особую роль и поэтому должна быть выделена. Здесь L — дифференциальный оператор, действующий на $u(x, t)$ как функцию $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точки p -мерной области G . Функция $u(x, t)$ при каждом фиксированном t является элементом банахова пространства \mathcal{B} . Поэтому вместо $u(x, t)$ мы получаем абстрактную функцию $u(t)$ переменного t , $0 \leq t \leq t_0$, со значениями в \mathcal{B} , т. е. $u(t) \in \mathcal{B}$ для всех $t \in [0, t_0]$. Оператор L , действующий на $u(x, t)$ как функцию x , заменяется оператором \mathcal{A} , заданным в \mathcal{B} . Оператор \mathcal{A} , вообще говоря, действует из некоторого пространства \mathcal{B}_1 в некоторое пространство \mathcal{B}_2 (область его определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_1$ является всюду плотной в \mathcal{B}_1 , а область его значений $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}_2$). Мы будем считать здесь, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. В результате приходим к абстрактной задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0,$$

где u_0 — заданный элемент из $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Эти рассуждения носят лишь эвристический характер и имеют целью провести аналогию между методами общей теории дифференциальных уравнений и общей теории разностных схем, которая излагается в этой главе.

Задача Коши называется *устойчивой по начальным данным и по правой части*, если

$$\|u(t)\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \int_0^t \|f(t')\| dt',$$

где $M_1 = \text{const} > 0$, $M_2 = \text{const} > 0$.

В силу принципа суперпозиции (\mathcal{A} — линейный оператор), устойчивость задачи Коши по правой части следует из равномерной устойчивости по начальным данным

$$\|u(t)\| \leq M_1 \|u(t')\|, \quad t \geq t' \geq 0,$$

где $u(t)$ — решение однородного уравнения.

2. **Операторно-разностные схемы.** Рассмотрим линейную систему \mathcal{B}_h , зависящую от параметра h , являющегося вектором некоторого нормированного пространства с нормой $\|h\|$. На линейной системе \mathcal{B}_h можно ввести ряд норм $\|\cdot\|_h$, $\|\cdot\|_{(1h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, ... При этом мы получим линейные нормированные пространства \mathcal{B}_h , $\mathcal{B}_h^{(1)}$, $\mathcal{B}_h^{(2)}$, ... Условимся в дальнейшем для упрощения изложения говорить о нормах $\|\cdot\|_{(1h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, ... в пространстве \mathcal{B}_h , считая $\|\cdot\|_h$ основной нормой в \mathcal{B}_h .

На отрезке $0 \leq t \leq t_0$ введем равномерную с шагом τ сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = t_0/j_0\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, 0 < j \leq j_0\}$.

Будем рассматривать абстрактные функции $y_{h\tau}(t)$, $\varphi_{h\tau}(t)$ и т. д. дискретного аргумента $t = j\tau \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в \mathcal{B}_h , так что $y_{h\tau}(t) \in \mathcal{B}_h$ для всех $t = j\tau \in \bar{\omega}_\tau$. Пусть $A_{h\tau}(t)$, $B_{h\tau}(t)$, $C_{h\tau}(t)$ и т. д. — линейные операторы, зависящие от параметров h , τ и действующие из \mathcal{B}_h в \mathcal{B}_h при каждом $t \in \bar{\omega}_\tau$. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, индексы h и τ будем опускать и писать

$$y_n = y(n\tau) = y(t_n) = y, \quad A(t), B(t), C(t).$$

Семейство разностных уравнений $(r-1)$ -го порядка

$$B_0(t_n) y_{n+1} = \sum_{s=1}^{r-1} C_s(t_n) y_{n+1-s} + f_n, \quad n = r-1, r, r+1, \dots,$$

зависящих от параметров h и τ , с операторными коэффициентами B_0, C_1, \dots, C_{r-1} (которые являются линейными операторами, заданными на \mathcal{B}_h и зависят от h и τ) будем называть r -слойной операторно-разностной схемой или просто r -слойной

схемой. Если существует оператор B_0^{-1} , то решение y_{n+1} этой задачи может быть выражено через начальные векторы y_0, y_1, \dots, y_{r-2} и правую часть f . Мы предполагаем, как всегда, что векторы y_0, y_1, \dots, y_{r-2} заданы.

Мы будем рассматривать только двухслойные и трехслойные схемы

$$B_0 y_{n+1} + B_1 y_n = \tau \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \text{задан } y_0, \quad (1)$$

$$B_0 y_{n+1} + B_1 y_n + B_2 y_{n-1} = \tau \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \text{заданы } y_0 \text{ и } y_1. \quad (2)$$

3. Каноническая форма двухслойных схем. Любую двухслойную схему (1) можно записать в виде

$$B(t_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(t_n) y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \text{задан } y_0 \in \mathcal{B}_h. \quad (3)$$

В самом деле, сравнивая (1) с (3), видим, что $B = B_0, A = (B_0 + B_1)/\tau$. Будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} y &= y_n = y(t_n), \quad \hat{y} = y_{n+1} = y(t_{n+1}) = y(t_n + \tau), \\ \hat{y} &= y_{n-1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y - \hat{y}}{\tau}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3) можно записать так:

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t = t_n = n\tau \in \omega_{\tau}, \quad y(0) = y_0 \in \mathcal{B}_h. \quad (4)$$

Будем называть уравнения (3) или (4) *канонической формой двухслойных схем*.

Уравнение (4) аналогично дифференциальному уравнению

$$\mathcal{B} \frac{du}{dt} + Au = f(t).$$

Пример 1. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\sigma}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

в гл. III была рассмотрена двухслойная схема с весами

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad \Lambda v = (a(x)v_x)_x.$$

Используя тождество

$$\hat{y} = y + \tau \frac{\hat{y} - y}{\tau} = y + \tau y_t,$$

перепишем ее в виде

$$y_t - \sigma \tau \Lambda y_t - \Lambda y = \varphi.$$

Сравнивая это уравнение с (4), видим, что

$$B = E + \sigma \tau A, \quad A = -\Lambda.$$

Так записывается в каноническом виде двухслойная схема с весами.

Разрешим уравнение (4) относительно $\hat{y} = y_{n+1}$. Если существует оператор B^{-1} , то можно написать

$$\hat{y} = Sy + \tau\varphi, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad \varphi = B^{-1}\varphi. \quad (5)$$

Оператор S называется *оператором перехода* (со слоя на слой). Наряду с канонической формой (4) иногда будем пользоваться следующей формой записи двухслойной схемы:

$$B\hat{y} = Cy + \tau\varphi \quad \text{или} \quad B y_{n+1} = C y_n + \tau\varphi_n,$$

где $C = E - \tau A$, E — единичный оператор.

Если $B = E$, то схема (3) называется *явной двухслойной схемой*.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n.$$

В этом случае значение y_{n+1} на верхнем слое вычисляется по формуле $y_{n+1} = y_n - \tau Ay_n + \tau\varphi_n$.

Если $B \neq E$, то (3) называется *неявной двухслойной схемой*.

4. Канонические формы трехслойных схем. Трехслойную схему (2) будем записывать в канонической форме

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = \varphi. \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (2), видим, что такая запись всегда возможна, если положить

$$B = B_0 - B_2, \quad R = \frac{1}{2\tau}(B_0 + B_2), \quad A = \frac{1}{\tau}(B_0 + B_1 + B_2). \quad (7)$$

Введем обозначения

$$y_i^o = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad y_{it} = \frac{y_t - y_{\check{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}$$

и наряду с (6) будем под канонической формой трехслойной схемы понимать уравнение

$$By_i^o + \tau^2 Ry_{it} + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t = n\tau \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (8)$$

Пример 2. Рассмотрим трехслойную схему с весами

$$y_i^o + A(\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}) = \varphi. \quad (9)$$

Приведем ее к каноническому виду. Используем формулы

$$\begin{aligned}\hat{y} &= y + \frac{\hat{y} - \check{y}}{2} + \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{2} = y + \tau y_i + \frac{\tau^2}{2} y_{ii}, \\ \check{y} &= y - \frac{\hat{y} - \check{y}}{2} + \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{2} = y - \tau y_i + \frac{\tau^2}{2} y_{ii}, \\ \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y} &= y + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau y_i + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau^2 y_{ii}.\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (9), запишем схему с весами в канонической форме (8), где

$$B = E + \tau (\sigma_1 - \sigma_2) A, \quad R = 0.5 (\sigma_1 + \sigma_2) A. \quad (10)$$

Переходя от (6) или (8) к (2), получим для определения значения y_{n+1} на верхнем слое $t = t_{n+1}$ уравнение

$$(B + 2\tau R) y_{n+1} = 2\tau (2R - A) y_n + (B - 2\tau R) y_{n-1} + 2\tau \varphi_n.$$

Отсюда видно, что задача (8) разрешима, если существует оператор $(B + 2\tau R)^{-1}$. При этом y_{n+1} выражается через y_n и y_{n-1} на двух предыдущих слоях. Поэтому требуется задание двух начальных векторов y_0 и y_1 (или $y_0 = y(0)$ и $y_1 = y(0)$).

Если $B_0 = B + 2\tau R = E$ — единичный оператор, то трехслойная схема (8) называется явной; для нее имеем

$$y_{n+1} = 2\tau (2R - A) y_n + (B - 2\tau R) y_{n-1} + 2\tau \varphi_n.$$

Если же $B + 2\tau R \neq E$, то схема (8) называется неявной.

Наряду с канонической формой (8) иногда удобно трехслойную схему написать в виде (2) или

$$By_i + (E + \tau^2 R) y_{ii} + Ay = \varphi. \quad (11)$$

Это уравнение получается при формальной замене в (8) R оператором $\frac{1}{\tau^2} E + R$.

5. Понятие устойчивости. Введем понятие устойчивости для двухслойных схем. Под двухслойной схемой мы понимаем множество операторно-разностных уравнений (4), зависящих от параметров h и τ . Операторы A и B считаем заданными на всем пространстве \mathcal{B}_h .

Будем рассматривать поэтому множество решений $\{y_{ht}(t)\}$ задачи Коши (4), зависящих от входных данных $\{\varphi_{ht}(t)\}$, $\{y_{0h}\}$.

Схема (4) называется *корректной* (корректно поставленной), если при достаточно малых $\tau \leq \tau_0$ и $|h| \leq h_0$.

1) решение задачи (4) существует и единственno при любых начальных данных $y_{0h} \in \mathcal{B}_h$ и правых частях $\varphi_{ht}(t) \in \mathcal{B}_h$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$,

2) существуют такие положительные постоянные M_1 и M_2 , не зависящие от h , τ и выбора y_{0h} , $\varphi_{h\tau}$, что при любых $y_{0h} \in \mathcal{B}_h$, $\varphi_{h\tau}(t) \in \mathcal{B}_h$, $t \in \bar{\omega}_\tau$ для решения задачи (4) справедлива оценка

$$\|y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1)_h} \leq M_1 \|y_{0h}\|_{(1)_h} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi_{h\tau}(t')\|_{(2)_h}, \quad (12)$$

где $\|\cdot\|_{(1)_h}$, $\|\cdot\|_{(1)_h}$ и $\|\cdot\|_{(2)_h}$ — некоторые нормы в пространстве \mathcal{B}_h .

Неравенство (12) выражает свойство непрерывной зависимости, равномерной по h и τ , решения задачи Коши (4) от входных данных. Это свойство и называется *устойчивостью*.

Будем называть разностную схему *абсолютно устойчивой*, если она устойчива при любых τ и h (а не только при достаточно малых).

Обычно пользуются понятиями устойчивости по начальным данным и устойчивости по правой части. Схема (4) называется *устойчивой по начальным данным*, если для решения однородного уравнения

$$By_t + Ay = 0, \quad t = n\tau > 0, \quad y(0) = y_0 \quad (4a)$$

выполняется оценка

$$\|y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1)_h} \leq M_1 \|y_{0h}\|_{(1)_h}. \quad (12a)$$

Схема (4) устойчива по правой части, если для решения уравнения (4) с однородным начальным условием $y(0) = 0$:

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = 0, \quad (4b)$$

выполняется неравенство

$$\|y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1)_h} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi_{h\tau}(t')\|_{(2)_h}. \quad (12b)$$

Решение задачи (4) $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, где $y^{(1)}$ — решение задачи (4a), а $y^{(2)}$ — решение задачи (4b). В силу неравенства треугольника

$$\|y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1)_h} \leq \|y_{h\tau}^{(1)}(t + \tau)\|_{(1)_h} + \|y_{h\tau}^{(2)}(t + \tau)\|_{(1)_h}$$

и из (12a) и (12b) следует (12).

Аналогично вводится понятие устойчивости для трехслойной схемы. Однако при этом следует рассматривать пару векторов $Y_{n+1} = \{y_n, y_{n+1}\}$ с нормой вида

$$\|Y_{n+1}\|_{(1)_h}^2 = \|y_n + y_{n+1}\|_{(1)_h}^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_{(1)_h}^2, \quad (13)$$

где $\|\cdot\|_{(1)_h}$, $\|\cdot\|_{(1)_h}^2$ — некоторые нормы в \mathcal{B}_h . Нормы вида (13) возникают при изучении устойчивости трехслойных схем методом энергетических неравенств (см. гл. V, § 6).

Таким образом, трехслойная схема (8) называется *устойчивой*, если при любых начальных данных y_0 , y_1 и любых правых частях $\Phi(t)$ для ее решения справедлива оценка

$$\|Y_{h\tau}(t+\tau)\|_{(1)_h} \leq M_1 \|Y_{h\tau}(\tau)\|_{(1)_h} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\Phi_{h\tau}(t')\|_{(2)_h}, \quad (14)$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h , τ и от выбора y_0 , y_1 , $\Phi(t)$.

Основная задача, которая стоит перед нами, заключается в следующем. Предположим, что уравнение (4) однозначно разрешимо относительно y_{n+1} при любых y_n и $\Phi(t)$.

Какими свойствами должны обладать операторы A и B , чтобы схема была устойчивой в смысле данного выше определения? Иными словами, надо найти достаточные условия устойчивости схемы (4) и получить априорные оценки вида (12). При этом достаточные условия должны быть удобны для практической проверки в случае конкретных разностных схем, соответствующих уравнениям математической физики.

Устойчивость разностных схем будем исследовать вне связи с аппроксимацией и сходимостью.

6. Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах. Исследуем теперь в общих чертах вопрос о достаточных условиях устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах. Более детально это исследование будет проведено в § 2 для случая, когда $\mathcal{B}_h = H_h$ — вещественное гильбертово пространство.

Всюду предполагается, что задача Коши (4) разрешима, т. е. существует обратный оператор B^{-1} . Поэтому схему (4) можно записать в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n + \tau f_n, \quad f_n = B_n^{-1} \Phi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in \mathcal{B}_h, \quad (15)$$

где

$$S_n = E - \tau B_n^{-1} A_n \quad (16)$$

— оператор перехода. Оператор S_n зависит от $t_n = n\tau$, h , τ , однако зависимость от h , τ мы не указываем явно ни для S_n , ни для B_n , A_n , y_n , Φ_n , y_0 .

Пользуясь рекуррентной формулой (15), найдем

$$y_{n+1} = T_{n+1, 0} y_0 + \sum_{j=0}^n \tau T_{n+1, j+1} f_j, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} T_{n+1, j} &= S_n S_{n-1} \dots S_{j+1} S_j, \\ T_{n+1, 0} &= S_n S_{n-1} \dots S_1 S_0, \quad T_{n+1, n+1} = E. \end{aligned}$$

Оператор $T_{n+1,j}$ называют *оператором перехода со слоя j на слой $n+1$* , а оператор $T_{n+1,0}$ — *разрешающим оператором*.

Неравенство треугольника дает

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|T_{n+1,0}\| \|y_0\|_{(1)} + \sum_{j=0}^n \tau \|T_{n+1,j+1}\| \|f_j\|_{(1)}, \quad (18)$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ — любая норма в \mathcal{B}_h .

Из (18) видно, что имеет место следующая

Теорема 1. Для устойчивости схемы (15) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\|T_{n,j}\| \leq M_1 \text{ при любых } 0 \leq j \leq n \leq n_0. \quad (19)$$

При этом для решения задачи (3) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \left(\|y_0\|_{(1)} + \sum_{j=0}^n \tau \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{(1)} \right) \text{ для всех } 0 \leq n < n_0. \quad (20)$$

Заметим, что из (20) следует (12) при $M_2 = M_1 t_0$ и $\|\varphi_j\|_{(2)} = \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{(1)}$.

Теорема 2. Для устойчивости схемы (3) достаточно, чтобы для нормы ее оператора перехода S_j выполнялась оценка

$$\|S_j\| \leq 1 + c_0 \tau \text{ для всех } j = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad (21)$$

где $c_0 \geq 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h . При условии (21) верна априорная оценка (20) с $M_1 = e^{c_0 t_0}$.

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что из (21) следует (19):

$$\begin{aligned} \|T_{n,j}\| &= \|S_{n-1} S_{n-2} \dots S_{j+1} S_j\| \leq \\ &\leq \|S_{n-1}\| \|S_{n-2}\| \dots \|S_{j+1}\| \|S_j\| \leq (1 + c_0 \tau)^{n-j} \leq \\ &\leq (1 + c_0 \tau)^n \leq (1 + c_0 \tau)^{n_0} \leq e^{c_0 n_0 \tau} = e^{c_0 t_0} = M_1. \end{aligned}$$

Часто высказывается утверждение: «из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части». В каком смысле следует понимать это утверждение?

Будем говорить, что схема (4) *равномерно устойчива по начальным данным*, если устойчива задача Коши

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = j, j+1, \dots, \text{задан } y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (22)$$

при любом j , т. е.

$$\|y_n\|_{(1)} \leq M_1 \|y_j\|_{(1)} \text{ при всех } 0 \leq j < n \leq n_0, \quad (23)$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h .

Если выполнено условие равномерной устойчивости, то для разрешающего оператора $T_{n,j}$ справедлива оценка (19). Следовательно, в силу теоремы 1 для решения задачи (4) выполнена оценка (20).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если схема (4) равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива и по правой части при условии согласования норм*

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|B^{-1}\varphi\|_{(1)}. \quad (24)$$

При этом верна априорная оценка (20).

Заметим, что условие (21) достаточно для равномерной устойчивости по начальным данным.

Рассмотрим двухслойную схему с постоянными (не зависящими от $t_n = nt$) операторами A и B :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Sy_n + \tau f_n, \quad f_n = B^{-1}\varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \\ S &= E - \tau B^{-1}A, \quad \text{задан } y_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Если схема с постоянным оператором перехода S устойчива по начальным данным, то она равномерно устойчива по начальным данным, так как

$$T_{n,j} = T_{n-j,0} = S^{n-j}. \quad (26)$$

Теорема 4. *Устойчивость по начальным данным схемы (25) с постоянными операторами необходима и достаточна для устойчивости по правой части при условии согласования норм (24). При этом верна априорная оценка (20).*

Достаточность. Устойчивость по начальным данным означает ограниченность разрешающего оператора

$$\|T_{n,0}\| \leq M_1. \quad (27)$$

В силу сделанного выше замечания отсюда следует, что выполнено и условие (19), после чего остается воспользоваться теоремой 1.

Необходимость. Пусть схема (25) устойчива по правой части, т. е. для задачи (46) выполнено

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \sum_{j=0}^n \tau \|B^{-1}\varphi_j\|_{(1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Эта оценка имеет место при любой правой части $f_j = B^{-1}\varphi_j$. Из формулы (17) имеем

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^n \tau T_{n+1,j+1} f_j. \quad (29)$$

Нужно показать, что выполнено (27). Выбирая $\tau f_j = \delta_{j,0} f$, из (29) найдем $y_{n+1} = T_{n+1,1} f = T_{n,0} f$ и $\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|T_{n,0}\| \cdot \|f\|_{(1)}$. С другой стороны, (28) дает $\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \|f\|_{(1)}$. Сравнивая эти неравенства, получаем (27), откуда и следует устойчивость по начальным данным.

Сделаем выводы, необходимые для дальнейшего.

1. Если оператор перехода постоянен, то исследование устойчивости по начальным данным сводится к оценкам нормы оператора перехода.

2. Условие согласования норм для правой части и решения

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|B^{-1}\varphi\|_{(1)}$$

является весьма жестким. Если $\|B^{-1}\| \leq c_1$, где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от h и τ , то $\|\varphi\|_{(2)} \leq c_1 \|\varphi\|_{(1)}$ и вместо (20) получим оценку

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{(1)}, \quad M_2 = M_1 c_1. \quad (30)$$

В § 2 будут получены априорные оценки, для которых условие (24) согласования норм $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ не требуется.

3. Схема (4) устойчива, если $\|S_j\| \leq 1 + c_0 \tau$ для всех $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$. При практическом использовании этого достаточного критерия устойчивости надо указать, какими свойствами должны обладать операторы A и B для того, чтобы обеспечить выполнение условия (21). Такие условия найдены в § 2. Они имеют вид линейных операторных неравенств для операторов A и B , заданных на гильбертовом пространстве $H_h = \mathcal{B}_h$.

7. Аппроксимация и сходимость. Понятия аппроксимации, сходимости и точности для операторно-разностных схем вводятся по аналогии с соответствующими понятиями для операторных схем $A_h y_h = \varphi_h$, введенных ранее в гл. II, § 4. При этом возникают лишь некоторые редакционные изменения. Так, например, наряду с нормами $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$ надо ввести и нормы

$$\|y_{h\tau}(t_n)\|_{(1_{h\tau})} = \max_{0 < t = n\tau < t_n} \|y_{h\tau}(t_{n'})\|_{(1_h)},$$

$$\|\varphi_{h\tau}(t_n)\|_{(2_{h\tau})} = \max_{0 < t = n\tau < t_n} \|\varphi_{h\tau}(t_{n'})\|_{(2_h)}.$$

Итак, пусть \mathcal{B}_h — некоторое линейное пространство, на котором введены нормы $\|\cdot\|_{(1_h)}$ и $\|\cdot\|_{(2_h)}$.

Полученные нормированные пространства обозначим $\mathcal{B}_h^{(1)}$ и $\mathcal{B}_h^{(2)}$ соответственно. Будем предполагать, что

$$y_{h\tau}(t_n) \in \mathcal{B}_h^{(1)}, \quad \varphi_{h\tau}(t_n) \in \mathcal{B}_h^{(2)}$$

для всех $t_n = n\tau$, а операторы схемы (4) действуют из $\mathcal{B}_h^{(1)}$ в $\mathcal{B}_h^{(2)}$:

$$A_h, B_h: \mathcal{B}_h^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_h^{(2)}.$$

Пусть $\mathcal{B}_0^{(1)}$ и $\mathcal{B}_0^{(2)}$ — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_{(1_0)}$ и $\|\cdot\|_{(2_0)}$, $u(t)$ — абстрактная функция $t \in [0, T]$ со значе-

ниями в $\mathcal{B}_0^{(\alpha)}$, $f(t)$ — абстрактная функция $t \in [0, T]$ со значениями в $\mathcal{B}_0^{(2)}$. Введем далее линейные операторы $\mathcal{P}_h^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, проектирующие $\mathcal{B}_0^{(\alpha)}$ на $\mathcal{B}_h^{(\alpha)}$: $u_h = \mathcal{P}_h^{(1)}u \in \mathcal{B}_h^{(1)}$, если $u \in \mathcal{B}_0^{(1)}$, $f_h = \mathcal{P}_h^{(2)}f \in \mathcal{B}_h^{(2)}$, если $f \in \mathcal{B}_0^{(2)}$. Будем предполагать, что выполнены условия согласования норм:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\psi_h^{(\alpha)}\|_{(1_h)} = \|\psi^{(\alpha)}\|_{(1_0)}, \quad \text{где } \psi^{(\alpha)} \in \mathcal{B}_0^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Пусть $y_{h\tau}(t_j)$ — решение задачи (4) и $u(t)$ — непрерывная функция t , так что $u(t)|_{t=t_j} = u(t_j) = u_j$.

Рассмотрим погрешность $z_{h\tau}^j = y_{h\tau}^j - u_h^j$. Будем говорить, что схема (4) сходится на абстрактной функции $u(t) \in \mathcal{B}_0^{(1)}$, если

$$\lim_{|h| \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \max_{0 \leq j \leq j_0} \|y_{h\tau}^j - u_h^j\|_{(1_h)} = 0.$$

Схема (4) сходится со скоростью $O(|h|^m + \tau^k)$ или имеет точность $O(|h|^m + \tau^k)$ на функции $u(t) \in \mathcal{B}_0^{(1)}$, если

$$\max_{0 \leq j \leq j_0} \|y_{h\tau}^j - u_h^j\|_{(1_h)} \leq M(|h|^m + \tau^k),$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ .

Априорной характеристикой схемы является погрешность аппроксимации. Погрешностью аппроксимации на функции $u(t)$ для схемы (4) будем называть невязку

$$\psi_{h\tau}^j = B_{h\tau} \frac{u_h^{j+1} - u_h^j}{\tau} + A_{h\tau} u_h^j - \Phi_{h\tau}^j, \quad \Phi_{h\tau}^j = \psi(t_j, h, \tau).$$

Схема имеет аппроксимацию на функции $u(t)$, если

$$\max_{0 \leq j \leq j_0} \|\psi_{h\tau}^j\|_{(1_h)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0. \quad (31)$$

Схема (4) имеет аппроксимацию $O(|h|^m + \tau^k)$ на функции $u(t) \in \mathcal{B}_0^{(1)}$, если

$$\max_{0 \leq j \leq j_0} \|\psi_{h\tau}^j\|_{(1_h)} \leq M(|h|^m + \tau^k),$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ .

Для погрешности $z^j = y^j - u_h^j$ получаем задачу

$$B \frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} + Az^j = \psi^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad z^0 = y_0 - u_h^0. \quad (32)$$

Если схема (4) устойчива, то для решения задачи (32) справедлива оценка

$$\|z^j\|_{(1_h)} \leq M_1 \|y_0 - u_h^0\|_{(1_h)} + M_2 \max_{0 \leq j' \leq j} \|\psi^{j'}\|_{(1_h)}.$$

Отсюда следует утверждение:

Схема (4) сходится на функции $u(t)$, если она имеет аппроксимацию на $u(t)$ и начальное значение y_0 аппроксимирует элемент $u(0)$:

$$\|y_{0ht} - u_h^0\|_{(1_h)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Схема (4) имеет точность $O(|h|^m + \tau^k)$ на $u(t)$, если она устойчива, имеет аппроксимацию $O(|h|^m + \tau^k)$ на $u(t)$ и $\|y_0 - u_h^0\|_{(1_h)} = O(|h|^m + \tau^k)$.

В частности, $u(t)$ может быть решением некоторого дифференциального уравнения. В этом случае говорят, что разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение, если выполнено (31), и т. д.

Отметим, что приведенное в гл. II, § 2 утверждение «если схема устойчива и имеет аппроксимацию, то она сходится» следует понимать так: имеется аппроксимация как разностного уравнения, так и начального значения (если положить $y_0 = \mathcal{Y}_h^0 u(0)$, то $\|y_{0ht} - u_h(0)\|_{(1_h)} = 0$).

§ 2. Классы устойчивых двухслойных схем

1. Постановка задачи. При изучении устойчивости двухслойных схем будем пользоваться их канонической формой

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t = n\tau \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Пусть $\mathcal{B}_h = H_h$ — конечномерное вещественное пространство, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ — норма в H_h . Операторы схемы (1) A и B в общем случае зависят от h , τ и t . Условимся зависимость от t явно не указывать.

Наша ближайшая задача — найти достаточные условия устойчивости схемы (1) и получить априорные оценки решения задачи (1), выражающие устойчивость схемы по правой части и начальным данным.

Решение задачи (1) можно представить в виде суммы $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где \bar{y} — решение однородного уравнения с начальным условием $\bar{y}(0) = y(0) = y_0$:

$$By_t + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad (1a)$$

а \tilde{y} — решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = 0. \quad (1b)$$

Оценка решения задачи (1a)

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} \quad (2)$$

означает, что схема (1) устойчива по начальным данным, а оценка решения задачи (1б)

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (3)$$

выражает устойчивость схемы (1) по правой части.

Мы будем также пользоваться и другим определением устойчивости схемы по правой части

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_t(t')\|_{(2*)}), \quad (4)$$

где $\varphi_t(t') = (\varphi(t') - \varphi(t' - \tau)) / \tau$. Из (2) и (3) или (4), в силу неравенства треугольника $\|y\|_{(1)} \leq \|\bar{y}\|_{(1)} + \|\tilde{y}\|_{(1)}$, следует априорная оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (5)$$

или

$$\|y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_t(t')\|_{(2*)}). \quad (6)$$

В качестве нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ будем пользоваться энергетическими нормами

$$\|y\|_A = \sqrt{\langle Ay, y \rangle} \text{ при } A = A^* > 0, \quad (7)$$

$$\|y\|_B = \sqrt{\langle By, y \rangle} \text{ при } B = B^* > 0, \quad (8)$$

а также основной нормой $\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

Будем говорить, что схема (1) устойчива в H_A (или H_B), если выполнено (5) с $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_A$ (или $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_B$).

2. Исходное семейство схем. Исследование устойчивости будем проводить в некотором исходном семействе разностных схем.

Операторы A и B считаем ограниченными линейными операторами, заданными на всем пространстве H_h , $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = H_h$. Всюду будем предполагать, что разностная задача (1) разрешима при любых входных данных y_0 и $\varphi(t)$, т. е. что существует ограниченный оператор B^{-1} с областью определения $\mathcal{D}(B^{-1}) = H_h$.

Для упрощения выкладок детальное изложение проведем в предположении, что

- 1) операторы A и B не зависят от t (постоянные операторы),
- 2) оператор B — положительный, $B > 0$,
- 3) A — самосопряженный и положительный оператор, $A = A^* > 0$.

Условия 1)–3) и требование разрешимости выделяют из множества всех возможных схем (1) семейство допустимых схем (*исходное семейство*).

Условие 1) может быть ослаблено, т. е. будем иногда рассматривать операторы A и B , зависящие от t , $A = A(t)$, $B = B(t)$.

Схема с весами для уравнения теплопроводности, рассмотренная в примере 1 § 1, п. 3, имеет операторы $A = -\Lambda$, $B = E + \sigma t A$. Так как $A \leq \|A\|E$, $E \geq A/\|A\|$, то $B \geq (1/\|A\| + \sigma t)A > 0$, если $\sigma > -1/(\|A\|t)$. Оператор $A = A^* > 0$ не зависит от t . Таким образом, условия 1)–3) выполнены и указанная схема принадлежит исходному семейству схем при $\sigma \geq -h^2/(4c_2\tau)$, где $c_2 = \max_{x \in \omega_h} a(x)$.

3. Энергетическое тождество. Исследование устойчивости схемы (1) проведем методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на $2\tau y_t = 2(\hat{y} - y)$:

$$2\tau(By_t, y_t) + 2\tau(Ay, y_t) = 2\tau(\varphi, y_t). \quad (9)$$

Пользуясь формулой

$$y = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\hat{y} - y}{2} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2}y_t, \quad (10)$$

перепишем (9) в виде

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t). \quad (11)$$

Лемма 1. Пусть A — самосопряженный оператор. Тогда

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y). \quad (12)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) &= (A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, \hat{y}) - (A\hat{y}, y) - (Ay, y) = \\ &= (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y), \end{aligned}$$

так как $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y}) = (A\hat{y}, y)$ в силу самосопряженности A .

Подставляя (12) в (11), получим энергетическое тождество для схемы (1):

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \quad (13)$$

4. Устойчивость по начальным данным в H_A . Для исследования устойчивости схемы (1) по начальным данным будем оценивать решение задачи (1a).

Теорема 1. Условие

$$B \geq \frac{\tau}{2}A \quad (14)$$

необходимо и достаточно для устойчивости в H_A по начальным данным с постоянной $M_1 = 1$ схемы (1) из исходного семейства,

т. е. для выполнения оценки

$$\|y_n\|_A \leq \|y_0\|_A, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где y_n — решение задачи (1a).

Достаточность. Пусть выполнено условие (14). Из энергетического тождества для задачи (1a) ($\phi = 0$)

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (Ay, \hat{y}) = (Ay, y) \quad (16)$$

следует неравенство $(Ay, \hat{y}) \leq (Ay, y)$ или $\|\hat{y}\|_A^2 \leq \|y\|_A^2$, откуда получаем $\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A \leq \dots \leq \|y_0\|_A$.

Необходимость. Предположим, что схема (1a) устойчива и выполнено неравенство (15). Докажем, что отсюда следует операторное неравенство (14), т. е.

$$(Bv, v) \geq 0,5\tau(Av, v) \quad \text{для любого } v \in H. \quad (17)$$

Будем исходить из тождества (16) на первом слое ($n = 0$):

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t(0), y_t(0)) + (Ay_1, y_1) = (Ay_0, y_0).$$

В силу (15) это тождество может быть выполнено только при

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t(0), y_t(0)) = (Ay_0, y_0) - (Ay_1, y_1) \geq 0,$$

т. е.

$$((B - 0,5\tau A)y_t(0), y_t(0)) \geq 0.$$

Так как $y_0 \in H$ — произвольный элемент, то и элемент $v = y_t(0) = -B^{-1}Ay_0 \in H$ произведен. В самом деле, задавая любой элемент $v = y_t(0) \in H$, находим $y_0 = -A^{-1}Bv \in H$, так как A^{-1} существует. Таким образом, неравенство выполнено при любых $v = y_t(0) \in H$, т. е. имеет место операторное неравенство (14), что и требовалось доказать.

Замечание 1. Условие (14) достаточно для устойчивости (15) схемы (1), если $B = B(t) > 0$ — несамосопряженный переменный оператор.

Замечание 2. «Естественность» условия (14) можно пояснить на простейшем примере. Рассмотрим разностную схему

$$b \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 = u_0,$$

где a, b — положительные числа, соответствующую дифференциальному уравнению

$$b \frac{du}{dt} + au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Из разностного уравнения находим

$$y_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau a}{b}\right) y_n, \quad |y_{n+1}| \leq \left|1 - \frac{\tau a}{b}\right| \cdot |y_n|.$$

Требование устойчивости

$$|y_{n+1}| \leq |y_0|,$$

очевидно, будет выполнено, если $|1 - \tau a/b| \leq 1$ или $-1 \leq 1 - \tau a/b \leq 1$, т. е. при $b \geq 0,5\tau a$. Аналогия с операторным неравенством $B \geq 0,5\tau A$ очевидна.

Пример. Проиллюстрируем эффективность условия устойчивости (14) на примере схемы с весами

$$y_t + A(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) = 0.$$

Запишем ее в каноническом виде (см. § 1)

$$(E + \sigma t A) y_t + A y = 0, \quad B = E + \sigma t A. \quad (18)$$

Если $A = A^* > 0$ и не зависит от t , а $\sigma > -1/(\tau \|A\|)$, то схема с весами принадлежит исходному семейству (см. п. 2). Необходимое и достаточное условие устойчивости (14) имеет вид

$$B - 0,5\tau A = E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq 0.$$

Учитывая, что $A \leq \|A\|E$ и $E \geq A/\|A\|$, получаем

$$B - 0,5\tau A \geq (1/\|A\| + (\sigma - 0,5)\tau)A.$$

Отсюда видно, что условие (14) эквивалентно неравенству

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \text{где} \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}.$$

Это условие необходимо и достаточно для устойчивости схемы с весами.

В случае модельной схемы теплопроводности

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad \Lambda y = y_{xx}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad hN = 1,$$

$$y(0, t_n) = 0, \quad y(1, t_n) = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x = ih \in [0, 1],$$

соответствующей первой краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

мы получаем (см. гл. V, § 1)

$$A = -\tilde{\Lambda}, \quad \tilde{\Lambda}y = \Lambda y \quad \text{при} \quad y \in \dot{\Omega}_h = H_h,$$

$$\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau \cos^2 \frac{\pi h}{2}}.$$

Условие $\sigma \geq \bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_0 = \frac{h^2}{4\tau} > \sigma_0$ было получено в гл. V методом разделения переменных.

Предположим теперь, что $A > 0$ не является самосопряженным. Тогда схема (18) не принадлежит исходному семейству. Однако ее можно заменить эквивалентной схемой из исходного семейства. Так как $A > 0$, то существует обратный оператор $A^{-1} > 0$. Применяя A^{-1} к уравнению (18), получим

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = 0, \text{ где } \tilde{B} = A^{-1} + \sigma t E, \tilde{A} = E.$$

Оператор $\tilde{A} = E = \tilde{A}^* > 0$ и не зависит от t , $\tilde{B} > 0$ при $\sigma \geq 0$. Условие устойчивости (14) в $H_{\tilde{A}} = H$ имеет вид $\tilde{B} - 0,5 \tau \tilde{A} = A^{-1} + (\sigma - 0,5) \tau E \geq 0$ и будет выполнено при $\sigma \geq 0,5$. Условие $\sigma \geq 0,5$ достаточно для выполнения оценки

$$\|y_n\| \leq \|y_0\| \text{ при } \sigma \geq 0,5, \quad A \neq A^*, \quad A > 0.$$

5. Устойчивость по начальным данным в H_B . Напишем второе энергетическое тождество для схемы (1a), предполагая, что и B —самосопряженный оператор, $B = B^* > 0$. Умножим схему (1a) на $2\hat{y}$:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) + 2\tau(Ay, \hat{y}) = 0. \quad (19)$$

Учитывая формулы

$$\hat{y} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) + \frac{\tau}{2}y_t, \quad y = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2}y_t$$

и пользуясь леммой 1, найдем

$$\begin{aligned} 2\tau(By_t, \hat{y}) &= (B(\hat{y} - y), \hat{y} + y) + \tau^2(By_t, y_t) = \|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2\|y_t\|_B^2, \\ 2\tau(Ay, \hat{y}) &= \frac{\tau}{2}(A(\hat{y} + y - \tau y_t), \hat{y} + y + \tau y_t) = \frac{\tau}{2}\|\hat{y} + y\|_A^2 - \frac{\tau^3}{2}\|y_t\|_A^2. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (19) получим

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(\|y_t\|_B^2 - 0,5\tau\|y_t\|_A^2) + 0,5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2. \quad (20)$$

Теорема 2. Пусть в схеме (1) операторы A и B не зависят от t , $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$. Тогда условие (14) достаточно для устойчивости схемы (1) по начальным данным в H_B с $M_1 = 1$.

В самом деле, пусть $B \geq 0,5\tau A$. Тогда

$$\|y_t\|_B^2 - 0,5\tau\|y_t\|_A^2 = ((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) \geq 0$$

и (20) дает $\|\hat{y}\|_B \leq \|y\|_B$, т. е. $\|y(t)\|_B \leq \|y(0)\|_B$.

Замечание. Если A и B —перестановочные операторы, то условие (14) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (1a) в H_D :

$$\|y_n\|_D \leq \|y_0\|_D,$$

где $D = D^* > 0$ — любой оператор, перестановочный с A и B , например, $D = E$, $D = A^2$ или $D = B^2$ при $B = B^*$, так что $\|y_n\| \leq \|y_0\|$, $\|Ay_n\| \leq \|Ay_0\|$, $\|By_n\| \leq \|By_0\|$ и т. д.

6. Оценки нормы оператора перехода. Для исследования устойчивости может быть применен метод, основанный на оценке нормы оператора перехода со слоя на слой. Этот метод по существу тоже является энергетическим.

Разностную схему (1a) запишем в виде

$$\hat{y} = Sy, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad (21)$$

где S — оператор перехода.

Пусть $D = D^* > 0$ — произвольный постоянный оператор, заданный в H . Тогда имеет место очевидное неравенство

$$\|\hat{y}\|_D = \|Sy\|_D \leq \|S\|_D \|y\|_D, \quad (22)$$

где $\|S\|_D^2$ определяется как наименьшая постоянная M в неравенстве

$$(DSy, Sy) \leq M(Dy, y).$$

Из (22) видно, что схема (21) устойчива в H_D , т. е.

$$\|y_n\|_D \leq \|y_0\|_D,$$

если норма оператора перехода не превосходит единицы:

$$\|S\|_D \leq 1.$$

Это условие эквивалентно требованию неотрицательности функционала ($M = 1$):

$$J_D = (Dy, y) - (DSy, Sy) \geq 0.$$

Рассмотрим случай $D = A$ и покажем, что $\|S\|_A \leq 1$ при $B \geq 0,5\tau A$.

Подставляя в функционал J_A выражение для S , получаем $J_A[y] = (Ay, y) - (ASy, Sy) = (Ay, y) - (A(E - \tau B^{-1}A)y, (E - \tau B^{-1}A)y) = 2\tau(Ay, B^{-1}Ay) - \tau^2(AB^{-1}Ay, B^{-1}Ay)$

или после замены $x = B^{-1}Ay$ или $y = A^{-1}Bx$

$$J_A[y] = J_A[x] = 2\tau \left[(Bx, x) - \frac{\tau}{2} (Ax, x) \right]. \quad (23)$$

Отсюда видно, что условия $\|S\|_A \leq 1$ и $B \geq \frac{\tau}{2} A$ эквивалентны, т. е. верна теорема 1.

Поскольку $A = A^* > 0$, то существует квадратный корень $A^{1/2} = (A^{1/2})^* > 0$. Тогда можно преобразовать выражение для

$J_A[y]$ следующим образом:

$$J_A[y] = (A^{1/2}y, A^{1/2}y) - (A^{1/2}Sy, A^{1/2}Sy) = \\ = \|A^{1/2}y\|^2 - \|A^{1/2}Sy\|^2 = \|A^{1/2}y\|^2 - \|(E - \tau C)A^{1/2}y\|^2,$$

где $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. Проведя замену $u = A^{1/2}y$, получаем

$$J_A[J] = \|u\|^2 - \|(E - \tau C)u\|^2,$$

отсюда следует, что условие

$$\|E - \tau C\| \leq 1 \quad (24)$$

эквивалентно $B \geq 0,5\tau A$.

Здесь не предполагалось, что B — самосопряженный оператор. Рассмотрим случай, когда

$$B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0.$$

Тогда можно показать, что условия

$$J_B[y] \geq 0 \text{ и } B \geq 0,5\tau A \quad (25)$$

эквивалентны. Так как $B = B^* > 0$, то существует $B^{1/2} = (B^{1/2})^* > 0$. Этим же свойством обладает оператор

$$C = B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}, \quad C = C^* > 0.$$

Последовательно проводя замены $B^{-1/2}Ay = x$, $C^{1/2}x = u$, $C = B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$, $B^{-1/2}u = v$, получаем

$$J_B[y] = 2\tau(Ay, y) - \tau^2(Ay, B^{-1}Ay) = \\ = 2\tau(B^{1/2}x, A^{-1}B^{1/2}x) - \tau^2(x, x) = 2\tau(Cx, x) - \tau^2(x, x) = \\ = 2\tau(u, u) - \tau^2(C^{-1}u, u) = 2\tau(u, u) - \tau^2(B^{-1/2}AB^{-1/2}u, u) = \\ = 2\tau\left[(Bv, v) - \frac{\tau}{2}(Av, v)\right].$$

Таким образом, $J_B[y]$ преобразован к тому же виду (23), что и $J_A[y]$:

$$J_B[y] = 2\tau\left[(Bv, v) - \frac{\tau}{2}(Av, v)\right],$$

где

$$v = B^{-1/2}C^{1/2}B^{-1/2}Ay, \quad y = A^{-1}B^{1/2}C^{-1/2}B^{1/2}v.$$

Из этой формулы следует эквивалентность условий (25), т. е. справедливость теоремы 2.

Метод оценки нормы оператора перехода тем самым позволяет доказать, что условие (14) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (1) по начальным данным в H_A (при $B \neq B^*$) и H_B (при $B = B^* > 0$) с постоянной $M_1 = 1$.

7. **Метод разделения переменных.** Если оба оператора A и B являются самосопряженными

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad (26)$$

то устойчивость схемы (1a) в H_A и H_B при

$$B \geq \frac{\tau}{2} A \quad (14)$$

можно доказать с помощью «метода разделения переменных» по аналогии с гл. V.

Пусть N —размерность конечномерного пространства H , λ_k —собственные значения и ξ_k —ортонормированные собственные функции следующей задачи (см. гл. I, § 2 и Дополнение, § 1):

$$A\xi_k = \lambda_k B\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

причем $(B\xi_k, \xi_m) = \delta_{km}$ ($\delta_{kk} = 1$, $\delta_{km} = 0$ при $k \neq m$). Все собственные значения λ_k задачи (27) положительны, так как $A > 0$.

Решение задачи (1a) будем искать в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \xi_k. \quad (28)$$

Учитывая, что $Ay = \sum_{k=1}^N c_k A \xi_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k B \xi_k$, после подстановки выражения (28) в (1a), получим

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{c_k(t+\tau) - c_k(t)}{\tau} + \lambda_k c_k(t) \right\} B \xi_k = 0.$$

Отсюда в силу ортогональности $\{\xi_k\}$ следует

$$\frac{c_k(t+\tau) - c_k(t)}{\tau} + \lambda_k c_k(t) = 0, \quad c_k(t+\tau) = (1 - \tau \lambda_k) c_k(t)$$

и

$$y(t+\tau) = \sum_{k=1}^N c_k(t+\tau) \xi_k = \sum_{k=1}^N (1 - \tau \lambda_k) c_k(t) \xi_k.$$

Оценим норму $\|y(t+\tau)\|_A^2 = (Ay(t+\tau), y(t+\tau))$. Замечая, что $\|y(t)\|_A^2 = \left(\sum_{k=1}^N c_k(t) \lambda_k B \xi_k, \sum_{k=1}^N c_k(t) \xi_k \right) = \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2(t)$, находим

$$\|y(t+\tau)\|_A^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2(t+\tau) \leq \max_{1 \leq k \leq N} (1 - \tau \lambda_k)^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2(t),$$

т. е.

$$\|y(t+\tau)\|_A \leq \max_{1 \leq k \leq N} |1 - \tau \lambda_k| \|y(t)\|_A.$$

Отсюда видно, что

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y(t)\|_A \leq \|y(0)\|_A, \quad (29)$$

если

$$|1 - \tau \lambda_k| \leq 1 \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots, N.$$

Это условие означает, что $-1 \leq 1 - \tau \lambda_k \leq 1$ или

$$0 < \lambda_k \leq 2/\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

Покажем эквивалентность неравенств (14) и (30).

Рассмотрим выражение

$$By - 0,5\tau Ay = \sum_{k=1}^N c_k(t) (B\xi_k - 0,5\tau A\xi_k) = \sum_{k=1}^N c_k(t) (1 - 0,5\tau \lambda_k) B\xi_k$$

и вычислим функционал

$$(By, y) - 0,5\tau (Ay, y) = \sum_{k=1}^N c_k^2(t) (1 - 0,5\tau \lambda_k).$$

Отсюда и следует эквивалентность (14) и (30).

Таким образом, мы показали, что при условиях (26) неравенство (14) достаточно для устойчивости схемы (1a) в пространстве H_A , т. е. справедливо (29).

Следует подчеркнуть, что требование самосопряженности оператора B является здесь обязательным, в то время как для применения энергетического метода достаточно лишь положительности оператора B .

Аналогично доказывается устойчивость схемы (1a) в H_B , если выполнено условие (30).

8. Условие ρ -устойчивости. Введем более общее определение устойчивости по начальным данным.

Пусть $D = D^* > 0$ — постоянный оператор. Будем говорить, что схема (1) ρ -устойчива по начальным данным, если для решения задачи (1a) при любых $y_0 \in H$ выполнено неравенство

$$\|y_n\|_D \leq \rho^n \|y_0\|_D, \quad (31)$$

где $\rho = e^{c_0 \tau}$, c_0 — постоянная, не зависящая от h , τ и от выбора y_0 . Если схема (1a) ρ -устойчива в H_D , то она устойчива в H_B :

$$\|y_n\|_D \leq M_1 \|y_0\|_D, \quad t_n = n\tau \leq \bar{t}_0$$

с постоянной $M_1 = e^{c_0 \bar{t}_0}$ при $c_0 > 0$ и $M_1 = 1$ при $c_0 \leq 0$.

Двухслойную схему (1a) с постоянными операторами A и B можно свести к явной схеме:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + Cx_n = 0 \quad \text{или} \quad x_{n+1} = (E - \tau C)x_n, \quad (32)$$

если провести замену:

- 1) $x_n = B^{1/2}y_n$ при $B = B^* > 0$ и обозначить $C = C_1 = B^{-1/2}AB^{-1/2}$.
 2) $x_n = A^{1/2}y_n$ при $A = A^* > 0$ и обозначить $C = C_2 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$.
 Из определений 1) и 2) следует, что

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \|y_n\|_B \quad \text{при } C = C_1, \quad x_n = B^{1/2}y_n, \\ \|x_n\| &= \|y_n\|_A \quad \text{при } C = C_2, \quad x_n = A^{1/2}y_n. \end{aligned}$$

Условие ρ -устойчивости неявной схемы (1а) в H_D при $D = B$ и $D = A$ эквивалентно условию ρ -устойчивости явной схемы (32) в H :

$$\|x_n\| \leq \rho^n \|x_0\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2. *Пусть дана схема (32) с постоянным оператором C . Условие ρ -устойчивости этой схемы эквивалентно условию ограниченности нормы оператора перехода*

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \leq \rho.$$

В самом деле, при $n = 1$ имеем $x_1 = Sx_0$ и $\|x_1\| \leq \|S\| \|x_0\|$. Сравнивая это неравенство с (31) при $n = 1$, убеждаемся в справедливости леммы 2.

Лемма 3. *Если $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$, то неравенства*

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B \quad \text{и} \quad \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E \quad (33)$$

эквивалентны при $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ и $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ и γ — любое число. Рассмотрим разность

$$(Cx, x) - \gamma(x, x) = (B^{-1/2}AB^{-1/2}x, x) - \gamma(x, x) = (Ay, y) - \gamma(By, y)$$

при $y = B^{-1/2}x$. Отсюда видно, что знаки операторов $C - \gamma E$ и $A - \gamma B$ совпадают. Отметим, что при этом не требуется положительности оператора A .

Пусть теперь $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. Докажем сначала, что неравенства $C \geq \gamma E$ ($C \leq \gamma E$) и $E \geq \gamma C^{-1}$ ($E \leq \gamma C^{-1}$) эквивалентны. Вводя замену $y = C^{1/2}x$, получаем

$$(Cx, x) - \gamma(x, x) = (C^{1/2}x, C^{1/2}x) - \gamma(x, x) = (y, y) - \gamma(C^{-1}y, y),$$

откуда и следует, что операторы $C - \gamma E$ и $E - \gamma C^{-1}$ имеют одинаковые знаки. Подставим теперь $C^{-1} = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ и обозначим $v = A^{-1/2}y$:

$$(Cx, x) - \gamma(x, x) = (y, y) - \gamma(A^{-1/2}BA^{-1/2}y, y) = (Av, v) - \gamma(Bv, v),$$

т. е. операторы $C - \gamma E$ и $A - \gamma B$ имеют одинаковые знаки. Полагая $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$, убеждаемся в эквивалентности неравенств (33).

Лемма 4. *Если оператор $C = C^* > 0$, $\tau > 0$, то условия*

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \leq \rho \quad (34)$$

и

$$\frac{1-\rho}{\tau} E \leq C \leq \frac{1+\rho}{\tau} E \quad (35)$$

эквивалентны.

В самом деле, так как оператор $S = E - \tau C = S^*$ самосопряжен, то

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)| = \sup_{\|x\|=1} |((E - \tau C)x, x)|,$$

так что $-\|S\|E \leq S \leq \|S\|E$ или $-\rho E \leq S \leq \rho E$ и

$$-\rho E \leq E - \tau C \leq \rho E,$$

откуда и следует

$$\frac{1-\rho}{\tau} E \leq C \leq \frac{1+\rho}{\tau} E.$$

Таким образом, из условия (34) следует (35). Обратный ход рассуждений очевиден.

Теорема 3. Пусть A и B —постоянные операторы и $A = A^*$, $B = B^* > 0$.

Тогда условия

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B \quad (36)$$

необходимы и достаточны для ρ -устойчивости в H_B схемы (1a)

$$\|y_n\|_B \leq \rho^n \|y_0\|_B,$$

а если, кроме того, A —положительный оператор, то и для ρ -устойчивости в H_A

$$\|y_n\|_A \leq \rho^n \|y_0\|_A.$$

Для доказательства теоремы сводим неявную схему (1a) к явной схеме (32) с оператором $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ (или $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$, при $A > 0$) и затем пользуемся леммами 3, 2 и 4.

Замечание. Доказательство теоремы 3 не удается получить на основе энергетического тождества (20). Однако можно использовать метод, изложенный в п. 6. Рассмотрим, например, случай $D = B$. Условия (36) эквивалентны условию $\|E - \tau B^{-1}A\|_B \leq \rho$ или неотрицательности функционала

$$J_B[y] = \rho^2 (By, y) - (B(E - \tau B^{-1}A)y, (B - \tau B^{-1}A)y).$$

Предположим теперь, что H —конечномерное пространство размерности N . Подставляя $y = \sum_{k=1}^N c_k \xi_k$, где ξ_k —собственный

элемент задачи (27), в выражение для $J_B[y]$, получаем

$$J_B[y] = \sum_{k=1}^N c_k^2 (\rho^2 - (1 - \tau \lambda_k)^2) \geq 0 \quad \text{при} \quad \frac{1-\rho}{\tau} \leq \lambda_k \leq \frac{1+\rho}{\tau},$$

что эквивалентно (36).

9. Устойчивость по правой части. В § 1 была доказана теорема о том, что из устойчивости по начальным данным в норме $\|\cdot\|_1$ следует устойчивость по правой части, взятой в норме $\|\Phi\|_{(2)} = \|B^{-1}\Phi\|_1$. Отсюда следует

Теорема 4. *Если выполнено условие (14), то схема (1) из исходного семейства схем устойчива по правой части и для решения задачи (1) спраздлиза априорная оценка*

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_0\|_A + \sum_{k=0}^n \tau \|\Phi_k\|_A.$$

Если, кроме того, оператор B самосопряжен, то

$$\|y_{n+1}\|_B \leq \|y_0\|_B + \sum_{k=0}^n \tau \|\Phi_k\|_{B^{-1}}.$$

Покажем, что, кроме того, имеют место априорные оценки (3), (4), где

$$\|\Phi\|_{(2)} = \|\Phi\|_{A^{-1}} \quad \text{и} \quad \|\Phi\|_{(2)} = \|\Phi\|.$$

Теорема 5. *Если выполнено условие*

$$B \geq \frac{\tau}{2} A,$$

то схема (1) из исходного семейства устойчива по правой части, и для решения задачи (1) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_0\|_A + \|\Phi_0\|_{A^{-1}} + \|\Phi_n\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^n \tau \|\Phi_{k-1}\|_{A^{-1}}. \quad (37)$$

Доказательство. Представим решение задачи (1) в виде суммы

$$y_n = v_n + w_n, \quad (38)$$

где w_n — решение уравнения («стационарной» задачи)

$$Aw_n = \Phi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad w_0 = w_1. \quad (39)$$

Тогда, подставив (38) и (39) в уравнение (1), получим следующую задачу для v_n :

$$Bv_n + Av = \tilde{\Phi}, \quad v_0 = y_0 - w_0, \quad (40)$$

где $\tilde{\varphi}_n = -(B - \tau A) w_{t, n}$, $\tilde{\varphi}_0 = 0$. Для оценки v воспользуемся теоремой 4:

$$\|v_{n+1}\|_A \leq \|v_0\|_A + \sum_{k=0}^n \tau \|B^{-1} \tilde{\varphi}_k\|_A. \quad (41)$$

Оценим слагаемое $\|B^{-1} \tilde{\varphi}_k\|_A = \|A^{1/2} B^{-1} \tilde{\varphi}_k\|$ в неравенстве (41). Для этого заметим, что

$$w_t = A^{-1} \varphi_t \quad \text{и} \quad \|A^{1/2} B^{-1} \tilde{\varphi}\| = \|(E - \tau C) A^{-1/2} \varphi_t\|,$$

где $C = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$. Из условия устойчивости (14) в п. 6 получена оценка (24)

$$\|E - \tau C\| \leq 1,$$

откуда следует, что

$$\|A^{1/2} B^{-1} \tilde{\varphi}\| \leq \|A^{-1/2} \varphi_t\| = \|\varphi_t\|_{A^{-1}},$$

где $\|\varphi_t\|_{A^{-1}} = \sqrt{\langle A^{-1} \varphi_t, \varphi_t \rangle}$. Следовательно, для решения задачи (40) выполняется оценка

$$\|v_{n+1}\|_A \leq \|v_0\|_A + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_{t, k}\|_{A^{-1}},$$

откуда, учитывая неравенство

$$\|v_0\|_A \leq \|y_0\|_A + \|w_0\|_A = \|y_0\|_A + \|\varphi_0\|_{A^{-1}},$$

получаем

$$\|v_{n+1}\|_A \leq \|y_0\|_A + \|\varphi_0\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_{t, k}\|_{A^{-1}}.$$

Наконец, используя неравенство треугольника, из (38) получаем оценку (37). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если выполнены условия*

$$B \geq \frac{1+\varepsilon}{2} \tau A, \quad B = B^*, \quad (42)$$

то для схемы (1) из исходного семейства справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|y_0\|_A^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_k\|_{B^{-1}}^2, \quad (43)$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, не зависящая от h и τ .

Доказательство. Будем исходить из энергетического тождества (13). Оценим его правую часть $2\tau(\varphi, y_t)$, пользуясь

обобщенным неравенством Коши—Буняковского и ε -неравенством:

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\|_{B^{-1}} \|y_t\|_B \leq 2\tau \varepsilon_1 \|y_t\|_B^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Подставляя эту оценку в (13), получим

$$2\tau \left(\left((1-\varepsilon_1)B - \frac{\tau}{2}A \right) y_t, y_t \right) + (Ay, \hat{y}) \leq (Ay, y) + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Если выполнено условие (42), то можно выбрать ε_1 так, чтобы $1/(1-\varepsilon_1) = 1 + \varepsilon$, т. е. $\varepsilon_1 = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$. Тогда

$$(1-\varepsilon_1)B - \frac{\tau}{2}A = (1-\varepsilon_1) \left(B - \frac{1+\varepsilon}{2}\tau A \right) \geq 0,$$

$$(Ay_{k+1}, y_{k+1}) \leq (Ay_k, y_k) + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \tau \|\varphi_k\|_{B^{-1}}^2.$$

Суммирование по $k = 0, 1, 2, \dots, n$ и дает оценку (43).

При каких условиях имеет место устойчивость в норме $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 7. Пусть выполнено условие

$$B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A, \quad (44)$$

где ε — любое положительное число и схема (1) принадлежит исходному семейству схем. Тогда для задачи (1) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=0}^n \tau \|\varphi_k\|^2. \quad (45)$$

Доказательство. Обратимся к тождеству (13). Неравенство Коши—Буняковского и ε -неравенство дают

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\| \|y_t\| \leq 2\tau \varepsilon \|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2.$$

Подставим эту оценку в (13) и используем условие (44)

$$\|\hat{y}\|_A^2 \leq \|y\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2 \quad \text{или} \quad \|y_{j+1}\|_A^2 \leq \|y_j\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_j\|^2.$$

Суммируя затем по $j = 0, 1, \dots, n$, получаем (45).

Теорема 7 доказана.

Замечание 1. Теорема 7 сохраняет силу и в случае переменного оператора $B = B(t)$, а теорема 2 справедлива для переменного оператора $A = A(t)$. Это видно из доказательств указанных теорем.

Замечание 2. Если $A = A^*$, $B = B^* > 0$ и выполнены условия (36), то схема (1) ρ -устойчива по начальным данным в H_B ,

т. е. решение задачи (1a) удовлетворяет неравенству
 $\|y_n\|_B \leq \rho^n \|y_0\|_B$.

Отсюда, в силу теоремы 3 из § 1, следует оценка для решения задачи (1)

$$\|y_{n+1}\|_B \leq \rho^{n+1} \|y_0\|_B + \sum_{k=0}^n \tau \rho^{n-k} \|\varphi_k\|_{B^{-1}}.$$

При этом не требуется положительности оператора A . Пусть, например,

$$A \geq -c_* E, \quad c_* > 0.$$

Тогда условие

$$A \geq \frac{1-\rho}{\tau} B \quad \text{или} \quad A + \frac{\rho-1}{\tau} B \geq 0$$

может быть выполнено только при $\rho = e^{c_* \tau} > 1$, т. е. при $c_* \geq 0$. Предположим, что

$$B \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0,$$

тогда

$$A + \frac{\rho-1}{\tau} B \geq A + c_* B \geq (-c_* + c_* \varepsilon) E$$

и, следовательно, $A \geq \frac{1-\rho}{\tau} B$, если взять $c_* \geq \frac{c_*}{\varepsilon}$. В качестве B можно, например, выбрать оператор

$$B = E + \tau R, \quad R = 0,5 A', \quad A' = A + c_* E \geq 0.$$

Тогда $\varepsilon = 1$, $c_* = c_*$, $\rho = e^{c_* \tau}$.

10. Устойчивость схемы с весами. Покажем, как можно пользоваться доказанными выше теоремами на примере схемы с весами:

$$y_t + A(\sigma \hat{y} + (1-\sigma)y) = \varphi, \quad y(0) = y_0. \quad (46)$$

В § 1, п. 3 схема (46) была приведена к каноническому виду

$$(E + \sigma \tau A) y_t + A y = \varphi, \quad y(0) = y_0. \quad (47)$$

Сравнивая (46) с (1), видим, что

$$B = E + \sigma \tau A.$$

Пусть существует оператор A^{-1} . Действуя A^{-1} на (47), получим вторую каноническую форму для схемы с весами:

$$\tilde{B} y_t + \tilde{A} y = \tilde{\varphi}, \quad y(0) = y_0, \quad \tilde{B} = A^{-1} + \sigma \tau E, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1} \varphi. \quad (48)$$

Записью в виде (47) будем пользоваться в случае самосопряженного оператора A , (48)—в случае несамосопряженного положительно определенного оператора $A = A(t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда A —постоянный, самосопряженный положительный оператор

$$A = A^* > 0.$$

В п. 4 было показано, что в этом случае необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным схемы с весами (47) имеет вид

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}.$$

При этом условии для задачи (47) верна оценка (15). В частности, для явной схемы (при $\sigma = 0$) из условия $\sigma \geq \sigma_0$ следует $\tau \leq 2\|A\|$, т. е. явная схема устойчива в H_A при $\tau \leq 2\|A\|$. Схема с $\sigma \geq 0,5$ безусловно (т. е. при любых τ) устойчива. В п. 4 был рассмотрен модельный пример с $Ay = -\Lambda y = -y_{xx}$ при $y \in \Omega_h = H_h$. В этом случае $\|A\| < 4/h^2$, и явная схема устойчива при $\tau \leq 0,5h^2$.

Для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом $k(x)$ имеем

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < k \leq c_2, \quad \Lambda y = (a(x) y_x)_x, \quad 0 < a \leq c_2$$

и $\sigma_0 < 0,5 - h^2/(4c_2\tau)$, а явная схема устойчива при $\tau \leq 0,5h^2/c_2$.

Теорема 8. Пусть A —самосопряженный положительный оператор, не зависит от $t = nt$; $A = A^* > 0$. Тогда для схемы с весами (47) имеют место оценка (37) при $\sigma \geq \sigma_0$, оценка (43) при $\sigma \geq \frac{1+\epsilon}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}$, $\epsilon > 0$ и оценка (45) при $\sigma \geq \sigma_\epsilon$, $\sigma_\epsilon = 0,5 - (1-\epsilon)/(\tau \|A\|)$, $0 < \epsilon \leq 1$, где ϵ —постоянная, не зависящая от h, τ .

Для доказательства достаточно проверить выполнение условий теорем 5, 6, 7, пользуясь неравенством $B - 0,5\tau A = E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq (1\|A\| + (\sigma - 0,5)\tau)A$.

Предположим теперь, что $A = A(t) > 0$ и $A^* \neq A$, т. е. $A = A(t)$ —положительный переменный несамосопряженный оператор.

Теорема 9. Пусть $A = A(t) > 0$ —положительный несамосопряженный оператор. Если выполнено условие $\sigma \geq 0,5$, то для схемы (46) верна оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_0\| + \|(A^{-1}\Phi)_0\| + \|(A^{-1}\Phi)_n\| + \sum_{k=1}^n \tau \|(A^{-1}\Phi)_{\bar{t}, k}\|. \quad (49)$$

Доказательство. Рассмотрим схему (48) с правой частью $\tilde{\Phi} = A^{-1}\Phi$. Для нее при $\sigma \geq 0,5$ выполнены условия теоремы 5 и можно воспользоваться неравенством (37), учитывая, что $\|y\|_{\tilde{A}} = \|y\|, \|\tilde{\Phi}_{\tilde{t}, k}\|_{\tilde{A}^{-1}} = \|\tilde{\Phi}_{\tilde{t}, k}\| = \|(A^{-1}\Phi)_{\tilde{t}, k}\|$. В результате получим (49).

Замечание. Если $A^*(t) = A(t) > 0$ — самосопряженный оператор, то оценка (49) справедлива при

$$\sigma \geq \sigma_0.$$

Теорема 10. Пусть $A(t) = A^*(t) > 0$ и $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$. Тогда имеет место оценка

$$\|y_{n+1}\|^2 \leq \|y_0\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n \tau \|\Phi_k\|_{A_k^{-1}}^2. \quad (50)$$

Доказательство. Энергетическое тождество (13) для (48) принимает вид

$$2\tau((A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E)y_t, y_t) + \|\hat{y}\|^2 = \|y\|^2 + 2\tau(A^{-1}\Phi, y_t). \quad (51)$$

Из условия $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ следует, что

$$\tilde{B} - \frac{\tau}{2} \tilde{A} \geq \varepsilon A^{-1}. \quad (52)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{B} - \frac{\tau}{2} \tilde{A} &= A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E = \\ &= \varepsilon A^{-1} + (1 - \varepsilon)A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E \geq \varepsilon A^{-1} + \frac{1 - \varepsilon}{\|A\|} E + (\sigma - 0,5)\tau E = \\ &= \varepsilon A^{-1} + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau E \geq \varepsilon A^{-1} \end{aligned}$$

при $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$. При этом мы учли, что

$$A^{-1} \geq \frac{1}{\|A\|} E.$$

Подставляя (52) в (51), получаем

$$2\tau\varepsilon \|y_t\|_{A^{-1}}^2 + \|\hat{y}\|^2 \leq \|y\|^2 + 2\tau(A^{-1}\Phi, y_t). \quad (53)$$

Обобщенное неравенство Коши — Буняковского и ε -неравенство дают

$$2\tau(A^{-1}\Phi, y_t) \leq 2\tau\|\Phi\|_{A^{-1}}\|y_t\|_{A^{-1}} \leq 2\tau\varepsilon \|y_t\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\Phi\|_{A^{-1}}^2. \quad (54)$$

Подставляя (54) в (53), будем иметь

$$\|\hat{y}\|^2 \leq \|y\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\Phi\|_{A^{-1}}^2 \quad \text{или} \quad \|y_{k+1}\|^2 \leq \|y_k\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\Phi_k\|_{A_k^{-1}}^2.$$

Суммирование по $k = 0, 1, 2, \dots$ приводит к оценке (50).

Лемма 5. Пусть A — положительный оператор, для которого выполнено неравенство

$$\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x), \quad \text{где } \Delta = \text{const} > 0. \quad (55)$$

Тогда

$$A^{-1} \geq \frac{1}{\Delta} E \quad \text{и} \quad A \leq \Delta E. \quad (56)$$

В самом деле, полагая $x = A^{-1}y$, получим из (55) неравенство $\langle y, y \rangle \leq \Delta(A^{-1}y, y)$, т. е. $E \leq \Delta A^{-1}$ или $A^{-1} \geq E/\Delta$.

Пользуясь неравенствами $(Ax, x)^2 \leq \|Ax\|^2 \|x\|^2 \leq \Delta(Ax, x) \|x\|^2$, находим $(Ax, x) \leq \Delta \|x\|^2$, т. е. $A \leq \Delta E$.

Из леммы 5 следует, что

$$\tilde{B} = A^{-1} + \sigma \tau E \geq (1/\Delta + \sigma \tau) E, \quad \tilde{B} - 0,5\tau \tilde{A} \geq 0 \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_0,$$

где $\tilde{A} = E$, $\bar{\sigma}_0 = 0,5 - 1/\tau\Delta$.

Лемма 6. Пусть A — положительно определенный оператор и выполнено (55). Тогда

$$\|(E + \sigma \tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma) \tau A)\| \leq 1 \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta}, \quad (57)$$

$$\|(E + \sigma \tau A)^{-1}\| \leq 1 \quad \text{при } \sigma \geq 0, \quad (58)$$

$$\|(E + \sigma \tau A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau\Delta}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (59)$$

Доказательство. 1) Так как $\tilde{B} \geq 0,5\tau\tilde{A}$ при $\sigma \geq \bar{\sigma}_0$, то, применяя к схеме (48) теорему 1, получим, что для решения задачи (48) при любых $y_n \in H$ и $\varphi = 0$ справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|. \quad (60)$$

Заметим теперь, что схему (47) при $\varphi = 0$ можно записать в виде

$$y_{n+1} = Sy_n, \quad S = (E + \sigma \tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma) \tau A).$$

Отсюда и из (60) получаем оценку (57).

2) Для оценки $\|B^{-1}\|$, где $B = E + \sigma \tau A$, достаточно получить неравенство вида $B \geq \delta E$, $\delta > 0$. Тогда

$$\delta \|x\|^2 \leq (Bx, x) \leq \|Bx\| \|x\|, \quad \|Bx\| \geq \delta \|x\|,$$

и следовательно, $\|B^{-1}\| \leq 1/\delta$. Если $\sigma \geq 0$, то $B \geq E$ и $\|B^{-1}\| \leq 1$. Если $\sigma \geq \bar{\sigma}_\varepsilon$, то

$$B \geq E + \bar{\sigma}_\varepsilon \tau A = E + 0,5\tau A - \frac{1-\varepsilon}{\Delta} A.$$

Так как, согласно (56), $A \leq \Delta E$, то

$$B \geq E + 0,5\tau A - (1 - \varepsilon) E \geq \varepsilon E + 0,5\tau A > \varepsilon E,$$

и следовательно, $\|B^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$. Отметим, что оценка (58) верна для любого несамосопряженного оператора $A > 0$.

Лемма доказана.

Из (60) и леммы 6 следует

Теорема 11. Пусть $\bar{A} = A(t)$ — положительный оператор и выполнено условие (55). Тогда для схемы (46) при $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ верна априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y(0)\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|. \quad (61)$$

Если одновременно выполнены два условия

$$\sigma \geq 0, \quad \sigma \geq \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \Delta},$$

то оценка (61) выполняется при $\varepsilon = 1$.

Для доказательства запишем схему (46) в виде

$$y_{n+1} = S y_n + \tau B^{-1} \varphi_n,$$

где $S = (E + \sigma \tau A)^{-1} (E - (1 - \sigma) \tau A)$, $B = E + \sigma \tau A$.

Используя неравенство треугольника и оценки (57) — (59), получаем

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi_n\|,$$

откуда и следует (61).

11. Априорные оценки в случае переменного оператора A . До сих пор мы предполагали при изучении устойчивости в H_A , что оператор A постоянный, т. е. не зависит от t . Если $A(t) = A^*(t) > 0$ зависит от t , то будем требовать, чтобы выполнялось следующее условие липшиц-непрерывности $A(t)$ по t :

$$|((A(t) - A(t - \tau))x, x)| \leq c_3 (A(t - \tau)x, x), \quad (62)$$

для всех $x \in H$, $0 < t < n_0 \tau$, где c_3 — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Исходное семейство схем определим требованиями

$$\begin{aligned} A(t) &= A^*(t) > 0 \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_\tau, \\ A(t) &\text{ липшиц-непрерывен по } t, \\ B(t) &> 0 \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_\tau. \end{aligned} \quad (63)$$

Как и ранее, предполагаем существование оператора $B^{-1}(t)$, что означает разрешимость задачи (1) при любых входных данных y_0 и $\varphi(t)$.

Это семейство, очевидно, содержит исходное семейство, введенное в п. 2.

Исследования, проведенные методом энергетических неравенств, показывают, что условия

$$B(t) \geq 0,5tA(t) \text{ для всех } t \in \omega_t, \quad (64)$$

$$B(t) \geq \varepsilon E + 0,5tA(t) \text{ для всех } t \in \omega_t, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (65)$$

оказываются достаточными для устойчивости схемы (1) с переменными операторами $A(t)$, $B(t)$. При этом сами нормы $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ оказываются зависящими от t :

$$\|y\|_A = \|y\|_{A(t)} = \sqrt{(A(t)y, y)}, \quad \|\varphi\|_{A^{-1}(t)} = \sqrt{(A^{-1}(t)\varphi, \varphi)}.$$

Поэтому надо говорить об устойчивости в $H_{A(t)}$ (вместо H_A) и $H_{B(t)}$.

Исходным для исследования является энергетическое тождество (13), где $A = A(t)$. Чтобы получить рекуррентное неравенство, преобразуем выражение $(Ay, y) = (A(t)y(t), y(t)) = (A(t-\tau)y(t), y(t)) + ((A(t) - A(t-\tau))y(t), y(t))$ и оценим второе слагаемое в правой части при помощи (62):

$$(A(t)y(t), y(t)) \leq (1 + tc_3)(A(t-\tau)y(t), y(t)).$$

Подставив эту оценку в (13), получим энергетическое неравенство

$$2t((B(t) - 0,5tA(t))y_t, y_t) + \mathcal{E}(t+\tau) \leq (1 + tc_3)\mathcal{E}(t) + 2t(\varphi(t), y_t), \quad (66)$$

где

$$\mathcal{E}(t+\tau) = (A(t)y(t+\tau), y(t+\tau)) = \|y(t+\tau)\|_{A(t)}^2.$$

Если выполнено условие (64), то из (66) при $\varphi = 0$ следует

$$\mathcal{E}(t+\tau) \leq (1 + tc_3)\mathcal{E}(t) \leq e^{c_3 t} \mathcal{E}(t) \text{ при } t \geq \tau. \quad (67)$$

Энергетическое тождество при $t = 0$ записывается в виде

$$2t((B(0) - 0,5tA(0))y_t, y_t) + \mathcal{E}(0) = \|y(0)\|_{A(0)}^2 + 2t(\varphi(0), y_t(0)).$$

Отсюда при условии (64) и $\varphi = 0$ получим

$$\mathcal{E}(0) \leq \|y(0)\|_{A(0)}^2. \quad (68)$$

В результате (67) и (68) дают для задачи (1) при $\varphi = 0$:

$$\|y(t+\tau)\|_{A(t)} \leq M_1 \|y(0)\|_{A(0)}, \quad M_1 = e^{0,5c_3 t_0}.$$

Проведенные выше рассуждения показывают по существу единственное принципиальное отличие случая переменных операторов от случая постоянных операторов.

Суммируем результаты в виде двух теорем—аналогов теорем 5 и 7.

Теорема 12. *Пусть операторы $A = A(t)$, $B = B(t)$ зависят от t и выполнены условия (63), (64). Тогда для схемы (1) верна оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{A_n} \leq M_1 \left\{ \|y_0\|_{A_0} + \|\varphi_0\|_{A_0^{-1}} + \|\varphi_n\|_{A_n^{-1}} + \sum_{k=1}^n \tau \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{k}, k}\|_{A_k} \right\}, \quad (69)$$

где $M_1 = e^{0,5c_3 t_0}$, $A_n = A(t_n)$.

Теорема 13. Пусть операторы $A = A(t)$ и $B = B(t)$ зависят от t и выполнены условия (63) и (65). Тогда для схемы (1) выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A_n}^2 \leq M_1^2 \left\{ \|y_0\|_{A_0}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{k=1}^n \tau \|\Phi_k\|^2 \right\}, \quad (70)$$

$$M_1 = e^{0.5c_3 t_0}.$$

Отсюда видно, что оценки (37) и (45) для случая постоянного A получаются при $M_1 = 1$ или $c_3 = 0$.

12. Пример. Для того чтобы пользоваться изложенной выше общей теорией устойчивости для конкретных разностных схем, необходимо:

1) привести двухслойную схему к каноническому виду (1), т. е. выделить операторы A и B ; 2) ввести пространство сеточных функций H_h и исследовать свойства A и B (положительность, самосопряженность и др.) как операторов, заданных на H_h ; 3) проверить принадлежность схемы к исходному семейству схем, а также проверить выполнение достаточных условий устойчивости (64) или (65); 4) если эти условия выполнены, то данная схема устойчива и для нее справедливы априорные оценки, например, (69) и (70).

Первый шаг состоит в приведении схемы к каноническому виду. Заметим, что полученные выше достаточные условия открывают возможность написания устойчивых разностных схем сразу в каноническом виде.

Рассмотрим здесь лишь один пример для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Рассмотрим асимметричную схему, которая задана на сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, 0 \leq j \leq j_0\}$ и записана в виде

$$y_{i,j+1} = \frac{1}{\omega + \alpha} (a y_{i-1,j+1} + (1 - \alpha) y_{i-1,j} + y_{i+1,j} - (2 - \omega - \alpha) y_{i,j}), \quad (71)$$

где $\omega = h^2/\tau$, а α — параметр.

1) Приведем схему к каноническому виду. Обозначая $y_{i,j} = y_i$, $\hat{y}_{i,j+1} = \hat{y}_i$, перепишем (71) сначала в виде

$$(\omega + \alpha) \hat{y}_i = \alpha \hat{y}_{i-1} + (1 - \alpha) y_{i-1} + y_{i+1} - (2 - \omega - \alpha) y_i. \quad (72)$$

Учитывая затем, что

$$y_{i-1} = -h y_{x,i} + y_i, \quad y_{i+1} = h y_{x,i} + y_i, \quad h x_{x,i} - h y_{x,i} = h^2 y_{xx,i},$$

$$\hat{y}_{i-1} = y_{i-1} + \tau y_{t,i-1} = y_i - h y_{x,i} + \tau y_{t,i} - h \tau y_{xt,i},$$

подставляя эти выражения в (72) и опуская индекс i , будем иметь

$$\omega \tau y_t = h^2 y_{xx} - \alpha h \tau y_{xt}. \quad (73)$$

После деления (73) на h^2 , получаем

$$y_t + \frac{\alpha \tau}{h} y_{xt} = y_{xx}. \quad (74)$$

2) Пусть H_h — пространство сеточных функций Ω_h (примеры 1 и 2 гл. II, § 4, п. 1), заданных на $\omega_h = \{x_i = ih, 0 < i < N\}$ со скалярным произведением $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$. Операторы схемы $Ay = -y_{xx}$ и $R_1 y = \frac{1}{h} y_{x-}$, согласно гл. II, § 4, п. 1, являются положительно определенными операторами, причем $(R_1 y, y) = 0,5(Ay, y)$. Оператор A самосопряжен, $\|A\| \leq 4/h^2$.

3) Операторы A и R_1 постоянны. Схему (74) удобно записать в виде

$$(E + \alpha \tau R_1) y_t + Ay = 0, \quad (75)$$

так что $B = E + \alpha \tau R_1$.

Условие $B \geq 0,5 \tau A$ выполнено при $\alpha \geq 1 - 2/(\tau \|A\|)$. Действительно, для любого $x \in H$

$$\begin{aligned} ((B - 0,5 \tau A) x, x) &= ((E + \alpha \tau R_1 - 0,5 \tau A) x, x) = \\ &= ((E + 0,5 \tau (\alpha - 1) A) x, x), \end{aligned}$$

т. е.

$$B - 0,5 \tau A \geq E + 0,5 \tau (\alpha - 1) A \geq \left(\frac{1}{\|A\|} + 0,5 \tau (\alpha - 1) \right) A \geq 0.$$

4) Так как $\|A\| < 4/h^2$, то схема (71) устойчива в H_A (в сеточной норме W_2^1) при

$$\alpha \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}. \quad (76)$$

Наряду со схемой (71) можно написать другую асимметричную схему, которая после приведения ее к канонической форме запишется так:

$$(E + \alpha \tau R_2) y_t + Ay = 0,$$

где

$$R_2 y = -\frac{1}{h} y_x.$$

Так как $(R_1 y, y) = (R_2 y, y)$, то эта схема устойчива при том же условии (76). Из (76) видно, что асимметричные схемы безусловно устойчивы при $\alpha \geq 1$.

13. Случай кососимметрического оператора A . Основные результаты теории устойчивости для двухслойных схем

$$By_t + Ay = \varphi$$

были получены в предположении, что $A = A^* > 0$ — положительный самосопряженный оператор, а $B > 0$ может быть несамосопряженным. Исключение составляет схема с весами, для которой B имеет специальный вид $B = E + \sigma t A$ и $A^* \neq A$.

Предположим, что A — несамосопряженный оператор, причем $A = A_0 + A_1$, где $A_0 = 0,5(A + A^*)$, $A_1 = 0,5(A - A^*)$, $A_0^* = A_0$, $A_1^* = -A_1$, т. е. A_1 — кососимметрический оператор, $(A_1 y, v) = -(y, A_1 v)$ и $(A_1 y, y) = -(y, A_1 y) = 0$.

Мы ограничимся здесь случаем, когда $A = A_1$ — кососимметрический оператор.

Рассмотрим схему с весами

$$y_t + Ay^{(\sigma)} = 0,$$

где $A^* = -A$, $(Ay, y) = 0$, $y^{(\sigma)} = \hat{\sigma}y + (1 - \sigma)y$.

Запишем ее в виде

$$By_t + Ay = 0, \quad B = E + \sigma t A,$$

Так как A и B — несамосопряженные операторы, то результатами общей теории, полученными выше, мы не можем воспользоваться.

Заметим прежде всего, что

$$(By, y) = (y + \sigma t Ay, y) = (y, y) + \sigma t (Ay, y) = \|y\|^2,$$

т. е. существует обратный оператор B^{-1} . Полагая $y = B^{-1}x$, получим

$$\|B^{-1}x\|^2 = (B^{-1}x, x) \leq \|B^{-1}x\| \|x\|, \quad \text{т. е.} \quad \|B^{-1}x\| \leq \|x\|$$

и $\|B^{-1}\| \leq 1$.

Перепишем схему в виде

$$B\hat{y} = By - \tau Ay \quad \text{и} \quad \hat{y} = y - \tau B^{-1}Ay$$

и вычислим

$$(B\hat{y}, \hat{y}) = (By, y) - \tau (Ay, y) - \tau (By, B^{-1}Ay) + \tau^2 (Ay, B^{-1}Ay).$$

Представим B в виде

$$B = E + \sigma t A = (E - \sigma t A) + 2\sigma t A = B^* + 2\sigma t A$$

и преобразуем

$$(By, B^{-1}Ay) = (B^*y, B^{-1}Ay) + 2\sigma t (Ay, B^{-1}Ay) = \\ = (y, Ay) + 2\sigma t (Ay, B^{-1}Ay) = 2\sigma t (Ay, B^{-1}Ay).$$

В результате получаем

$$\|\hat{y}\|^2 = \|y\|^2 - (2\sigma - 1)\tau^2 (B^{-1}Ay, Ay).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\|\hat{y}\| &\leq \|y\|, \text{ если } \sigma \geq 0,5, \\ \|\hat{y}\|^2 &\leq \|y\|^2 + (1-2\sigma)\tau^2 \|A\|^2 \|y\|^2 \leq (1+c_0\tau)\|y\|^2\end{aligned}$$

или

$$\|\hat{y}\| \leq \rho \|y\|, \quad \rho = e^{0,5c_0\tau}, \quad c_0 = (1-2\sigma)c_2,$$

если

$$\sigma < 0,5 \quad \text{и} \quad \tau \|A\|^2 \leq c_2.$$

Таким образом, получена оценка нормы оператора перехода:

$$\begin{aligned}\|S\| &\leq 1 \quad \text{при } \sigma \geq 0,5, \\ \|S\| &\leq \rho \quad \text{при } \sigma < 0,5 \quad \text{и} \quad \tau \|A\|^2 \leq c_2.\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка решения неоднородного уравнения $By_t + Ay = \Phi$:

$$\|y_{n+1}\| \leq \rho \|y_n\| + \tau \|\Phi_n\| \leq \rho^{n+1} \|y_0\| + \sum_{k=0}^n \tau \rho^{n-k} \|\Phi_k\|.$$

Пусть теперь H — комплексное пространство и B — несамосопряженный оператор. Тогда необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным в H_A схемы

$$By_t + Ay = 0$$

имеет вид

$$B_0 = \operatorname{Re} B \geq 0,5\tau A, \quad \text{если} \quad A = A^* > 0,$$

где $B_0 = 0,5(B + B^*) = B_0^*$.

В частности, схема

$$iy_t + Ay = 0, \quad A = A^* > 0$$

является неустойчивой в H_A , так как $B = iE$ и $\operatorname{Re} B = 0$. Однако $A' = -iA$ есть кососимметрический оператор $(A')^* = -A'$, и в силу доказанного ранее эта схема условно устойчива в H :

$$\|y_{n+1}\| \leq \rho^{n+1} \|y_0\|, \quad \rho = e^{c_0\tau}, \quad c_0 = c_2, \quad \text{если} \quad \tau \|A\|^2 \leq c_2.$$

В случае уравнения Шредингера $Ay = -y_{xx}$, $y \in \dot{\Omega}_h[0, 1]$ имеем $\|A\| < 4/h^2$, условие на τ приобретает вид

$$\tau \leq \frac{h^4}{16} c_2$$

и является неестественным для параболического уравнения. Однако схема с весами

$$iy_t + Ay^{(0)} = 0, \quad A = A^* > 0$$

будет устойчива как в H_A , так и в H при $\sigma \geq 0,5$. В этом случае $B_0 = \operatorname{Re} B = \sigma t A \geq 0,5tA$ и $\|y_n\|_A \leq \|y_0\|_A$. Если же ввести кососимметрический оператор $A' = -iA$, то при $\sigma \geq 0,5$ мы получим оценку $\|y_n\| \leq \|y_0\|$.

§ 3. Классы устойчивых трехслойных схем

1. Постановка задачи. В этом параграфе будут получены достаточные условия устойчивости и априорные оценки для трехслойных схем. Мы пользуемся канонической формой трехслойной схемы

$$\begin{aligned} By_l + \tau^2 Ry_{\bar{l}} + Ay &= \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \\ 0 < t = n\tau < t_0, \quad n &= 1, 2, \dots, n_0 - 1, \quad t_0 = n_0\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь y_0 и y_1 —произвольные заданные векторы из конечномерного вещественного пространства H , $\varphi(t)$ —заданная произвольная абстрактная функция $t \in \omega_\tau$ со значениями в H ; A , B и R —линейные операторы на H . Зависимость $y(t) = y_{h\tau}(t)$, $\varphi(t) = \varphi_{h\tau}(t)$, $A(t) = A_{h\tau}(t)$, B , R , y_0 и y_1 от h и τ явно не указываем. Напомним обозначения:

$$\begin{aligned} y &= y(t_n) = y_n, \quad \dot{y} = y(t_n + \tau) = y_{n+1}, \quad \ddot{y} = y(t_n - \tau) = y_{n-1}, \\ y_t &= (\dot{y} - y)/\tau, \quad y_{\bar{l}} = (y - \ddot{y})/\tau, \quad y_l = (\dot{y} - \ddot{y})/(2\tau), \\ y_{\bar{l}} &= (\dot{y} - 2y + \ddot{y})/\tau^2. \end{aligned}$$

По аналогии с § 2 решение задачи (1) можно представить в виде суммы $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где \bar{y} —решение однородного уравнения $By_l + \tau^2 Ry_{\bar{l}} + Ay = 0$, $0 < t = n\tau < t_0$, $y(0) = y_0$, $y(\tau) = y_1$, (1a)

а \tilde{y} —решение неоднородного уравнения с однородными начальными данными

$$By_l + \tau^2 Ry_{\bar{l}} + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y(\tau) = 0. \quad (1b)$$

Перепишем (1) в виде

$$(B + 2\tau R)y_{n+1} = \Phi_n, \quad \Phi_n = 2(2R - A)\tau y_n + (B - 2\tau R)y_{n-1} + 2\tau \varphi_n \quad (2)$$

(A , B и R , вообще говоря, переменные, т. е. зависят от t_n). Отсюда видно, что задача (1) разрешима, если существует оператор $(B + 2\tau R)^{-1}$. В дальнейшем будем всюду считать, что это

условие выполнено. Более того, будем предполагать, что оператор $B + 2\tau R$ положительно определен. (3)

При изучении устойчивости трехслойной схемы будем пользоваться функционалом (составной нормой) вида

$$\|Y_{n+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|y_n + y_{n+1}\|_{(1,1)}^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_{(1,2)}^2, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|_{(1,1)}$ и $\|\cdot\|_{(1,2)}$ — некоторые нормы на линейной системе H .

Чтобы понять структуру этой нормы, целесообразно ввести пространство $H^2 = H \bigoplus H$ — прямую сумму двух экземпляров пространства H . Пространство H^2 определяется как множество векторов вида

$$Y = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}\} \in H^2, \quad Y^{(\alpha)} \in H, \quad \alpha = 1, 2,$$

в котором сложение векторов и умножение вектора на число проводятся покоординатно:

$$Y + \bar{Y} = \{Y^{(1)} + \bar{Y}^{(1)}, Y^{(2)} + \bar{Y}^{(2)}\}, \quad \alpha Y = \{\alpha Y^{(1)}, \alpha Y^{(2)}\}.$$

Норму в H^2 естественно определять так:

$$\|Y\|^2 = \|Y^{(1)}\|_{(1,1)}^2 + \|Y^{(2)}\|_{(1,2)}^2.$$

В нашем случае вектор

$$Y_{n+1} = \left\{ \frac{1}{2} (y_{n+1} + y_n), y_{n+1} - y_n \right\} \in H^2$$

имеет координаты

$$Y_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{2} (y_{n+1} + y_n) \quad \text{и} \quad Y_{n+1}^{(2)} = y_{n+1} - y_n.$$

Нетрудно видеть, что функционал (4) удовлетворяет всем аксиомам нормы, а именно:

$$\|\alpha Y_{n+1}\| = |\alpha| \|Y_{n+1}\|,$$

$$\|Y_{n+1}\| \geq 0 \quad \text{для любых } y_n \in H, y_{n+1} \in H, \text{ и } \|Y_{n+1}\| = 0$$

только при $y_n = y_{n+1} = 0$; $\|\bar{Y}_{n+1} + Y_{n+1}\| \leq \|\bar{Y}_{n+1}\| + \|Y_{n+1}\|$.

Определим теперь понятие устойчивости для (1).

Трехслойная схема (1) называется *устойчивой*, если существует норма (4), и при всех достаточно малых $\tau \leq \tau_0$ и $|h| \leq h_0$ можно указать такие положительные постоянные M_1 и M_2 , не зависящие от τ , h и выбора y_0 , y_1 , $\Phi(t)$, что при любых y_0 , y_1 , $\Phi(t)$ и всех $t = \tau, 2\tau, \dots, (n_0 - 1)\tau$ для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq \tau} \|\Phi(t')\|_{(2)}, \quad (5)$$

или оценка

$$\|Y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{(2)}), \quad (6)$$

где $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторая норма в пространстве H , $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$ и $\|Y(\tau)\|_{(1)}$ определяются по формуле вида (4), так что

$$\|Y(t+\tau)\|_{(1)}^2 = \frac{1}{4} \|y(t+\tau) + y(t)\|_{(1)}^2 + \|y(t+\tau) - y(t)\|_{(1)}^2, \quad (7)$$

$$\|Y(\tau)\|_{(1)}^2 = \frac{1}{4} \|y_1 + y_0\|_{(1)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(1)}^2, \quad (8)$$

$\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы на H .

Если A и R — постоянные операторы, то $\|Y\|_{(1)}$ и $\|Y\|_{(1)}$ обычно совпадают.

В общем случае $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$ и $\|\varphi(t)\|_{(2)}$ зависят от $t = n\tau$, так что надо писать $\|Y(t+\tau)\|_{(1,1)}$ вместо $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$ и $\|\varphi(t)\|_{(2,1)}$ вместо $\|\varphi(t)\|_{(2)}$.

Как будет показано ниже, нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(1)}$ являются энергетическими нормами, построенным на операторах A и R .

Поэтому будем предполагать, что операторы A и R являются (если H — гильбертово пространство)

$$\text{самосопряженными } A = A^*, R = R^*, \quad (9)$$

$$\text{положительными } A > 0, R > 0. \quad (10)$$

2. Основное энергетическое тождество. Переидем к выводу энергетического тождества для трехслойной схемы (1), справедливого для переменных операторов $A = A(t)$, $B = B(t)$, $R = R(t)$ и используемого при получении априорных оценок, выражающих устойчивость схемы по начальным данным и по правой части.

Учитывая, что

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{tt},$$

перепишем (1) в виде

$$By_t + \tau^2 \left(R - \frac{1}{2}A \right) y_{tt} + \frac{1}{2}A(\hat{y} + \check{y}) = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (11)$$

где $A = A(t_n) = A_n$, $B = B(t_n) = B_n$, $R = R(t_n) = R_n$.

Умножим (11) скалярно на $2\tau y_t = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$:

$$2\tau(By_t, y_t) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{2}A \right) (y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}} \right) + \frac{1}{2}(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(\varphi, y_t). \quad (12)$$

Пусть A и R — самосопряженные операторы. Тогда

$$R - 0,5A = (R - 0,5A)^*.$$

В силу леммы 1 из § 2 имеем

$$\begin{aligned} \left(\left(R - \frac{1}{2} A \right) (y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}} \right) &= \\ &= \left(\left(R - \frac{1}{2} A \right) y_t, y_t \right) - \left(\left(R - \frac{1}{2} A \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right), \quad (13) \end{aligned}$$

$$(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (A\check{y}, \check{y}). \quad (14)$$

Прибавим и вычтем (Ay, y) справа в (14):

$$(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = [(A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, y)] - [(Ay, y) + (A\check{y}, \check{y})]. \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть $A = A^*$ — самосопряженный оператор. Тогда

$$(Av, v) + (Az, z) = \frac{1}{2} (A(v+z), v+z) + \frac{1}{2} (A(v-z), v-z) \quad (16)$$

для любых векторов v и z из H .

Доказательство. Так как $A = A^*$, то $(Av, z) = (v, Az)$ и $(Az, v) = (A^*v, z)$ и

$$(A(v+z), v+z) + (A(v-z), v-z) = [(Av, v) + 2(Av, z) + (Az, z)] + [(Av, v) - 2(Av, z) + (Az, z)] = 2[(Av, v) + (Az, z)],$$

что и требовалось доказать.

Полагая в (16) $v = \hat{y}$, $z = y$, преобразуем (15):

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) &= 0,5 [(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ &\quad - 0,5 [(A(y + \check{y}), y + \check{y}) + (A(y - \check{y}), y - \check{y})]. \quad (17) \end{aligned}$$

Подставим теперь (17) и (13) в (12) и учтем, что

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y) &= \tau^2 (Ay_t, y_t), \quad y_t = (y - \check{y})/\tau = \check{y}_t, \\ (A(y - \check{y}), y - \check{y}) &= \tau^2 (Ay_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

Тогда получим основное энергетическое тождество для трехслойной схемы (1):

$$\begin{aligned} 2\tau (By_t, y_t) + \left[\frac{1}{4} (A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{2} A \right) y_t, y_t \right) \right] &= \\ = \left[\frac{1}{4} (A(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{2} A \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) \right] + 2\tau (\Phi, y_t). \quad (18) \end{aligned}$$

При его выводе мы использовали лишь предположение (9) о самосопряженности A и R .

3. Устойчивость по начальным данным. Напомним определение устойчивости по начальным данным и по правой части.

Схема (1) устойчива по начальным данным, если для задачи (1a) справедлива априорная оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)}. \quad (19)$$

Схема (1) устойчива по правой части, если для задачи (16) имеет место оценка

$$\|Y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (20)$$

или оценка

$$\|Y(t+\tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_t(t')\|_{(2)}). \quad (21)$$

Пользуясь неравенством треугольника, из (19) и (20) или (21) получаем оценку (5) или (6).

Основное изложение проведем, предполагая, что A и R — постоянные самосопряженные положительные операторы, B — несамосопряженный неотрицательный оператор:

$$A = A^* > 0, \quad R = R^* > 0, \quad B \geq 0. \quad (22)$$

Эти условия определяют исходное семейство схем.

Рассмотрим задачу (1a). Для нее тождество (18) примет вид

$$2\tau (By_t, y_t) + \|Y(t+\tau)\|^2 = \|Y(t)\|^2, \quad t = n\tau, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \|Y(t+\tau)\|^2 = & \frac{1}{4} (A(y(t+\tau) + y(t)), y(t+\tau) + y(t)) + \\ & + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right) y_t, y_t \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \|Y(t)\|^2 = & \frac{1}{4} (A(y(t) + y(t-\tau)), y(t) + y(t-\tau)) + \\ & + \tau^2 \left(\left(R - \frac{A}{4} \right) y_t, y_t \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Мы будем пользоваться также индексными обозначениями, полагая $Y(t+\tau) = Y_{n+1}$ и

$$\begin{aligned} \|Y_{n+1}\|^2 = & \frac{1}{4} (A(y_{n+1} + y_n), y_{n+1} + y_n) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right) y_{t,n}, y_{t,n} \right) = \\ = & \frac{1}{4} \|y_{n+1} + y_n\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_{R - \frac{1}{4} A}^2. \end{aligned}$$

Из (24) видно, что $\|Y(t+\tau)\|^2 > 0$ при любых $y(t) \neq 0$, $y(t+\tau) \neq 0$, если A и $R - A/4$ положительны, $A > 0$, $R > A/4$.

Теорема 1. Пусть $A = A^* > 0$, $R = R^* > 0$ — постоянные операторы. Тогда условия

$$B = B(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in \omega_\tau, \quad (26)$$

$$R > \frac{1}{4} A \quad (27)$$

достаточны для устойчивости схемы (1) по начальным данным. При выполнении условий (26) и (27) для задачи (1a) имеет место

оценка

$$\|Y(t+\tau)\| \leq \|Y(\tau)\|, \quad (28)$$

где $\|Y\|$ определяется согласно (24).

Действительно, при $B \geq 0$ из (23) следует

$$\|Y(t+\tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2, \|Y(t+\tau)\| \leq \|Y(t)\| \leq \dots \leq \|Y(\tau)\|.$$

Замечание 1. Теорема 1 верна, если выполнены условия

$$R \geq \frac{1}{4}A, \quad A \geq 0.$$

Однако при этом $\|Y\|$ является полунормой.

Замечание 2. Трехслойную схему (1a) можно свести к двухслойной схеме

$$\mathcal{B}Y_t + \mathcal{A}Y = 0, \quad Y_0 \in H^2, \quad (29)$$

где $Y = Y_n \in H^2$, $Y_t = (Y_{n+1} - Y_n)/\tau$, \mathcal{A} и \mathcal{B} — операторы, действующие в H^2 .

Для этого достаточно определить вектор

$$Y_n = \left\{ \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), y_n - y_{n-1} \right\}$$

и операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} как операторные матрицы с элементами, являющимися операторами на H :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & R - \frac{1}{4}A \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B + 0,5\tau A & \tau \left(R - \frac{1}{4}A \right) \\ -\tau \left(R - \frac{1}{4}A \right) & \frac{\tau}{2} \left(R - \frac{1}{4}A \right) \end{pmatrix}.$$

Если $A = A^*$, $R = R^*$, то оператор $\mathcal{A}: H^2 \rightarrow H^2$ является самосопряженным, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, а оператор \mathcal{B} несамосопряжен. В этом случае

$$\|Y\|_{\mathcal{A}}^2 = (\mathcal{A}Y, Y) = (AY^{(1)}, Y^{(1)}) + \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) Y^{(2)}, Y^{(2)} \right).$$

Кроме того, $\mathcal{A} > 0$, если $A > 0$ и $R > \frac{1}{4}A$.

Нетрудно убедиться в том, что условие устойчивости двухслойной схемы (29) в $H_{\mathcal{A}}^2$

$$\mathcal{B} \geq \frac{\tau}{2} \mathcal{A} \quad (30)$$

эквивалентно требованиям

$$B = B(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in \omega_{\tau}, \quad (26)$$

$$R \geq \frac{1}{4}A. \quad (27^*)$$

При этом имеет место оценка

$$\|Y_{n+1}\|_{\mathcal{A}} \leq \|Y_1\|_{\mathcal{A}}, \quad (28)$$

где

$$\|Y_{n+1}\|_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{4} \|y_{n+1} + y_n\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_{R - \frac{1}{4}A}^2.$$

Условие (26) не только достаточно, но и необходимо для выполнения оценки (28).

4. Устойчивость по правой части. Рассмотрим теперь задачу (16). Будем предполагать, что выполнены условия (9), (10) и (27). Так как A и R — постоянные операторы, то тождество (18) для (16) имеет вид

$$2\tau(By_i, y_i) + \|Y(t + \tau)\|^2 = \|Y(t)\|^2 + 2\tau(\varphi, y_i). \quad (31)$$

При выводе априорных оценок вида (20) или (21) основную роль играет оценка функционала $2\tau(\varphi, y_i)$.

Заметим прежде всего, что имеет место очевидное неравенство

$$2\tau(\varphi, y_i) \leq \tau \varepsilon_0 \|y_i\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi\|^2, \quad (32)$$

где $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h .

Теорема 2. Пусть $A = A^* > 0$, $R = R^* > 0$ — постоянные операторы. Тогда при условиях $B \geq \varepsilon E$, $R \geq A/4$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, для решения задачи (1) верна априорная оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(t)\| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[\sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Достаточно оценить лишь решение задачи (16), так как теорема 1 при $B \geq \varepsilon E$ сохраняет силу. Положим в (32) $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$. Тогда из (31) следует

$$\|Y(t + \tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi(t)\|^2. \quad (34)$$

Остается просуммировать это неравенство по переменному $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$, учесть при этом, что $\|Y(\tau)\| = 0$, и затем воспользоваться теоремой 1.

Без доказательства приведем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда схема (1) устойчива по правой части и для нее при $t > \tau$ верна оценка

$$\begin{aligned} \|Y(t + \tau)\| \leq & \|Y(\tau)\| + \\ & + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}}), \end{aligned} \quad (35)$$

где $M_2 = \text{const} > 0$ зависит только от t_0 .

Теорема 4. Пусть $A = A^* \geq 0$, $R = R^* \geq 0$ — постоянные неотрицательные операторы, а $B = B(t)$ — переменный несамосопряженный положительно определенный оператор

$$B \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (36)$$

где ε не зависит от h и τ , и выполнено условие

$$R \geq \frac{1}{4} A. \quad (37)$$

Тогда для решения задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\| \leq \frac{2\sqrt{t}}{\varepsilon} \left[\sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Рассмотрим тождество (31). Из (36) и (32) при $\varepsilon_0 = \varepsilon$ следует

$$\tau \varepsilon \|y_i^*(t')\|^2 + \|Y(t + \tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi(t)\|^2. \quad (39)$$

Суммируя по $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$, получаем (так как $\|Y(\tau)\| = 0$)

$$\varepsilon \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i^*(t')\|^2 + \|Y(t + \tau)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2, \quad (40)$$

или

$$\sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i^*(t')\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2, \quad (41)$$

так как $\|Y(t + \tau)\|^2 \geq 0$.

Чтобы из (41) получить оценку (38), докажем следующую лемму.

Лемма 2. Если $y(0) = y(\tau) = 0$, то

$$\|y(t)\|^2 + \|y(t + \tau)\|^2 \leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i^*(t')\|^2. \quad (42)$$

В самом деле, $y(t + \tau) + y(t) = 2 \sum_{t'=\tau}^t \tau y_i^*(t')$,

$$\|y(t + \tau) + y(t)\|^2 \leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i^*(t')\|^2. \quad (43)$$

Далее, обозначив $w_n = y_n - y_{n-1}$, получим

$$w_{n+1} = 2\tau y_{i,n}^* - w_n, \quad w_1 = 0,$$

откуда следует неравенство

$$\|w_{n'+1}\| \leq 2t \|y_{i,n'}^*\| + \|w_{n'}\|, \quad n' = 1, 2, \dots, n.$$

Суммируя его по n' от 1 до n , получаем

$$\|w_{n+1}\| \leq 2 \sum_{n'=1}^n \tau \|y_{t,n'}\|,$$

или

$$\begin{aligned} \|y(t+\tau) - y(t)\| &\leq 2 \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}(t')\|, \\ \|y(t+\tau) - y(t)\|^2 &\leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}(t')\|^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\|y(t+\tau) + y(t)\|^2 + \|y(t+\tau) - y(t)\|^2 = 2(\|y(t)\|^2 + \|y(t+\tau)\|^2). \quad (45)$$

Из неравенств (43), (44) и тождества (45) следует (42). Подставляя в (41) оценку (42), получаем (38).

Теорема 5. Если выполнены условия $A = A^* > 0$, $R = R^* > 0$, $B = B^* > 0$, операторы A и R — постоянные и

$$R > \frac{1}{4} A,$$

то для схемы (1) верна оценка

$$\|Y_{n+1}\|^2 \leq \|Y_1\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_k\|_{B^{-1}}^2. \quad (46)$$

Самосопряженность оператора B используется при оценке входящего в тождество (31) члена

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau\|y_t\|_B \|\varphi\|_{B^{-1}} \leq \tau \|\varphi\|_B^2 + \frac{\tau}{8} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2. \quad (47)$$

Полагая $\varepsilon = 2$ и подставляя эту оценку в (31), получим неравенство

$$\|Y_{n+1}\|^2 \leq \|Y_n\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\varphi_n\|_{B^{-1}}^2, \quad (48)$$

откуда и следует искомая оценка.

Заметим, что оператор B может зависеть от t : $B = B(t)$. В этом случае надо писать $\|\varphi_k\|_{B_k^{-1}}^2$, где $B_k^{-1} = B^{-1}(t_k)$.

5. Схемы с переменными операторами. Если A и R зависят от t , то вводится дополнительное требование липшиц-непрерывности A и R по t :

$$|(A(t) - A(t-\tau))x, x| \leq c_3(A(t-\tau)x, x), \quad (49)$$

при всех $x \in H$ и $t = 2\tau, \dots, (n_0-1)\tau$, где $c_3 = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ , и аналогичное условие для R . В этом случае

составная норма $\|Y(t+\tau)\| = \|Y(t+\tau)\|_{(t)}$ зависит от t :

$$\|Y(t+\tau)\|_{(t)}^2 = \frac{1}{4} (A(t)(y(t+\tau) + y(t)), y(t+\tau) + y(t)) + \\ + \tau^2 \left(\left(R(t) - \frac{1}{4} A(t) \right) y_t(t), y_t(t) \right), \quad (50)$$

$$\|Y(t)\|_{(t-\tau)}^2 = \frac{1}{4} (A(t-\tau)(y(t) + y(t-\tau)), y(t) + y(t-\tau)) + \\ + \tau^2 \left(\left(R(t-\tau) - \frac{1}{4} A(t-\tau) \right) y_{\bar{t}}(t), y_{\bar{t}}(t) \right). \quad (51)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части тождества (18). Замечая, что

$$(A(y+\check{y}), y+\check{y}) = (\check{A}(y+\check{y}), y+\check{y}) + \tau (A_{\bar{t}}(y+\check{y}), y+\check{y}), \\ \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) = \left(\left(\check{R} - \frac{1}{4} \check{A} \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) + \tau \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right)_{\bar{t}} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right), \\ \check{A} = A(t-\tau), A_{\bar{t}} = (A - \check{A})/\tau,$$

и вводя обозначения

$$\hat{J} = J(t+\tau) = \|Y(t+\tau)\|_{(t)}^2, \quad J = J(t) = \|Y(t)\|_{(t-\tau)}^2, \quad (52)$$

перепишем тождество (18) в следующем виде:

$$2\tau (By_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + \hat{J} = J + 2\tau (\Phi, y_{\bar{t}}) + \tau F, \quad (53)$$

$$F = \frac{1}{4} (A_{\bar{t}}(y+\check{y}), y+\check{y}) + \tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right)_{\bar{t}} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right). \quad (54)$$

Если $R - A/4$ и A удовлетворяют условию (49), то

$$|F| \leq \frac{c_3}{4} (\check{A}(y+\check{y}), y+\check{y}) + \tau^2 c_3 \left(\left(\check{R} - \frac{1}{4} \check{A} \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) = c_3 J,$$

и из тождества (53) при $R \geq A/4$ следует неравенство

$$2\tau (By_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + \hat{J} \leq (1 + \tau c_3) J + 2\tau (\Phi, y_{\bar{t}}). \quad (55)$$

В общем случае, когда условию (49) удовлетворяет каждый из операторов $R(t)$ и $A(t)$ в отдельности, имеем

$$|F| \leq \frac{c_3}{4} (\check{A}(y+\check{y}), y+\check{y}) + \tau^2 c_3 \left[(\check{R} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + \frac{1}{4} (\check{A} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) \right] \leq c_3 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) J \quad (56)$$

при $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$, где $\varepsilon = \text{const} > 0$ не зависит от h и τ , так как $J > \varepsilon \tau^2 (\check{A} y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})$ при $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$.

Тождество (53) дает

$$2\tau (By_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + J(t+\tau) \leq \left(1 + \frac{(2+\varepsilon)c_3}{\varepsilon} \tau \right) J(t) + 2\tau (\Phi, y_{\bar{t}}). \quad (57)$$

После того, как написано энергетическое неравенство (57), вывод априорных оценок проходит так же, как и для постоянных A и R . Так, например,

при $B \geq 0$ из (57) для задачи (1a) следует оценка

$$\|Y(t+\tau)\|_{kt} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{kt}, \text{ если } R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad (58)$$

где M_1 зависит только от ε , c_3 и t_0 .

Формулируем основные результаты в виде одной теоремы.

Теорема 6. Пусть $A = A(t) = A^*(t) > 0$, $R = R(t) = R^*(t) > 0$ — переменные операторы, липшиц-непрерывные по t , и

$$R(t) \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A(t) \text{ для всех } 0 < t = n\tau < t_0, \quad (59)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h . Тогда для схемы (1) имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|Y(t+\tau)\|_{kt} \leq & M_1 \|Y(\tau)\|_{kt} + \\ & + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} [\|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')} + \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}(t')}] \end{aligned} \quad (60)$$

при $B(t) \geq 0$, $0 < t = n\tau < t_0$,

$$\|Y(t+\tau)\|_{kt} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{kt} + M_2 \max_{\tau \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\| \quad (61)$$

при $B(t) \geq \bar{\varepsilon}E$, где $\bar{\varepsilon} = \text{const} > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ не зависят от τ , h .

Во избежание ненужных повторений доказательство теоремы опускаем.

Замечание. Некоторые требования теоремы 6 могут быть ослаблены. Например, условие $B \geq 0$ можно заменить условием

$$B \geq -c_4 \tau^3 A, \quad (62)$$

где $c_4 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h . Если выполнено (62), то оценка (60) имеет место при $\tau \leq \tau_0$, $\tau_0 = 1/(4c_4)$.

6. Схема с весами. Весьма часто встречаются на практике схемы с весами

$$y_t + Ay^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi(t), \quad \tau \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (63)$$

где $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \tilde{y}$; σ_1 , σ_2 — вещественные числа, от выбора которых зависит устойчивость и точность схемы.

В § 1 схема (63) была приведена к каноническому виду (1) и были найдены операторы

$$B = E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2) A, \quad R = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A. \quad (64)$$

Пусть существует оператор A^{-1} . Действуя на (1) с операторами (64) оператором A^{-1} , получим

$$\tilde{B}y_t + \tau^2 \tilde{R}y_{tt} + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad \tau \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (65)$$

где

$$\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau E, \quad \tilde{R} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} E, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1} \varphi.$$

Отсюда видно, что \tilde{A} и \tilde{R} самосопряженные постоянные операторы.

Применим к (65) теорему 1. Справедливы операторные неравенства

$$\tilde{R} - \frac{1}{4} \tilde{A} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4} \right) E > 0 \quad \text{при } \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5, \quad (66)$$

$$\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau E \geq 0 \quad \text{при } \sigma_1 \geq \sigma_2 \text{ и любом } A(t) > 0. \quad (67)$$

Теорема 7. Если $A(t)$ — переменный положительный оператор и выполнены условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5, \quad (68)$$

то схема (63) устойчива, и для нее верна оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|, \quad (69)$$

где

$$\|Y(t + \tau)\|^2 = \frac{1}{4} \|y(t + \tau) + y(t)\|^2 + \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \|y(t + \tau) - y(t)\|^2. \quad (70)$$

Доказательство. 1) Устойчивость по начальным данным. Так как условия $\tilde{R} > \tilde{A}/4$, $\tilde{B} \geq 0$ теоремы 1 выполнены, то для решения задачи (65) при $\varphi = 0$ имеем

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(t')\|, \quad t' < t,$$

и, в частности,

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\|, \quad (71)$$

где $\|Y(t + \tau)\|$ определяется по формуле (70), являющейся частным случаем формулы (24) при $\tilde{A} = E$, $\tilde{R} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)E$.

2) Устойчивость по правой части. Рассмотрим задачу (63) при $y(0) = y(\tau) = 0$. Будем искать ее решение в виде

$$y_{n+1} = \sum_{s=1}^n \tau g_{n+1, s}, \quad y_0 = 0, \quad (72)$$

где $g_{n+1, s}$ как функция n при фиксированном $s = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяет уравнению (63) с $\varphi = 0$ при $n > s + 1$ и начальным данным

$$g_{s+1, s} + 2\sigma_1 \tau A g_{s+1, s} = 2\varphi_s, \quad g_{s, s} = 0. \quad (73)$$

Подставляя (72) в (63) и учитывая (73), убеждаемся в том, что (72) есть решение задачи (63). Для $g_{n,s}$, в силу устойчивости по начальным данным (71), имеем

$$\|G_{n+1,s}\| \leq \|G_{s+1,s}\| \text{ при фиксированном } s = 1, 2, \dots, \quad (74)$$

где $\|G_{n+1,s}\|$ выражается через $g_{n,s}$ и $g_{n+1,s}$ по формуле (70). Из (73) находим $g_{s+1,s} = 2(E + 2\sigma_1 \tau A)^{-1} \Phi_s$, и так как $E + 2\sigma_1 \tau A \geq E$ при $\sigma_1 \geq 0$, то $\|(E + 2\sigma_1 \tau A)^{-1}\| \leq 1$ и $\|g_{s+1,s}\| \leq 2\|\Phi_s\|$.

По условию $g_{s,s} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|G_{s+1,s}\|^2 &= \frac{1}{4} \|g_{s+1,s}\|^2 + \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \|g_{s+1,s}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \|g_{s+1,s}\|^2 \leq 2(\sigma_1 + \sigma_2) \|\Phi_s\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|G_{n+1,s}\| \leq \|G_{s+1,s}\| \leq \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \|\Phi_s\|. \quad (75)$$

Подставляя (75) в правую часть неравенства

$$\|Y_{n+1}\| \leq \sum_{s=1}^n \tau \|G_{n+1,s}\|,$$

получаем для решения задачи (63) с $y(0) = y(\tau) = 0$ оценку

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\Phi(t')\|. \quad (76)$$

Отсюда и из (71) следует (69).

Теорема 8. Если $A(t) = A^*(t) > 0$ — положительный оператор и выполнены условия (68), то для решения задачи (63) выполняется неравенство

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{t'=\tau}^t \tau \|\Phi(t')\|_{A^{-1}(t')}^2 \right]^{1/2}, \quad (77)$$

где $\|Y(t + \tau)\|$ дается формулой (70).

Для доказательства теоремы надо подставить оценки

$$\begin{aligned} 2\tau(\tilde{\Phi}, y_i) &= 2\tau(A^{-1}\Phi, y_i) \leq 2\tau\|y_i\|_{A^{-1}} \|\Phi\|_{A^{-1}} \leq \\ &\leq 2\tau\|y_i\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\tau}{2} \|\Phi\|_{A^{-1}}^2, \\ 2\tau(\tilde{B}y_i, y_i) &\geq 2\tau(A^{-1}y_i, y_i) = 2\tau\|y_i\|_{A^{-1}}^2 \end{aligned}$$

в тождество (18) для схемы (65).

Применяя теорему 3 к схеме (65) с постоянным положительным оператором A , нетрудно получить при условиях (68) оценку

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|A^{-1}\Phi(t')\| + \|A^{-1}\Phi_i(t')\|). \quad (78)$$

Отметим еще, что оценка (60) имеет место для схемы (63), если $A(t) = A^*(t) > 0$, $A(t)$ липшиц-непрерывен по t и

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau \|A\|},$$

а оценка вида (61) справедлива при $\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1-\varepsilon}{\tau \|A\|}$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

7. Примеры. Рассмотрим несколько схем частного вида.

1) Схема (1) с оператором $R = \kappa E$ и $B = E$

$$y_t + \kappa \tau^2 y_{tt} + Ay = \varphi \quad (79)$$

устойчива при $\kappa E > A/4$, т. е. при

$$\kappa > \frac{1}{4} \|A\|. \quad (80)$$

Частным случаем схемы (79) является схема Дюфорта и Франкела (схема «ромб») для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Она получается из явной неустойчивой схемы

$$y_t + Ay = 0, \quad Ay = -y_{xx} = -\frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

в результате замены $y(x, t) = y_t^i$ полусуммой $0,5(y_t^{i+1} + y_t^{i-1}) = 0,5(\hat{y}_i + \check{y}_i)$, что дает

$$\frac{\hat{y}_i - \check{y}_i}{2\tau} = \frac{y_{i+1} - (\hat{y}_i + \check{y}_i) + y_{i-1}}{h^2}. \quad (81)$$

Приведем (81) к каноническому виду. Так как $\hat{y} + \check{y} = 2y + \tau^2 y_{tt}$, то правая часть в (81) равна $y_{xx} - \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}$, следовательно,

$$y_t + \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt} + Ay = 0, \quad Ay = -y_{xx}, \quad \|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}.$$

Сравнивая это уравнение с (79), видим, что $\kappa = 1/h^2 > \|A\|/4$, т. е. схема Дюфорта и Франкела устойчива при любых τ и h . Нетрудно сразу написать аналог этой схемы для случая, когда L — любой эллиптический оператор. При этом надо лишь выбрать κ из условия (80).

2) Несимметричная трехслойная схема

$$\frac{3}{2} y_t - \frac{1}{2} y_{tt} + A\hat{y} = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{3\hat{y} - 4y + \check{y}}{2\tau} + A\hat{y} = \varphi$$

применяется для решения уравнения теплопроводности. Пользуясь формулами

$$y_t = y_i + \frac{\tau}{2} y_{it}, \quad y_{it} = y_i - \frac{\tau}{2} y_{it}, \quad \hat{y} = y + \tau y_i + \frac{\tau^2}{2} y_{it},$$

приведем ее к каноническому виду

$$(E + \tau A) y_i + \tau^2 \left(\frac{E}{\tau} + \frac{1}{2} A \right) y_{it} + A y = \varphi,$$

т. е. $B = E + \tau A$, $R = E/\tau + 0.5A$. Отсюда видно, что условия

$$R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad B \geq E$$

выполняются при любом $A > 0$. Если $A = A^* > 0$, то схема устойчива в норме

$$\|Y(t + \tau)\|_D^2 = \frac{1}{2} (\|y(t + \tau)\|_A^2 + \|y(t)\|_A^2) + \tau \|y_t\|_A^2.$$

8. Трехслойные схемы с несамосопряженными операторами. Трехслойная явная схема с самосопряженным оператором A :

$$y_t + A y = 0, \quad A = A^* > 0,$$

является абсолютно неустойчивой, необходимое условие устойчивости $R \geq \frac{1}{4} A$ в этом случае не выполнено, так как $R = 0$.

Эта схема неустойчива ни в какой норме $\|\cdot\|_D$. Она является обобщением известной схемы Ричардсона для уравнения теплопроводности

$$\frac{\hat{y}_i - \check{y}_i}{2\tau} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Очевидно, что и неявная схема $By_t + Ay = 0$ с любым оператором $B = B^* > 0$ является также абсолютно неустойчивой.

Рассмотрим теперь схему с кососимметрическим оператором A :

$$y_t + A y = 0, \quad A = -A^*. \quad (82)$$

Покажем, что эта схема устойчива при

$$\tau \|A\| < 1$$

и для нее справедливо энергетическое тождество

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_1,$$

где

$$\mathcal{G}_{n+1} = \|y_{n+1}\|^2 + 2\tau (y_{n+1}, A y_n) + \|y_n\|^2 > 0.$$

Запишем разностное уравнение в виде

$$\hat{y} + \tau A y - \check{y} - \tau A y$$

и вычислим квадраты норм левой и правой частей:

$$\|\hat{y}\|^2 + 2\tau(\hat{y}, Ay) + \tau^2 \|Ay\|^2 = \|\check{y}\|^2 - 2\tau(Ay, \check{y}) + \tau^2 \|Ay\|^2.$$

Прибавим к обеим частям $\|y\|^2$ и учтем, что A — кососимметрический оператор, т. е. $(Ay, y) = -(y, Ay)$.

В результате получим $\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n = \dots = \mathcal{E}_1$.

Покажем, что $\mathcal{E}_{n+1} > 0$. В самом деле,

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq \|y_{n+1}\|^2 - 2\tau\|y_{n+1}\|\|Ay_n\| + \|y_n\|^2 \geq \|y_n\|^2 - \tau^2\|Ay_n\|^2 > 0,$$

если $\tau\|A\| < 1$.

Здесь H — действительное пространство. В случае комплексного пространства H

$$\mathcal{E}_{n+1} = \|y_{n+1}\|^2 + 2\tau \operatorname{Re}(y_{n+1}, Ay_n) + \|y_n\|^2.$$

Все рассуждения и результаты сохраняют силу.

Пример. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$i \frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - qu, \quad q = \text{const} > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ вводим, как обычно, сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad hN = 1\}.$$

Пусть $H = \dot{\Omega}_h$ — пространство комплексных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в нуль при $x=0$ и $x=1$. Обозначим

$$(y, v) = \sum_{k=1}^{N-1} y_k \bar{v}_k h,$$

где \bar{v}_k — комплексно сопряженная к v_k функция.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{du}{dt} = -i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + iqu,$$

после чего в пространстве H введем оператор

$$Ay = iy_{xx} - iqu.$$

Оператор A является кососимметрическим:

$$(Ay, v) = -(y, Av),$$

так как

$$\begin{aligned} (Ay, v) &= \sum_{k=1}^{N-1} (iy_{xx, k}) \bar{v}_k h + \sum_{k=1}^{N-1} (-iqy)_k \bar{v}_k h = \\ &= - \sum_{k=1}^{N-1} y_k \overline{(iv_{xx, k})} h - \sum_{k=1}^{N-1} y_k \overline{(-iqv)_k} h = -(y, Av). \end{aligned}$$

Оценим норму оператора A :

$$\|A\| \leq \frac{4}{h^2} + q.$$

Явная схема (82) для уравнения Шредингера имеет вид

$$y_t^* + iy_{xx} - iqy = 0, \quad y \in \dot{\Omega}_h.$$

Она устойчива при $\tau \|A\| < 1$, т. е. при

$$\left(\frac{4}{h^2} + q\right)\tau < 1 \quad \text{или} \quad \tau < \frac{h^2}{4 + qh^2}.$$

В качестве второго примера можно рассмотреть схему

$$y_t^* + y_x^* = 0$$

для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, которая устойчива при $\tau/h \leq 1$.

Отметим, что явная трехслойная схема

$$y_{tt} + Ay = 0$$

с кососимметрическим оператором $A = -A^*$ является абсолютно неустойчивой, а схема с самосопряженным оператором $A = A^* > 0$, как известно, условно устойчива при

$$E > \frac{\tau^2}{4} A \quad \text{или} \quad \tau < \frac{2}{\sqrt{\|A\|}}$$

(для $Ay = -y_{xx}$ получаем $\tau < h$).

9. Другие априорные оценки. Наряду со схемой (1) часто встречаются трехслойные схемы, записанные в виде

$$(E + \tau^2 R) y_{tt} + By_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (83)$$

Эта схема формально получается из (1) заменой R на $\tilde{R} = R + E/\tau^2$. Имея в виду эту замену, нетрудно заключить, что схема (83) устойчива при $R \geq A/4$, и написать соответствующие оценки.

Составные нормы $\|Y\|$ естественно появляются при написании уравнения энергетического баланса. Они весьма сложны по структуре. Желательно иметь априорные оценки для решения задач (1) и (83) в обычных энергетических нормах H_A и H_R . Перейдем к выводу таких оценок.

Любую трехслойную схему будем записывать в форме

$$Dy_{tt} + By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \quad (84)$$

где $D = D(t)$, $A = A(t)$ и $B = B(t)$ — линейные операторы. В частности, $D = \tau^2 R$ для схемы (1), $D = E + \tau^2 R$ для схемы (83).

Наряду с (84) будем рассматривать задачи

$$Dy_{\bar{t}} + By_t + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \quad (84a)$$

$$Dy_{\bar{t}} + By_t + Ay = \varphi(t), \quad y(0) = y_t(0) = 0. \quad (84b)$$

Будем предполагать, что

$$A(t) = A^*(t) > 0, \quad D(t) = D^*(t) > 0, \quad B(t) \geq 0, \quad (85)$$

$$A(t) \text{ и } D(t) \text{ липшиц-непрерывны по } t \text{ с постоянной } c_3. \quad (86)$$

Из теоремы 6 следует, что схема (84) при условиях (85), (86) и условии

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A \quad (87)$$

(где $\varepsilon > 0$ — любое число, не зависящее от τ и h) устойчива по начальным данным и для решения задачи (84a) имеет место оценка

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \leq M_1 \|Y_1\|_{(1)}, \quad (88)$$

где $M_1 = M_1(c_3, \varepsilon, t_0) > 0$ не зависит от τ, h, n и

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)}^2 = \frac{1}{4} \|y_n + y_{n+1}\|_{A(t_n)}^2 + \left(\left(D(t_n) - \frac{\tau^2}{4} A(t_n) \right) y_{t,n}, y_{t,n} \right), \quad (89)$$

$$\|Y_1\|_{(1)}^2 = \frac{1}{4} \|y_0 + y_1\|_{A(t_0)}^2 + \left(\left(D(\tau) - \frac{\tau^2}{4} A(\tau) \right) y_t(0), y_t(0) \right). \quad (90)$$

Постоянная $M_1 = 1$, если операторы A и D не зависят от t .

Для перехода от (88) к оценкам в H_A и H_D нам понадобятся двусторонние оценки функционала $\|Y_{n+1}\|^2$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (85) и (87). Тогда

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \leq \|y_n\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)}, \quad (91)$$

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|y_{n+1}\|_{A(t_n)}, \quad (92)$$

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} (\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)}). \quad (93)$$

Доказательство. Обозначим

$$J = \frac{1}{4} \|\hat{y} + y\|_A^2 + \left(\left(D - \frac{\tau^2}{4} A \right) y_t, y_t \right).$$

Докажем неравенство (91).

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} (\|y\|_A^2 + 2(Ay, \hat{y}) + \|\hat{y}\|_A^2) - \frac{1}{4} (\|y\|_A^2 - 2(A\hat{y}, y) + \|\hat{y}\|_A^2) + \\ &\quad + (Dy_t, y_t) = (Ay, \hat{y}) + \|y_t\|_D^2. \end{aligned}$$

Подставим сюда $\hat{y} = y + \tau y_t$:

$$J = \|y\|_A^2 + \tau(Ay, y_t) + \|y_t\|_D^2 \leq \|y\|_A^2 + \tau\|y\|_A\|y_t\|_A + \|y_t\|_D^2.$$

Используем условие (87): $\|y_t\|_A \leq \frac{2}{\tau\sqrt{1+\varepsilon}}\|y_t\|_D$, так что

$$J \leq \|y\|_A^2 + \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}}\|y\|_A\|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2 < (\|y\|_A + \|y_t\|_D)^2.$$

Отсюда следует первое неравенство леммы.

Заметим далее, что $J = (A\hat{y}, y) + \|y_t\|_D^2$. Подставим сюда $y = \hat{y} - \tau y_t$:

$$J = (A\hat{y}, \hat{y}) - \tau(A\hat{y}, y_t) + \|y_t\|_D^2.$$

Пользуясь обобщенным неравенством Коши—Буняковского $(Ay, y_t) \leq \|\hat{y}\|_A\|y_t\|_A$ и учитывая (87), получаем

$$J \geq \|\hat{y}\|_A^2 - \tau\|\hat{y}\|_A\|y_t\|_A + \|y_t\|_D^2 \geq \|\hat{y}\|_A^2 - \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}}\|\hat{y}\|_A\|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2.$$

Применим неравенство: $ab \leq \delta a^2 + b^2/(4\delta)$. Тогда

$$J \geq (1-\delta)\|\hat{y}\|_A^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta(1+\varepsilon)}\right)\|y_t\|_D^2. \quad (94)$$

Полагая второй коэффициент равным нулю, найдем $\delta = 1/(1+\varepsilon)$ и $J \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|\hat{y}\|_A^2$. Вторая оценка леммы доказана.

Чтобы получить третью оценку, потребуем равенства коэффициентов при $\|\hat{y}\|_A^2$ и $\|y_t\|_D^2$ в (94); это дает

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \quad 1-\delta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Так как $\sqrt{1+\varepsilon} < 1+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то $1-\delta > \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ и

$$J \geq \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(\|\hat{y}\|_A^2 + \|y_t\|_D^2) \geq \frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon)}(\|\hat{y}\|_A + \|y_t\|_D)^2.$$

Лемма полностью доказана.

Подставляя (91)–(93) в (88), получаем оценки для задачи (84a)

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\|y_0\|_{A(0)} + \|y_t(0)\|_{D(0)}), \quad (95)$$

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)} \leq 2M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}(\|y_0\|_{A(0)} + \|y_t(0)\|_{D(0)}). \quad (96)$$

Для доказательства устойчивости схемы (84) по правой части воспользуемся принципом суперпозиции и будем искать решение задачи (84б) в виде суммы

$$y_n = \sum_{s=1}^n \tau g_{n,s}, \quad n=1, 2, \dots, \quad y_0 = 0, \quad (97)$$

где $g_{n,s}$, как функция n при любом фиксированном $s=1, 2$ удовлетворяет уравнению (84а) и начальным условиям

$$(0.5\tau B(t_s) + D(t_s)) \frac{g_{s+1,s} - g_{s,s}}{\tau} = \varphi_s, \quad g_{s,s} = 0.$$

Поскольку $D > 0$ и H —конечномерное пространство, то $D \geq \delta E$ и оператор D^{-1} существует ($\delta > 0$).

Так как $B \geq 0$, а $D = D^* \geq \delta E$, то для решения уравнения $(0.5\tau B + D)w = \varphi$ будем иметь оценку $\|w\|_D \leq \|\varphi\|_{D^{-1}}$, так что $\|(g_t)_{s,s}\|_D(t_s) \leq \|\varphi_s\|_{D^{-1}}(t_s)$.

В силу (95) получаем

$$\|g_{n+1,s}\|_A(t_n) \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|(g_t)_{s,s}\|_D(t_s) \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|\varphi_s\|_{D^{-1}}(t_s).$$

Пользуясь затем (97) и неравенством треугольника, получим для решения задачи (84б) оценку

$$\|y_{n+1}\|_A(t_n) \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{D^{-1}}(t_s). \quad (98)$$

Суммируем все результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (85)–(87). Тогда схема (84) устойчива по начальным данным и по правой части, а для решения задачи (84) имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_A(t_n) &\leq \\ &\leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{D^{-1}}(t_s) \right). \end{aligned} \quad (99)$$

Следствие. Пусть $D = E + \tau^2 R > E$, $D^{-1} < E$. Тогда $\|\varphi_s\|_{D^{-1}} \leq \|\varphi\|$ и для (84б) верна оценка

$$\|y_{n+1}\|_A(t_n) \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|. \quad (100)$$

Более тонкие оценки, аналогичные оценкам для уравнения колебаний струны (гл. V), можно получить для более узкого класса схем

$$Dy_{tt} + Ay = \varphi, \quad 0 < t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0. \quad (101)$$

Предположим, что

$$\begin{aligned} A \text{ и } D &\text{—постоянные операторы,} \\ A \text{ и } D &\text{—самосопряженные положительные операторы.} \end{aligned} \quad (102)$$

Тогда при условии (87) для (101) верна оценка (99) с $M_1 = 1$. Полагая $x = D^{1/2}y$, $C = D^{-1/2}AD^{-1/2}$, преобразуем (101) к виду

$$x_{tt} + Cx = \tilde{\varphi}, \quad x(0) = x_0, \quad x_t(0) = \tilde{x}_0. \quad (103)$$

Применяя к (103) оператор C^{-1} , получим схему

$$C^{-1}x_{tt} + x = C^{-1}\tilde{\varphi}, \quad x(0) = x_0, \quad x_t(0) = \tilde{x}_0. \quad (104)$$

Сравнивая ее со схемой (84), устанавливаем соответствие

$$C^{-1} \sim D, \quad E \sim A, \quad C^{-1}\tilde{\varphi} \sim \varphi.$$

Условие (87) принимает вид

$$C^{-1} \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 E \quad \text{или} \quad E \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 C.$$

Воспользуемся теперь оценкой (99). Так как C — постоянный оператор, то $M_1 = 1$:

$$\|x_{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|x(0)\| + \|x_t(0)\|_{C^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \|C^{-1}\tilde{\varphi}\|_C \right). \quad (105)$$

Учитывая, что $x = D^{1/2}y$, $\tilde{\varphi} = D^{-1/2}\varphi$,

$$\|x_t(0)\|_{C^{-1}}^2 = (C^{-1}x_t(0), x_t(0)) = (D^{1/2}A^{-1}D^{1/2}D^{1/2}y_t(0), D^{1/2}y_t(0)) = \\ = \|Dy_t(0)\|_{A^{-1}}^2,$$

$$\|C^{-1}\tilde{\varphi}\|_C^2 = (C^{-1}\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = (D^{1/2}A^{-1}D^{1/2}D^{-1/2}\varphi, D^{-1/2}\varphi) = (A^{-1}\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2,$$

запишем (105) в исходных переменных

$$\|y_{n+1}\|_D \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left(\|y(0)\|_D + \|Dy_t(0)\|_{A^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{A^{-1}} \right). \quad (106)$$

Тем самым доказана

Теорема 10. Если выполнены условия (87) и (102), то для схемы (101) имеет место априорная оценка (106). В частности, для схемы (101) с $D = E$ и $y_0 = \tilde{y}_0 = 0$ имеем

$$\|y_{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{A^{-1}}$$

(ср. с оценками гл. V, § 6, п. 3).

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$y_{tt} + A(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}) = \varphi, \quad A^* = A \geq \delta E, \quad \delta > 0.$$

Подставляя сюда $\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y} = y + \sigma\tau^2y_{tt}$, получим

$$(E + \sigma\tau^2A)y_{tt} + Ay = \varphi, \quad (107)$$

т. е. $D = E + \sigma\tau^2A$. Условие устойчивости $D \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2A$ или $E \geq ((1+\varepsilon)/4 - \sigma)\tau^2A$ выполнено при

$$\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2\|A\|}.$$

Для явной схемы ($\sigma = 0$) отсюда следует

$$\tau \leq \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)\|A\|}}.$$

Явная схема ($y_{tt} = y_{xx}$) для уравнения колебаний струны, согласно этому условию, устойчива при $\tau/h \leq 1/\sqrt{1+\varepsilon}$ (ср. гл. V, § 6).

10. О регуляризации разностных схем. Теорию устойчивости разностных схем, изложенную в этой главе, можно использовать для формулировки общего принципа (принципа регуляризации) получения схем заданного качества, т. е. устойчивых, обладающих аппроксимацией и удовлетворяющих дополнительному требованию экономичности (минимума арифметических действий, достаточных для решения на ЭВМ получающихся разностных уравнений).

Требование экономичности применительно к нестационарным задачам математической физики обычно означает, что число арифметических действий, затрачиваемых для решения разностных уравнений при переходе со слоя на слой, пропорционально числу узлов сетки ω_h (подробнее об экономичных схемах см. гл. IX).

При записи двухслойных и трехслойных схем в канонической форме

$$(E + \tau R)y_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad B = E + \tau R, \quad (108)$$

$$By_t + \tau^2 Ry_{tt} + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (109)$$

было обнаружено, что ответственным за устойчивость является оператор R (регуляризатор). Достаточные условия устойчивости имеют простой вид:

$$R \geq \sigma_0 A, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|} \text{ для двухслойных схем,} \quad (110)$$

$$R > \frac{1}{4}A \quad \text{или} \quad R \geq \frac{1+\varepsilon}{4}A \text{ для трехслойных схем.}$$

Устойчивость или неустойчивость схемы (из исходного семейства) зависит только от выбора оператора R .

С точки зрения теории устойчивости произвол в выборе оператора R ограничен лишь двумя требованиями:

1) схема должна принадлежать исходному семейству, т. е.

$$B = E + \tau R > 0 \quad \text{для (108),} \quad R = R^* > 0 \quad \text{для (109),}$$

2) должны быть выполнены условия (110).

Для получения устойчивой схемы заданного качества необходимо добиться, чтобы она имела аппроксимацию заданного порядка и была экономичной, т. е. для решения уравнений $(E + \tau R)\hat{y} = F$ (для (108)) или $(B + 2\tau R)\hat{y} = F$ (для (109)) требовалось бы минимальное, в некотором смысле, число действий.

Заметим прежде всего, что если схема (108) или (109) с некоторым оператором R устойчива, то и схема с оператором $\tilde{R} \geq R$ также устойчива.

Обычно при построении разностных схем поступают так: пишется сначала схема, обладающая аппроксимацией нужного порядка и экономичная, после чего исследуется ее устойчивость.

Основная идея регуляризации разностных схем заключается в следующем: схемы заданного качества надо искать в классе устойчивых схем, отправляясь от некоторой исходной схемы и заменяя ее, путем изменения оператора R , другой схемой нужного качества, принадлежащей классу устойчивых схем.

Многие приемы построения схем частного вида можно трактовать как простейшие приемы регуляризации.

Запись схем в канонической форме удобна не только для проверки устойчивости, но и для оценки порядка аппроксимации. При R в (108) стоит множитель τ , а в (109) — множитель τ^2 . Поэтому, если при изменении R в случае двухслойной схемы остается выполненным условие $\|Ru_i\| = O(1)$ (u — решение исходного дифференциального уравнения), то погрешность аппроксимации при изменении R меняется на величину $O(\tau)$. В случае трехслойных схем условие $\|Ru_{ii}\| = O(1)$ гарантирует, что при регуляризации будут получаться схемы, погрешность аппроксимации которых отличается на величину $O(\tau^2)$. Поэтому трехслойными схемами удобно пользоваться для получения устойчивых схем второго порядка аппроксимации по τ .

Основным является вопрос о выборе регуляризатора R . Так как условия устойчивости имеют вид операторных неравенств, то в качестве R естественно выбирать операторы возможно более простой структуры, энергетически эквивалентные оператору A . Пусть, например, A и A_0 — энергетически эквивалентные операторы с постоянными γ_1 и γ_2 , так что

$$\gamma_1 A_0 \leq A \leq \gamma_2 A_0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0. \quad (111)$$

Полагая затем $R = \sigma A_0$, получим устойчивые схемы при $\sigma \geq \sigma_0 \gamma_2$ (или $\sigma \geq 0,5 \gamma_2$) в случае (108), $\sigma > \gamma_2/4$ в случае (109). Простейшим видом R является оператор

$$R = \sigma E \quad (A_0 = E).$$

Условия устойчивости выполнены, если $\sigma \geq \sigma_0 \|A\|$ для (108), $\sigma > \frac{1}{4} \|A\|$ для (109).

Пример 1. Рассмотренная в § 3, п. 7 явная трехслойная схема Дюфорта и Франкела для уравнения теплопроводности принадлежит семейству схем

$$y_t + \sigma t^2 y_{tt} + Ay = 0, \quad \sigma > \frac{1}{4} \|A\|, \quad A = A^* > 0. \quad (112)$$

В самом деле, $Ay = -\Lambda y$, $\Lambda y = y_{xx}$, $\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}$, $\sigma = \frac{1}{h^2}$, т. е. условие $\sigma > \frac{1}{4} \|A\|$ выполнено. Эта схема обладает условной аппроксимацией $O(h^2)$ при $\tau = O(h^2)$.

Нетрудно написать явную устойчивую схему для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2; \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (113)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

В этом случае в (112) надо положить $\sigma = c_2/h^2$, $Ay = -\Lambda y$, $\Lambda y = (ay_x)_x$.

Для многомерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in G, \quad (114)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

G — параллелепипед ($0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$), $0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2$, следует положить

$$\sigma = c_2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}, \quad Ay = - \sum_{\alpha=1}^p (a_\alpha y_{x_\alpha})_{x_\alpha},$$

где h_α — шаг сетки $\omega_h = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in \bar{G}\}$ по x_α .

Пусть $A_0 = A_1 + A_2$, где A_1 и $A_2 = A_1^*$ — сопряженные или «треугольные» (с треугольной матрицей) операторы, так что $(A_0 y, y) = 2(A_1 y, y) = 2(A_2 y, y)$. Полагая $R = \sigma A_1$ или $R = \sigma A_2$, получим схему (108), устойчивую при $\sigma \geq 2\gamma_2\sigma_0$ (γ_2 — постоянная в неравенстве (111)).

Пример 2. Асимметричная схема для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ принадлежит семейству «треугольных» схем.

Она имеет вид

$$y_t + \frac{\sigma\tau}{h} y_{\bar{x}t} = \Lambda y, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x}. \quad (115)$$

Здесь $Ay = -\Lambda y$, $Ry = \frac{\sigma}{h} y_{\bar{x}}$, $A_0 = A$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Схема (115) устойчива при

$$\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}$$

и условно аппроксимирует уравнение теплопроводности с $O(h)$ при $\tau = O(h^2)$.

Для уравнения (113) следует положить $\gamma_2 = c_2$, $Ay = -(ay_{\bar{x}})_x$, $Ry = \frac{\sigma}{h} y_{\bar{x}}$ и взять $\sigma \geq c_2 \left(1 - \frac{h^2}{2c_2\tau}\right)$.

В случае задачи (114) имеем

$$Ry = \sigma \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}\alpha} \quad \text{или} \quad Ry = -\sigma \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{x\alpha}, \quad \gamma_2 = c_2,$$

$$\sigma \geq c_2 \left(1 - \frac{1}{2\tau\Delta}\right), \quad \Delta = c_2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Важно отметить, что при построении схемы Дюфорта и Франкела в качестве исходной бралась явная неустойчивая схема

$$y_t = \Lambda y,$$

которая имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, и проводилось (см. п. 7) преобразование, которое соответствует введению регуляризатора простейшего типа ($R = \frac{1}{h^2} E$, $\sigma = \frac{1}{h^2}$ в (112)).

В дальнейшем, после введения в практику формул прогонки, стали широко рассматривать двухслойные неявные схемы (схемы с весами), для которых $R = \sigma A$. Очевидно, что эти схемы являются частным случаем схем с $R = \sigma A_0$.

Укажем еще один способ выбора R . Пусть $A_0 = A_1 + A_2$, $A_2 = A_1^* > 0$. Выберем R так, чтобы двухслойная схема имела факторизованный оператор

$B = (E + \sigma\tau A_1)(E + \sigma\tau A_2) = E + \tau(\sigma A_0 + \sigma^2\tau A_1 A_2)$,
так что

$$R = \sigma A_0 + \sigma^2\tau A_1 A_2.$$

Так как $(A_1 A_2 y, y) = (A_2 y, A_2 y) = \|A_2 y\|^2 > 0$, то эта схема устойчива, если $\sigma \geq \gamma_2 \sigma_0$.

Схемы с факторизованным оператором

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_2 = R_1^*,$$

применяются в качестве итерационных схем для решения уравнений $A = \varphi$ (см. гл. X).

ОДНОРОДНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе изучаются однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности и уравнения второго порядка гиперболического типа с переменными коэффициентами, на неравномерных сетках, с краевыми условиями третьего рода и др. При изучении устойчивости используются результаты общей теории устойчивости, изложенной в гл. VI, а при построении однородных схем—методы гл. III. Основное внимание уделяется одномерным (т. е. с одной пространственной переменной) задачам.

§ 1. Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

1. Исходная задача. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности: ищется непрерывное в прямоугольнике $\bar{D}_T = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Коэффициент $k(x, t)$ ограничен снизу и сверху

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (4)$$

где c_1, c_2 —постоянные.

Предполагается, что задача (1)–(3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

2. Однородные разностные схемы с весами. От разностной схемы для нестационарного процесса естественно требовать, чтобы она была пригодна и для расчета стационарного процесса, т. е. при $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ мы должны получать схему для уравнения $Lu + f = 0$, принадлежащую семейству однородных консервативных схем из гл. III.

Сднородную консервативную разностную схему для уравнения теплопроводности можно получить при помощи интегро-интерполяционного метода.

Для упрощения изложения предположим, что коэффициент теплопроводности $k = k(x)$ не зависит от t .

Случай $k = k(x, t)$ рассмотрим отдельно в п. 8, переход к нему принципиальных трудностей не вызывает.

Построим в \bar{D}_T сетку. Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\}$$

— равномерная сетка с шагом h на отрезке $0 \leq x \leq 1$,

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau = T/N_0\}$$

— сетка с шагом τ на отрезке $0 \leq t \leq T$,

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau\}$$

— сетка в \bar{D}_T ,

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x_i = ih, \quad 0 < i < N, \quad t_j = j\tau, \quad 0 < j \leq N_0\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

и напишем для него уравнение баланса в прямоугольнике $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] dx &= \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [w(x_{i+1/2}, t) - w(x_{i-1/2}, t)] dt + \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x, t) dx, \quad w(x, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5) \end{aligned}$$

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы и производные

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} u(x, t) dx \sim hu(x_i, t), \quad w_{i-1/2} \sim a_i u_{\bar{x}, i},$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(x_{i-1/2}, t) dt \sim \sigma w_{i-1/2}^{j+1} + (1 - \sigma) w_{i-1/2}^j,$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x, t) dt \sim h\tau \varphi_i^j,$$

где \sim — знак аппроксимации, σ — числовой параметр, a_i выражается через значения $k(x)$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ (см. гл. III, § 2) с помощью введенных в гл. III шаблонных функционалов $A[\bar{k}(s)]$, $-1 \leq s \leq 0$, так что

$$a(x_i) = a_i = A[k(x_i + sh)]$$

или

$$\frac{1}{a_i} = A \left[\frac{1}{k(x_i + sh)} \right].$$

Здесь $A[\bar{k}(s)]$ — линейный неубывающий функционал, удовлетворяющий условиям

$$A[1] = 1, \quad A[s] = -0,5.$$

Отсюда следует, что оператор $\Lambda u = (au_x)_x$ аппроксимирует $Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ со вторым порядком:

$$\Lambda u - Lu = O(h^2), \quad \text{если } k(x) \in C^{(3)}.$$

При этом $0 < c_1 \leq a(x) \leq c_2$.

После подстановки полученных выражений в (5) и замены u на y получаем разностную схему для сеточной функции $y(x_i, t_j)$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \Phi_i^j, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j \geq 0,$$

где $\Lambda y = (ay_x)_x$.

Для вычисления Φ_i^j и a_i можно использовать простейшие формулы

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad a_i = 0,5(k_{i-1} + k_i),$$

$$\Phi_i^j = f_i^{j+1/2}, \quad \Phi_i^j = 0,5(f_i^j + f_i^{j+1}).$$

Присоединяя к уравнению (6) дополнительные условия $y_i^0 = u_0(x_i)$, $y_0^j = \mu_1(t_j)$, $y_N^j = \mu_2(t_j)$, получаем следующую разностную краевую задачу:

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t = j\tau \geq 0,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

$$y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in \bar{\omega}_t,$$

$$\Lambda y = (ay_x)_x, \quad 0 < c_1 \leq a \leq c_2,$$

где, как обычно, обозначено

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}).$$

Приведем эту схему к счетному виду, т. е. к виду, удобному для вычислений. Для явной схемы, т. е. при $\sigma = 0$, сразу получаем формулу

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \tau (\Lambda y_i^j + \varphi_i^j) = \\ = \left(1 - \frac{\tau (a_i + a_{i+1})}{h^2} \right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2} (a_i y_{i-1}^j + a_{i+1} y_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^j,$$

по которой находится решение на новом слое.

В случае неявной схемы при $\sigma \neq 0$ для определения $\hat{y} = y^{j+1}$ получаем уравнение

$$\sigma \tau \Lambda \hat{y} - \hat{y} = -F, \quad F = y + \tau (1 - \sigma) \Lambda y + \tau \varphi.$$

Запишем это уравнение в развернутом виде

$$A_i \hat{y}_{i-1} - C_i \hat{y}_i + A_{i+1} \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$A_i = \sigma \tau a_i / h^2, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + 1,$$

$$F_i = \left(1 - \frac{\tau}{h^2} (1 - \sigma) \right) (a_i + a_{i+1}) y_i + \frac{\tau}{h^2} (1 - \sigma) (a_i y_{i-1} + a_{i+1} y_{i+1}) + \tau \varphi_i.$$

При $i = 0$ и $i = N$ для \hat{y}_i имеем краевые условия

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{j+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{j+1}).$$

Полученная краевая задача для разностного уравнения второго порядка (7) может быть решена методом прогонки. Условия устойчивости прогонки $A_i \neq 0$, $|C_i| \geq |A_i| + |A_{i+1}|$ выполнены при $\sigma > 0$.

Для вычисления правой части $F_i = F_i^j$ уравнения (8) можно пользоваться рекуррентной формулой

$$F_i^j = \frac{1}{\sigma} y_i^j - \frac{1-\sigma}{\sigma} F_{i-1}^{j-1} + \tau \varphi_i^j.$$

При этом объем вычислений уменьшается.

Приведем две часто встречающиеся неявные схемы:

а) Симметричная схема ($\sigma = 0,5$)

$$y_t = 0,5 \Lambda (\hat{y} + y) + \varphi.$$

б) Схема с опережением или чисто неявная схема ($\sigma = 1$)

$$y_t = \Lambda \hat{y} + \varphi.$$

3. Устойчивость и сходимость. Для изучения устойчивости схемы с весами (7) воспользуемся общей теорией устойчивости двухслойных схем. Рассмотрим схему с однородными краевыми условиями

$$y_t = \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t \geq 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (9)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Введем, как обычно, пространство сеточных функций $\bar{\Omega}$, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе при $x=0, x=1$. В пространстве $H=\bar{\Omega}$ со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h \quad \text{и нормой} \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

определим линейный оператор

$$Ay = -\Lambda y = -((ay_{\bar{x}})_x)_x \quad \text{при } y \in H.$$

Тогда вместо (9) можно написать

$$y_t + A(\sigma y + (1-\sigma)y) = \varphi, \quad t = j\tau \geq 0, \quad y(0) = u_0. \quad (10)$$

Оператор A , как было показано в § 4 гл. 11, является самосопряженным и положительно определенным

$$A^* = A > 0, \quad \delta E \leq A \leq \Delta E, \quad \delta > 0,$$

где

$$\delta = \min_{1 \leq k \leq N-1} \lambda_k(A), \quad \Delta = \|A\| = \max_{1 \leq k \leq N-1} \lambda_k(A),$$

$\lambda_k(A)$ — k -е собственное значение оператора.

Из формулы Грина

$$(Ay, y) = -((ay_{\bar{x}})_x, y) = (a, (y_{\bar{x}})^2)$$

следует, что

$$c_1 \dot{A} \leq A \leq c_2 \dot{A},$$

где

$$\dot{A}y = -y_{\bar{x}x} \quad \text{при } y \in H,$$

если учесть, что

$$(\dot{A}y, y) = ((y_{\bar{x}})^2, 1).$$

Наименьшее и наибольшее собственные значения оператора \dot{A} известны

$$\dot{\delta} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \dot{\Delta} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2},$$

а для δ и Δ имеем оценки

$$\delta \geq c_1 \dot{\delta}, \quad \Delta \leq c_2 \dot{\Delta}.$$

В силу теоремы 1 из § 2 гл. VI схема (10) устойчива в H_A по начальным данным

$$\|y'\|_A \leq \|y^0\|_A, \quad \text{если } \varphi' = 0,$$

при

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \Delta}.$$

Если же

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau \Delta}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

то, согласно теореме 8 § 2 гл. VI, для решения задачи (10) верна оценка

$$\|y^{j+1}\|_A \leq \|y^0\|_A + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Для явной схемы ($\sigma = 0$) имеем

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h^2} (a_i + a_{i+1}) \right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2} (a_i y_{i-1}^j + a_{i+1} y_i^j) + \tau \varphi_i^j. \quad (12)$$

Если выполнено условие

$$1 - \frac{2\tau}{h^2} c_2 \geq 0,$$

то коэффициент при y_i^j в (12) неотрицателен и

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C.$$

Суммируя по $j = 0, 1, 2, \dots$, получаем неравенство

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C, \quad (13)$$

выражающее устойчивость схемы (10) в C при условии

$$\tau \leq \frac{h^2}{2c_2}. \quad (14)$$

Это условие достаточно. Необходимым и достаточным условием устойчивости явной схемы по начальным данным в H_A является неравенство

$$\tau \leq \frac{2}{\Delta}, \quad \text{где} \quad \Delta \leq \frac{4c_2}{h^2}. \quad (15)$$

В случае сильно меняющегося коэффициента $k(x)$ оценка $\Delta \leq 4c_2/h^2$ может оказаться очень завышенной. Тогда условие (14) будет слишком жестким.

Применим принцип максимума к схеме с весами (9) при любом σ . Запишем схему (9) в каноническом виде

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\sigma\tau}{h^2} (a_i + a_{i+1}) \right) y_i^{j+1} &= \frac{\sigma\tau}{h^2} (a_i y_{i-1}^{j+1} + a_{i+1} y_{i+1}^{j+1}) + F_i^j, \\ F_i^j &= \left(1 - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} (a_i + a_{i+1}) \right) y_i^j + \\ &\quad + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} (a_i y_{i-1}^j + a_{i+1} y_{i+1}^j) + \varphi_i^j \tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема 3 из § 2 гл. IV для уравнения (16) дает

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|F^j\|_C,$$

так как граничные условия нулевые: $y(0) = y(1) = 0$, см. (9). Коэффициент при y_t^j неотрицателен, если

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)c_2}. \quad (17)$$

В этом случае $\|F^j\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C$ и

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{i=0}^j \tau \|\varphi^i\|_C. \quad (18)$$

Таким образом, схема с весами (9) устойчива в C при условии (17). Для чисто неявной схемы ($\sigma = 1$) оценка (18) верна при любом τ .

Чтобы выяснить вопрос о точности схемы, надо оценить погрешность аппроксимации схемы, т. е. невязку

$$\psi = \Lambda(\hat{u} + (1-\sigma)u) + \varphi - u_t$$

на решении u исходной задачи (1)–(3). Подставляя сюда

$$\hat{u} = \frac{\bar{u} + u}{2} + \frac{\tau}{2} u_t = \bar{u} + \frac{\tau}{2} \bar{u} + O(\tau^2),$$

$$u = \frac{\hat{u} + u}{2} - \frac{\tau}{2} u_t = \bar{u} - \frac{\tau}{2} \bar{u} + O(\tau^2),$$

$$u_t = \bar{u} + O(\tau^2),$$

где $\bar{u} = u^{j+1/2}$, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, получаем

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda \frac{\hat{u} + u}{2} + (\sigma - 0,5) \tau \Lambda u_t + \varphi - u_t = \\ &= (\Lambda \bar{u} + \bar{f} - \bar{u}) + (\Lambda \bar{u} - \bar{L} \bar{u}) + (\varphi - \bar{f}) + (\sigma - 0,5) \tau \Lambda \bar{u} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Так как $Lu + f - \dot{u} = 0$ и

$$\Lambda u = Lu + O(h^2), \quad \varphi = \bar{f} + O(\tau^2 + h^2), \quad (19)$$

то

$$\psi = (\sigma - 0,5) \tau \bar{L} \bar{u} + O(\tau^2 + h^2). \quad (20)$$

Отсюда видно, что порядок аппроксимации схемы при данном σ совпадает с порядком аппроксимации в случае постоянного коэффициента $k(x) \equiv 1$ (см. гл. V, § 1):

$$\psi = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{при } \sigma = 0,5,$$

$$\psi = O(h^2 + \tau) \quad \text{при } \sigma \neq 0,5.$$

Для погрешности $z' = y' - u'$, где y' — решение задачи (7), а $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (1) — (3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda(\hat{\sigma}z + (1 - \sigma)z) + \psi, \quad x \in \omega_h, \quad t = j\tau \geq 0, \\ z(x, 0) &= 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0. \end{aligned}$$

В силу (11) имеем

$$\|z'\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left(\sum_{j'=0}^J \tau \|\psi'\|^2 \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Учитывая затем, что (см. § 3 гл. II)

$$\|z\|_C \leq \frac{1}{2} (1, (z_{\bar{x}})^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{A}z, z)},$$

и используя оценку $c_1 \|z\|_A^2 \leq \|z\|_A^2$, приходим к неравенству

$$\|z'\|_C \leq \frac{1}{2 \sqrt{2\epsilon c_1}} \left(\sum_{j'=0}^J \tau \|\psi'\|^2 \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Отсюда и из (20) следует равномерная сходимость схемы (7) со скоростью $O(h^2 + \tau^{m_0})$, где

$$m_0 = \begin{cases} 2 & \text{при } \sigma = 0,5, \\ 1 & \text{при } \sigma \neq 0,5, \end{cases}$$

если выполнены условия, при которых схема имеет порядок аппроксимации $\psi = O(h^2 + \tau^{m_0})$ и $\sigma \geq \sigma_e$ при $0 < \epsilon \leq 1$.

Аналогичный результат был получен в гл. V для уравнения с постоянным коэффициентом $k(x)$.

4. Уравнение с разрывным коэффициентом теплопроводности. Исследуем сходимость однородной схемы с весами (7) в предположении, что коэффициент $k(x)$ имеет разрыв первого рода на прямой $x = \xi$ в плоскости (x, t) . На линии разрыва выполняются обычные условия сопряжения (температура $u(x, t)$ и тепловой поток $(-ku')$ непрерывны)

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{при } x = \xi, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Будем предполагать, что $k(x)$, $f(x, t)$ и решение $u(x, t)$ вне линии разрыва являются достаточно гладкими.

Оценим погрешность аппроксимации (невязку)

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda(\hat{\sigma}u + (1 - \sigma)u) + \varphi - u_t = \Lambda u^{(\sigma)} + \varphi - u_t, \\ u^{(\sigma)} &= \hat{\sigma}u + (1 - \sigma)u. \end{aligned}$$

Пусть $\xi = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 \leq \theta \leq 1$, $n \geq 1$.
Так как оператор Λ — трехточечный, то

$$\psi_i = O(h^2 + \tau^m \sigma) \quad \text{для всех } i \neq n, i \neq n+1. \quad (24)$$

Поэтому нам остается вычислить ψ_i при $i = n$, $i = n+1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} h\psi_n &= \tilde{w}_{n+1}^{(\sigma)} - \tilde{w}_n^{(\sigma)} + h\varphi_n - hu_{t,n}, \\ \tilde{w}_i &= au_{x,i}. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как

$$(au_x)_i = (ku')_{i-1/2} + O(h^2)$$

при

$$k \in C^{(2)}[x_{i-1}, x_i], \quad u \in C^{(3)}[x_{i-1}, x_i],$$

то

$$\tilde{w}_n = (ku')_{n-1/2} + O(h^2) = (ku')_n - (\theta + 0,5)h(ku')_n' + O(h^2), \quad (26)$$

где $v_n = v(\xi - 0, t)$.

Аналогично находим

$$h\psi_{n+1} = \tilde{w}_{n+2}^{(\sigma)} - \tilde{w}_{n+1}^{(\sigma)} + h\varphi_{n+1} - hu_{t,n+1}, \quad (27)$$

$$\tilde{w}_{n+1} = (au_x)_{n+1} = (ku')_n + (1,5 - \theta)h(ku')_n' + O(h^2), \quad (28)$$

где

$$v_n = v(\xi + 0, t).$$

Далее, пользуясь разложениями

$$u_n = u(\xi) - \theta hu_n' + 0,5\theta^2 h^2 u_n'' + O(h^3),$$

$$u_{n+1} = u(\xi) + (1 - \theta)hu_n' + 0,5(1 - \theta)^2 h^2 u_n'' + O(h^3),$$

находим

$$\tilde{w}_{n+1} = a_{n+1}u_{x,n+1} = a_{n+1}(\theta u_n' + (1 - \theta)u_n') + O(h).$$

В силу условия сопряжения $[ku'] = 0$ имеем

$$\begin{aligned} (ku')_n &= (ku')_n = w(\xi, t), \\ u_n' &= \frac{w(\xi, t)}{k_n}, \quad u_n' = \frac{w(\xi, t)}{k_n}, \end{aligned}$$

так что

$$\tilde{w}_{n+1} = a_{n+1} \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1 - \theta}{k_n} \right) w(\xi, t) + O(h). \quad (29)$$

Подставим (26), (28), (29) в (25), (27).
В результате получим

$$h\psi_n = Q_n^{(\sigma)} + O(h),$$

$$Q_n = \left[a_{n+1} \left(\frac{\theta}{k_n} + \frac{1-\theta}{k_{n+1}} \right) - 1 \right] w(\xi, t),$$

$$h(\psi_n + \psi_{n+1}) = \tilde{w}_{n+2}^{(\sigma)} - \tilde{w}_n^{(\sigma)} + h(\varphi_n + \varphi_{n+1}) - h(u_{t,n+1} + u_{t,n}) =$$

$$= (1,5 - \theta)h((ku')_n)^{(\sigma)} + (0,5 + \theta)h((ku')_{n+1})^{(\sigma)} + h(\varphi_n + \varphi_{n+1}) -$$

$$- h(u_{t,n} + u_{t,n+1}) + O(h^2).$$

Подставим сюда из уравнения (1) предельные значения

$$(ku')_n' = (\dot{u} - f)_{x=\xi}, \quad (ku')_{n+1}' = (\dot{u} - f)_{x=\xi}$$

(так как $[\dot{u}] = [f] = 0$ при $x = \xi$). Тогда, учитывая, что

$$\varphi_n = \bar{f}_n + O(h^2 + \tau^2), \quad \tilde{w}^{(\sigma)} = \frac{\hat{w} + \tilde{w}}{2} + (\sigma - 0,5)\tau\tilde{w}_t,$$

получим

$$h(\psi_n + \psi_{n+1}) =$$

$$= 2h(\dot{u} - f)_{x=\xi}^{(\sigma)} + h(\varphi_n + \varphi_{n+1} - u_{t,n} - u_{t,n+1}) + O(h^2) =$$

$$= O((\sigma - 0,5)\tau h + \tau^2 h + h^2).$$

Таким образом, для любой схемы (7)

$$h\psi_n = O(1), \quad (30)$$

$$h(\psi_n + \psi_{n+1}) = (\sigma - 0,5)O(\tau h) + O(\tau^2 h + h^2). \quad (31)$$

Если

$$a(x) = \dot{a}(x) = \left[\int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \right]^{-1}, \quad (32)$$

то, по аналогии с гл. III, § 3, п. 2, убеждаемся, что

$$Q_n = O(h), \quad h\psi_n = O(h).$$

Очевидно, что верны и оценки

$$h\psi_{t,n} = O(1), \quad (33)$$

$$h(\psi_{t,n} + \psi_{t,n+1}) = (\sigma - 0,5)O(\tau h) + O(\tau^2 h + h^2) \quad (34)$$

Из полученных оценок следует, что ψ_i удобно представить в виде

$$\psi = \dot{\psi} + \psi^*, \quad \dot{\psi}_i = \psi_i(\delta_{t,n} + \delta_{t,n+1}),$$

$$\psi^* = O(h^2 + \tau^m \sigma), \quad \psi_i^* = 0 \text{ при } i \neq n, \quad i \neq n+1, \quad (35)$$

где $\delta_{t,n}$ — символ Кронекера.

Вводя сеточную функцию

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{i-1} h \dot{\psi}_k, \quad \eta_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

получаем для ψ следующее представление:

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad \text{т. е.} \quad \dot{\psi} = \eta_x. \quad (36)$$

Оценим η_i :

$$\begin{aligned} \eta_i &= 0 & \text{при } i < n+1, \quad \eta_{n+1} = h \psi_n, \\ \eta_i &= h (\psi_n + \psi_{n+1}) & \text{при } i > n+1. \end{aligned} \quad (37)$$

Перейдем к оценке порядка точности схемы (7). Погрешность $z = y - u$ представим в виде

$$z = v + z^*,$$

где v и z^* — решение следующих задач:

$$\begin{aligned} v_t &= \Lambda(\sigma \hat{v} + (1 - \sigma)v) + \dot{\psi}, \quad v_0 = v_N = 0, \quad v(x, 0) = 0, \\ z_t^* &= \Lambda(\sigma \hat{z}^* + (1 - \sigma)z^*) + \psi^*, \quad z_0^* = z_N^* = 0, \quad z^*(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для оценки v и z^* воспользуемся результатами общей теории устойчивости, а именно, теоремами 9, 11 из § 2 гл. VI:

$$\|v^{j+1}\| \leq \|A^{-1}\dot{\psi}^0\| + \|A^{-1}\dot{\psi}^j\| + \sum_{i'=1}^j \tau \|A^{-1}\dot{\psi}_i^{i'}\| \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad (38)$$

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{i'=0}^j \tau \|\psi^{i'}\| \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma \geq 0. \quad (39)$$

Так как $A^{-1}\dot{\psi} = \zeta$ — решение уравнения $A\zeta = \dot{\psi} = \eta_x$, то

$$\|A^{-1}\dot{\psi}\| \leq \frac{1}{c_1} (1, |\eta|) \quad (40)$$

(см. гл. III, § 3, п. 3).

Учитывая затем (37), находим

$$(1, |\eta|) = \sum_{i=n+1}^N h |\eta_i| = h^2 |\psi_n| + h |\psi_n + \psi_{n+1}| (1 - x_{n+1}).$$

Теперь подставим оценки (30), (31) в неравенство (40) и оценки (33), (34) в аналогичное неравенство для $\|A^{-1}\dot{\psi}_i\|$, после чего воспользуемся оценками (35), (38), (39) и неравенством $\|z\| \leq \|z^*\| + \|v\|$.

Тем самым доказана сходимость однородной схемы (7) в классе разрывных коэффициентов:

Пусть $k(x)$ имеет разрыв первого рода при $x = \xi$ и выполнены условия (23), (24), (30), (31). Тогда при $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \geq 0$

схема (7) сходится в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h + \tau^{m\sigma})$, а наилучшая схема с коэффициентом (32) — со скоростью $O(h^2 + \tau^{m\sigma})$; $m_\sigma = 2$ при $\sigma = 0,5$, $m_\sigma = 1$, если $\sigma \neq 0,5$.

Чтобы получить оценку точности в норме сеточного пространства C (равномерную оценку), следует воспользоваться априорными оценками (см. теорему 8 из § 2 гл. VI):

$$\|v^{j+1}\|_A \leq \|\dot{\psi}^0\|_{A-1} + \|\dot{\psi}^j\|_{A-1} + \sum_{j'=1}^j \tau \|\dot{\psi}_i^{j'}\|_{A-1} \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad (41)$$

$$\|z^{*j+1}\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left(\sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{*j'}\|^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_\epsilon, \quad (42)$$

где $\|z\|_A^2 = (Az, z) = (a, (z_{\bar{x}})^2)$, а также неравенствами (см. гл. II, § 3)

$$\|z\|_C \leq \frac{1}{2} (1, (z_{\bar{x}})^2)^{1/2}$$

и

$$\|z\|_A^2 = (a, (z_{\bar{x}})^2) \geq c_1 (1, (z_{\bar{x}})^2).$$

Далее, согласно гл. II, § 4, имеем

$$\|\dot{\psi}\|_{A-1} = \|\eta_x\|_{A-1} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|\eta\| = \left(\sum_{i=1}^N h \eta_i^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

Учитывая (37), получаем

$\|\eta\|^2 = h \eta_{n+1}^2 + (1 - x_{n+1}) \eta_{n+2}^2 = h (h \psi_n)^2 + (1 - x_{n+1}) (h (\psi_n + \psi_{n+1}))^2$, откуда следует, что

$$\|\eta\| = O(\sqrt{h} + \tau^{m\sigma}) \quad \text{для любой схемы (7),}$$

$\|\eta\| = O(h^{1/2} + \tau^{m\sigma})$ для наилучшей схемы с коэффициентом (32).

Таким образом, схема (7) равномерно сходится со скоростью $O(\sqrt{h} + \tau^{m\sigma})$ при тех же условиях (23), (24), (30) и (31):

$$\|z^j\|_C = \|y^j - u^j\|_C = O(\sqrt{h} + \tau^{m\sigma}).$$

Эта оценка для схемы с опережением ($\sigma = 1$) может быть улучшена, если воспользоваться принципом максимума. В этом случае используется тот же метод выделения «стационарных» неоднородностей, который применялся в гл. VI при выводе оценки (38). Полагаем

$$z^j = \bar{v}^j + w^j,$$

где ω' есть решение уравнения

$$A\hat{\omega} = \dot{\psi} = \eta_x, \quad (43)$$

так что $\|\hat{\omega}\|_C \leq \frac{1}{c_1} (1, |\eta|)$, $\|\omega_i\|_C \leq \frac{1}{c_1} (1, |\eta_i|)$ (см. (40)), а \bar{v}' определяется условиями

$$\bar{v}_t + A\hat{\bar{v}} = \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi^* - \omega_t, \quad \bar{v}(x, 0) = -\omega(x, 0). \quad (44)$$

Принцип максимума для уравнения (44) дает

$$\|\bar{v}'\|_C \leq \|\bar{v}^0\|_C + \sum_{j'=1}^J \tau (\|\psi^{*j'}\|_C + \|w_i^{j'}\|_C).$$

Подставляя сюда оценки для $\|\omega\|_C$, $\|\omega_t\|_C$, $\|\psi^*\|_C$, получаем $\|\bar{v}'\|_C = O(\tau + h)$ и, следовательно, $\|z'\|_C = O(\tau + h)$. Для схемы с коэффициентом (32) получим $\|z'\|_C = O(h^2 + \tau)$, т. е. она сохраняет порядок точности в классе разрывных коэффициентов по аналогии со стационарным случаем.

5. Однородные схемы на неравномерных сетках. На практике часто применяются неравномерные по x и t сетки. Неравномерность сетки по t для двухслойной схемы не вносит никаких изменений в написанные выше формулы и оценки. Следует лишь иметь в виду, что шаг $\tau = \tau_j$ зависит от j . Порядок аппроксимации по времени при этом не меняется, однако выражение $O(\tau^m)$ может означать либо $O(\tau_j^m)$, либо $O(\max_{1 \leq j \leq J} \tau_j^m)$, впрочем, это всегда видно по ходу изложения. Случай, когда сетка неравномерна по x , требует специального исследования, которое проводится по аналогии с § 4 гл. III.

Пусть $\hat{\bar{\omega}}_h = \{\bar{\omega}_i, i = 0, 1, \dots, N, \bar{x}_0 = 0, \bar{x}_N = 1\}$ — произвольная сетка на отрезке $0 \leq \bar{x} \leq 1$ с шагами $\bar{h}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Оператор $Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ в соответствии с § 4 гл. III аппроксимируем разностным оператором

$$\Lambda y = (ay_x)_{\bar{x}, i} = \frac{1}{\bar{h}_i} \left[\frac{a_{i+1} (y_{i+1} - y_i)}{\bar{h}_{i+1}} - \frac{a_i (y_i - y_{i-1})}{\bar{h}_i} \right],$$

где a_i определяется по тем же формулам, что и на равномерной сетке, например

$$a_i = A [k (x_i + sh_i)] \quad \text{или} \quad \frac{1}{a_i} = A \left[\frac{1}{k (x_i + sh_i)} \right], \quad (45)$$

причем $-1 \leq s \leq 0$ (см. п. 2).

Для правой части будем использовать простую формулу

$$\varphi = \varphi_i^t = f(x_i, t_{j+0.5}) = f(x_i, \bar{t}), \quad (46)$$

если $f(x, t)$ — непрерывная функция x . Если же $f(x, t)$ может иметь разрывы первого рода в узловых точках, то полагаем

$$\varphi_i = \frac{h_i f_{i-0} + h_{i+1} f_{i+0}}{2h_i}, \quad (47)$$

где $f_{i \pm 0} = f(x_{i \pm 0}, \bar{t})$, или

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x, \bar{t}) dx. \quad (48)$$

Рассмотрим схему с весами

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1-\sigma)y) + \varphi, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad 0 \leq t = j\tau < T, \quad (49)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t),$$

$$\Lambda y = (a(x) y_x)_x, \quad 0 < c_1 \leq a \leq c_2.$$

Приведем эту схему к счетному виду. Известно значение y^j на слое $t = t_j$, требуется определить y^{j+1} на новом слое $t = t_{j+1}$ из условий

$$A_i \hat{y}_{i-1} - C_i \hat{y}_i + B_i \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\hat{y}_0 = u_1(t_{j+1}), \quad \hat{y}_N = u_2(t_{j+1}),$$

$$A_i = \frac{\sigma a_i \tau}{h_i \hat{h}_i}, \quad B_i = \frac{\sigma a_{i+1} \tau}{h_{i+1} \hat{h}_i}, \quad C_i = A_i + B_i + 1,$$

$$F_i = \left[1 - \frac{(1-\sigma) \tau}{\hat{h}_i} \left(\frac{a_i}{h_i} + \frac{a_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \right] y_i + \frac{(1-\sigma) \tau}{\hat{h}_i} \left[\frac{a_i y_{i-1}}{h_i} + \frac{a_{i+1} y_{i+1}}{h_{i+1}} \right] + \varphi_i.$$

Эта задача решается методом прогонки.

После того, как указан вычислительный алгоритм, перейдем к оценке точности схемы (49) и покажем, что она сходится равномерно со скоростью $O(h^2 + \tau^{\sigma})$ в случае гладких функций $k(x)$, $f(x, t)$.

Пусть y_i^j — решение этой задачи, $u(x, t)$ — решение исходной задачи (1) — (3), $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ — погрешность схемы (49). Подставляя в (49) $y = z + u$, получаем для z задачу

$$z_t = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1-\sigma)z) + \psi(x, t), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad 0 \leq t = j\tau < T, \quad (50)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad 0 \leq t = j\tau < T,$$

где

$$\psi(x, t) = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1-\sigma)u) + \varphi - u, \quad (51)$$

— погрешность аппроксимации задачи (1) — (3) схемой (49).

Воспользуемся уравнением баланса на отрезке $x_{i-0,5} \leq x \leq x_{i+0,5}$, где $x_{i-0,5} = x_i - 0,5h_i$, $x_{i+0,5} = x_i + 0,5h_{i+1}$:

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \bar{t}) dx = w(x_{i+0,5}, \bar{t}) - w(x_{i-0,5}, \bar{t}) + \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x, \bar{t}) dx \quad (52)$$

(здесь $w(x, \bar{t}) = k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, \bar{t})$), и преобразуем выражение для невязки ψ . Для этого разделим обе части тождества (52) на $\hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ и вычтем его из (51). Тогда получим

$$\psi = (au_x^{(0)} - \bar{ku}')_{\hat{x}, i} + \bar{\psi},$$

где $\bar{v} = v(x_{i-0,5}, \bar{t})$, а

$$\bar{\psi}_i = \varphi_i - \dot{\varphi}_i + \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \bar{t}) dx - u_{t, i}.$$

Воспользуемся разложением вида (см. § 4 гл. III)

$$\dot{\varphi}_i = f_i + \frac{1}{8} (h_i^2 f'_{i-0,5})_{\hat{x}, i} + O(\hbar_i^2)$$

и преобразуем ψ , записав его в виде

$$\psi = \eta \hat{x} + \psi^*, \quad (53)$$

$$\eta_i^I = a_i u_x^{(0), i} - (ku')_{i-1/2}^{I+1/2} + \frac{h_i^2}{8} (\dot{u}' - f')_{i-1/2}^{I+1/2} \quad (54)$$

(здесь $\dot{u}' = \partial^2 u / \partial t \partial x$, $f' = \partial f / \partial x$ и т. д.)

Тогда

$$\psi_i^* = O(\hbar_i^2 + \tau^2).$$

Представление (53) для невязки ψ можно получить и из уравнения баланса (52), если заметить, что

$$(ku')_{i+1/2} = (ku')_i + 0,5h_{i+1}(ku')_i' + \frac{1}{8} h_{i+1}^2 (ku')_i'' + O(h_{i+1}^3),$$

$$(ku')_{i-1/2} = (ku')_i - 0,5h_i(ku')_i' + \frac{1}{8} h_i^2 (ku')_i'' + O(h_i^3)$$

и, следовательно,

$$(ku')_i' = [(ku')_{i-1/2}]_{\hat{x}, i} - \frac{1}{8h_i} (h_{i+1}^2 (ku')_i'' - h_i^2 (ku')_i'') + O(\hbar_i^2).$$

Остается теперь только учесть, что

$$\frac{1}{h_i} (h_{i+1}^2 v_i - h_i^2 v_i) = (h_i^2 v_{i-1/2})_{\hat{x}, i} + O(\hbar_i^2),$$

так как $v_i = v_{i-1/2} + O(h_i)$, $v_i = v_{i+1/2} + O(h_{i+1})$, $(ku')' = \dot{u} - f$, $(ku'') = \dot{u}' - f'$, и записать ψ в виде

$$\psi = \Lambda u^{(0)} + \varphi - u_t - ((ku')' + f - \dot{u})_{t=\bar{t}}.$$

Из формулы (54) видно, что

$$\eta = 0,5a(\hat{u}_x + u_{\bar{x}}) - \bar{ku}' + \tau(\sigma - 0,5)au_{\bar{x}t} + O(h^2) = O(h^2 + \tau^m \sigma).$$

Перейдем к выяснению точности схемы (49). Для этого нам понадобятся априорные оценки решения задачи (50), учитывающие специальную структуру (53) правой части ψ .

Рассмотрим, как обычно, пространство $\hat{\Omega} = H$ сеточных функций, заданных на $\hat{\omega}_h$ и равных нулю при $x = 0, x = 1$, и введем скалярные произведения

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i \hat{h}_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i,$$

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i.$$

Определим оператор $A: H \rightarrow H$:

$$Ay = -\Lambda y = -(ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} \quad \text{для любого } y \in H.$$

Очевидно (см. гл. II, § 4), что A — самосопряженный положительный оператор

$$A = A^* > 0,$$

так как

$$(Ay, v) = (ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = (y, Av).$$

Далее имеем

$$(Ay, y) = (ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] \geq c_1 (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}],$$

$$\|y\|_c = \max_{0 < i < N} |y_i| \leq \frac{1}{2} (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]^{1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{c_1}} (Ay, y)^{1/2}.$$

Представим решение задачи (50) в виде

$$z = v + w,$$

где v — решение той же задачи с правой частью $\psi = \eta_{\bar{x}}$, а w — решение задачи (50) с правой частью $\psi = \psi^*$.

Схема (50) устойчива при

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}, \quad \|A\| \leq \frac{4c_2}{h_0^2},$$

где

$$h_0 = \min_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

Для v используем априорную оценку (41), а для w —оценку (42) и учтем, что $\|\eta_x\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|\eta\|$, где $\|\eta\| = \sqrt{1 + \eta^2}$, а также $\|z\| \leq \|v\| + \|w\|$.

В результате получим оценку

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \frac{1}{2c_1} \left\{ \|\eta^0\| + \|\eta^j\| + \sum_{j'=1}^j \tau \|\eta^{j'}\| \right\} + \frac{1}{2\sqrt{2\epsilon c_1}} \left(\sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{*j'}\|^2 \right)^{1/2} \quad (55)$$

при $\sigma \geq \sigma_\epsilon$, $\sigma_\epsilon = 0.5 - (1 - \epsilon)/(\tau \|A\|)$.

Предположим теперь, что $k(x)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ —гладкие функции, и выполнены условия, при которых

$$\eta = O(h^2 + \tau^m \sigma), \quad \eta_t = O(h^2 + \tau^m \sigma), \quad \psi^* = O(h^2 + \tau^2). \quad (56)$$

Тогда схема (49) на любой последовательности неравномерных сеток $\{\hat{\omega}_h\}$ равномерно сходится со скоростью $O(\tau^m \sigma + |h|^2)$, где $|h| = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$, если $\sigma \geq \sigma_\epsilon$.

Это следует из (55) и (56).

Остановимся кратко на вопросе о сходимости схемы (49) в классе разрывных коэффициентов, проводя аналогию со стационарным случаем § 4 гл. III.

Будем предполагать, что

а) функции $k(x)$ и $f(x, t)$ могут иметь конечное число разрывов первого рода на прямых, параллельных оси координат Ot ;

б) сетка $\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h(K)$ выбрана так, что все линии разрыва функций $k(x)$ и $f(x, t)$ проходят через узлы этой сетки:

в) в областях между линиями разрыва функции $k(x)$, $f(x, t)$ и $u(x, t)$ достаточное число раз дифференцируемы, так что во всех узлах сетки $\hat{\omega}_h(K)$ имеют место формулы (53), (54) и справедливы оценки (56).

Заметим, что φ_i определяется по формуле (47).

Если выполнены условия а)–в), то схема (49) сходится равномерно со скоростью $O(\tau^m \sigma + |h|^2)$ на специальных последовательностях сеток $\hat{\omega}_h(K)$.

Замечание 1. Сходимость с той же скоростью в сеточной норме L_2 имеет место при более слабом условии в):

$$\eta = O(h^2 + \tau^m \sigma), \quad \psi^* = O(h^2 + \tau^2). \quad (57)$$

Это следует из априорной оценки (42)

$$\|z^{j+1}\| \leq \frac{1}{V^{2\epsilon}} \left(\sum_{j'=1}^J \tau \|\psi^{j'}\|_{A-1}^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_\epsilon.$$

Замечание 2. Для схемы с опережением ($\sigma = 1$) равномерную сходимость со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$ можно доказать при помощи принципа максимума (ср. п. 4).

6. Сосредоточенный источник тепла. Рассмотрим нестандартную задачу о теплопроводности при наличии в точке $x = \xi$ сосредоточенного источника тепла. В этой точке решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условиям сопряжения (см. § 1 гл. I):

$$[u] = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -Q \quad \text{при } x = \xi, \quad (58)$$

где $Q = Q(t)$ — мощность источника.

Условие разрыва теплового потока $\left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -Q$ означает, что разрывные первые производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, т. е. решение $u = u(x, t)$ имеет на прямой $x = \xi$ слабый разрыв.

Коэффициент $k(x)$ и функцию $f(x, t)$ здесь считаем непрерывными и гладкими.

Чтобы написать однородную разностную схему, учитывающую источник Q при $x = \xi$, воспользуемся интегро-интерполяционным методом.

Предположим, что сетка ω_h равномерна и

$$\xi = x_n + \theta h, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5.$$

Тогда во всех узлах $x_i \neq x_n$ ($i \neq n$) разностное уравнение имеет обычный вид (6). Напишем уравнение баланса для интервала $x_{n-1/2} \leq x \leq x_{n+1/2}$ при фиксированном $t = \bar{t} = t_{j+0.5}$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} (ku')' dx &= \int_{x_{n-0.5}}^{\xi} (ku')' dx + \int_{\xi}^{x_{n+0.5}} (ku')' dx = ku' \Big|_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} + [ku'] = \\ &= w_{n+1/2} - w_{n-1/2} - Q, \quad w = ku', \end{aligned}$$

будем иметь

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t} (x, \bar{t}) dx = w(x_{n+1/2}, \bar{t}) - w(x_{n-1/2}, \bar{t}) - Q(\bar{t}) + h \dot{\Phi}_n. \quad (59)$$

Совершая отсюда обычный переход к разностному уравнению, получаем

$$y_t = \Lambda y^{(0)} + \varphi + \frac{Q(\bar{t})}{h} \quad \text{при } x = x_n,$$

где $\Lambda y = (ay_x)_x$.

Таким образом, схема для задачи (1)–(3), (58) имеет вид

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda y^{(0)} + \varphi + \frac{1}{h} Q(\bar{t}) \delta_{i,n}, \\ 0 < x &= x_i < 1, \quad t = t_j \geq 0, \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad y(x, 0) = u_0(x), \end{aligned} \quad (60)$$

где $\delta_{i,n}$ — символ Кронекера.

Для погрешности $z = y - u$ получаем уравнение с правой частью

$$\psi = \Lambda u^{(0)} + \varphi + \frac{1}{h} Q(\bar{t}) \delta_{i,n} - u_t \quad (61)$$

и краевыми условиями

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad z(x, 0) = 0. \quad (62)$$

Пользуясь уравнением баланса (59), преобразуем выражение для невязки к виду

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad \eta = au_x^{(0)} - \bar{ku}' \quad (63)$$

(здесь, как и выше, $\bar{v}_i = v(x_{i-0.5}, \bar{t})$),

$$\psi^* = \varphi_i - \dot{\varphi}_i - \left(u_{t,i} - \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \bar{t}) dx \right). \quad (64)$$

Для определенности будем считать, что $\theta \leq 0.5$, т. е. $x_n \leq \xi \leq x_{n+1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta_i &= O(h^2 + \tau^{m_0}) \quad \text{для всех } i \neq n+1, \\ \psi_i^* &= O(h^2 + \tau^2) \quad \text{для всех } i \neq n. \end{aligned}$$

По аналогии со случаем разрывных коэффициентов (см. п. 4) находим

$$u_{x,n+1}^- = \theta u_n' + (1 - \theta) u_n' + 0.5h [(1 - \theta)^2 u_n'' - \theta^2 u_n''] + O(h^2).$$

Так как $a_{n+1} = k(\xi) + (0.5 - \theta) h k'(\xi) + O(h^2)$, то

$$a_{n+1}^- u_{x,n+1}^- = \theta w_n + (1 - \theta) w_n + O(h).$$

Учитывая затем, что

$$w_n - w_n = -Q, \quad (ku')_{n+1/2} = w_n + h(0.5 - \theta)(ku')_n + O(h^2),$$

находим

$$\eta_{n+1} = \theta Q + O(h) = O(1). \quad (65)$$

Нетрудно заметить также, что

$$\psi_n^* = O(h). \quad (66)$$

Последующая оценка погрешности z проводится так же, как и в п. 4; при этом и скорость сходимости получается той же, что и в п. 4. Однако в данном случае выбор коэффициента $a = \hat{a}$ не улучшает порядка точности. Из формулы $\eta_{n+1} = \theta Q + O(h)$ видно, что $\eta_{n+1} = O(h)$ и, следовательно, $\|z\| = O(h^2 + \tau^m)$, если $\theta = 0$, т. е. источник находится в узле сетки.

Поэтому следует выбирать неравномерную сетку $\omega_h(Q)$ так, чтобы источник попал в узел; тогда схема (60) сходится равномерно со скоростью $O(h^2 + \tau^m)$.

Однако если вычислять коэффициенты a_i по формулам усеченной схемы второго порядка точности (см. гл. III, § 7, п. 2), то получим разностную схему точности $O(h^2 + \tau^m)$ при любом значении $\theta \in [0, 1]$, т. е. при любом положении источника.

7. Сосредоточенная теплоемкость. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности с нестандартным краевым условием, когда на одной из границ, например при $x = 0$, помещена сосредоточенная теплоемкость величины C_0 .

Тогда при $x = 0$ ставится краевое условие вида

$$C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x = 0, \quad C_0 = \text{const} > 0 \quad (67)$$

(см. п. 5 § 1 гл. I), и мы получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ C_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } x = 0, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (68)$$

Чтобы построить однородную схему для этой задачи, надо аппроксимировать краевое условие при $x = 0$.

Для этого используем интегро-интерполяционный метод. Напишем уравнение баланса для прямоугольника $0 \leq x \leq x_{1/2} = 0.5h$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} [u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)] dx &= \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [w(x_{1/2}, t) - w(0, t)] dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_0^{x_{1/2}} f(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

где

$$w(x, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подставим сюда

$$w(0, t) = \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$$

и учтем, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} C_0 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) dt = C_0 (u(0, t_{j+1}) - u(0, t_j)) = C_0 \tau u_{t, 0}.$$

После замены интегралов по x простейшими выражениями $0,5hu_0$ и $0,5hf_0$, а интегралов по t — выражениями $\tau \omega_{t, 0}^{(0)}$ и $\tau f_{t, 0}^{(0)}$, приходим к следующему разностному краевому условию:

$$Cy_{t, 0} = a_1 y_{x, 0}^{(0)} + 0,5hf_0^{(0)}, \quad C = C_0 + 0,5h. \quad (69)$$

Задаче (68) мы ставим в соответствие следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda y^{(0)} + \varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau \geq 0, \\ Cy_{t, 0} &= a_1 y_{x, 0}^{(0)} + 0,5hf_0^{(0)}, \quad t \geq 0, \quad y_N = \mu_2, \quad y(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \quad (70)$$

Из условия при $x = 0$ выразим \hat{y}_0 :

$$\hat{y}_0 = \kappa_1 \hat{y}_1 + v_1, \quad \kappa_1 = \frac{\sigma a_1 \tau}{\sigma a_1 \tau + Ch}, \quad (71)$$

$$v_1 = h [0,5h\tau f_0^{(0)} + a_1 (1 - \sigma) \tau y_{x, 0}^{(0)} + Cy]/(Ch + a_1 \sigma \tau).$$

Отсюда видно, что

$$0 \leq \kappa_1 < 1 \quad \text{при} \quad \sigma \geq 0.$$

При $i = N$ имеем условие первого рода

$$y_N = \mu_2. \quad (72)$$

Для определения $\hat{y}_i = y_i^{i+1}$ получаем разностное уравнение второго порядка с краевыми условиями (71) и (72); эта задача решается методом прогонки.

Разностное уравнение и краевое условие при $x = 0$ имеют одинаковый порядок аппроксимации $O(\tau^m + h^2)$. Достаточно оценить невязку

$$\Psi_y = Cu_{t, 0} - a_1 u_{x, 0}^{(0)} - 0,5hf_0^{(0)}.$$

После подстановки сюда выражений

$$a_1 u_{x, 0} = (au_x)_1 = (ku')_{1, 1} + O(h^2) = (ku')_0 + 0,5h(ku')_0' + O(h^2),$$

$$(ku')_0 = C_0 \dot{u}_0, \quad (ku')_0' = \dot{u}_0 - f_0$$

получаем

$$\psi_\tau = C(u_{t,0} - \dot{u}_0^{(\sigma)}) + O(h^2) = O(h^2 + \tau^{m\sigma}),$$

что и требовалось.

Для погрешности $z = y - u$ получаем задачу

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda y^{(\sigma)} + \psi, \quad \psi = \Lambda u^{(\sigma)} + \varphi - u_t, \quad 0 < x < 1, \\ Cz_{t,0} &= a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \psi_\tau, \quad z_N = 0, \quad z(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Отсюда видно, что пространство H есть пространство сеточных функций, заданных на ω_h и равных нулю при $i = N$.

Введем скалярное произведение в H :

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5 h y_0 v_0$$

и определим операторы

$$\begin{aligned} (Ay)_i &= -(\Lambda y)_i \quad \text{при } 0 < i < N, \quad (Ay)_0 = -\frac{a_1 y_{x,0}}{0,5h}, \\ (Dy)_i &= y_i \quad \text{при } 0 < i < N, \quad Dy_0 = \frac{1}{0,5h} Cy_0. \end{aligned}$$

Тогда задачу (73) можно записать в виде

$$Dz_t + Az^{(\sigma)} = \psi, \quad t = j\tau \geq 0, \quad z(0) = 0, \quad (74)$$

так что $B = D + \sigma t A$.

Оператор D , очевидно, самосопряжен и положительно определен

$$D \geq c_* E, \quad \text{где } c_* = \min(1, 2C/h).$$

Оператор A также самосопряжен и положительно определен (см. гл. II, § 4)

$$A = A^* > 0.$$

Операторы A и D перестановочны, $AD = DA$.

Условие устойчивости схемы (74) $B - 0,5\tau A = D + (\sigma - 0,5)\tau A \geq 0$ выполнено, если

$$\sigma \geq 0,5 - \frac{c_*}{\tau \|A\|} = \sigma_0.$$

Доказательство сходимости схемы можно получить, если для задачи (74) использовать априорные оценки из гл. VI, § 2.

Тогда получим, что схема (70) равномерно сходится со скоростью $O(\tau^{m\sigma} + h^2)$.

8. Случай, когда коэффициент теплопроводности k зависит от t , $k = k(x, t)$. До сих пор мы, для упрощения изложения, предполагали, что коэффициент теплопроводности k зависит только от x .

Рассмотрим теперь случай, когда $k = k(x, t)$, т. е. общее уравнение (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2,$$

с теми же краевыми и начальными условиями (2)–(3).

Вместо (6) напишем разностную схему

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(0)} + \varphi, \quad (75)$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) v = (a(x, \bar{t}) v_x)_x, \quad \bar{t} = t_{j+0.5},$$

а коэффициент $a(x, t)$ при каждом фиксированном значении t определяется так же, как и в п. 2 или в п. 4.

Погрешность аппроксимации этой схемы $\psi = O(\tau^m \sigma + h^2)$, если при каждом фиксированном $t = t_*$ $k(x, t_*) \in C^{(3)}[0, 1]$.

В пространстве сеточных функций $\dot{\Omega} = H$ вводится оператор

$$Ay = -\Lambda(\bar{t}) y, \quad y \in \dot{\Omega},$$

который является переменным оператором (зависящим от t). Поэтому для применимости общей теории устойчивости необходимо потребовать, чтобы $A(t)$ удовлетворял по t условию Липшица

$$|(A(t) - A(t - \tau))y, y| \leq \tau c_3 (A(t - \tau)y, y),$$

которое выполнено, если коэффициент $k(x, t)$ липшиц-непрерывен по t :

$$|k(x, t) - k(x, t - \tau)| \leq \tau c_3 k(x, t - \tau).$$

Все результаты пп. 2–4 сохраняют силу для схемы (75).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда теплоемкость $c = c(x, t)$, т. е. уравнение

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

где

$$c(x, t) \geq c_1 > 0, \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2.$$

Соответствующая однородная разностная схема имеет вид

$$\rho(x, \bar{t}) y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(0)} + \varphi(x, \bar{t}), \quad (76)$$

причем ρ и φ вычисляются при помощи одного и того же шаблонного функционала, например, $\rho(x_i, \bar{t}) = c(x_i, \bar{t})$ или $\rho(x_i, \bar{t}) = \frac{1}{2}(c(x_i - 0, \bar{t}) + c(x_i + 0, \bar{t}))$, если $c(x, t)$ разрывна в узле $x = x_i$.

Схема (76) устойчива при условии

$$\sigma \geq \sigma_0(\bar{t}), \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{c_1}{\tau \|A(\bar{t})\|}, \quad \|A\| = \|\Lambda\|$$

и, следовательно, безусловно устойчива при $\sigma \geq 0,5$.

Замечание. Мы до сих пор всюду считали, что сетка по t равномерна. Однако все оценки сохраняют силу и для двухслойных схем на неравномерной сетке, когда шаг $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ является функцией j . Очевидно, что сетку по t легче менять в процессе счета, чем сетку ω_h , уменьшая, например, шаг τ_j в области сильного изменения по t правой части $f(x, t)$, краевых значений $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ и коэффициента $k = k(x, t)$. Если же известно поведение решения задачи на грубой сетке, то шаг τ_j надо уменьшить в интервале, где решение быстро меняется по t . Сетку ω_h можно менять в процессе счета (с изменением t_j), по мере надобности. При изменении (измельчении, например) сетки ω_h при $t = t_j$ функция y_t^j должна вычисляться в новых узлах сетки ω_h .

Для повышения, например, точности по t можно использовать вычисления на нескольких сетках ω_{τ_1} , ω_{τ_2} по аналогии с тем, как это делалось в гл. III, § 4.

Предположим, что для равномерной сетки $\omega_{h\tau}$ справедливо представление

$$y_t^j = u_t^j + \alpha_{ij} h^{m_1} + \beta_{ij} \tau^{n_1} + O(h^{m_2} + \tau^{n_2}), \quad m_2 > m_1 > 0, \quad n_2 > n_1 > 0, \quad (77)$$

где α_{ij} и β_{ij} не зависят от h и τ .

Пусть $y_{h\tau_1}(x, t_j)$ и $y_{h\tau_2}(x, t_j)$ — решения разностной задачи с разными шагами $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = 0,5\tau$.

Образуем линейную комбинацию

$$\tilde{y}_{h\tau}(x, t) = c_1 y_{h\tau_1}(x, t) + c_2 y_{h\tau_2}(x, t), \quad t = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots,$$

подставим сюда вместо $y_{h\tau_1}$ и $y_{h\tau_2}$ выражение (77) и потребуем, чтобы коэффициент при τ^{n_1} обратился в нуль, тогда найдем значения

$$c_2 = 1 - c_1, \quad c_1 = -1/(2^{n_1} - 1),$$

при которых

$$\tilde{y} = u + O(h^{m_1} + \tau^{n_2}).$$

Аналогично, проведя расчеты для двух сеток ω_h и $\omega_{0.5h}$ при фиксированном τ , получим сеточное решение $\tilde{\tilde{y}}$, имеющее точность $O(h^{m_2} + \tau^{n_2})$:

$$\tilde{\tilde{y}} = u + O(h^{m_2} + \tau^{n_2}).$$

Все эти рассуждения проводятся в предположении достаточной гладкости решения $u = u(x, t)$ и всех данных исходной задачи, при которых существует асимптотическое разложение

$$y_{n\tau} = u + \alpha h^m + \beta \tau^n + O(h^m + \tau^n).$$

9. Третья краевая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1,$$

$$k(0, t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1(t) u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 \geq 0,$$

$$-k(1, t) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_2(t) u(1, t) - \mu_2(t), \quad \beta_2 \geq 0.$$

В гл. III, § 5, п. 1 было получено разностное условие третьего рода для стационарного уравнения $Lu + f = 0$. Формально переход от стационарного к нестационарному уравнению можно рассматривать как замену f на $f - \partial u / \partial t$. Применяя этот прием при выводе разностных условий, аппроксимирующих краевые условия третьего рода, приходим к следующей разностной краевой задаче:

$$y_t = \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad 0 < x_i = ih < 1, \quad t_j = j\tau > 0,$$

$$a_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_{\bar{x}, 1} + (1 - \sigma)y_{\bar{x}, 1}) = \beta_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_0 + (1 - \sigma)y_0) + \bar{\mu}_1(\bar{t}) + 0,5hy_{t, 0},$$

$$-a_N(\bar{t})(\sigma y_{\bar{x}, N} + (1 - \sigma)y_{\bar{x}, N}) =$$

$$= \beta_2(\bar{t})(\sigma \hat{y}_N + (1 - \sigma)y_N) + \bar{\mu}_2(\bar{t}) + 0,5hy_{t, N}.$$

Здесь

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1(\bar{t}) - 0,5hf(0, \bar{t}).$$

$$\bar{\mu}_2 = \mu_2(\bar{t}) - 0,5hf(1, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_j + 0,5\tau.$$

Приведенная выше схема имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = 0,5$, $O(\tau + h^2)$ при $\sigma > 0,5$.

Запишем эту разностную схему в виде, пригодном для применения метода прогонки:

$$\Lambda(\bar{t})\hat{y} - \frac{\hat{y}}{\sigma\tau} = -F, \quad \hat{y}_0 = \kappa_1 \hat{y}_1 + v_1, \quad \hat{y}_N = \kappa_2 \hat{y}_{N-1} + v_2,$$

где

$$\kappa_1 = \frac{a_1(\bar{t})}{a_1(\bar{t}) + h\beta_1(\bar{t}) + h^2/(2\sigma\tau)}, \quad \kappa_2 = \frac{a_N(\bar{t})}{a_N(\bar{t}) + h\beta_2(\bar{t}) + h^2/(2\sigma\tau)},$$

$$v_1 = \frac{(1 - \sigma)(a_1(\bar{t})y_{\bar{x}, 1} - \beta_1(\bar{t})y_0) + 0,5hy_0/\tau - \bar{\mu}_1}{\sigma(a_1(\bar{t})/h + \beta_1(\bar{t}) + h/(2\sigma\tau))},$$

$$v_2 = \frac{(1 - \sigma)(-a_N(\bar{t})y_{\bar{x}, N} - \beta_2(\bar{t})y_N) + 0,5hy_N/\tau - \bar{\mu}_2}{\sigma(a_N(\bar{t})/h + \beta_2(\bar{t}) + h/(2\sigma\tau))},$$

$$F = ((1 - \sigma)\Lambda(\bar{t})y + y/\tau + \varphi(\bar{t}))\sigma^{-1}.$$

Прогонка устойчива, если $\sigma > 0$, так как $0 < \kappa_1 < 1$, $0 < \kappa_2 < 1$.

10. Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида. Рассмотрим для параболического уравнения общего вида следующую задачу в $\bar{D}_T = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$:

$$\begin{aligned} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u, \\ 0 < c_1 &\leq k(x, t) \leq c_2, \quad c(x, t) \geq c_1 > 0, \quad q \geq 0. \end{aligned} \quad (78)$$

В гл. III, § 5, п. 3 были получены монотонные схемы второго порядка точности для стационарного уравнения $Lu + f = 0$, разрешимые при любых h и $r(x)$.

Чтобы получить для (78) монотонную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых h и τ , рассмотрим уравнение с возмущенным оператором \tilde{L} :

$$\begin{aligned} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= \tilde{L}u + f, \quad \tilde{L}u = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \frac{\partial u}{\partial x} - qu, \\ \kappa &= (1 + R)^{-1}, \quad R = 0,5h|r|/k. \end{aligned} \quad (79)$$

Оператор \tilde{L} при фиксированном $t = \bar{t} = t_{j+1/2}$ аппроксимируем разностным оператором (см. гл. III, § 5, п. 3)

$$\tilde{\Lambda}y = \kappa (ay_x)_x + b^+ a^{(+)1} y_x + b^- ay_x - dy,$$

где

$$\begin{aligned} a &= A[k(x + sh, \bar{t})], \quad d = F[q(x + sh, \bar{t})], \quad b^\pm = F[\tilde{r}^\pm(x + sh, \bar{t})], \\ \tilde{r}^\pm &= r^\pm/k, \quad r^+ = 0,5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0,5(r - |r|) \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь A и F — те же шаблонные функционалы, что и выше, в § 2 гл. III. Они обеспечивают второй порядок аппроксимации.

Для уравнения (79) пишется чисто неявная (четырехточечная) однородная схема

$$\begin{aligned} \rho(x, \bar{t}) y_t &= \tilde{\Lambda}(\bar{t}) \hat{y} + \varphi, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t). \end{aligned} \quad (80)$$

Коэффициенты ρ, φ вычисляются по тем же формулам, что и d, b^\pm . Погрешность аппроксимации этой схемы, в силу построения оператора $\tilde{\Lambda}$ (см. гл. III, § 5, п. 3), есть $\psi = O(\tau + h^2)$.

Применим для оценки решения задачи (80) с однородными краевыми условиями $y_0 = y_N = 0$ принцип максимума (см. гл. IV, § 2).

Для этого уравнение (80) запишем в канонической форме

$$(\rho_i/\tau + \alpha_i + \beta_i + d_i) \hat{y}_i = \alpha_i \hat{y}_{i-1} + \beta_i \hat{y}_{i+1} + F_i, \\ F_i = \rho_i y_i/\tau + \varphi_i, \quad \alpha_i = a_i (x_i - hb_i^-)/h^2, \quad \beta_i = a_{i+1} (x_i + hb_i^+)/h^2.$$

Для него выполнены условия теоремы 3 из § 2 гл. IV, в силу которой

$$\|\hat{y}\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |\hat{y}_i| \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C, \quad D_i = \rho_i/\tau + d_i.$$

Подставляя сюда выражения для F_i и D_i , получим

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \left\| \frac{\varphi^j}{\rho} \right\|_C \leq \|y^j\|_C + \frac{\tau}{c_1} \|\varphi^j\|,$$

откуда следует априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \frac{1}{c_1} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C.$$

Отсюда получаем, что схема (80) равномерно сходится со скоростью $O(\tau^m + h^2)$.

11. Цилиндрически- и сферически-симметричные задачи теплопроводности. При изучении процессов теплопроводности или диффузии в телах, имеющих форму цилиндра, естественно пользоваться цилиндрической системой координат (r, φ, z) . Если температура не зависит от φ и z , то мы приходим к уравнению (обозначим $x = r$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t). \quad (81)$$

В случае сферической симметрии уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t). \quad (81')$$

В гл. III, § 5, пп. 4—5 были изучены однородные схемы для стационарных уравнений в сферической и цилиндрической системах координат.

При $x = 1$ будем ставить обычное условие (первого или третьего рода), например,

$$u(1, t) = \mu_2(t), \quad (82)$$

а при $x = 0$ естественное условие ограниченности решения

$$\lim_{x \rightarrow 0} kx \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{для (81),}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} kx^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{для (81').}$$

Рассмотрим сначала задачу теплопроводности в случае цилиндрической симметрии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(xk(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ t &> 0, \quad 0 < x < 1; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \\ xk \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Введем равномерную сетку на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1\},$$

и сетку $\bar{\omega}_t = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots\}$ на отрезке $0 \leq t \leq T$.

Оператор L , следуя п. 4 § 5 гл. III, аппроксимируем разностным оператором

$$\Lambda(\bar{t}) u_i = \frac{1}{x_i} (x_{i-1/2} a_i u_{\bar{x}, i})_{x, t} \sim Lu,$$

где $a_i = a(x_i, \bar{t})$ и уравнению (83) поставим в соответствие схему с весами

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(0)} + \varphi, \quad \varphi = f(x, \bar{t}).$$

Чтобы получить разностное краевое условие при $x = 0$, воспользуемся условием (34) и § 5 гл. III для стационарного уравнения и заменим в нем y_r на $y_x^{(0)}$, $f(0)$ на $\left(f - \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=0}$, затем $\frac{\partial u}{\partial t}$ на u_t , а u на y .

В результате получаем краевое условие

$$a_1(\bar{t}) y_{x, 0}^{(0)} = \frac{h}{4} y_{t, 0} - \frac{h}{4} f_0^{(0)},$$

которое можно также записать в виде

$$y_{t, 0} = \frac{4}{h} a_1(\bar{t}) y_{x, 0}^{(0)} + \varphi_0, \quad \varphi_0 = f_0^{(0)}.$$

Вместо $f_0^{(0)}$ можно взять $f(0, \bar{t})$.

Присоединяя сюда условия при $x = 1$ и $t = 0$, получаем разностную краевую задачу

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\bar{t}) y^{(0)} + \varphi, \quad 0 \leq x = ih < 1, \quad t = j\tau \geq 0, \\ y_N &= \mu_2, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) y = \frac{4}{h} a_1(\bar{t}) y_x \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\Lambda(\bar{t}) y = \frac{1}{x} (\bar{x} a(x, \bar{t}) y_{\bar{x}}) x \quad \text{при} \quad 0 < x = ih < 1, \quad \bar{x} = x_i - 0.5h.$$

Если $\sigma \neq 0$, то разностное уравнение для \hat{y}_i решается методом прогонки.

Для погрешности $z = y - u$ получаем задачу

$$z_t = \Lambda(\bar{t}) z^{(\sigma)} + \psi, \quad 0 \leq x = ih < 1, \quad t_j \geq 0, \quad z_0 = 0, \quad z(x, 0) = 0,$$

где

$$\psi = \Lambda(\bar{t}) u^{(\sigma)} + \varphi - u_t.$$

По аналогии с п. 4 § 5 гл. III невязку ψ представим в виде

$$\psi = \frac{1}{x} (\bar{x} \eta)_x + \psi^* + \psi^{**}, \quad \eta = a u_x^{(\sigma)} - (k u')_{x=\bar{x}, t=\bar{t}},$$

где

$$\eta = O(h^2 + \tau^{\sigma}), \quad \psi^* = O(h^2/x), \quad \psi^{**} = O(h^2 + \tau^2).$$

Далее, для оценки z применяется метод стационарных неоднородностей и соответствующие априорные оценки.

В случае схемы с опережением ($\sigma = 1$) можно воспользоваться принципом максимума и доказать, что схема сходится равномерно со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

Остановимся теперь на задаче теплопроводности в случае сферической симметрии.

Используя результаты п. 5 § 5 гл. III, можно сразу написать схему для задачи (81')—(82):

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(\sigma)} + \varphi \quad \text{при } 0 \leq x = ih < 1, \quad t_j \geq 0,$$

$$y_N^j = \mu_2^j, \quad j \geq 0, \quad y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h,$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) y_i = \frac{1}{x_i^2} (\bar{x}_i^2 a(x_i, \bar{t}) y_{\bar{x}, i})_{x, t} \quad \text{при } i > 0,$$

$$\Lambda(\bar{t}) y_0 = \frac{6}{h} a_1 y_{x, 0},$$

$$\varphi_i = f(x_i, \bar{t}) \quad \text{или} \quad \varphi_i = f_i^{(\sigma)} \quad \text{при } 0 \leq i < N.$$

Для решения полученных разностных уравнений можно применять обычный метод прогонки.

Исследование невязки и оценка точности схемы проводятся так же, как и в случае цилиндрической симметрии.

По аналогии с § 5 гл. III пишутся разностные схемы на «потоковых» сетках $\bar{\omega}_h$.

12. Периодическая задача. Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном тонком круговом кольце $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ радиуса r_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \frac{a^2}{r_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t' > 0, \quad u(\varphi, 0) = u_0(\varphi).$$

Для однозначного определения $u(\varphi, t')$ должно выполняться условие периодичности

$$u(\varphi + 2\pi, t') = u(\varphi, t') \quad \text{для любого } \varphi \in [0, 2\pi],$$

которое можно заменить условиями сопряжения в точке $\varphi = 0$:

$$u(0+0, t') = u(2\pi-0, t'), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0+0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi-0}.$$

Заменой переменных

$$x = \varphi/(2\pi), \quad t = a^2 t'/(2\pi r_0^2)$$

преобразуем отрезок $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в отрезок $0 \leq x \leq 1$, а уравнение — к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u(0+0, t) = u(1-0, t), \quad \frac{\partial u(0+0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1-0, t)}{\partial x}.$$

Введем сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\}$$

и напишем простейшую неявную схему

$$y_t = \hat{y}_{xx}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0, \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Первое из условий сопряжения $u(0+0, t) = u(1-0, t)$ дает

$$y_0 = y_N.$$

Второе условие аппроксимируется, по аналогии с гл. III, § 5, п. 2, уравнением $y_{t,0} = \hat{y}_{xx,0}$. При этом точки $x=0$ и $x=1$ считаем совпадающими и ставим условие

$$y_{N+1} = y_1.$$

Таким образом, разностную схему пишем во всех узлах $t = 1, 2, \dots, N$ сетки $\bar{\omega}_h$, учитывая условие периодичности $y_{N+1} = y_1$ при написании схемы в узле $i = N$.

Аналогично ставится разностная задача и для уравнения с переменными периодическими коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и периодическими краевыми условиями (условиями сопряжения)

$$u(0+0, t) = u(1-0, t), \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0+0} = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1-0}.$$

Все функции $k(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$ периодичны с периодом 1, так что $u_0(x+1) = u_0(x)$, $f(x+1, t) = f(x, t)$, $k(x+1, t) = k(x, t)$.

Коэффициенты $k(0+0, t)$ и $k(1-0, t)$ могут быть различны: $k(0+0, t) \neq k(1-0, t)$. При этом производные du/dx разрывны: $du(0+0, t)/dx \neq du(1-0, t)/dx$. Если отождествить концы $x=0$ и $x=1$, то условия периодичности можно трактовать как условия сопряжения в точке разрыва коэффициента $k(x, t)$. После этого становится понятным, что схему надо писать во всех узлах $i = 1, 2, \dots, N$ с учетом условия $y_{N+1} = y_1$. В результате получим однородную схему с весами:

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(0)} + \varphi(x, \bar{t}), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \bar{t} = (j + 0,5)\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y_{N+1} = y_1, \quad y_0 = y_N,$$

где $\Lambda y = (a(x, \bar{t}) y_x)_x$ и коэффициенты a и φ находятся по обычным формулам, например,

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad \varphi_i = 0,5(f_{i-0} + f_{i+0}).$$

Написанные условия однозначно определяют решение. Эта схема имеет аппроксимацию $O((\sigma - 0,5)\tau + \tau^2 + h^2)$.

Для определения $\hat{y} = y^{i+1}$ получаем задачу вида

$$A_i \hat{y}_{i-1} - B_i \hat{y}_i + A_{i+1} \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \hat{y}_{N+1} = \hat{y}_1, \quad \hat{y}_0 = \hat{y}_N, \quad A_i = \sigma a_i/h^2, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + 1,$$

которая решается методом циклической прогонки (см. Дополнение, § 2).

Для исследования вопроса об устойчивости и точности рассмотрим пространство H сеточных функций $y(x_i)$, заданных при $i = 1, 2, \dots, N, N+1$ и удовлетворяющих условию периодичности $y_{N+1} = y_1$, $y_N = y_0$.

В H вводится скалярное произведение $(v, w) = \sum_{i=1}^N v_i w_i h$ и норма $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Пусть $Ay = -\Lambda y$ при $y \in H$. Для A справедливы формулы Грина и $A = A^* \geq 0$.

Далее следует воспользоваться результатами общей теории устойчивости из гл. VI, в силу которой построенная здесь схема безусловно устойчива при $\sigma \geq 0,5$.

При $\sigma = 1$ для нашей разностной задачи справедлив принцип максимума при любых τ и h , из которого следует равномерная устойчивость по начальным данным и по правой части, а также равномерная сходимость со скоростью $O(\tau + h^2)$.

§ 2. Однородные разностные схемы для уравнений гиперболического типа

1. Исходная задача. В прямоугольнике

$$\bar{D}_T = [0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$$

будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_1(t), & u(1, t) &= u_2(t), \\ 0 < c_1 &\leq k(x, t) \leq c_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $D_T = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$.

Как обычно, предполагаем, что эта задача имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области \bar{D}_T и обладающее требуемыми по ходу изложения производными.

Допускается, что коэффициент $k(x, t)$ (и правая часть $f(x, t)$) может иметь разрывы первого рода на конечном числе прямых, параллельных оси координат Ot (неподвижные разрывы).

На каждой линии разрыва $x = \xi_s$, $s = 1, 2, \dots, s_0$, выполнены условия сопряжения (непрерывность функций u и $k \partial u / \partial x$ при $x = \xi_s$, $s = 1, 2, \dots, s_0$):

$$[u] = u(\xi_s + 0, t) - u(\xi_s - 0, t) = 0, \quad [k \partial u / \partial x] = 0. \quad (4)$$

2. Однородные разностные схемы. Перейдем к построению однородной разностной схемы с весами для задачи (1)–(3).

Пусть $\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1\}$ — произвольная неравномерная сетка на отрезке $0 \leq x \leq 1$, $\hat{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$ — равномерная сетка на отрезке $0 \leq t \leq T$, $\hat{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$ — сетка в прямоугольнике D_T . Построение однородной схемы для задачи (1)–(3) начнем с аппроксимации $Lu + f$ разностным оператором $\Lambda u + \varphi = (a(x, t) u_{\bar{x}})_{\hat{x}} + \varphi$ при фиксированном $t \in \hat{\omega}_\tau$.

Заменяя $\partial^2 u / \partial t^2|_{t=t_j} \sim u_{\bar{t}t}$, $Lu + f \sim \Lambda(t_j) u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi$, где

$$u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) u + \sigma_2 \check{u},$$

$$\Lambda(t_j) u = (a(x, t_j) u_{\bar{x}})_{\hat{x}}, \quad u = u', \quad \check{u} = u'^{-1}, \quad \hat{u} = u'^{+1},$$

получаем однородную трехслойную схему с весами

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(t_j) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi. \quad (5)$$

Коэффициент a берем на среднем слое $t = t_j$.

Подставляя в (5) $\hat{y} = y + \tau y_i + 0,5\tau^2 y_{i-1}$, $\hat{y} = y - \tau y_i + 0,5\tau^2 y_{i+1}$, где $y_i = (\hat{y} - \check{y})/(2\tau)$, $y_{i-1} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2$, получим $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau y_i + 0,5 (\sigma_1 + \sigma_2) \tau^2 y_{i-1}$, после чего запишем схему (5) в виде

$$(E - 0,5 (\sigma_1 + \sigma_2) \tau^2 \Lambda) y_{i-1} - (\sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda y_i = \Lambda y + \varphi, \quad (6)$$

где E — единичный оператор. При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ получаем симметричную схему

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{i-1} = \Lambda y + \varphi(x, t), \quad 0 < t = j\tau, \quad (7)$$

изучением которой и ограничимся.

Краевые условия и первое начальное условие удовлетворяются точно:

$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (8)$$

Второе начальное условие $\partial u / \partial t |_{t=0} = \bar{u}_0(x)$ можно аппроксимировать двумя способами. Один из способов указан в гл. II:

$$y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \text{где } \tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau (Lu_0 + f)_{t=0}. \quad (9)$$

Он имеет второй порядок аппроксимации по τ .

Второй способ состоит в том, что для определения $y(\tau)$ пишется разностное уравнение

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda(0)) y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau (\Lambda u_0 + f(x, 0)). \quad (9')$$

В результате задаче (1) — (3) ставим в соответствие однородную разностную схему, определяемую условиями (7) — (9) (или (7), (8), (9')).

Эта схема является трехслойной. Для вычисления значения $\hat{y} = y^{j+1}$ на новом слое надо знать значения y^j и y^{j-1} на двух предыдущих слоях. На каждом новом слое $t = t_{j+1}$ решается (методом прогонки) краевая задача относительно $\hat{y} = y^{j+1}$:

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) \hat{y} = F, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \hat{y}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{u}_2, \quad (10)$$

$$F(t) = 2y - \check{y} - \tau^2 \Lambda((2\sigma - 1)y - \sigma \check{y}) + \tau^2 \varphi, \quad t \geq \tau,$$

$$F(0) = u_0 + \tau^2 (0,5 - \sigma) \Lambda(0) u_0 + \tau \bar{u}_0(x) + 0,5 \tau^2 f(x, 0).$$

3. Погрешность аппроксимации. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1) — (3), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (7) — (9). Напишем, как обычно, уравнение для погрешности $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$.

Подставляя $y = z + u$ в (7) — (9), получаем

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) z_{i-1} = \Lambda z + \psi(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad z_t(x, 0) = v(x),$$

где

$$\psi(x, t) = \Lambda(t) u - u_{\bar{t}t} + \sigma \tau^2 \Lambda u_{\bar{t}t}, \quad (12)$$

$$v(x) = 0,5\tau (Lu_0 + f)_{t=0} + \bar{u}_0(x) - u_t(x, 0),$$

— погрешности аппроксимации (на решении задачи (1) — (3)) уравнения (1) и второго начального условия (2) соответственно.

Если $k(x, t)$ и $f(x, t)$ имеют конечное число неподвижных разрывов, то сетку $\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h(K)$ выбираем так, чтобы линии разрыва проходили через узлы этой сетки (ср. § 4 гл. III и п. 5 § 1 настоящей главы).

По аналогии с § 1 преобразуем выражение для ψ к виду

$$\psi = \eta_{\hat{x}} + \psi^*, \quad (13)$$

где

$$\eta_i = a_i u_{\bar{x}, i} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=1/2} + \sigma \tau^2 a_i u_{\bar{t}t\bar{x}, i} + \frac{h_i^2}{8} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right)_{t=1/2}, \quad (14)$$

$$\psi^* = O(\tau^2 + h^2). \quad (15)$$

Для этого возьмем уравнение (1) в момент $t = t_j$ и проинтегрируем его по x в пределах от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$:

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_{i+0,5}} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_{i-0,5}} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t_j) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2} dx = 0. \quad (16)$$

Разделим это тождество на \hbar_i и вычтем его из правой части формулы (12) для ψ_i :

$$\begin{aligned} \psi_i = & \left(a_i u_{\bar{x}, i} + \sigma \tau^2 a_i u_{\bar{t}t\bar{x}, i} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=1/2} \right)_{\hat{x}, i} - \\ & - u_{\bar{t}t, i} + \varphi_i - \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(f(x, t_j) - \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2} \right) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты a_i и φ_i определяются при фиксированном $t = t_j$, по формулам § 4 гл. III.

Пусть x_i — точка разрыва k и f . Возьмем простейшие формулы для a_i и φ_i :

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\hbar_i}, \quad (18)$$

где $f_i^\pm = f(x_i \pm 0)$.

Учитывая, что $\partial^2 u / \partial t^2$ непрерывна на линии $x = \xi$ разрыва функций $k(x, t)$ и $f(x, t)$, по аналогии с § 4 гл. III получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(f(x, t_j) - \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2} \right) dx = \\ = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i + \frac{1}{8} \left(h_i^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right)_{i-1/2} \right)_{\hat{x}, i} + O(h_i^2). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (17), найдем (13) — (15). Из (14) видно, что

$$\eta_i = O(h_i^2 + \tau^2), \quad \eta_{t, i} = O(h_i^2 + \tau^2). \quad (19)$$

4. Устойчивость и сходимость. Чтобы не завышать требований гладкости коэффициентов и решения при оценке порядка точности схемы (7) — (9), используем различные априорные оценки для операторно-разностной трехслойной схемы

$$\begin{aligned} Dz_{\bar{t}t} + Az = \psi(t), \quad t = j\tau > 0, \\ z(0) = 0, \quad z_t(0) = v. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь D , A — линейные операторы, заданные на гильбертовом пространстве H (см. гл. VI), $z(t)$ и $\psi(t)$ — абстрактные функции $t \in \omega_\tau$ со значениями в H , v — элемент H . В нашем случае $H = \hat{\Omega}$ — множество сеточных функций, заданных на $\hat{\omega}_h$ и обращающихся в нуль на границе, при $x = 0$ и $x = 1$. Скалярные произведения имеют вид

$$(z, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} z_i v_i h_i, \quad (z, v) = \sum_{i=1}^{N-1} z_i v_i h_i, \quad (z, v] = \sum_{i=1}^N z_i v_i h_i.$$

Будем использовать следующие нормы:

$$\|z\|_C = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |z(x)|, \quad \|z\| = \sqrt{(z, z)_*}, \quad \|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}.$$

В нашем случае операторы A и D , как показывает сравнение (7) и (20), равны

$$A = -\Lambda, \quad D = E - \sigma \tau^2 \Lambda = E + \sigma \tau^2 A.$$

Оператор A — самосопряженный и положительно определенный, $A \geqslant 2c_2 E$, для его нормы верна оценка (см. гл. II, § 4)

$$\|A\| \leqslant 4c_2/h_{\min}^2, \quad h_{\min} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i.$$

Схема (20) устойчива при условии (см. гл. VI, § 3)

$$D \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 A \quad \text{или} \quad (Dy, y) \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 (Ay, y),$$

где $\epsilon > 0$ — произвольное число, не зависящее от h .

Это условие или

$$D - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 A = E + \left(\sigma - \frac{1+\epsilon}{4} \right) \tau^2 A \geq \left(\frac{1}{\|A\|} + \left(\sigma - \frac{1+\epsilon}{4} \right) \tau^2 \right) A \geq 0$$

будет выполнено при

$$\sigma \geq \sigma_\epsilon = \frac{1+\epsilon}{4} - \frac{h_{\min}^2}{4\tau^2 c_2}.$$

В гл. VI, § 3. были получены следующие оценки для задачи (20):

$$\|z^{j+1}\|_{A(t_j)} \leq M \sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \left(\|z_t(0)\|_{D(\tau)} + \sum_{k=1}^j \tau \|\psi^k\|_{D^{-1}(t_k)} \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\|_{A(t_j)} \leq M \sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} & \left(\|z_t(0)\|_{D(\tau)} + \right. \\ & \left. + \max_{0 < k < j} (\|\psi^k\|_{A^{-1}(t_k)} + \|\psi_t^k\|_{A^{-1}(t_k)}) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Эти оценки имеют место для схемы с весами (20), если $\sigma \geq \sigma_\epsilon$ и $|a_t| \leq c_3 a$.

В § 4 гл. II для равномерной сетки были получены оценки, которые в случае неравномерной сетки принимают вид

$$\begin{aligned} \|z\|_A & \geq \sqrt{c_1} \|z_x\| > \sqrt{c_1} \|z\|_C, \\ \|\psi\|_{A^{-1}} & = \|\eta_x\|_{A^{-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{c_1}} \|\eta\|, \\ \|\psi_t\|_{A^{-1}} & \leq \frac{2}{\sqrt{c_1}} \|\eta_t\| \quad \text{при} \quad \psi = \eta_x. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как D — самосопряженный оператор и

$$D = E + \sigma \tau^2 A = E + (\sigma - \sigma_\epsilon) \tau^2 A + \sigma_\epsilon \tau^2 A \geq$$

$$\geq E + 0,5 \tau^2 A - \frac{1-\epsilon}{\|A\|} A \geq \epsilon E,$$

то

$$D^{-1} \leq \frac{1}{\epsilon} E, \quad \|\psi\|_{D^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \|\psi\|.$$

Представим решение z задачи (11) — (13) в виде $z = v + w$, где v и w удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} v_{tt} & = \Lambda v + \eta_x, \quad v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \quad v_0 = v_N = 0, \\ w_{tt} & = \Lambda w + \psi^*, \quad w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad w_0 = w_N = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (21)–(23) следуют оценки для v и w :

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 \leq k \leq j} (\|\eta^k\| + \|\eta_{\bar{t}}^k\|), \quad (21')$$

$$\|w^{j+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\|v(x)\|_D + \sum_{k=1}^j \tau \|\psi^{*k}\| \right), \quad (22')$$

где $\|v\|_D^2 = ((E + \sigma \tau^2 A)v, v)_* = \|v\|^2 + \sigma \tau^2 (a, v_x^2)$.

Теорема. Пусть $k(x, t)$ и $f(x, t)$ имеют разрывы первого рода на конечном числе прямых $x = \xi_s$, $s = 1, 2, \dots, s_0$, параллельных оси координат Ot , а в областях

$\Delta_s = (\xi_s < x < \xi_{s+1}, 0 \leq t \leq t_0)$, $s = 0, 1, \dots, s_0$, $\xi_0 = 0$, $\xi_{s_0+1} = 1$, коэффициенты $k(x, t)$, $f(x, t)$ и решение $u(x, t)$ являются столь гладкими функциями, что выполнены условия (19) и (15). Тогда, если выполнено условие (22), то схема (7)–(9) на специальных последовательностях неравномерных сеток $\hat{\omega}_h(K)$ равномерно сходится со скоростью $O(\tau^2 + h_0^2)$, так что для решения задачи (11) имеет место оценка

$$\|z^j\|_C = \|y^j - u^j\|_C \leq M(\tau^2 + h_0^2), \text{ где } h_0 = \max_{1 \leq i \leq N} h_i. \quad (25)$$

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться априорными оценками (21') и (22') для v и w и учесть соотношения (15) и (19).

Замечание. Теорема сохраняет силу, если вместо (7) взять схему

$$(E - \sigma \tau^2 \hat{\Lambda}) y_{\bar{t}, \bar{x}} = \Lambda y + \Phi, \quad (26)$$

где $\hat{\Lambda}y = y_{\bar{x}\bar{x}}$ — постоянный оператор (регуляризатор, см. гл. VI, § 3). В этом случае $A = -\Lambda$, $R = -\sigma \hat{\Lambda}$, $D = E + \tau^2 R$. Достаточное условие устойчивости (21) будет выполнено, если

$$\sigma = (1 + \varepsilon) c_2 / 4. \quad (27)$$

При оценке погрешности аппроксимации для этой схемы изменится лишь формула (14) для η ; вместо $\sigma \tau^2 a u_{\bar{t}, \bar{x}}$ надо написать $\sigma \tau^2 u_{\bar{t}, \bar{x}}$, где σ есть (27).

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В этой главе рассматриваются разностные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности и для уравнений газовой динамики. Большое внимание уделяется итерационным методам решения нелинейных разностных уравнений. Доказана сходимость метода Ньютона для неявных схем газодинамики.

§ 1. Разностные методы решения квазилинейного уравнения теплопроводности

1. Стационарная задача. Начнем с простейшей задачи, которую можно трактовать как стационарную задачу теплопроводности с нелинейными источниками

$$u'' = -f(u), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (1)$$

Введем на отрезке $0 \leq x \leq 1$ равномерную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$ и напишем разностную схему

$$y_{xx} = -f(y), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (2)$$

Для погрешности $z = y - u$ получаем задачу

$$z_{xx} + f'(y)z = -\psi, \quad x = ih, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad z_0 = z_N = 0, \quad (3)$$

где $\bar{y} = u + \theta z$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\psi = u_{xx} + f(u)$ — невязка.

Очевидно, что схема (2) имеет второй порядок аппроксимации
 $\psi = O(h^2)$.

Если $f'(y) \leq 0$, то для решения задачи (3), согласно гл. III, § 6, п. 2, справедлива оценка

$$\|z\|_C \leq \|\psi\|_C, \quad (4)$$

из которой следует, что схема (2) равномерно сходится со скоростью $O(h^2)$:

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = O(h^2).$$

Решение задачи (2) ограничено, и для него верна оценка

$$\|y\|_C \leq |f(0)| = c_0, \quad (5)$$

если $f'(y) \leq 0$. В самом деле, $f(y) = f(0) + (f(y) - f(0)) = f(0) + + f'(\bar{y})y$, где $\bar{y} = \theta y$, $0 \leq \theta \leq 1$, так что

$$y_{xx}^{k+1} + f'(\bar{y})y = -f(0), \quad y_0 = y_N = 0.$$

Отсюда в силу (4) следует (5).

Для решения нелинейного разностного уравнения (2) применим метод Ньютона

$$y_{xx}^{k+1} + f'(y) \begin{matrix} k \\ y \end{matrix} \begin{matrix} k+1 \\ y \end{matrix} = -f(y),$$

где k — номер итерации, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для определения y имеем трехточечное линейное разностное уравнение

$$y_{xx}^{k+1} + f'(y) \begin{matrix} k \\ y \end{matrix} \begin{matrix} k+1 \\ y \end{matrix} = -f(y) - f'(y) \begin{matrix} k \\ y \end{matrix}, \quad y_0 = y_N = 0, \quad (6)$$

которое решается методом прогонки; прогонка устойчива при $f'(y) \leq 0$.

Оценим скорость сходимости итераций. Введем погрешность

$$v = y - y,$$

где y — точное решение задачи (2). Подставляя $y = y + v$, $y = y + v$ в уравнение (6), получаем для v задачу

$$v_{xx}^{k+1} + f'(y) \begin{matrix} k \\ v \end{matrix} \begin{matrix} k+1 \\ v \end{matrix} = -F, \quad v_0 = v_N = 0, \quad (7)$$

$$F = f(y) - f(y) + (y - y) f'(y). \quad (8)$$

Учитывая затем разложение

$$f(y) = f(y) + f'(y) \begin{matrix} k \\ y \end{matrix} \begin{matrix} k \\ y \end{matrix} + 0,5 f''(\bar{y}) \begin{matrix} k \\ y \end{matrix} \begin{matrix} k \\ y \end{matrix}^2,$$

где $\bar{y} = y + \theta(y - y)$, $0 \leq \theta \leq 1$, — среднее значение, найдем

$$F = -\frac{f''(\bar{y})}{2} \begin{matrix} k \\ v \end{matrix}^2.$$

Таким образом, требуется оценить решение задачи

$$v_{xx}^{k+1} + f'(y) \begin{matrix} k \\ v \end{matrix} \begin{matrix} k+1 \\ v \end{matrix} = 0,5 f''(\bar{y}) \begin{matrix} k \\ v \end{matrix} \begin{matrix} k \\ v \end{matrix}^2, \quad v_0 = v_N = 0. \quad (9)$$

Если $f(y)$ — вогнутая функция, т. е.

$$f''(y) \geq 0,$$

то, в силу принципа максимума,

$$v^{k+1} = y^k - y \leq 0, \quad y \leq y^k,$$

т. е. итерации приближаются к точному решению задачи (2) снизу.

Для решения задачи (9) верна оценка

$$\|v^{k+1}\|_C \leq 0,5 \|f''(y^k)\|_C \|v^k\|_C^2, \quad (10)$$

или

$$\|v^{k+1}\|_C \leq q \|v^k\|_C^2,$$

если

$$\|f''(y^k)\|_C \leq 16q.$$

В самом деле, в силу принципа максимума (ср. гл. IV, § 2) задача (9) при $f'(y) \leq 0$ имеет мажоранту

$$V(x) = Kx(1-x), \quad \|V(x)\|_C \leq \frac{1}{4}K,$$

где $K = \frac{1}{4} \|f''(y^k)\|_C \|v^k\|_C^2$, так что

$$\|v^{k+1}\|_C \leq \|V\|_C \leq \frac{1}{16} \|f''(y^k)\|_C \|v^k\|_C^2 = q \|v^k\|_C^2.$$

Замечая, что $\|q v^k\|_C \leq \|qv^k\|_C^2 \leq \dots \leq \|qv^0\|_C^{2^k+1}$, получаем

$$\|v^{k+1}\|_C \leq \frac{1}{q} \|qv^0\|_C^{2^k+1},$$

т. е. итерации сходятся по квадратичному закону, если начальное приближение y^0 выбрано так, что

$$q \|v^0\|_C < 1, \quad \text{т. е.} \quad q \|y^0 - y\|_C < 1.$$

Если $f'(y) > -c_1$, $c_1 > 0$, то вместо (10) можно получить другую оценку в сеточной норме L_2 :

$$\|v^{k+1}\| \leq \frac{\|f''(y^k)\|_C}{2(\delta + c_1)} \|v^k\|^2 \leq \frac{q_1}{\delta + c_1} \|v^k\|^2, \quad (11)$$

где $\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$, $q_1 = 0,5 \|f''(y^k)\|_C$.

Возможны и другие итерационные методы решения задачи (2). Рассмотрим, например, метод

$$y_{\tau, v}^{k+1} = \theta y_{\tau, v}^k - (1 - \theta) f(y^k),$$

где параметр θ выбирается по формуле

$$\theta = \frac{\lambda}{\lambda+1}, \quad \lambda = \frac{c^*}{2\delta}, \quad c^* = \max_y |f'(y)|.$$

При этом итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q_2 = \theta$, так что $\|v^{k+1}\| \leq q_2 \|v^k\| \leq q_2^{k+1} \|v^0\|$.

Так как $\theta < 1$, то итерации сходятся при любом выборе начального приближения y .

2. Квазилинейное уравнение теплопроводности. В предыдущих главах мы рассматривали лишь линейное уравнение теплопроводности. Между тем для высокотемпературных процессов, протекающих, например, в плазме, коэффициент теплопроводности является нелинейной функцией температуры (и плотности), а в ряде задач, кроме того, функцией градиента температуры. Далее, источники тепла (правые части в уравнении теплопроводности) могут зависеть от температуры, если, например, тепло выделяется в результате химической реакции. От температуры может зависеть и теплоемкость среды.

Таким образом, мы приходим к нелинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi(x, t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + f(x, t, u), \quad (12)$$

где тепловой поток

$$\omega = \omega\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

— нелинейная функция температуры u и производной. Если тепловой поток линейно зависит от производной du/dx и выполнен закон Фурье

$$\omega = -k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

то мы получаем квазилинейное уравнение теплопроводности

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u), \quad (13)$$

$$c(x, t, u) > 0, \quad k(x, t, u) > 0.$$

В этом случае теплоемкость c , коэффициент теплопроводности k и правая часть f (плотность тепловых источников) зависят от температуры $u(x, t)$. В неоднородной среде k , c , f могут быть разрывными функциями x и t (для разных веществ зависимость k , c , f от температуры u может быть различной).

Типичным является случай, когда функции $k = k(u)$, $c = c(u)$, $f = f(u)$ зависят только от температуры u :

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u). \quad (14)$$

Вводя новую переменную

$$v = \int_0^u k(\xi) d\xi,$$

приведем уравнение (14) к виду

$$\frac{\partial \varphi(v)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(v),$$

где

$$\varphi(v) = \int_0^u c(\xi) d\xi.$$

Если положить

$$v = \int_0^u c(\xi) d\xi,$$

то вместо (14) получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v),$$

так что

$$\int_0^v \kappa(v) dv = \int_0^u k(u) du.$$

Весьма часто $c(u)$ и $k(u)$ являются степенными функциями температуры

$$c(u) = c_0 u^\alpha, \quad k = k_0 u^\beta.$$

Вводя в этом случае

$$v = \int_0^u c(\xi) d\xi = c_0 \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

и учитывая, что

$$k \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{c_0 u^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} u^{\beta-\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} \left(\frac{\alpha+1}{c_0} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} v^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} \frac{\partial v}{\partial x},$$

преобразуем уравнение (14) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v), \quad \sigma = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}.$$

3. Некоторые аналитические решения квазилинейного уравнения теплопроводности. Нелинейность коэффициента теплопроводности приводит к новым физическим эффектам, главный из

которых — конечная скорость распространения тепла. Убедимся в этом, найдя простейшие частные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \kappa_0 > 0, \quad \sigma > 0, \quad x > 0. \quad (15)$$

Пусть при $x = 0$ задана температура

$$u = u_0 t^n \quad (16)$$

и требуется найти решение уравнения (15) в области $x > 0, t > 0$, предполагая, что начальная температура равна нулю:

$$u(x, 0) = 0. \quad (17)$$

Будем искать решение задачи в виде бегущей волны

$$u(x, t) = U(Dt - x), \quad D = \text{const},$$

где $U(\xi)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в уравнение (15) и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{dU}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{dU}{d\xi},$$

получаем для $U(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$DU' = (\kappa_0 U^\sigma U')'.$$

Отсюда находим

$$\kappa_0 U^\sigma U' = DU + \text{const}.$$

Полагая $\text{const} = 0$, будем иметь

$$\kappa_0 U^\sigma U' = DU \quad \text{или} \quad \frac{\kappa_0 (U^\sigma)'}{D\sigma} = 1.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$\frac{\kappa_0}{D\sigma} U^\sigma = \xi + c_0.$$

Так как $U = 0$ при $t = x = 0$ ($\xi = 0$), то $c_0 = 0$,

$$u = U(\xi) = \left(\frac{D\sigma}{\kappa_0} \xi \right)^{1/\sigma} = \left(\frac{D^2 \sigma}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{Dt} \right)^{1/\sigma}.$$

Отсюда следует, что при $x = 0$

$$u(0, t) = \left(\frac{D^2 \sigma}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} t^{1/\sigma}.$$

Сравнивая с (16), находим

$$n = \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{D^2 \sigma}{\kappa_0} = u_0^\sigma.$$

Таким образом, задача (15)–(17) имеет решение в виде бегущей волны

$$u(x, t) = u_0 t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{1/\sigma} =$$

$$= \frac{u_0}{D^{1/\sigma}} (Dt - x)^{1/\sigma} \quad \text{при } 0 \leq x \leq Dt, \quad (18)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } x \geq Dt,$$

если выполнено условие $n = 1/\sigma$; при этом скорость волны определяется параметрами κ_0 , σ и u_0 :

$$D = \sqrt{\kappa_0 u_0^\sigma / \sigma}$$

и является конечной. Решение вида (18) называется *температурной волной*.

Найдем тепловой поток

$$w = -\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \kappa_0 \frac{u_0^{\sigma+1}}{\sigma D^{1+1/\sigma}} (Dt - x)^{1/\sigma} = \kappa_0 u_0^\sigma / (\sigma D) u(x, t).$$

Отсюда видно, что на фронте температурной волны $x = Dt$ температура и тепловой поток равны нулю при $\sigma > 0$, а производная

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{\sigma D^{1/\sigma}} \frac{1}{(Dt - x)^{1-1/\sigma}}$$

обращается в бесконечность при $\sigma > 1$, конечна при $\sigma = 1$ и равна нулю при $0 < \sigma < 1$.

Поэтому при $\sigma > 1$ можно говорить лишь об обобщенном решении уравнения теплопроводности (15).

Причина конечной скорости D фронта — нелинейная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Из формулы для D видно, что для линейной теплопроводности, когда $\sigma = 0$, формально получаем $D = \infty$, т. е. скорость распространения тепла бесконечна.

Возможен случай, когда температурный фронт неподвижен, т. е. $D = 0$.

Такое решение существует при специальном граничном режиме вида

$$u(0, t) = u_0 \frac{1}{(t_0 - t)^\sigma}, \quad (19)$$

где t_0 — произвольная постоянная, если предположить, что начальное условие задано при $t = -\infty$:

$$u(x, -\infty) = 0. \quad (20)$$

Будем искать решение уравнения (15) методом разделения переменных, полагая

$$u(x, t) = v(x) T(t).$$

После подстановки этого выражения в (15) и разделения переменных получим

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dx} \left(\kappa_0 v^\sigma \frac{dv}{dx} \right) = \frac{1}{T^{\sigma+1}} \frac{dT}{dt} = \lambda,$$

где λ — параметр разделения. Отсюда находим

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa_0 v^\sigma \frac{dv}{dx} \right) - \lambda v = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T^{\sigma+1}. \quad (22)$$

Будем искать решение уравнения (21) в виде

$$v^\sigma = \alpha (x_1 - x)^\beta,$$

где α и β — неизвестные пока числа, x_1 — произвольное число. Подставим v^σ в уравнение (21):

$$\kappa_0 \alpha^{1+\frac{1}{\sigma}} \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\beta}{\sigma} + \beta - 1 \right) (x_1 - x)^{\beta/\sigma + \beta - 2} - \lambda \alpha^{1/\sigma} (x_1 - x)^{\beta/\sigma} = 0.$$

Отсюда находим

$$\beta = 2, \quad \alpha = \frac{\lambda \sigma^2}{2 \kappa_0 (2 + \sigma)}.$$

Проинтегрируем теперь уравнение для T :

$$T(t) = [\sigma \lambda (c_0 - t)]^{-1/\sigma},$$

где c_0 — постоянная интегрирования.

В результате мы приходим к функции

$$u(x, t) = v(x) T(t) = \left(\frac{\alpha}{\sigma \lambda} \right)^{1/\sigma} \left[\frac{(x_1 - x)^2}{c_0 - t} \right]^{1/\sigma}.$$

Сравнивая с граничным режимом (19), находим

$$m = 1/\sigma, \quad c_0 = t_0, \quad u_0 = \left(\frac{x_1^2 \alpha}{\sigma \lambda} \right)^{1/\sigma} = \left(\frac{x_1^2 \sigma}{2 \kappa_0 (\sigma + 2)} \right)^{1/\sigma}$$

и, следовательно,

$$x_1^2 = 2 \kappa_0 (\sigma + 2) u_0^\sigma / \sigma.$$

Таким образом, уравнение (15) с граничным режимом (19) имеет решение

$$u(x, t) = u_0 \left(\frac{1 - x/x_1}{\sqrt{t_0 - t}} \right)^{2/\sigma} \quad \text{при } 0 < x < x_1, \quad (23)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } x > x_1,$$

где x_1 — ширина области прогрева.

Фронт температурной волны неподвижен, так как $x_1 = \text{const}$ не зависит от t и зависит только от параметров задачи u_0 , σ , u_0 .

На фронте тепловой поток и температура обращаются в нуль при любом $\sigma > 0$, а производная $du/dx = \infty$ при $\sigma > 2$ (на фронте бегущей волны $du/dx = \infty$ при $\sigma > 1$).

Решение (23) типа «стоячей волны» существует при $t < t_0$, что связано с типом граничного режима (19) (который называется *режимом с обострением*).

Для уравнения с тепловым источником, зависящим от температуры по степенному закону

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q_0 u^\beta, \quad (24)$$

существуют решения как типа бегущей волны (при $\beta < \sigma + 1$), так и типа стоячей волны (при $\beta = \sigma + 1$).

Численное решение таких задач по схемам сквозного счета представляет значительные трудности из-за нелинейности и обращения в бесконечность производной на фронте температурной волны. Найденные в этом пункте точные решения являются хорошими тестами для проверки точности разностных схем.

4. Разностная схема. Метод Ньютона. Переходим к написанию разностных схем для квазилинейных уравнений теплопроводности.

Использование явных схем нецелесообразно, если $k(u)$, $c(u)$, $f(u)$ являются быстременяющимися (например, степенными) функциями температуры. Условие устойчивости явной схемы

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\min c(u)}{\max k(u)}$$

требует мелкого шага по времени, определяемого часто значениями функций k , c в небольшом числе узлов. Поэтому применяются безусловно устойчивые неявные схемы.

Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad (25)$$

с краевыми условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t).$$

Для его решения используем нелинейную относительно y^{j+1} разностную схему

$$\frac{\Phi(y^{j+1}) - \Phi(y^j)}{\tau} = y_{xx}^{j+1}, \quad x = x_i = ih, \quad 0 < i < N, \quad hN = 1. \quad (26)$$

Предположим, что $\Phi'(y) \geq c_1 > 0$, $|\Phi''(y)| \leq c_2$. Тогда нетрудно убедиться в устойчивости этой схемы и сходимости в C со ско-

ростью $O(\tau + h^2)$. Однако доказательство этих фактов весьма громоздко, и мы не будем его приводить.

Для определения решения y^{j+1} на новом слое мы имеем нелинейное уравнение

$$\varphi(y^{j+1}) - \tau y_{xx}^{j+1} = \varphi(y^j).$$

Используем для его решения итерационный метод Ньютона

$$\varphi(y) + \varphi'(y) \left(\frac{y^{k+1}}{y^k} - y^k \right) - \tau y_{xx}^{k+1} = \varphi(y^k). \quad (27)$$

Для определения отсюда y^{k+1} при граничных условиях

$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad y_N^{k+1} = \mu_2(t_{j+1}) \quad (28)$$

можно пользоваться прогонкой, которая устойчива при

$$\varphi'(y) \geq 0.$$

Это видно из самого уравнения, если переписать его в виде

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{k+1} - \left(\varphi'(y_i^k) + \frac{2\tau}{h^2} \right) y_i^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{k+1} = F_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$F_i = \varphi(y) - \varphi(y^k) - \varphi'(y^k) y^k, \quad y = y^k.$$

Оценим скорость сходимости итераций. Для этого введем разность

$$v_i^{k+1} = y_i^{k+1} - \hat{y}_i,$$

где $\hat{y}_i = y_i^{j+1}$. Подставляя в (27) $y_i^k = \hat{y}_i + v_i^k$, $y_i^{k+1} = \hat{y}_i + v_i^{k+1}$, получим

$$\varphi'(y^k) v^k - \tau v_{xx}^{k+1} = \varphi(y) - \varphi(y^k) + \varphi'(y^k) v^k + \tau \hat{y}_{xx} = \\ = \varphi(\hat{y}) - \varphi(y^k) + \varphi'(y^k) (y^k - \hat{y}).$$

Учитывая затем, что

$$\varphi(\hat{y}) = \varphi(y^k) + \varphi'(y^k) (\hat{y} - y^k) + 0,5 \varphi''(\tilde{y}) (\hat{y} - y^k)^2,$$

и, следовательно,

$$\varphi(\hat{y}) - \varphi(y^k) + \varphi'(y^k) (y^k - \hat{y}) = \varphi''(\tilde{y}) v^k / 2,$$

где $\tilde{y} = y + \theta v$, $0 \leq \theta \leq 1$, приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi'(y) v^{k+1} - \tau v_{xx}^{k+1} &= \varphi''(\tilde{y}) v^k / 2 = F, \\ x = ih, \quad 0 < i < N, \end{aligned} \quad (29)$$

с однородными краевыми условиями

$$v_0^{k+1} = 0, \quad v_N^{k+1} = 0. \quad (30)$$

Пользуясь принципом максимума, получаем оценку

$$\|v\|_C^{k+1} \leq 0,5 \|\varphi''(\tilde{y}) / \varphi'(y)\|_C^k \|v\|_C^k \leq q \|v\|_C^k, \quad (31)$$

где $q = 0,5 \|\varphi''(\tilde{y}) / \varphi'(y)\|_C^k \leq 0,5 \|\varphi''(\tilde{y})\|_C / c_1 \leq 0,5 c_2 / c_1 = q_0$, так как $\varphi'(y) \geq c_1 > 0$, $|\varphi''(y)| \leq c_2$.

Отсюда следует, что для сходимости итераций по квадратичному закону достаточно, чтобы начальное приближение удовлетворяло условию

$$\|y - \hat{y}\|_C^0 < 2c_1/c_2. \quad (32)$$

Если, например, взять $\hat{y} = y = y'$, то это условие означает, что

$$\tau \|y_t\|_C < 2c_1/c_2$$

и всегда выполняется при достаточно малом τ .

При практическом использовании метода Ньютона итерации сходятся с любой заданной точностью ϵ в том случае, когда

$$\begin{aligned} \varphi(y) - y^\alpha, \quad \alpha < 1, \quad \varphi'(y) &= \alpha y^{\alpha-1}, \\ \varphi''(y) &= -\alpha(1-\alpha) y^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Если $y \geq 0$, т. е. может обращаться в нуль, то $c_2 = \infty$ и предыдущие оценки неприменимы.

Заметим, что из условия

$$\varphi''(y) < 0,$$

в силу принципа максимума, следует, что решение краевой задачи (29) — (30) неположительно:

$$v^{k+1} = y^{k+1} - \hat{y} \leq 0, \quad y^{k+1} \leq \hat{y},$$

т. е. приближение к корню происходит снизу. Поэтому, если начальное приближение $y^0 < \hat{y}$, то первая итерация $y^1 < \hat{y}$. При этом может оказаться, что $y^1 < 0$, и счет становится практически невозможным.

5. Различные неявные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим теперь два типа чисто неявных схем (схем с опережением, $\sigma = 1$) для простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (33)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t),$$

где $k(u) > 0$.

Схема а):

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(y_i). \quad (34)$$

Схема б):

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(\hat{y}_i), \quad (35)$$

где

$$\hat{y}_i = y_i^{j+1}, \quad y_i = y_i^j, \quad a_i(v) = a(v_{i-1}, v_i),$$

например,

$$a_i(v) = 0,5 [k(v_{i-1}) + k(v_i)], \quad (36)$$

$$a_i(v) = k \left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2} \right), \quad (37)$$

$$a_i(v) = \frac{2k(v_{i-1})k(v_i)}{k(v_{i-1}) + k(v_i)}. \quad (38)$$

От способа вычисления $a_i(v)$ сильно зависит точность расчета температурной волны (см. п. 6). Проведенные численные эксперименты для случая, когда $k = k_0 u^\sigma$ есть степенная функция температуры, показывают, что формулой (38) для $a_i(v)$ не следует пользоваться, а формула (36) лучше, чем (37) (по точности). Сравним схемы (34) и (35). Погрешность аппроксимации этих схем $O(\tau + h^2)$. Обе они абсолютно устойчивы. Схема а) линейна относительно значения функции y^{j+1} на слое t_{j+1} , и значения функции y^{j+1} находятся по значению функции y^j на слое t_j , например, методом прогонки. Поскольку схема а) абсолютно устойчива, шаг τ выбирается только из соображений точности. Схема б) нелинейна относительно функции y^{j+1} и для нахождения ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\frac{y^{(s+1)} - y^{(s)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}^{(s)}(y) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i^{(s)}(y) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f^{(s)}(y^{(s)}). \quad (39)$$

$(s+1)$

Относительно y разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция y предыду-

щего шага по времени: $y = y^j$. Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов k и f сходится. Практически оказывается достаточным сделать две-три итерации. Даже в том случае, если итерации не сходятся, для повышения точности схемы оказывается полезным сделать две итерации. При счете по итерационной схеме (35), (39) задают либо число итераций, либо точность сходимости итераций ε и требуют выполнения условия

$$\max_i |y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}| \leq \varepsilon.$$

Недостаток схемы (35), (39) в том, что счет итераций требует удвоения числа занимаемых в машине ячеек памяти по сравнению со схемой а), так как для вычисления y нужно (s+1) «помнить» y и y^j .

Для нахождения значения функции y^{j+1} по функции y^j при счете по схеме (35), (39) нужно сделать несколько итераций, а при счете по схеме а) значение y^{j+1} находится сразу.

Поскольку обе схемы абсолютно устойчивы и имеют одинаковый порядок аппроксимации, то казалось бы, что и в этом отношении схема а) имеет преимущество перед итерационной схемой б). Однако это не так.

Практика показала, что для получения одинаковой точности счета по схемам а) и б) схема б) позволяет использовать настолько более крупный шаг по времени, что, несмотря на необходимость итераций, это приводит к уменьшению объема вычислительной работы.

Можно использовать схемы, имеющие второй порядок аппроксимации по пространству и времени:

$$y_t = \frac{1}{2} [(a(\hat{y}) \hat{y}_{xx})_x + (a(y) y_{xx})_x] + f\left(\frac{\hat{y} - y}{2}\right).$$

Однако такие схемы имеют недостаток, они — немонотонны, что приводит часто к появлению «ряби». Для получения хороших результатов в этом случае нужно выбирать достаточно мелкий шаг по времени.

В случае уравнений (13) со слабой квазилинейностью при $k = k(x, t)$, $f = f(u)$, $c = c(x, t)$ иногда используются так называемые схемы *предиктор-корректор*, дающие точность $O(\tau^2 + h^2)$. Приведем пример такой схемы при $c = k = 1$, $f = f(u)$ (рис. 18):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y} - y}{0.5\tau} &= \bar{y}_{xx} + f(y), \quad \bar{y} = y(t_{t+1/2}), \\ \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \frac{1}{2} (\bar{y}_{xx} + y_{xx}) + f(\bar{y}). \end{aligned} \tag{40}$$

Мы не будем останавливаться на теоретическом исследовании указанных выше схем. Во-первых, это приводит к весьма громоздким вычислениям и, во-вторых, получаемые оценки весьма грубы (что, вообще говоря, типично для нелинейных задач) и дают не вполне правильное представление об условиях применимости рассмотренных разностных схем. В связи с этим заметим, что для нелинейных задач первостепенное значение для проверки качества численных методов имеют тесты, т. е. численное решение частных задач — типичных представителей класса решаемых задач, для которых известны аналитические решения.

Заметим также, что для решения задачи (35), помимо метода (39), можно применять метод Ньютона.

6. Расчет температурных волн. Рассмотрим теперь случай, когда $k(u)$ есть степенная функция температуры

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (41)$$

Как мы видели в п. 3, распространение тепла при этом происходит с конечной скоростью, причем du/dx обращается в бесконечность на фронте при $\sigma > 1$.

Для расчета температурных волн можно применять схему б), которая является схемой «сквозного счета» и не предусматривает выделения фронта волны. Проведенные расчеты задачи (15) — (17), имеющей точное решение (18), показывают, что всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного оказывалось малым (не превосходило 0,002 при числе узлов $N = 50$, $\kappa_0 = 0,5$, $\sigma = 2$, $D = 5$, число итераций не превышало 3, $t < 0,2$). При движении температурной волны (слева направо) по нулевому фону температуры происходит последовательное «включение» интервалов сетки. В зависимости от способа вычисления коэффициента $a_i(y)$ включение новых интервалов происходит по-разному. Для использования формулы (38) необходимо ставить перед фронтом отличную от нуля «фоновую» температуру и тем не менее включение новых интервалов задерживается, что приводит не только к занижению скорости волны, но и к сильному искажению решения в окрестности фронта. Формула (37) непригодна при очень больших значениях показателя σ (при $\sigma \geq 20$). Наиболее точной является формула (36), для которой не требуется ставить фоновую температуру.

На рис. 19 приведены результаты численного расчета температурной волны (18) по схеме (35) с коэффициентом (36).

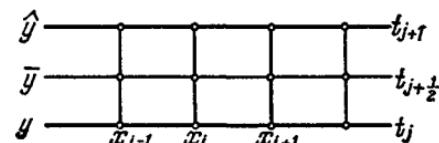


Рис. 18.

Аналитическое решение изображено сплошной кривой, результаты численного расчета отмечены крестиками.

7. Задача о фазовом переходе (задача Стефана). Пусть имеются две фазы с коэффициентами теплопроводности и теплоемкости $k_1(u)$, $k_2(u)$ и $c_1(u)$, $c_2(u)$. В каждой фазе температура удовлетворяет уравнению

$$c_s(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad s = 1, 2. \quad (42)$$

На границе раздела фаз температура постоянна и равна температуре фазового перехода, $u(x, t) = u^*$. Скорость движения

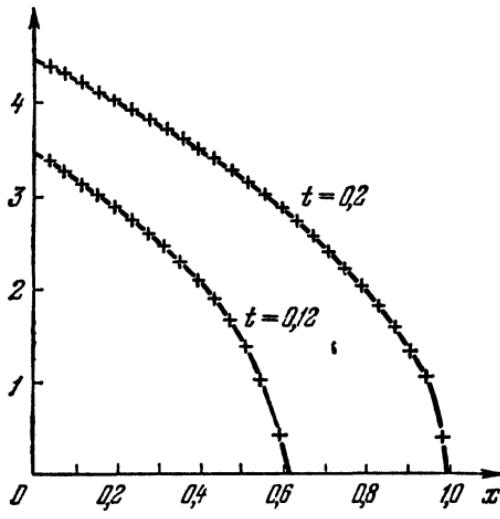


Рис. 19.

границы фазового перехода ξ удовлетворяет уравнению

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - k_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} = -\lambda \frac{d\xi}{dt},$$

если в первой фазе $u < u^*$, во второй фазе $u > u^*$.

Вводя δ -функцию, уравнение (42) (с учетом условий на границе фазового перехода) запишем в виде

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u^*)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$c(u) = \begin{cases} c_1(u), & u < u^*, \\ c_2(u), & u > u^*, \end{cases} \quad k(u) = \begin{cases} k_1(u), & u < u^*, \\ k_2(u), & u > u^*. \end{cases}$$

Для решения задачи Стефана применяется метод сглаживания: δ -функция заменяется δ -образной функцией $\delta(u - u^*, \Delta)$, отличной от нуля лишь на интервале $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ и удовле-

творящей условию нормировки

$$\int_{u^*-\Delta}^{u^*+\Delta} \delta(u-u^*, \Delta) du = 1.$$

Сглаживая на интервале $(u^*-\Delta, u^*+\Delta)$ функции $k_1(u)$, $k_2(u)$, $c_1(u)$, $c_2(u)$, получаем квазилинейное уравнение

$$\tilde{c}(u) \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{k}(u) \frac{du}{dx} \right),$$

для решения которого можно использовать описанные выше схемы. Существуют и другие численные методы решения задачи Стефана.

§ 2. Консервативные разностные схемы нестационарной газовой динамики

1. Уравнения одномерной нестационарной газовой динамики в переменных Лагранжа. Многие процессы механики и физики приводят к уравнениям газовой динамики. Это—задачи аэродинамики летательных аппаратов, теории реактивных двигателей, астрофизики, задачи, связанные с проблемой управляемого термоядерного синтеза и многие другие.

Уравнения газовой динамики нелинейны, и для их решения универсальным методом является разностный метод.

Хотя задачи газовой динамики решаются давно и повсеместно, однако до сих пор нет строгих математических результатов о сходимости какой-либо схемы даже в простейшей ситуации. Качества схем проверяются на линейных моделях в акустическом приближении, на тестах, т. е. путем решения частных задач, решение которых может быть выписано в явном виде.

Решения уравнений газовой динамики, как правило, разрывны—это либо слабые разрывы (например, «волна разрежения»), либо сильные разрывы (ударные волны). Поэтому принцип сгущения сеток для проверки точности численного метода, имея в виду пример из гл. III, § 2, п. 1, следует применять с большой осторожностью.

Мы будем в этом параграфе рассматривать разностные методы численного решения простейших задач газодинамики.

Рассмотрим задачу об одномерном неустановившемся (нестационарном) плоском течении газа. Пусть v —скорость, ρ —плотность, T —температура, p —давление, ϵ —внутренняя энергия (единицы массы) газа.

Напишем уравнения движения газа (уравнения газодинамики), выражающие законы сохранения импульса, массы и энергии. Их можно записать в переменных Эйлера (x, t) и

в переменных Лагранжа (s, t), где x — координата частицы, s — начальная координата частицы или же величина

$$s = \int_0^x \rho(\xi, 0) d\xi,$$

т. е. величина массы, находящейся в объеме $0 \leq \xi \leq x$. Система уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа (s, t) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial s} \quad (\text{закон сохранения импульса}), \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial s} \quad (\text{закон сохранения массы}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (pv) - \frac{\partial w}{\partial s}, \quad (\text{закон сохранения энергии}), \quad (4)$$

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T) \quad (\text{уравнения состояния}), \quad (5)$$

где w — поток тепла.

Из второго и третьего уравнений следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (6)$$

При этом уравнение (2) можно исключить из системы, так как оно может быть проинтегрировано отдельно.

Чтобы замкнуть систему этих уравнений, надо написать выражение для теплового потока

$$w = -\kappa(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (7)$$

где $\kappa = \kappa(\rho, T)$ — коэффициент теплопроводности. Обычно κ есть степенная функция T и ρ .

Функции $\rho(\rho, T)$, $\varepsilon(\rho, T)$ и $\kappa(\rho, T)$ должны быть заданы.

Для идеального газа уравнения состояния имеют вид $p = R\rho T$, $\varepsilon = \varepsilon(T)$, например, $\varepsilon = c_v T$, где R и c_v — постоянные, $R/c_v = \gamma - 1$, γ — постоянная, так что

$$\varepsilon = p/((\gamma - 1)\rho). \quad (8)$$

Отметим два предельных случая.

а) Адиабатическое течение, когда

$$w = 0,$$

т. е. теплопроводностью можно пренебречь, положив $\kappa = 0$.

Перепишем уравнения газодинамики (1), (6), (4) для адиабатического течения идеального газа

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (pv). \quad (10)$$

Добавим сюда уравнение (8)

$$\epsilon = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho}. \quad (11)$$

Таким образом, имеем 4 уравнения для четырех неизвестных v , p , ρ , ϵ .

Мы будем пользоваться вместо плотности ρ удельным объемом $\eta = 1/\rho$.

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (12)$$

$$p\eta = (\gamma - 1)\epsilon. \quad (13)$$

Уравнение (10) для полной энергии можно заменить одним из уравнений

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (15)$$

В самом деле, учитывая первое уравнение (9) и (12), получим

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (pv) = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \left(v \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial s} \right) + p \frac{\partial v}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + p \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

б) Изотермическое течение газа, когда температура газа $T = \text{const}$ и уравнение энергии отсутствует. Условие $T = \text{const}$ соответствует случаю $\kappa \rightarrow \infty$. Система уравнений газодинамики для изотермического течения идеального газа принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad p = c^2 \rho, \quad (16)$$

где $c = \text{const} > 0$ — скорость звука, или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad p\eta = c^2. \quad (17)$$

В дальнейшем мы проведем основное изложение для уравнений газодинамики идеального газа в адиабатическом случае (9), (10) и (11).

К уравнениям (9), (10) следует присоединить начальные условия для всех искомых функций, т. е. задать

$$v(x, 0), \quad \rho(x, 0), \quad p(x, 0) \quad (18)$$

и краевые условия, например, вида

$$p(0, t) = p_0(t) \quad \text{при } s=0, \quad p(M, t) = p_1(t) \quad \text{при } s=M \quad (19)$$

или

$$v(0, t) = v_0(t) \quad \text{при } s=0, \quad p(M, t) = p_1(t) \quad \text{при } s=M. \quad (19')$$

Перейдем теперь к построению разностных схем для уравнений газодинамики (9), (10) в области $0 \leq s \leq M, t \geq 0$.

2. Уравнения с псевдовязкостью. К разностным схемам газовой динамики предъявляются прежде всего требования однородности и консервативности. Однородность схемы означает, что разностные уравнения записываются одинаково во всех узлах сетки независимо от того, является ли решение разрывным или гладким, так что вычисления всегда и всюду ведутся по одним и тем же формулам. Однородные схемы или схемы сквозного счета в газодинамике содержат дополнительные члены с псевдовязкостью, которые вводятся для того, чтобы «размазывать» фронт ударной волны на несколько интервалов сетки.

Формально псевдовязкость ω вводится как дополнительное слагаемое к давлению p , так что в уравнения (9), (10) вместо p входит сумма

$$g = p + \omega,$$

где «вязкое» давление $\omega = \omega(\rho, v_s, h)$ зависит от ρ, v_s и от шага сетки h . Обычно рассматривается два типа вязкости:

a) линейная вязкость

$$\omega = -\frac{v_0 h \rho}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right| \right), \quad (20)$$

б) квадратичная вязкость или вязкость Неймана

$$\omega = \frac{v_0}{2} h^2 \rho \frac{\partial v}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right| \right), \quad (21)$$

где v_0 — коэффициент вязкости.

Отсюда видно, что функция

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial v}{\partial s} > 0$$

и отлична от нуля при $\partial v / \partial s < 0$, т. е. в зоне ударной волны.

Таким образом, псевдовязкость действует лишь в зоне ударной волны.

В дальнейшем будем писать

$$\omega = -\frac{v}{\eta} \frac{\partial v}{\partial s}$$

или

$$\omega = \frac{v}{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2,$$

предполагая, что коэффициент вязкости зависит от знака $\partial v / \partial s$, так что $v \equiv 0$ при $\partial v / \partial s > 0$.

3. Консервативные однородные схемы. Введение псевдовязкости делает возможным построение однородных разностных схем или схем сквозного счета, пригодных для расчета газодинамических движений при наличии ударных волн. Так как уравнения газодинамики выражают законы сохранения импульса, массы и энергии, то естественно требовать, чтобы и разностные уравнения выражали соответствующие аналоги законов сохранения на сетке, т. е. разностные схемы были консервативными.

Для получения консервативных схем будем исходить из уравнений газодинамики, записанных в интегральной форме (т. е. воспользуемся интегро-интерполяционным методом (ИИМ)):

$$\oint (v \, ds - p \, dt) = 0, \quad (22)$$

$$\oint (\eta \, ds + v \, dt) = 0, \quad (23)$$

$$\oint ((\varepsilon + 0,5v^2) \, ds - pv \, dt) = 0, \quad (24)$$

где интегрирование проводится по любой замкнутой кривой в плоскости (s, t) .

Выберем сетку

$$\bar{\omega}_h = \{s_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = M\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0, j_0\tau = t_0\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau.$$

Для удобства изложения сохраним обозначения v, η, p, ε при переходе к разностным уравнениям.

Будем относить функцию v к целым точкам $s = s_i$ сетки ω_h , а p, η, ε — к полуцелым точкам $s = s_{i+0,5}$.

Напишем уравнение (22) для прямоугольника $s_{i-1/2} \leq s \leq s_{i+1/2}$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} (v^{j+1} - v^j) \, ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) \, dt = 0,$$

а уравнения (23) и (24) — для прямоугольника $s_i \leq s \leq s_{i+1}$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} (\eta^{j+1} - \eta^j) ds - \int_{t_j}^{t_{j+1}} (v_{i+1} - v_i) dt = 0,$$

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} [(e + 0,5v^2)^{j+1} - (e + 0,5v^2)^j] ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} [(pv)_{i+1} - (pv)_i] dt = 0.$$

Заменим входящие в эти тождества интегралы выражениями

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} p dt \approx p^{(\sigma_1)} \tau, \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} v dt \approx v^{(\sigma_2)} \tau, \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} (pv)_i dt = p_{*i}^{(\sigma_3)} v_i^{(\sigma_4)} \tau,$$

где $f^{(\sigma_\alpha)} = \sigma_\alpha f^{j+1} + (1 - \sigma_\alpha) f^j$, σ_α — произвольный параметр, $p_{*i} = 0,5(p_{i-1/2} + p_{i+1/2})$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и далее:

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} v ds \approx v_i h, \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \eta ds \approx \eta_{i+1/2} h \text{ и т. д.}$$

В результате получим разностную схему

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} + \left(\frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{h} \right)^{(\sigma_1)} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_{i+1/2}^j}{\tau} = \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^{(\sigma_2)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left[\left(e_{i+1/2} + \frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{4} \right)^{j+1} - \left(e_{i+1/2} + \frac{v_i^2 + v_{i+1}^2}{4} \right)^j \right] = \\ = \frac{p_{*i+1}^{(\sigma_3)} v_{i+1}^{(\sigma_4)} - p_{*i}^{(\sigma_3)} v_i^{(\sigma_4)}}{h}. \end{aligned} \quad (27)$$

Это — консервативная схема при любых значениях параметров $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. В частности, при $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1$ получаем систему разностных уравнений, которая может быть решена по явным формулам: сначала находим v_i^{j+1} , затем $\eta_{i+1/2}^{j+1}$, а из уравнения энергии и уравнения состояния

$$p\eta = (\gamma - 1) e$$

определяем по формулам прогонки $p_{i+1/2}$, для всех $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, если при $i=0$ и $i=N-1$ заданы краевые условия, например, полученные из формул (19).

Оказалось, что консервативные разностные схемы, аппроксимирующие уравнения полной энергии, могут плохо аппрокси-

мировать уравнение для внутренней энергии (14):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Этот дефект весьма опасен, так как может приводить к неправильному счету температуры. Возникающий дисбаланс внутренней энергии не может быть уничтожен сгущением сетки по пространственной переменной s . Наличие в схеме энергетических дисбалансов можно трактовать как наличие некоторых источников энергии чисто разностной природы, связанных с «рассогласованием» отдельных разностных уравнений схемы. Дисбалансы зависят от характера решения: на гладких функциях они малы, однако на решениях, сильно меняющихся во времени и пространстве, дисбалансные члены велики и могут быть сравнимы по величине с полной энергией системы.

4. Полностью консервативные схемы. Потребуем теперь, чтобы для разностной схемы выполнялись не только законы сохранения массы, импульса и полной энергии, но и детальный баланс энергии — кинетической и внутренней.

Схемы, обладающие этими свойствами, назовем полностью консервативными схемами.

Требование полной консервативности фактически эквивалентно требованию, чтобы консервативная схема аппроксимировала также и уравнения (14) и (15):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Для удобства записи обозначим

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= p_{i+1/2}, \quad \bar{\eta}_i = \eta_{i+1/2}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1/2}, \\ \bar{p} &= \bar{p}_i^l, \quad v = v_i^l \text{ и т. д.}, \\ \frac{1}{h} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) &= \bar{p}_s, \quad \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = v_s, \end{aligned}$$

после чего будем опускать черту сверху над p , η и ε в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Тогда уравнения (25) и (26) примут вид

$$v_t = -p_s^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = v_s^{(\sigma_2)}. \quad (28)$$

Вместо (27) рассмотрим схему, аппроксимирующую уравнение для внутренней энергии (14), а именно,

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_3)} v_s^{(\sigma_4)}, \quad (29)$$

В результате мы получили 4-параметрическое семейство схем (28), (29). Будем в этом семействе искать полностью консервативные схемы.

тивную схему. Для этого надо потребовать, чтобы схема (28), (29) аппроксимировала уравнения (15) и (10).

Нам понадобится очевидная формула

$$f^{(\beta)} = f^{(\alpha)} + \tau(\beta - \alpha) f_t, \quad (30)$$

где α и β — любые числа, $f^{(\alpha)} = \alpha \dot{f} + (1 - \alpha) f$.

Из уравнений $\eta_t = v_s^{(\sigma_2)}$ и $v_s^{(\sigma_4)} = v_s^{(\sigma_2)} + \tau(\sigma_4 - \sigma_2) v_{st} = \eta_t + \tau(\sigma_4 - \sigma_2) v_{st}$ следует

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_2)} \eta_t + \delta_1 E, \quad (31)$$

где $\delta_1 E = -\tau(\sigma_4 - \sigma_2) p^{(\sigma_2)} v_{st}$ — величина дисбаланса. Отсюда видно, что (31) соответствует «энтропийному» уравнению (15) только при

$$\sigma_4 = \sigma_2.$$

Потребуем теперь, чтобы схема (28), (29) была консервативной. Умножая уравнение $v_t = -p_s^{(\sigma_1)}$ на $v^{(0,5)} = 0,5(v + \dot{v})$, получим

$$\frac{1}{2} (v^2)_t = -v^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)}, \quad (32)$$

после чего сложим это уравнение с уравнением (29):

$$(e + 0,5v^2)_t = -p_s^{(\sigma_2)} v_s^{(\sigma_4)} - v^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)}. \quad (33)$$

Преобразуем правую часть (33) при помощи формулы (30):

$$\begin{aligned} p_s^{(\sigma_2)} v_s^{(\sigma_4)} + v^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)} &= \\ &= (p^{(\sigma_1)} + \tau(\sigma_3 - \sigma_1) p_t) (v_s^{(0,5)} + \tau(\sigma_4 - 0,5) v_{st}) + v^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)} = \\ &= (p_{(-1)}^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_s + \delta_2 E, \end{aligned} \quad (34)$$

где $p_{(-1)} = \bar{p}_{i-1} = p_{i-1/2}$,

$$\begin{aligned} \delta_2 E &= \tau(\sigma_3 - \sigma_1) v_s^{(0,5)} p_t + \tau(\sigma_4 - 0,5) p_s^{(\sigma_1)} v_{st} + \\ &\quad + \tau^2 (\sigma_3 - \sigma_1) (\sigma_4 - 0,5) p_t v_{st}. \end{aligned}$$

В результате уравнение (33) преобразуется к виду

$$(e + 0,5v^2)_t = - (p_{(-1)}^{(\sigma_1)} v^{(0,5)})_s - \delta_2 E. \quad (35)$$

Здесь $\delta_2 E$ означает дисбаланс полной энергии. Требуя, чтобы $\delta_2 E = 0$ при любых p и v , находим

$$\sigma_3 = \sigma_1, \quad \sigma_4 = 0,5$$

и, следовательно,

$$\sigma_2 = 0,5.$$

Таким образом, мы получили однопараметрическое семейство полностью консервативных схем

$$v_t = -p_s^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = v_s^{(0,5)}, \quad \epsilon_t = -p_s^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)}, \quad (36)$$

Третье уравнение, очевидно, можно заменить одним из уравнений

$$\epsilon_t = -p_s^{(\sigma_1)} \eta_t, \quad (37)$$

$$(\epsilon + 0,5v^2)_t = - (p_s^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)})_s. \quad (38)$$

Отметим, что вместо последнего уравнения можно написать одно из уравнений

$$(\epsilon + 0,5v_{(+1)}^2)_t = - (p_s^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)})_s, \quad (39)$$

$$(\epsilon + (v^2 + v_{(+1)}^2)/4)_t = - (p_s^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)})_s. \quad (40)$$

Чтобы получить (39), надо в предыдущих рассуждениях уравнение (32) взять в $(i+1)$ -м узле:

$$0,5(v_{i+1}^2)_t = -v_{i+1}^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)} \quad \text{или} \quad 0,5(v_{(+1)}^2)_t = -v_{(+1)}^{(0,5)} p_s^{(\sigma_1)}. \quad (41)$$

Из (38) и (39) непосредственно следует (40).

Из сравнения (40) и (27) видно, что найденное нами семейство полностью консервативных схем содержится в семействе (25)–(27) консервативных схем с четырьмя параметрами, построенным при помощи ИИМ.

Очевидно, что схема (36) при любом σ_1 имеет аппроксимацию $O(\tau + h^2)$, а при $\sigma_1 = 0,5$ – аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, т. е. только одна схема (36) имеет второй порядок аппроксимации по τ :

$$v_t = -p_s^{(0,5)}, \quad \eta_t = v_s^{(0,5)}, \quad \epsilon_t = -p_s^{(0,5)} v_s^{(0,5)}. \quad (42)$$

Учет псевдовязкости не представляет труда: достаточно всюду в (36) заменить давление p выражением $g = p + \omega$:

$$v_t = -g_s^{(\sigma_1)}, \quad \eta_t = v_s^{(0,5)}, \quad \epsilon_t = -g_s^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)}, \quad g = p + \omega. \quad (43)$$

В случае идеального газа и линейной вязкости будем иметь

$$p\eta = (\gamma - 1)\epsilon, \quad \omega = -\frac{v}{\eta} v_s. \quad (44)$$

К этим уравнениям надо присоединить краевые условия при $i=0$ и $i=N$.

Если, например, задано давление p_0^j и p_N^j , то уравнение движения для v_i^j надо писать и при $i=0, i=N$:

$$\frac{v_0^{j+1} - v_0^j}{\tau} = - \left(\frac{p_0 - p_{1/2}}{0,5h} \right)^{(\sigma_1)}, \quad \frac{v_N^{j+1} - v_N^j}{\tau} = - \left(\frac{p_N - p_{N-1/2}}{0,5h} \right)^{(\sigma_1)}.$$

Отсюда находятся v_t^{j+1} и v_N^{j+1} . Остальные величины η , ϵ , p определяются только во внутренних полуцелых точках $s_{1/2}$, $s_{3/2}$, \dots , $\dots, s_{N-1/2}$.

Примером неконсервативной схемы может служить схема «крест», весьма распространенная в свое время. Она пишется на «шахматной» сетке. Величины ϵ , p , η относятся к нецелым узлам $(s_{i+1/2}, t_{j+1/2})$, а v и x — к целым узлам (s_i, t_j) .

Схема «крест» имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{v_t^{j+1} - v_t^j}{\tau} &= -\frac{p_{t+1/2}^{j+1/2} - p_{t-1/2}^{j+1/2}}{h}, \\ \frac{\eta_{t+1/2}^{j+3/2} - \eta_{t+1/2}^{j-1/2}}{\tau} &= \frac{v_{t+1}^{j+1} - v_t^{j+1}}{h}, \\ \frac{\epsilon_{t+1/2}^{j+3/2} - \epsilon_{t+1/2}^{j+1/2}}{\tau} &= -p_{t+1/2}^{j+3/2} \frac{v_{t+1}^{j+1} - v_t^{j+1}}{h}.\end{aligned}$$

Если воспользоваться обозначениями $p_{t+1/2}^{j+1/2} = \bar{p}_t^j = \bar{p}$, $\eta_{t+1/2}^{j+3/2} = \bar{\eta}_t^{j+1} = \hat{\eta}$ и т. д., то можно записать эти уравнения короче:

$$v_t = -\bar{p}_s, \quad \bar{\eta}_t = \hat{v}_s, \quad \bar{\epsilon}_t = -\hat{p}\hat{v}_s. \quad (45)$$

Величины на новом слое здесь находятся по явным формулам.

Умножая $v_t = -\bar{p}_s$ на $v^{(0,5)}$ и повторяя проведенные выше рассуждения, получаем

$$(\bar{\epsilon} + 0,5v^2)_t = -(\bar{\rho}_{(-1)}v^{(0,5)})_s - \delta E,$$

где $\delta E = \tau p_t v^{(0,5)} + 0,5\tau p v_{st} + 0,5\tau^2 p_t v_{st}$, т. е. схема (45) неконсервативна.

5. Решение разностных уравнений методом Ньютона. Для определения значений v'^{j+1} , g'^{j+1} , η'^{j+1} на новом слое мы получаем при $\sigma_1 \neq 0$ систему нелинейных уравнений. Для их решения воспользуемся методом Ньютона. Запишем сначала уравнения (43) — (44) в виде

$$\hat{v} + \sigma_1 \tau \hat{g}_s = v - (1 - \sigma_1) \tau g_s,$$

$$\hat{\eta} - 0,5 \tau \hat{v}_s = \eta + 0,5 \tau v_s,$$

$$\hat{\epsilon} + \sigma_1 \hat{g}(\hat{\eta} - \eta) + (1 - \sigma_1) g \hat{\eta} = \epsilon + (1 - \sigma_1) g \eta,$$

$$\hat{g} \hat{\eta} - \hat{\epsilon}(\gamma - 1) + v \hat{v}_s = 0.$$

Пользуясь методом Ньютона, получим

$$\Delta^{k+1} v + \sigma_1 \tau \Delta^{k+1} g_s = f_1, \quad \Delta^{k+1} \eta - 0,5 \tau \Delta^{k+1} v_s = f_2, \quad (46)$$

$$\Delta^{k+1} \varepsilon + g^{(\sigma_1)} \Delta^{k+1} \eta + \sigma_1 (\eta - \eta) \Delta^{k+1} g = f_3, \quad (47)$$

$$-\Delta^{k+1} \varepsilon + ag \Delta^{k+1} \eta + a \eta \Delta^{k+1} g + av \Delta^{k+1} v_s = f_4, \quad (48)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a = 1/(\gamma - 1)$, $\hat{f}_1 = \hat{f}_2 = 0$ при $k > 0$,

$$\hat{f}_1 = v - \dot{v} - (1 - \sigma_1) \tau g_s - \sigma_1 \tau \dot{g}_s,$$

$$\hat{f}_2 = \eta - \dot{\eta} + 0,5 \tau (v_s + \dot{v}_s),$$

$$\hat{f}_3 = -\varepsilon + \varepsilon - g^{(\sigma_1)} (\eta - \eta), \quad g^{(\sigma_1)} = \sigma_1 g + (1 - \sigma_1) g,$$

$$\hat{f}_4 = \varepsilon - ag \eta - av v_s, \quad \Delta^{k+1} v = v - v, \quad \Delta^{k+1} \eta = \eta - \eta \text{ и т. д.}$$

Исключая отсюда $\Delta^{k+1} \varepsilon$, $\Delta^{k+1} \eta$, $\Delta^{k+1} v$, получим для определения $y = \Delta^{k+1} g$ трехточечное разностное уравнение

$$(\sigma_1 (\eta - \eta) + a \eta) y - \sigma_1 [(g^{(\sigma_1)} + ag) 0,5 \tau + av] y_s = F$$

(здесь F выражается через \hat{f}_1 , \hat{f}_2 , \hat{f}_3 и \hat{f}_4), которое решается методом прогонки.

Зная $\Delta^{k+1} g = y$, находим $\Delta^{k+1} v$, $\Delta^{k+1} \eta$, $\Delta^{k+1} \varepsilon$, а затем $g = \Delta^{k+1} g + g$, $v = \Delta^{k+1} v + v$ и т. д.

6. Сходимость итерационного метода. Перейдем к изучению сходимости описанного выше метода Ньютона.

Будем оценивать разности

$$\delta g = g - \hat{g}, \quad \delta \eta = \eta - \hat{\eta}, \quad \delta v = v - \hat{v},$$

где \hat{g} , $\hat{\eta}$, \hat{v} —точные решения уравнений (43). Напишем уравнение для этих разностей.

В силу линейности уравнений (46) сразу получим однородные уравнения

$$\delta^{k+1} v = -\sigma_1 \tau \delta^{k+1} g_s, \quad \delta^{k+1} \eta = 0,5 \tau \delta^{k+1} v_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

В уравнения (47) и (48) подставим

$$\Delta^{k+1} \varepsilon = \delta^{k+1} \varepsilon - \delta \varepsilon, \quad \Delta^{k+1} \eta = \delta^{k+1} \eta - \delta \eta, \quad \Delta^{k+1} v = \delta^{k+1} v - \delta v,$$

$$\Delta^{k+1} g = \delta^{k+1} g - \delta g.$$

Преобразуем сначала (47):

$$\begin{aligned} \delta \overset{k+1}{e} + \overset{k}{g}(\sigma_1) \overset{k+1}{\delta \eta} + \sigma_1 \overset{k}{(\eta - \eta)} \overset{k+1}{\delta g} &= F_3, \\ F_3 = \overset{k}{g}(\sigma_1) \overset{k}{\delta \eta} + \overset{k}{\delta e} + \sigma_1 \overset{k}{(\eta - \eta)} \overset{k}{\delta g} - & \\ - [\overset{k}{\delta e} + (\overset{k}{\hat{e}} - \overset{k}{e}) + (\sigma_1 \overset{k}{\delta g} + \overset{k}{g}(\sigma_1)) (\overset{k}{\delta \eta} + \overset{k}{\hat{\eta}} - \overset{k}{\eta})] &= \\ = \sigma_1 \overset{k}{(\eta - \eta)} \overset{k}{\delta g} - \sigma_1 \overset{k}{(\hat{\eta} - \eta)} \overset{k}{\delta g} - [(\overset{k}{\hat{e}} - \overset{k}{e}) + \overset{k}{g}(\sigma_1) (\overset{k}{\hat{\eta}} - \overset{k}{\eta})] &= \sigma_1 \overset{k}{\delta \eta} \overset{k}{\delta g}, \end{aligned}$$

так как $\overset{k}{\hat{e}} - \overset{k}{e} + \overset{k}{g}(\sigma_1) (\overset{k}{\hat{\eta}} - \overset{k}{\eta}) = 0$ согласно (43). Таким образом,

$$\overset{k+1}{\delta e} + \overset{k}{g}(\sigma_1) \overset{k+1}{\delta \eta} + \sigma_1 \overset{k}{(\eta - \eta)} \overset{k+1}{\delta g} = \sigma_1 \overset{k}{\delta \eta} \overset{k}{\delta g}. \quad (50)$$

Уравнение (48) преобразуем к виду

$$-\overset{k+1}{\delta e} + \overset{k}{a} \overset{k+1}{g \delta \eta} + \overset{k}{a \eta} \overset{k+1}{\delta g} + \overset{k}{a v} \overset{k+1}{\delta v_s} = \overset{k}{a \delta \eta} \overset{k}{\delta g}. \quad (51)$$

В самом деле, из (48) следует

$$\begin{aligned} 0 = -(\overset{k+1}{\delta e} - \overset{k}{\delta e}) + \overset{k}{a g} (\overset{k}{\delta \eta} - \overset{k}{\delta \eta}) + \overset{k}{a \eta} (\overset{k}{\delta g} - \overset{k}{\delta g}) + & \\ + \overset{k}{a v} (\overset{k}{\delta v_s} - \overset{k}{\delta v_s}) - (\overset{k}{\delta e} + \overset{k}{\hat{e}} - \overset{k}{a g \eta} - \overset{k}{a v v_s}) = & \\ = [-\overset{k+1}{\delta e} + \overset{k}{a g \delta \eta} + \overset{k}{a \eta \delta g} + \overset{k}{a v \delta v_s}] - F_4, & \end{aligned}$$

где

$$F_4 = \overset{k}{a g \delta \eta} + \overset{k}{a \eta \delta g} + \overset{k}{a v \delta v_s} + \overset{k}{\hat{e}} - \overset{k}{a g \eta} - \overset{k}{a v v_s}.$$

Подставляя сюда $\overset{k}{\hat{e}} = \overset{k}{a g \eta} + \overset{k}{a v v_s}$, находим $F_4 = \overset{k}{a \delta \eta \delta g}$.

Исключим из (50) и (51) $\overset{k}{\delta e}$:

$$(\overset{k}{a g} + \overset{k}{g}(\sigma_1)) \overset{k+1}{\delta \eta} + ((\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\eta} - \overset{k}{\sigma_1 \eta}) \overset{k+1}{\delta g} + \overset{k}{a v} \overset{k+1}{\delta v_s} = (\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\delta \eta \delta g}. \quad (52)$$

После подстановки сюда $\overset{k+1}{\delta v_s} = -\overset{k}{\sigma_1 \tau} \overset{k+1}{\delta g}$, $\overset{k}{\delta \eta} = 0,5 \tau \overset{k+1}{\delta v_s}$ получаем

$$\overset{k+1}{\delta g} - \alpha_k \overset{k+1}{\delta g_{ss}} = q_k \overset{k}{\delta g}, \quad q_k = \frac{(\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\delta \eta}}{(\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\eta} - \overset{k}{\sigma_1 \eta}}, \quad (53)$$

где

$$\alpha_k = \overset{k}{\sigma_1 \tau} [(\overset{k}{a v} + 0,5 \tau (\overset{k}{a g} + \overset{k}{g}(\sigma_1)))] / [(\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\eta} - \overset{k}{\sigma_1 \eta}] \geq 0.$$

При этом предполагается, что $(\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}) \overset{k}{\eta} - \overset{k}{\sigma_1 \eta} > 0$, т. е.

$$\overset{k}{\eta} > \frac{\overset{k}{\sigma_1}}{\overset{k}{a} + \overset{k}{\sigma_1}} \overset{k}{\eta} \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots \quad (54)$$

Если при $i=0$ и $i=N$ задано давление, то краевые условия для δg^k , очевидно, являются однородными

$$\delta g_0^k = 0, \quad \delta g_N^k = 0. \quad (55)$$

Записывая уравнение (53) относительно $\delta g^k(s_i)$ в каноническом виде

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P),$$

убеждаемся в том, что

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0,$$

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q) = 1,$$

т. е. условия применимости принципа максимума (см. § 2 гл. IV) выполнены и для уравнения (53) с однородными краевыми условиями (55) справедлива оценка

$$\|\delta g^k\|_C \leq |q_k| \|\delta g^k\|_C. \quad (56)$$

Отсюда видно, что итерации сходятся, если

$$|q_k| \leq q < 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (57)$$

или

$$\frac{|\hat{\eta} - \hat{\eta}|}{\frac{k}{\eta} - b\eta} \leq q, \quad b = \frac{\sigma_1}{a + \sigma_1}.$$

Это эквивалентно неравенствам

$$\frac{\hat{\eta} + b\eta\eta}{1+q} \leq \eta \leq \frac{\hat{\eta} - b\eta\eta}{1-q}, \quad \hat{\eta} > b\eta\eta, \quad (58)$$

которые накладывают ограничения на шаг по времени в зависимости от скорости изменения удельного объема η (или плотности $\rho = 1/\eta$).

Полагая $k=0$ и выбирая $\hat{\eta}^0 = \eta$, получим $\frac{1}{\eta} |\hat{\eta} - \eta| \leq q(1-b)$ или

$$(1 - q(1-b))\eta \leq \hat{\eta} \leq (1 + q(1-b))\eta. \quad (59)$$

Если рассматривается изотермическое течение идеального газа (17), то схема (43) упрощается (исчезает уравнение энергии, так как $T = \text{const}$). Итерационный процесс строится аналогично адиабатическому случаю, сходимость его доказывается

так же. Для изотермического случая $\gamma=1$, $a=\infty$, $b=0$, так что вместо (59) будем иметь

$$\frac{\hat{\eta}}{1+q} \leq \hat{\eta} \leq \frac{\hat{\eta}}{1-q} \quad \text{и} \quad \frac{|\hat{\eta}-\eta|}{\eta} \leq q.$$

Если выполнены условия (57), то

$$\|\delta g\|_c^{k+1} \leq q \|\delta g\|_c^0, \quad q \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е. итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии.

Численные расчеты, проведенные для ударной волны при $\gamma=5/3$ ($a=1,5$), показывают, что итерации по методу Ньютона сходятся даже при настолько крупном шаге τ , что за один шаг τ ударная волна проходит два-три интервала сетки ω_h . Такой шаг, конечно, недопустим из-за соображений точности. Таким образом, ограничения на шаг τ связаны с требованиями точности, а не сходимости итераций.

7. Уравнения газодинамики с теплопроводностью. Рассмотрим теперь задачу о течении газа при наличии теплопроводности.

Система дифференциальных уравнений для идеального газа в переменных Лагранжа (s, t), согласно (1)–(7), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial g}{\partial s}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \omega}{\partial s}, \\ p\eta &= RT, \quad \epsilon = c_v T, \quad \omega = \omega(\eta, v_s, v), \\ \omega &= -\kappa(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial s} \text{ — тепловой поток, } g = p + \omega. \end{aligned}$$

Нетрудно написать полностью консервативную схему для этой системы уравнений:

$$\begin{aligned} v_t &= -g_s^{(\alpha)}, \quad \eta_t = v_s^{(0,5)}, \\ \epsilon_t &= -g^{(\alpha)} v_s^{(0,5)} - \omega_s^{(\beta)}, \\ \omega &= -kT_s, \quad g = p + \omega, \quad \omega = \omega(\eta, v_s, v), \\ p &= RT/\eta, \quad \epsilon = c_v T, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$k = k_i = \kappa(0,5(\eta_{i-0,5} + \eta_{i+0,5}), 0,5(T_{i-0,5} + T_{i+0,5})).$$

Здесь $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — произвольные числа.

Нелинейные разностные уравнения на новом слое и здесь можно решать методом Ньютона, однако в этом случае приходится применять алгоритм матричной прогонки для системы двух трехточечных уравнений (см. § 1 гл. X).

Для упрощения алгоритма применяется метод раздельных или последовательных прогонок.

Разностные уравнения (60) разбиваются на две группы:
Группа I («динамическая»)

$$v_t = -g_s^{(\alpha)}, \quad \eta_t = v_s^{(0,5)}, \quad g = p + \omega, \\ \omega = \omega(\eta, v_s, v), \quad p = p(\eta, T).$$

Группа II («тепловая»)

$$\varepsilon_t = -g_s^{(\alpha)} v_s^{(0,5)} - w_s^{(\beta)}, \quad w = -kT_s, \\ \varepsilon = \varepsilon(\eta, T), \quad k = \kappa(0,5(p + p_{(-1)}), 0,5(T + T_{(-1)})).$$

Для каждой из групп в отдельности применяется итерационный метод Ньютона. При этом уравнения первой группы решаются при заданной температуре (по аналогии с изотермическим случаем); вторая группа уравнений решается при заданных η и v ; фактически при этом решается уравнение теплопроводности с заданными источниками газодинамического происхождения.

Итерации для первой и второй групп находятся методом прогонки. Пусть найдены v, η — k -я итерация, для которой выполнено условие окончания итераций, например, условие вида $\|\Delta v\|_C = \|v - v^{(k)}\|_C \leq \varepsilon_0 \|v\|_C$ ($\varepsilon_0 > 0$ — заданная точность). Зная v, η , находим итерационным методом Ньютона из уравнений второй группы m -ю итерацию \tilde{T} .

Выбирая \tilde{T} в качестве исходной температуры, повторяем указанные выше итерационные циклы. Полученный таким образом процесс внешних итераций продолжается до выполнения условий сходимости.

Возможны и другие способы организации этого итерационного процесса, например, можно положить $k = 1, m = 1$ для всех итераций или изменить порядок групп.

Метод раздельных прогонок целесообразен, если требуется уменьшить объем информации, хранимой в оперативной памяти.

ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Одним из важных достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных (с несколькими пространственными переменными x_1, x_2, \dots, x_p) уравнений в частных производных. В настоящее время имеется большое число экономичных схем для многомерных уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.

В этой главе излагается теория экономичных методов, опирающаяся на общую теорию устойчивости. Выделены два класса экономичных схем: схемы с факторизованным оператором на верхнем слое и аддитивные схемы, обладающие суммарной аппроксимацией.

§ 1. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) для уравнения теплопроводности

1. Об экономичных схемах. Одной из основных проблем теории численных методов является поиск экономичных вычислительных алгоритмов, требующих минимального машинного времени для получения приближенного решения с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$. Время счета задачи зависит не только от качества алгоритма, но и от качества программы и типа вычислительной машины. Поскольку последние две характеристики трудно учесть, то основным показателем обычно считают число арифметических действий $Q(\varepsilon)$ для получения решения задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Особенно большую остроту приобретает вопрос об экономичности алгоритмов при численном решении многомерных задач математической физики.

Выясним на простейших примерах предпосылки к написанию экономичных разностных схем. Рассмотрим p -мерное уравнение теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = L u, \quad L u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \\ x \in G, \quad t \in (0, t_0], \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $G = G_{0,p}$ — p -мерный куб, $(0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2, \dots, p)$, $\omega_h = \{(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in G\}$ — кубическая сетка с шагом h по всем $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$, ω_τ — сетка с шагом $\tau = t_0/n_0$ на отрезке $0 \leq t \leq t_0$.

Оператор $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$ аппроксимируем разностным оператором $\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}$, так что $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha$. Напишем двухслойную схему с весами

$$\begin{aligned} y_t = \Lambda(\hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad x \in \omega_h, \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \\ y|_{\gamma_h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Схема (2), как было показано в гл. V, § 3, устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4p\tau} = \sigma_0.$$

Полагая $\sigma = 0$, получим явную схему

$$y_t = \Lambda y \quad \text{или} \quad \hat{y} = y + \tau \Lambda y, \quad (3)$$

устойчивую при условии $\tau \leq 0,5h^2/p$.

Если (1) — уравнение с переменными коэффициентами, т. е.

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < k_\alpha \leq c_2,$$

то

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha, \quad 0 < a_\alpha \leq c_2,$$

и явная схема (3) устойчива при $\tau \leq 0,5h^2/(pc_2)$.

Отсюда видно, что допустимый шаг τ для явной схемы надо уменьшать с ростом числа измерений и ростом максимума коэффициента теплопроводности. Последнее требование является особенно жестким в случае задач с сильно меняющимися коэффициентами. По этой причине использование явных схем для решения не только многомерных, но и одномерных ($p = 1$) задач, часто оказывается нецелесообразным. С другой стороны, явная схема обладает тем достоинством, что решение $\hat{y} = y_{n+1}$ на новом слое $t_{n+1} = t_n + \tau$ находится по явной формуле (3) и при этом в каждом узле сетки ω_h затрачивается конечное число действий, так что общее число арифметических операций при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки ω_h (есть величина $O(1/h^p)$).

Рассмотрим теперь чисто неявную схему с $\tau = 1$. Она устойчива при любых τ и h . Для определения y^{n+1} получаем задачу

$$y^{n+1} - \tau \Delta y^{n+1} = y^n, \quad y^{n+1}|_{y_h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Для решения этой системы $1/h^p$ уравнений, например, методом исключения Гаусса требуется затратить $O(1/h^{3p-2})$ действий (если учесть при этом специальный вид матрицы $E - \tau \Delta$).

Итак, явная схема требует небольшого числа действий, но ее устойчивость имеет место при достаточно малом τ ; неявная схема безусловно устойчива, но она требует большого числа арифметических действий.

Возникает вопрос: можно ли построить схему, сочетающую лучшие качества явной и неявной схем, т. е.

1) безусловно устойчивую (как неявная схема), 2) требующую для перехода со слоя на слой затраты (как и для явной схемы) числа арифметических действий Q , пропорционального числу узлов сетки ω_h , так что $Q = O(1/h^p)$.

Тогда на узел сетки приходится число действий, не зависящее от количества узлов.

Такие схемы принято называть *экономичными*.

Приведем один пример для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, показывающий, что существует неявная схема, требующая меньшего числа действий (более экономичная), чем явная схема.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

где $u = (u^{(1)}(t), \dots, u^{(m)}(t))$ — вектор, $A = (a_{ij})$ — матрица. Предполагаем, что A симметрична и положительно определена. Явная схема $y_{n+1} = y_n - \tau A y_n$ при переходе со слоя на слой требует $2m^2 + 2m$ арифметических действий.

Пусть $A^- = (a_{ii}^-)$ — нижняя, $A^+ = (a_{ii}^+)$ — верхняя треугольные матрицы, причем $a_{ii}^- = a_{ii}^+ = 0,5a_{ii}$. Обе эти матрицы (операторы) положительно определены в смысле скалярного произведения (\cdot, \cdot) в R_m , так как $A^- = (A^+)^*$ и $(Ax, x) = (A^+ x, x) + ((A^+)^* x, x) = 2(A^+ x, x) = 2(A^- x, x)$. Рассмотрим схему

$$\frac{y_{2n+1} - y_{2n}}{\tau} + A^- y_{2n+1} + A^+ y_{2n} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{y_{2n+2} - y_{2n+1}}{\tau} + A^- y_{2n+1} + A^+ y_{2n+2} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Для определения y_{2n+1} и y_{2n+2} надо обратить треугольные матрицы $(E + \tau A^-)$ и $(E + \tau A^+)$.

Нетрудно показать, что написанная схема абсолютно (при любых $\tau > 0$) устойчива. Исключим из (4) и (5) y_{2n+1} . Вычи-

тая (5) из (4), найдем

$$2y_{2n+1} = y_{2n} + y_{2n+2} + \tau A^+ (y_{2n+2} - y_{2n}).$$

После подстановки этого выражения в (5), получим схему

$$B \frac{y_{2n+2} - y_{2n}}{2\tau} + Ay_{2n} = 0, \quad A = A^- + A^+, \quad (6)$$

оператор которой

$$B = (E + \tau A^-)(E + \tau A^+)$$

есть произведение двух сопряженных друг другу «треугольных» операторов (B —факторизованный оператор), так как $A^+ = (A^-)^*$.

Очевидно, что B —самосопряженный оператор. Остается проверить выполнение достаточного условия устойчивости:

$$B - 0,5(2\tau A) = E + \tau A + \tau^2 A^- A^+ - \tau A > E,$$

так как $A^- A^+ > 0$ ($(A^- A^+ x, x) = \|A^+ x\|^2 > 0$). Схема (6) абсолютно устойчива. Она имеет, очевидно, второй порядок точности.

Пусть \tilde{A}^\mp —треугольные матрицы, отличающиеся от A^\mp только тем, что элементы на главной диагонали заменены нулями. Будем запоминать при решении уравнения (4) вектор $\tilde{A}^- y_{2n+1}$, а при решении уравнения (5)—вектор $\tilde{A}^+ y_{2n+2}$. Тогда для схемы (4), (5) число действий, затраченное при переходе от слоя t_{2n} к слою t_{2n+2} , равно $Q_1 = 2m^3 + 12m$, в то время как для явной схемы оно равно $Q_0 = 4m^3 + 4m$, т. е. $Q_1 \leq Q_0$ при $m \geq 4$.

2. Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема). Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x \in G_{02}, \quad t \in (0, t_0], \\ u|_\Gamma &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu &= \Delta u = (L_1 + L_2)u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Область $\bar{G}_{02} = \bar{G}_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ —прямоугольник со сторонами l_1 и l_2 , Γ —граница $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$.

В \bar{G}_0 построим равномерную по x_α сетку $\bar{\omega}_h$ с шагами $h_1 = l_1/N_1$, $h_2 = l_2/N_2$. Пусть γ_h —граница сеточной области ω_h , содержащая все узлы на сторонах прямоугольника, кроме его вершин, $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. Оператор L_α заменим разностным оператором Λ_α :

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Напомним, что в случае одномерного уравнения теплопроводности неявная схема на каждом слое приводит к разностной краевой задаче вида

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad A_i > 0, \quad B_i > 0, \\ C_i &\geq A_i + B_i, \end{aligned} \quad (8)$$

которая решается стандартным методом прогонки с затратой числа $O(1/h) = O(N)$ действий, пропорционального числу N узлов сетки $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$.

Обратимся к нашей двумерной задаче в прямоугольнике. Сетку $\bar{\omega}_h$ можно представить как совокупность узлов, расположенных на строках $i_2 = 0, 1, \dots, N_2$ или как совокупность узлов, расположенных на столбцах $i_1 = 0, 1, \dots, N_1$. Всего имеется $N_1 + 1$ столбцов и $N_2 + 1$ строк. Число узлов в каждой строке равно $N_1 + 1$, а в каждом столбце имеется $N_2 + 1$ узлов.

Если на каждой строке (или столбце) решать задачу вида (8) методом прогонки при фиксированном i_2 (или i_1), то для отыскания решения на всех строках (или столбцах), т. е. во всех узлах сетки, понадобится число $O(N_1 N_2)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлов двумерной сетки. Основная идея большинства экономичных методов и состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач вида (8) вдоль строк и вдоль столбцов.

Весьма четко эту алгоритмическую идею выражает неявная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема). Эту схему часто называют *схемой Писмена — Рекфорда* (по имени авторов, впервые предложивших ее). Наряду с основными значениями искомой сеточной функции $y(x, t)$, т. е. с $y = y^n$ и $\hat{y} = y^{n+1}$, вводится промежуточное значение $\bar{y} = y^{n+1/2}$, которое можно формально рассматривать как значение y при $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Переход от слоя n к слою $n+1$ совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$:

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^n + \varphi^n, \quad (9)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi^n. \quad (10)$$

Эти уравнения пишутся во всех внутренних узлах $x = x_i$ сетки $\bar{\omega}_h$ и для всех $t = t_n > 0$. Первая схема неявна по направлению x_1 и явна по x_2 , вторая схема явна по x_1 и неявна по x_2 . К уравнениям (9), (10) надо добавить начальные условия

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (11)$$

и разностные краевые условия, например, в виде

$$y^{n+1} = \mu^{n+1} \text{ при } i_2 = 0 \text{ и } i_2 = N_2, \quad (12)$$

$$y^{n+1/2} = \bar{\mu} \text{ при } i_1 = 0 \text{ и } i_1 = N_1, \quad (13)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} (\mu^{n+1} + \mu^n) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu^{n+1} - \mu^n). \quad (14)$$

Смысл краевого условия (12) ясен, а условие (13), определяющее граничное значение \bar{y} , будет пояснено ниже.

Таким образом, разностная краевая задача (9)–(14), соответствующая задаче (7), поставлена.

Остановимся на методе решения этой задачи. Перепишем (9) и (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} &= F, \quad F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi, \\ \frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} &= \bar{F}, \quad \bar{F} = \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Условимся о следующих обозначениях:

$$x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \quad F = F_{i,i_2}, \quad y = y_{i,i_2},$$

при этом, если в уравнении один из индексов фиксирован, то мы его не пишем. Тогда (15) можно записать в виде (8), т. е.

$$\frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{i_1-1} - 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} \right) \bar{y}_{i_1} + \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{i_1+1} = -F_{i_1}, \quad (16)$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad \bar{y} = \bar{\mu} \text{ при } i_1 = 0, N_1,$$

$$\frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_2-1} - 2 \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{y}_{i_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_2+1} = -\bar{F}_{i_2}, \quad (17)$$

$$i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad \hat{y} = \hat{\mu} \text{ при } i_2 = 0, N_2.$$

Пусть задано $y = y^n$. Тогда вычисляем F , затем методом прогонки вдоль строк $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ решаем задачу (16) и определим \bar{y} во всех узлах сетки ω_h , после чего вычисляем \bar{F} и решаем задачу (17) вдоль столбцов $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, определяя $\hat{y} = y^{n+1}$. При переходе от слоя $n+1$ к слою $n+2$ процедура счета повторяется, т. е. происходит все время чередование направлений.

Так как прогонка (см. гл. I, § 2) требует на один узел числа действий, не зависящего от шага сетки, то описанный алгоритм будет экономичным, если мы докажем абсолютную устойчивость схемы (9)–(14).

Перейдем к изучению устойчивости и сходимости этой схемы.

3. Устойчивость. Для исследования устойчивости схемы (9)–(14) проведем исключение промежуточного значения \bar{y} . Вычитая из (9) уравнение (10), находим

$$2\bar{y} = \hat{y} + y - 0,5\tau\Lambda_2(\hat{y} - y), \quad x \in \omega_h. \quad (18)$$

Подставим (18) в (9):

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_2(\hat{y} - y) = \frac{1}{2}\Lambda_1(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(\hat{y} - y) + \Lambda_2y + \varphi. \quad (19)$$

Учитывая, что $\hat{y} = y + \tau y_t$, преобразуем (19) к каноническому виду

$$(E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi. \quad (20)$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что формула (18) должна выполняться и при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ (иначе значение $(\Lambda_1 y)_{i_1}$ не определено при $i_1 = 1$ и $i_1 = N_1 - 1$). Так как $y = \mu$, $\hat{y} = \mu$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$, то из (18) следует

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \mu) - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_2\mu_t = \bar{\mu} \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = l_1,$$

что совпадает с краевым условием (13), (14). Тем самым доказано, что решение задачи (9)–(14) удовлетворяет уравнению (20) при дополнительных условиях

$$y|_{v_h} = \mu, \quad \hat{y}|_{v_h} = \hat{\mu}, \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (21)$$

С другой стороны, решение задачи (20), (21) является также решением задачи (9)–(14). В самом деле, введем \bar{y} по формуле (18), найдем из (18)

$$(E - 0,5\tau\Lambda_2)\hat{y} = 2\bar{y} - (E + 0,5\tau\Lambda_2)y$$

и подставим это выражение в (20); после несложных преобразований получим уравнение (9). Из него и из (18) следует (10). Тем самым доказана эквивалентность задач (9)–(14) и (20), (21). Она имеет место при согласованном задании граничных значений \bar{y} по формулам (13), (14). Исследование схемы (9)–(14) можно заменить исследованием схемы (20), (21) «в целых шагах»

Применим общую теорию устойчивости двухслойных схем. Краевые условия предполагаются однородными, т. е. рассматривается задача

$$(E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi, \quad t \geq 0, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y|_{v_h} = 0. \quad (22)$$

Введем пространство H сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в нуль на γ_h , со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} y(x) v(x) h_1 h_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2$$

и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Будем обозначать $A = -\Lambda = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$. Оператор A самосопряжен и положителен в H . Норма в энергетическом пространстве H_A имеет вид

$$\|y\|_A^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} (y_{\bar{\lambda}_1}(i_1 h_1, i_2 h_2))^2 h_1 h_2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (y_{\bar{\lambda}_2}(i_1 h_1, i_2 h_2))^2 h_1 h_2$$

или

$$\|y\|_A^2 = \|y_{\bar{\lambda}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{\lambda}_2}\|_2^2. \quad (23)$$

Рассматривая $y = y(t)$ как абстрактную функцию $t \in \omega_\tau$ со значениями в H , запишем схему (22) в виде

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = u_0, \quad (24)$$

где

$$B = (E + 0,5\tau A_1)(E + 0,5\tau A_2), \quad A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad A = A_1 + A_2.$$

Операторы A_1 и A_2 —самосопряженные, положительные и перестановочные (в силу того, что исходная область—прямоугольник). В том, что $A_1 A_2 = A_2 A_1$ или $\Lambda_1 \Lambda_2 y = \Lambda_2 \Lambda_1 y = y_{\bar{\tau}_1, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\tau}_2}$ во всех внутренних узлах сетки, можно убедиться непосредственно. Поэтому и $A_1 A_2 > 0$. Из (24) видно, что

$$B > E + 0,5\tau A, \quad (25)$$

т. е. схема (24) устойчива в H_A .

Действительно,

$$B - 0,5\tau A = \left(E + \frac{\tau}{2} A + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 \right) - \frac{\tau}{2} A = E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 > E.$$

Из условия (25) следует, что для схемы (24) верна теорема 7 из гл. VI, § 2 при $\varepsilon = 1$, в силу которой решение задачи (22) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y(0)\|_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Нетрудно получить априорную оценку

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y(0)\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{A-1}^2 \right)^{1/2}. \quad (27)$$

В самом деле, применим к обеим частям уравнения (24) оператор $A^{-1} > 0$:

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi, \quad \tilde{B} = A^{-1} + \frac{\tau}{2}E + \frac{\tau^2}{4}A^{-1}A_1A_2. \quad (28)$$

Так как $A_1, A_2, A^{-1} > 0$ — перестановочные и самосопряженные операторы, то $A^{-1}A_1A_2 > 0$ и $\tilde{B} > A^{-1} + 0,5\tau E$. Поэтому, в силу теоремы 10 из гл. VI, § 2, верна оценка (27).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Схема (22) устойчива по начальным данным и по правой части. Для решения задачи (22) верны априорные оценки (26), (27).

4. Сходимость и точность. Изучение сходимости и точности схемы (9) — (14), в силу ее эквивалентности схеме (20) — (21), будем проводить для задачи (20) — (21). Пусть $u = u(x, t)$ — решение задачи (7), $y = y(x_i, t_n)$ — решение задачи (9) — (14) и (20), (21). Подставляя $y = z + u$ в (20), получим для погрешности схемы (20) — (21) задачу

$$Bz_t = \Lambda z + \psi, \quad x \in \omega_h, \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \\ z|_{\gamma_h} = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad (29)$$

где

$$B = (E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)$$

и ψ — погрешность аппроксимации на решении, равная

$$\psi = \varphi + \Lambda u - Bu_t = 0,5\Lambda(\hat{u} + u) - u_t - \tau^2\Lambda_1\Lambda_2u_t + \varphi. \quad (30)$$

Отсюда видно, что

$$\psi = O(|h|^2 + \tau^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

если $u = u(x, t)$ имеет ограниченные в $\bar{Q}_r = \bar{G}_0 \times [0, t_0]$ производные

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 x}{\partial x_1^4} \right| \leq M. \quad (31)$$

В самом деле, $0,5(\hat{u} + u) = \bar{u} + O(\tau^2)$, где $\bar{u} = u(x, t_n + 0,5\tau)$, $\Lambda_1\Lambda_2u_t$ ограничено, $u_t = \bar{u} + O(\tau^2)$,

$$\psi = L\bar{u} - \bar{u} + \bar{f} + O(\tau^2 + |h|^2) = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Так как для задачи (29) справедлива оценка (26) при $z(0) = z_0 = 0$, то имеет место

Теорема 2. Если выполнены условия (31), то схема (20), (21) сходится в сеточной норме (23) со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

5. Схема для уравнения с переменными коэффициентами.
Напишем схему переменных направлений для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad (x, t) \in Q_T, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (32)$$

$$Lu = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad k_\alpha(x, t) > 0.$$

В этом случае при любом t оператор L_α аппроксимируется оператором

$$\Lambda_\alpha y = \Lambda_\alpha(t) y = (a_\alpha(x, t) y_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где a_α , например, определяется по формуле $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5\alpha)}$ или $a_\alpha = 0,5(k_\alpha + k_\alpha^{(-1\alpha)})$, $\alpha = 1, 2$, что обеспечивает второй порядок аппроксимации для Λ_α :

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2).$$

Вместо схемы (9)–(10) напишем следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y} - y^n}{0,5\tau} &= \Lambda_1(\bar{t}) \bar{y} + \Lambda_2(t_n) y^n + \varphi^n, \\ \frac{y^{n+1} - \bar{y}}{0,5\tau} &= \Lambda_1(\bar{t}) \bar{y} + \Lambda_2(t_{n+1}) y^{n+1} + \varphi^n, \\ \bar{t} &= t_{n+1/2}, \quad y(x, 0) = u_0(x) \end{aligned} \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= \mu^{n+1} \quad \text{при} \quad i_2 = 0 \quad \text{и} \quad i_2 = N_2, \\ \bar{y} &= \bar{\mu} \quad \text{при} \quad i_1 = 0 \quad \text{и} \quad i_1 = N_1, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^{n+1} + \mu^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 \mu)_{t, n}$$

(здесь обозначено

$$(\Lambda_2 \mu)_{t, n} = (\Lambda_2(t_n) \mu(t_n))_t = \frac{\Lambda_2(t_{n+1}) \mu(t_{n+1}) - \Lambda_2(t_n) \mu(t_n)}{\tau}.$$

Это значение $\bar{\mu}$ соответствует выражению

$$\bar{y} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 y)_{t, n}, \quad (35)$$

которое получается из (33) после исключения $\Lambda_1 \bar{y}$.

Если в (33) вместо $\Lambda_2(t_n)$ и $\Lambda_2(t_{n+1})$ взять $\Lambda_2(\bar{t})$ в один и тот же момент времени \bar{t} , либо если k_α и, следовательно, Λ_α

не зависят от t , то схема (33)–(34) эквивалентна факторизованной схеме (20)–(21), где $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x) y_{x_\alpha})_{x_\alpha}$. Схема (20) имеет на решении $u(x, t)$ аппроксимацию $O(|h|^2 + \tau^2)$, если кроме условий (31) выполнены очевидные требования гладкости $k_\alpha(x)$ по x_1, x_2 . Отличие от случая постоянных коэффициентов обнаруживается при изучении устойчивости схемы (20). Операторы $A_1 = -\Lambda_1$ и $A_2 = -\Lambda_2$ положительные и самосопряженные, но не перестановочные:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 y = (a_1 (a_2 y_{x_2})_{x_2 \bar{x}_1})_{x_1} \neq \Lambda_2 \Lambda_1 y = (a_2 (a_1 y_{x_1})_{x_1 \bar{x}_2})_{x_2},$$

где $a_\alpha = a_\alpha(x, t)$. Поэтому положительность $\Lambda_1 \Lambda_2$ ниоткуда не следует. В этом случае удается доказать устойчивость лишь при достаточно малом $\tau \leq \tau_0(c_1)$, где c_1 зависит от максимума производных k_α по x_1, x_2 . Требование $\tau \leq \tau_0(c_1)$ является весьма жестким и связано с методом исследования устойчивости. Ниже будет показано, что схема (33) абсолютно устойчива в другой норме.

Напишем сначала уравнение для погрешности. Положим

$$z^n = y^n - u^n, \quad z^{n+1} = y^{n+1} - u^{n+1}, \quad \bar{z} = \bar{y} - \bar{u},$$

где $u^n = u(x, t_n)$, $u^{n+1} = u(x, t_{n+1})$, а \bar{u} определяется в соответствии с (35) по формуле

$$\bar{u} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 u)_{t, n}. \quad (36)$$

При таком выборе \bar{u} мы получим для \bar{z} однородные граничные условия.

Подставляя в уравнения (33) $y^n = z^n + u^n$, $\bar{y} = \bar{z} + \bar{u}$, $y^{n+1} = z^{n+1} + u^{n+1}$, получим следующую задачу.

$$\frac{\bar{z} - z^n}{0,5\tau} = \Lambda_1(t_{n+1/2}) \bar{z} + \Lambda_2(t_n) z^n + \psi_1^n, \quad (37)$$

$$\frac{z^{n+1} - \bar{z}}{0,5\tau} = \Lambda_1(t_{n+1/2}) \bar{z} + \Lambda_2(t_{n+1}) z^{n+1} + \psi_2^n,$$

$$z|_{\gamma_h} = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad (38)$$

где ψ_1 и ψ_2 — погрешности аппроксимации, равные

$$\psi_1^n = \Lambda_1(t_{n+1/2}) \bar{u} + \Lambda_2(t_n) u^n + \varphi^n - \frac{\bar{u} - u^n}{0,5\tau},$$

$$\psi_2^n = \Lambda_1(t_{n+1/2}) \bar{u} + \Lambda_2(t_{n+1}) u^{n+1} + \varphi^n - \frac{u^{n+1} - \bar{u}}{0,5\tau}.$$

Заметим прежде всего, что

$$\psi_1^n = \psi_2^n.$$

В этом можно убедиться, если подставить выражение (36) в формулу

$$\Psi_2^n - \Psi_1^n = \Lambda_2(t_{n+1}) u^{n+1} - \Lambda_2(t_n) u^n - \frac{u^{n+1} - 2\bar{u} + u^n}{0,5\tau} = 0.$$

В формулу для Ψ_1^n подставим выражение (36)

$$\begin{aligned} \Psi_1^n = \Lambda_1(t_{n+1/2}) \left(\frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 u)_{t,n} \right) + \Lambda_2(t_n) u^n + \\ + \varphi^n - \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u)_{t,n}. \end{aligned}$$

Учитывая затем, что

$$\frac{u^n + u^{n+1}}{2} = u(x, t_{n+1/2}) + O(\tau^2), \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_{n+1/2}} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda_2(t_{n+1/2}) \bar{u} = \Lambda_2(t_n) u^n + \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u)_{t,n} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda_1 u + \Lambda_2 u = L_1 u + L_2 u + O(|h|^2),$$

$$\varphi^n = f(x, t_{n+1/2}) + O(\tau^2 + |h|^2),$$

получаем

$$\Psi_1^n = (\Lambda_1 u + \Lambda_2 u) \Big|_{t=t_{n+1/2}} - \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \varphi^n + O(\tau^2) = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Тем самым доказано, что схема (33)–(34) имеет второй порядок аппроксимации

$$\Psi_1^n = \Psi_2^n = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Перейдем теперь к выводу априорной оценки для решения задачи.

Рассмотрим операторно-разностный аналог задачи (37)–(38):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z} - z^n}{0,5\tau} + A_1(t_{n+1/2}) \bar{z} + A_2(t_n) z^n &= \Psi_1^n, \\ \frac{z^{n+1} - \bar{z}}{0,5\tau} + A_1(t_{n+1/2}) \bar{z} + A_2(t_{n+1}) z^{n+1} &= \Psi_2^n, \\ n = 0, 1, 2, \dots, z(0) &= 0, \end{aligned} \tag{39}$$

где $A_1(t)$ и $A_2(t)$ —линейные операторы, заданные в гильбертовом пространстве H , $A_1, A_2: H \rightarrow H$. Пусть A_1 и A_2 —неотрицательные (вообще говоря, несамосопряженные) операторы

$$A_1 \geq 0, \quad A_2 \geq 0.$$

Вводя безындексные обозначения

$$z = z^n, \quad \bar{z} = z^{n+1}, \quad \hat{A}_2 = A_2(t_{n+1}), \quad A_2 = A_2(t_n), \quad \bar{A}_1 = A_1(t_{n+1/2}),$$

запишем схему в виде

$$(E + 0,5\tau \bar{A}_1) \bar{z} = (E - 0,5\tau A_2) z + 0,5\tau \Psi_1,$$

$$(E + 0,5\tau \hat{A}_2) \hat{z} = (E - 0,5\tau \bar{A}_1) \bar{z} + 0,5\tau \Psi_2.$$

Неравенство треугольника дает

$$\|(E + 0,5\tau \bar{A}_1) \bar{z}\| \leq \|(E - 0,5\tau A_2) z\| + 0,5\tau \|\psi_1\|, \quad (40)$$

$$\|(E + 0,5\tau \bar{A}_2) \bar{z}\| \leq \|(E - 0,5\tau \bar{A}_1) \bar{z}\| + 0,5\tau \|\psi_2\|. \quad (41)$$

Нам понадобится

Лемма 1. Если $A \geq 0$ — линейный оператор в H , то

$$\|(E - (1 - \sigma)\tau A) y\| \leq \|(E + \sigma\tau A) y\| \text{ при } \sigma \geq 0,5. \quad (42)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|(E + \sigma\tau A) y\|^2 - \|(E - (1 - \sigma)\tau A) y\|^2 = \\ = 2\tau (Ay, y) + 2(\sigma - 0,5)\tau^2 \|Ay\|^2 \geq 0 \text{ при } \sigma \geq 0,5, \quad A \geq 0, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Складывая неравенства (40) и (41) и учитывая оценку (42) при $\sigma = 0,5$, исключим \bar{z} :

$$\|(E + 0,5\tau \bar{A}_2) \bar{z}\| \leq \|(E - 0,5\tau A_2) z\| + \frac{\tau}{2} (\|\psi_1\| + \|\psi_2\|).$$

Учитывая неравенство (42), получаем

$$\|(E + 0,5\tau \bar{A}_2) \bar{z}\| \leq \|(E + 0,5\tau A_2) z\| + \frac{\tau}{2} (\|\psi_1\| + \|\psi_2\|)$$

или

$$\|(E + 0,5\tau A_2(t_{k+1})) z^{k+1}\| \leq \|(E + 0,5\tau A_2(t_k)) z^k\| + \frac{\tau}{2} (\|\psi_1^k\| + \|\psi_2^k\|).$$

Суммируя по $k = 0, 1, 2, \dots, n$ и учитывая, что $z^0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} z^{n+1} \|_{(1, n+1)} = \\ = \|(E + 0,5\tau A_2(t_{n+1})) z^{n+1}\| \leq 0,5 \sum_{k=0}^n \tau (\|\psi_1^k\| + \|\psi_2^k\|), \quad (43) \end{aligned}$$

где

$$\|z\|_{(1)}^2 = \|(E + 0,5\tau A_2) z\|^2 = \|z\|^2 + \tau (A_2 z, z) + \frac{\tau^2}{4} \|A_2 z\|^2. \quad (44)$$

Оценка (43) сохраняет силу, если $\|z\|_{(1)}$ заменить нормой $\|z\|$ или $\|z\|_{(2)} = \left(\|z\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|A_2 z\|^2 \right)^{1/2}$, поскольку

$$\|z\|^2 \leq \|z\|_{(1)}^2 \quad \text{и} \quad \|z\|_{(2)}^2 \leq \|z\|_{(1)}^2.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. Схема (33) — (34) абсолютно устойчива (при любых h_1, h_2, τ) и сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau^2)$ в норме $\|\cdot\|_{(1)}$, определяемой формулой (44), если выполнены условия, обес-

пешивающие второй порядок аппроксимации на решении $u = u(x, t)$ задачи (32).

Второй порядок точности продольно-поперечной схемы (33)–(34) установлен при специальном способе задания краевых условий для промежуточного значения $y = \bar{y}$:

$$\bar{y} = \bar{\mu} \quad \text{при } i_1 = 0, N_1, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu^n + \mu^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_2 \mu)_{t, n}.$$

Можно доказать, что схема сохранит точность $O(|h|^2 + \tau^2)$, если положить

$$\bar{y} = \frac{\mu^n + \mu^{n+1}}{2} \quad \text{при } i_1 = 0, N_1, \quad (45)$$

т. е. отбросить в выражении для $\bar{\mu}$ второе слагаемое $O(\tau^2)$. Мы не имеем возможности останавливаться на доказательстве этого утверждения. Здесь фактически устанавливается устойчивость схемы по граничным условиям. Схема (33) с краевым условием (45) может быть использована и для ступенчатых областей \bar{G} (со сторонами, параллельными осям координат).

В случае произвольной области удается доказать, что схема (33), (45) имеет точность $O(|h|^2 + \tau^2/\sqrt{h})$.

Схема Писмена–Рэкфорда (9)–(10) не может быть формально обобщена на трехмерный случай, так как при этом получается неустойчивая схема.

6. Схема повышенного порядка точности. Для задачи (7) можно написать схему переменных направлений повышенного порядка точности.

Покажем, что таким свойством обладает схема

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} &= \sigma_1 \Lambda_1 y^{n+1/2} + (1 - \sigma_1) \Lambda_2 y^n + \sigma_1 \varphi^n, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} &= (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^{n+1/2} + \sigma_2 \Lambda_2 y^{n+1} + (1 - \sigma_1) \varphi^n, \end{aligned} \quad (46)$$

$x \in \omega_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$y^{n+1} = \bar{\mu}^{n+1} \quad \text{при } i_2 = 0, \quad i_2 = N_2, \quad (47)$$

$$y^{n+1/2} = \bar{\mu} \quad \text{при } i_1 = 0, \quad i_1 = N_1,$$

где

$$\bar{\mu} = \sigma_1 \mu^{n+1} + (1 - \sigma_1) \mu^n - \tau \Lambda_2 (\sigma_1 \sigma_2 \mu^{n+1} - (1 - \sigma_1) (1 - \sigma_2) \mu^n),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} - \frac{h_2^2}{12\tau}, \quad \varphi^n = \left(f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f \right) \Big|_{t=t_{n+1/2}}.$$

Для того чтобы убедиться в устойчивости схемы и в ее аппроксимации $O(|h|^4 + \tau^2)$, сведем уравнения (46) к факторизованной схеме по аналогии с тем, как это делалось ранее в п. 3.

Для исключения $y^{n+1/2}$ перепишем разностные уравнения (46) в виде

$$\begin{aligned} B_1 y^{n+1/2} &= C_2 y^n + \sigma_1 \tau \varphi^n, \\ C_1 y^{n+1/2} &= B_2 y^{n+1} - (1 - \sigma_1) \tau \varphi^n, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$B_\alpha = E - \sigma_\alpha \tau \Lambda_\alpha, \quad C_\alpha = E + (1 - \sigma_\alpha) \tau \Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Умножая первое из уравнений (48) на $(1 - \sigma_1)$, второе — на σ_1 , складывая их и учитывая, что

$$(1 - \sigma_1) B_1 + \sigma_1 C_1 = E,$$

находим промежуточное значение

$$y^{n+1/2} = \sigma_1 B_2 y^{n+1} + (1 - \sigma_1) C_2 y^n. \quad (49)$$

Подставим это выражение для $y^{n+1/2}$ в первое уравнение системы (48)

$$\sigma_1 B_1 B_2 y^{n+1} = (C_2 - (1 - \sigma_1) B_1 C_2) y^n + \sigma_1 \tau \varphi^n.$$

Отсюда, после очевидных преобразований, следует

$$B_1 B_2 \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda_1 \Lambda_2) y^n + \varphi^n. \quad (50)$$

Так как $(1 - \sigma_1 - \sigma_2) \tau = \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}$, то можно переписать схему в следующем виде:

$$B_1 B_2 \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \Lambda' y^n + \varphi^n, \quad x \in \omega_h, \quad (51)$$

$$y(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y^n = \mu^n \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h, \quad (52)$$

где

$$\Lambda' y = (\Lambda_1 + \Lambda_2) y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\varphi = \Lambda' u^n + \varphi^n - B_1 B_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = O(\tau^2 + |h|^4), \quad (53)$$

т. е. схема (51) — (52) имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + |h|^4)$.

При этом надо учесть, что

$$\begin{aligned} \Lambda' u^n + \varphi^n &= \\ &= \left(L u + \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u \right) \Big|_{t=t_n} + \varphi^n + O(|h|^4) = \\ &= \left[\left(\frac{h_1^2}{12} L_1 + \frac{h_2^2}{12} L_2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} + L u - \frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f \right]_{t=t_n} + \varphi^n + O(|h|^4) \\ &\left(\text{так как } L_\alpha^2 u = -L_1 L_2 u + L_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha f, \alpha = 1, 2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 B_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \\ &= \left(u_t - \frac{\tau}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) u_t + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 u_t + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 u_t \right) \Big|_{t=t_n} + O(\tau^2 + |h|^4) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau}{2} L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h_1^2}{12} L_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h_2^2}{12} L_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_n} + O(\tau^2 + |h|^4). \end{aligned}$$

Для изучения устойчивости схемы рассмотрим однородные краевые условия и введем то же пространство сеточных функций $H = \dot{\Omega}_h$ и те же операторы $A_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha}$ при $y \in \dot{\Omega}_h$, что и в п. 3. В результате получим операторно-разностную схему

$$By_t + A'y = \varphi(t), \quad 0 \leq t = n\tau, \quad y(0) = u_0, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} B &= (E + \sigma_1 \tau A_1)(E + \sigma_2 \tau A_2), \\ A' &= A_1 + A_2 - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2, \\ \kappa_\alpha &= h_\alpha^2/12, \quad \sigma_\alpha = 0,5 - \kappa_\alpha/\tau, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Операторы A_1 и A_2 —самосопряженные, положительные и перестановочные:

$$A_1^* = A_1 > 0, \quad A_2^* = A_2 > 0, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Поэтому $(A_1 A_2)^* = A_1 A_2 > 0$.

Проверим выполнение условия устойчивости $B \geq 0,5\tau A'$ в $H_{A'}$. Сначала заметим, что $\|A_\alpha\| < 4/h_\alpha^2$ и $\kappa_\alpha \|A_\alpha\| < 1/3$. Учитывая неравенство $A_\alpha \leq \|A_\alpha\| E$, получим

$$\begin{aligned} B - 0,5\tau A' &= \\ &= E - \kappa_1 A_1 - \kappa_2 A_2 + 0,5\tau (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 + (0,5\tau - \kappa_1) (0,5\tau - \kappa_2) A_1 A_2 = \\ &= E - \kappa_1 A_1 - \kappa_2 A_2 + \left(\frac{\tau^2}{4} + \kappa_1 \kappa_2 \right) A_1 A_2 > E - \kappa_1 \|A_1\| E - \\ &\quad - \kappa_2 \|A_2\| E > \frac{1}{3} E, \end{aligned}$$

т. е. $B > 0,5\tau A' + E/3$.

Тем самым доказана устойчивость схемы в $H_{A'}$. В частности, в силу теоремы 7 из гл. VI, § 2 для схемы (54) имеет место

априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_{A'} \leq \|y^0\|_{A'} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}. \quad (55)$$

Для оценки точности схемы (53) рассмотрим погрешность $z^{n+1} = y^{n+1} - u^{n+1}$; для нее получаем задачу

$$Bz_t + A'z = \psi, \quad z(0) = 0.$$

Теперь можно воспользоваться оценкой (55):

$$\|z^{j+1}\|_A \leq 3/2 \left(\sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}. \quad (56)$$

При переходе от (55) к (56) мы воспользовались тем, что $z^0 = y^0 - u^0 = 0$, и оператор A' удовлетворяет неравенству

$$A' > \frac{2}{3} A \quad \text{или} \quad \|z\|_{A'}^2 > \frac{2}{3} \|z\|_A^2.$$

В самом деле,

$$A' = A - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 \geq A - \kappa_1 \|A_1\| A_2 - \kappa_2 \|A_2\| A_1 > \frac{2}{3} A.$$

Из (56) следует, что схема (51)–(52) и эквивалентная ей схема (46)–(47) сходятся в H_A со скоростью $O(\tau^2 + |h|^4)$.

Замечание. По аналогии с предыдущим пунктом можно оценить погрешность аппроксимации для каждого из разностных уравнений (48)

$$\psi_1 = \frac{C_2 u^n - B_1 \bar{u}}{\tau} + \sigma_1 \varphi^n,$$

$$\psi_2 = \frac{C_1 \bar{u} - B_2 u^{n+1}}{\tau} + (1 - \sigma_1) \varphi^n,$$

если положить промежуточное (фиктивное) значение \bar{u} , в соответствии с формулой (49), равным

$$\bar{u} = \sigma_1 B_2 u^{n+1} + (1 - \sigma_1) C_2 u^n.$$

Подставляя это значение в формулу для ψ_1 , находим

$$\frac{\psi_1}{\sigma_1} = A' u^n - B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \varphi^n = \psi^n,$$

т. е. $\frac{1}{\sigma_1} \psi_1$ совпадает с погрешностью аппроксимации (53) факторизованной схемы (51).

Замечая, что

$$\frac{\psi_1}{\sigma_1} = \frac{\psi_2}{1 - \sigma_1},$$

убеждаемся в том, что каждое из уравнений (48) имеет аппроксимацию $O(|h|^4 + \tau^2)$.

§ 2. Экономичные факторизованные схемы

1. Схемы с факторизованным оператором. Рассмотрим двухслойную разностную схему

$$By_t + Ay = \varphi, \quad 0 \leq t = j\tau < t_0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Пусть известно значение $y = y^j$ на j -м слое, требуется найти y^{j+1} . Для него получаем уравнение

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)y^j + \tau \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где F^j — известная правая часть. Пусть для вычисления F^j затрачивается число $O(N)$ действий, пропорциональное числу N узлов сетки ω_h (это имеет место для всех разностных схем с шаблоном, не зависящим от сетки ω_h). Из (2) видно, что устойчивая схема (1) экономична, если для решения уравнения (2) затрачивается число действий $O(N)$.

Пусть B_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ — «экономичные» операторы, т. е. такие операторы, что для вычисления решения уравнения

$$B_\alpha v = F \quad (3)$$

требуется $O(N)$ действий. Тогда схема (1) с *факторизованным оператором* B вида

$$B = B_1 B_2 \dots B_p \quad (4)$$

будет также экономичной, так как для решения уравнения (2) с оператором (4) потребуется $O(N)$ действий. В самом деле, решение уравнения

$$B_1 B_2 \dots B_p y^{j+1} = F^j \quad (5)$$

может быть найдено в результате последовательного решения p уравнений вида (3), точнее

$$B_1 y_{(1)} = F^j, \quad B_\alpha y_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (6)$$

так что $y^{j+1} = y_{(p)}$. Здесь $y_{(1)} = y^{j+1/p}$, \dots , $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$, \dots , $y_{(p-1)} = -y^{j+(p-1)/p}$ — промежуточные значения.

Из предыдущего следует, что устойчивая схема (1) с факторизованным оператором B , являющимся произведением конечного числа «экономичных» операторов B_1, \dots, B_p , является экономичной. Схемы с факторизованным оператором B будем называть *факторизованными схемами*.

В § 1 было показано, что неявная экономичная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) эквивалентна факторизованной схеме с оператором

$$B = B_1 B_2, \quad B_\alpha = E - 0,5\tau\Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Можно рассмотреть также факторизованные схемы с

$$B = B_1 B_2, \quad B_\alpha = E + \tau R_\alpha, \quad R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha}, \quad (8)$$

где R_1 и R_2 —«треугольные» операторы (соответствующие им матрицы являются треугольными, так называемая «явная схема переменных направлений»). Для решения уравнения (3) в этом случае получаются формулы явного («бегущего») счета. Заметим, что R_1 и R_2 не являются самосопряженными, а сопряжены друг другу.

Часто используются «одномерные» разностные операторы B_α вида $B_\alpha = E - \sigma \Lambda_\alpha$, где Λ_α —разностная аппроксимация дифференциального оператора L_α , содержащего производные только по одному аргументу x_α . Так, например, если $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$, то $\Lambda_\alpha u = y_{x_\alpha x_\alpha}$ есть трехточечный оператор, и уравнение (3) решается методом прогонки.

Одну и ту же факторизованную схему можно свести к последовательности простых схем несколькими способами. Укажем один способ. Из (1) найдем

$$y^{j+1} = y^j + \tau w^j,$$

где w^j есть решение уравнения

$$B_1 B_2 \dots B_p w = \Phi^j, \quad \Phi^j = \varphi^j - A y^j. \quad (9)$$

Для определения w^j можно воспользоваться системой p уравнений

$$B_1 w_{(1)} = \Phi^j, \quad B_\alpha w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (10)$$

полагая затем

$$w^j = w_{(p)}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что первые экономичные схемы составлялись так, чтобы можно было легко исключить промежуточные значения; это приводило к факторизованной схеме «в целых шагах», связывающей значения y^j и y^{j+1} .

2. Краевые условия. Требования устойчивости и аппроксимации предъявляются к факторизованной схеме (1). Уравнения (6) или (10), (11) можно трактовать как вычислительный алгоритм для факторизованной схемы (1). Такая эквивалентность имеет место лишь при согласованном задании краевых условий.

Поясним это на примере. Пусть требуется решить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоуголь-

нике $\bar{G}_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$ с границей Γ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2) u + f(x, t), \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (12)$$

где $L_{\alpha} u = \partial^2 u / \partial x_{\alpha}^2$, $\alpha = 1, 2$.

Пусть $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$ — прямоугольная сетка в \bar{G}_0 с шагами h_1 и h_2 , $\Lambda_{\alpha} y = y_{x_{\alpha} x_{\alpha}}$.

Напишем факторизованную схему (1):

$$B_1 B_2 y_t = \Lambda y + \varphi, \quad y'|_{\gamma_h} = \mu', \quad y^0 = u_0(x), \quad (13)$$

где $B_{\alpha} = E - \sigma \tau \Lambda_{\alpha}$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, γ_h — граница сетки ω_h . Для решения задачи (13) при переходе со слоя на слой воспользуемся алгоритмом (6):

$$\begin{aligned} B_1 y_{(1)} &= F', \quad F' = (B_1 B_2 + \tau \Lambda) y' + \tau \varphi', \\ B_2 y'^{+1} &= y_{(1)} \end{aligned} \quad (14)$$

с краевыми условиями $y'^{+1}|_{\gamma_h} = \mu'^{+1}$.

Так как оператор $B_1 B_2$ определен на $\bar{\omega}_h$ (включая границу $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$), то уравнение $B_2 y'^{+1} = y_{(1)}$ должно удовлетворяться не только при $0 < x_1 < l_1$, но и на границе при $x_1 = 0, l_1$. Поскольку $y'^{+1}|_{\gamma_h} = \mu'^{+1}$ известно, то отсюда следует, что

$$y_{(1)} = (E - \sigma \tau \Lambda_2) \mu'^{+1} = \mu'^{+1} - \sigma \tau \Lambda_2 \mu'^{+1} \quad \text{при } x_1 = 0, l_1. \quad (15)$$

Если $y_{(1)}$ при $x_1 = 0, l_1$ определяется по этой формуле, то задачи (13) и (14) — (15) эквивалентны, в чем легко убедиться исключением $y_{(1)}$ из (14). Для второго алгоритма

$$B_1 w_{(1)} = \Phi', \quad \Phi' = \Lambda y' + \varphi', \quad B_2 w_{(2)} = w_{(1)}, \quad y'^{+1} = y' + \tau w_{(2)} \quad (16)$$

краевые условия задаются так:

$$\begin{aligned} w_{(1)} &= (E - \sigma \tau \Lambda_2) \frac{\mu'^{+1} - \mu'}{\tau} \quad \text{при } x_1 = 0, l_1, \\ w_{(2)} &= \frac{\mu'^{+1} - \mu'}{\tau} \quad \text{при } x_2 = 0, l_2 \end{aligned} \quad (17)$$

(т. е. $w_{(1)} = 0, w_{(2)} = 0$ на γ_h , если μ не зависит от t).

Отметим, что при записи схемы (1) в матричной (операторной) форме краевые условия можно считать однородными, изменения соответствующим образом правую часть φ в приграничных узлах. Для факторизованной схемы получим также однородные краевые условия ($y_{(1)} = y' = 0, w_{(1)} = w_{(2)} = 0$ при $x \in \gamma_h$), однако для сохранения порядка аппроксимации в правую часть факторизованной схемы в приграничных узлах при $i_1 = 1$ и $i_1 = N_1 - 1$ надо внести поправки $-\sigma^2 \tau^2 h_1^{-2} \Lambda_2 \mu_t$.

3. Построение экономичных факторизованных схем. Пользуясь изложенным в гл. VI, § 3 методом регуляризации, сформулируем общий метод построения устойчивых экономичных схем.

Рассмотрим устойчивую исходную схему

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + Ay^n = \varphi^n \quad (18)$$

с оператором

$$B = E + \tau R. \quad (19)$$

Так как схема устойчива, то $B \geq 0,5\tau A$.

Предположим, что R есть сумма конечного числа экономичных операторов R_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$R = R_1 + \dots + R_p. \quad (20)$$

Факторизуем оператор $B = E + \tau(R_1 + \dots + R_p)$, т. е. заменим его факторизованным оператором

$$\tilde{B} = B_1 \dots B_p, \quad B_\alpha = E + \tau R_\alpha \quad (21)$$

и перейдем от исходной схемы (1) к факторизованной схеме

$$B_1 \dots B_p y_t + Ay = \tilde{\varphi} \quad (22)$$

(при этом может оказаться необходимым для сохранения аппроксимации заменить φ на $\tilde{\varphi}$ вблизи границы сеточной области).

Если исходная схема (18) устойчива и R_1, R_2, \dots, R_p являются самосопряженными ($R_\alpha = R_\alpha^*$), неотрицательными ($R_\alpha \geq 0$) и попарно перестановочными ($R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$) операторами, то факторизованная схема (22) также устойчива.

В силу указанных свойств операторов R_α любое их произведение $R_\alpha R_\beta$, $R_\alpha R_\beta R_\gamma$ и т. д. является самосопряженным и неотрицательным линейным оператором. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{B} = B_1 B_2 = E + \tau (R_1 + R_2) + \tau^2 R_1 R_2 = \\ = B + \tau^2 R_1 R_2 \geq B \quad \text{при } p = 2, \end{aligned}$$

$$\tilde{B} = B_1 B_2 \dots B_p = E + \tau (R_1 + R_2 + \dots + R_p) + \tau^2 Q_p = B + \tau^2 Q_p \geq B,$$

где $Q_p^* = Q_p \geq 0$.

Таким образом, $\tilde{B} \geq B \geq 0,5\tau A$, т. е. факторизованная схема (22) устойчива.

Операторы R_α следует выбирать так, чтобы выполнялось и условие аппроксимации.

Пример 1. Пусть требуется решить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_1 u + L_2 u + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \\ u|_{\Gamma} &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ L_\alpha u &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2, \\ G &= \{0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Построим двухслойную факторизованную схему

$$\begin{aligned} (E + \tau R_1)(E + \tau R_2)y_t + Ay &= \varphi, \\ x \in \omega_h, \quad t = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, \\ y|_{\gamma_h} &= \mu(x, t), \quad t = n\tau \geq 0, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}$$

— сетка в прямоугольнике \bar{G} с границей γ_h .

Оператор L_α аппроксимируем разностным оператором

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad 0 < c_1 \leq a_\alpha(x, t) \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2,$$

второго порядка аппроксимации и положим

$$A = -(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad R_\alpha = -\sigma c_2 \dot{\Lambda}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\dot{\Lambda}_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$.

При изучении устойчивости схемы предполагаем, что краевые условия однородные и $H = \bar{\Omega}_h$ — пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе γ_h . Скалярное произведение в пространстве H определяется так же, как для задачи (22) в § 1. Тогда A и R_α как операторы, заданные в H , обладают такими свойствами:

$$\begin{aligned} A = A^* > 0, \quad A_\alpha &\leq c_2 \dot{\Lambda}_\alpha, \quad \dot{\Lambda}_\alpha y = -\dot{\Lambda}_\alpha y \quad \text{для любого } y \in \bar{\Omega}_h, \\ R_\alpha = \sigma c_2 \dot{\Lambda}_\alpha, \quad R_\alpha = R_\alpha^* &> 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Условие устойчивости $B = (E + \tau R_1)(E + \tau R_2) \geq 0,5\tau A$ будет выполнено, если $\sigma \geq 0,5$ (или даже $\sigma \geq 0,5 - 1/(\tau \|A\|)$). Очевидно, что $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$ — трехточечные разностные операторы с постоянными коэффициентами. Они являются экономичными, так как уравнения

$$B_\alpha w = (E + \tau R_\alpha)w = F_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

могут быть решены методом прогонки (вдоль строк при $\alpha=1$ и вдоль столбцов при $\alpha=2$).

Факторизованная схема имеет, по крайней мере, первый порядок точности по τ .

Аналогично строится экономичная факторизованная схема для p -мерного случая, когда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f, \quad (23')$$

а L_{α} определяется согласно (23). В этом случае

$$B = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_{\alpha}).$$

Операторы R_{α} выбираются так же, как и при $p=2$.

Пример 2. Пусть требуется решить первую краевую задачу для параболического уравнения со смешанными производными в параллелепипеде $\bar{G}_0 = (0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, p)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha \beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right), \quad (26)$$

$$0 < c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_{\alpha}^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha \beta}(x, t) \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_{\alpha}^2.$$

В качестве R_{α} снова выбираем операторы (25). Эти операторы в Ω_h являются самосопряженными, положительными (при $\sigma > 0$) и попарно перестановочными (так как область \bar{G}_0 — параллелепипед). Полученная схема устойчива при условии $\sigma \geq 0,5$. Так как $B_{\alpha} = E + \tau R_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — трехточечные разностные операторы с постоянными коэффициентами, то алгоритм определения y^{j+1} при заданном y^j тот же, что и в предыдущем примере.

Пример 3. Схема повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности (12).

В § 1, п. 6 было показано, что факторизованная схема

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda' y + \varphi,$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 \leq t = n\tau, \quad (27)$$

$$y|_{\nu_h} = \mu(t), \quad t = n\tau, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

где $\Lambda' = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2$,

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \sigma_\alpha = 0,5 - h_\alpha^2/12, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\varphi = \left(f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f \right)^{n+1/2}, \quad (28)$$

имеет точность $O(\tau^2 + |h|^4)$.

Она эквивалентна схеме переменных направлений (46)–(47) из § 1. Напишем две другие схемы переменных направлений, эквивалентные (27).

$$1) \quad (E + \sigma_1 \tau \Lambda_1) \bar{y} = ((E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) + \tau \Lambda') y + \tau \varphi, \\ (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \hat{y} = \bar{y}.$$

Каждое из уравнений есть двухслойная схема. Запишем эти схемы в каноническом виде

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) \frac{\bar{y} - y}{\tau} = \\ - \Lambda_1 y + (1 - \sigma_2) \Lambda_2 y + (\kappa_1 + \kappa_2 + \tau \sigma_1 \sigma_2) \Lambda_1 \Lambda_2 y + \varphi, \\ (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \frac{\hat{y} - \bar{y}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 \bar{y}, \\ \kappa_\alpha = h_\alpha^2/12, \quad \alpha = 1, 2. \quad (29)$$

Краевые условия для этих схем

$$y^n = \mu^n \quad \text{при} \quad i_2 = 0, N_2, \\ \bar{y} = (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \mu^{n+1} \quad \text{при} \quad i_1 = 0, N_1. \quad (30)$$

$$2) \quad (E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) \frac{\bar{y} - y}{\tau} = \Lambda' y + \varphi, \\ (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \frac{\hat{y} - \bar{y}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda (\bar{y} - y) \quad (31)$$

с краевыми условиями для \bar{y} :

$$\bar{y} = \mu^n + \tau (E - \sigma_2 \Lambda_2) \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{\tau} \quad \text{при} \quad i_1 = 0, N_1. \quad (32)$$

Каждая из полученных трех задач (46)–(47) из § 1, (29)–(30) и (31)–(32) решается поочередным применением метода прогонки вдоль строк и столбцов сетки $\bar{\omega}_h$ (т. е. методом переменных направлений).

Подводя итоги, следует отметить, что факторизованные схемы применимы лишь для областей специального типа, точнее, для прямоугольников и для параллелепипедов. Исключение представляет лишь случай $B = B_1 B_2$, $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$, где R_1 и R_2 — треугольные операторы. Однако при этом понижается порядок аппроксимации (которая имеет место лишь при условии $\tau = O(h^2)$).

4. Трехслойные факторизованные схемы. Рассмотрим экономичные трехслойные схемы. Пусть дана схема

$$By_i + \tau^2 Ry_{\bar{i}t} + Ay = \varphi, \quad 0 < t = j\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1.$$

Разрешая ее относительно y^{j+1} , находим

$$(B + 2\tau R)y^{j+1} = 2\tau(2R - A)y^j + (B - 2\tau R)y^{j-1} + 2\tau\varphi'.$$

Отсюда видно, что для экономичности трехслойной схемы надо, чтобы оператор $B + 2\tau R$ на верхнем слое был факторизован.

Рассмотрим в качестве исходной схемы схему с весами

$$y_i + A(\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}) = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (33)$$

Запишем ее в каноническом виде (см. гл. VI, § 3)

$$(E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A)y_i + 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 Ay_{\bar{i}t} + Ay = \varphi \quad (34)$$

и найдем оператор $B + 2\tau R = E + 2\sigma_1 \tau A$. Пусть $A = A_1 + A_2$. Заменим $B + 2\tau R$ факторизованным оператором

$$\tilde{B} + 2\tau \tilde{R} = (E + 2\sigma_1 \tau A_1)(E + 2\sigma_1 \tau A_2) = E + 2\sigma_1 \tau A + 4\sigma_1^2 \tau^2 A_1 A_2.$$

Поскольку имеется одно условие для двух операторов \tilde{B} и \tilde{R} , то можно построить ряд факторизованных схем.

Перепишем (34) в виде

$$(B + 2\tau R)y_i + (B - 2\tau R)y_{\bar{i}} + 2Ay = 2\varphi.$$

Заменим $B + 2\tau R$ факторизованным оператором $\tilde{B} + 2\tau \tilde{R}$ и приведем полученную схему к каноническому виду, учитывая при этом, что

$$y_i = y_i + 0.5\tau y_{\bar{i}t}, \quad y_{\bar{i}} = y_i - 0.5\tau y_{\bar{i}t}.$$

В результате получим

$$(E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A + 2\sigma_1^2 \tau^2 A_1 A_2)y_i + \tau^2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A + \sigma_1^2 \tau A_1 A_2 \right)y_{\bar{i}t} + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (35)$$

так что

$$\tilde{B} = B + 2\sigma_1^2 \tau^2 A_1 A_2, \quad \tilde{R} = R + \sigma_1^2 \tau A_1 A_2$$

(ср. с (34)).

Для определения y^{j+1} при заданных y^j и y^{j-1} можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$$B_1 w_{(1)} = F', \quad F' = (2\tau R - B)y_{\bar{i}}^j - 2Ay^j + 2\varphi',$$

$$B_2 w_{(2)} = w_{(1)}, \quad y^{j+1} = y^j + \tau w_{(2)},$$

$$B_1 = E + 2\sigma_1 \tau A_1, \quad B_2 = E + 2\sigma_1 \tau A_2.$$

Вопрос о краевых условиях для $w_{(1)}$ решается так же, как и в случае двухслойной факторизованной схемы.

Для исследования устойчивости факторизованной схемы (35) надо воспользоваться общими теоремами из гл. VI, § 3. Достаточными условиями устойчивости являются условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5, \quad A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Если $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$, $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$, то исходная схема устойчива, так как

$$B \geq E, \quad 4R > A.$$

В силу перестановочности A_1 и A_2 , $A_1 A_2 > 0$, т. е. $\tilde{B} > B$, $\tilde{R} > R$. Отсюда и из устойчивости исходной схемы следует устойчивость факторизованной схемы (35).

Мы рассмотрели частный случай, когда $R = \sigma A$, $\sigma = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$. Укажем общий метод построения трехслойных экономичных факторизованных схем, основанный на принципе регуляризации разностных схем (см. гл. VI, § 3, п. 10). Рассмотрим некоторую исходную разностную схему

$$y_t + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + A y = \varphi, \quad 0 < t = j\tau < t_0, \quad y(0) = u_0, \quad y(\tau) = \bar{u}_0 \quad (36)$$

(значение $y(\tau) = \bar{u}_0$ при $t = \tau$ выбирается так, чтобы обеспечить второй по τ порядок аппроксимации). Оператор R выбирается так, чтобы схема (36) была устойчивой.

Запишем исходную схему в виде

$$(E + 2\tau R) y_t = -F, \quad F = (2\tau R - E) y_{\bar{t}} - 2A y + 2\varphi. \quad (37)$$

Пусть R есть сумма экономичных операторов, $R = R_1 + R_2 + \dots + R_p$. Заменим в (37) $E + 2\tau R = E + 2\tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$ факторизованным оператором

$$E + 2\tau \tilde{R} = \prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_\alpha) = E + 2\tau R + 4\tau^2 Q_p, \quad \tilde{R} = R + 2\tau Q_p,$$

где $Q_p = R_1 R_2$ при $p = 2$, $Q_p = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + 2\tau R_1 R_2 R_3$ при $p = 3$ и т. д., и вместо (37) рассмотрим факторизованную схему

$$B_1 \dots B_p y_t = -F, \quad B_\alpha = E + 2\tau R_\alpha. \quad (38)$$

Приведем (38) к каноническому виду

$$B y_{\bar{t}} + \tau^2 \bar{R} y_{\bar{t}t} + A y = \varphi, \quad (39)$$

где $B = E + 2\tau^2 Q_p$, $\bar{R} = R + \tau Q_p$.

Пусть $\psi_0(u)$ — погрешность аппроксимации (в классе решений $u = u(x, t)$ непрерывной задачи) для исходной схемы (36), $\psi_1(u)$ — для факторизованной схемы (39). Нетрудно заметить, что

$$\psi_1(u) = \psi_0(u) + \psi^*, \quad \psi^* = 2\tau^2 Q_p u_t.$$

Если $\|Q_p u_t\|_{(2^*)} = O(1)$, где $\|\cdot\|_{(2^*)}$ — некоторая сеточная норма (фигурирующая в теоремах об устойчивости), то $\|\psi^*\|_{(2^*)} = O(\tau^2)$ и при переходе от исходной схемы к экономичной факторизованной схеме (38) погрешность аппроксимации меняется на величину $O(\tau^2)$. Таким образом, указанный процесс позволяет получать экономичные факторизованные схемы с сохранением второго порядка точности по τ (за счет, вообще говоря, некоторого повышения требования гладкости решения u).

Чтобы исследовать устойчивость (36) и (39), нужно рассматривать операторы R и A как линейные операторы из $H := \Omega_h$ в H (это значит, например, для схемы, аппроксимирующей (26), что краевые условия на γ_h однородны).

Пусть выполнены условия

$$A = A^* > 0, \quad R_\alpha = R_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда исходная схема (36) устойчива при

$$R \geq \frac{1+\epsilon}{4} A, \quad \epsilon > 0. \quad (40)$$

В случае переменного $A = A(t)$ требуется, кроме того, чтобы $A(t)$ был липшиц-непрерывен по t . Оператор R мы будем выбирать постоянным.

Если операторы R_α попарно перестановочны, то из устойчивости исходной схемы следует устойчивость факторизованной схемы (39), так как $Q_p > 0$, $B = E + 2\tau^2 Q_p > E$, $\bar{R} = R + \tau Q_p > R$, т. е. $\bar{R} > \frac{1+\epsilon}{4} A$.

Выбор регуляризатора R как для двухслойных, так и для трехслойных схем проводится по одному и тому же принципу. Важно отметить, что *одним и тем же регуляризатором R можно пользоваться для различных операторов A* .

Пример 4. Рассмотрим задачу (23) для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Операторы A , R_1 и R_2 определяются так же, как и в примере 1 для двухслойной экономичной схемы (24).

Исходной является схема (36)

$$y_i + \tau^2 R y_{ii} + A y = \varphi, \quad R = R_1 + R_2,$$

имеющая второй порядок аппроксимации, $\psi = O(\tau^2 + |h|^2)$. Она устойчива, если $\sigma \geq (1 + \epsilon)/4$. Факторизованная схема имеет

вид (39), где

$$B = E + 2\tau^2 R_1 R_2, \quad \bar{R} = R + \tau R_1 R_2.$$

В силу перестановочности R_1 и R_2 факторизованная схема (39) абсолютно устойчива при $\sigma \geq (1 + \varepsilon)/4$, $\varepsilon > 0$.

Заметим, что оператор $A = A(t)$ липшиц-непрерывен, если

$$|(a_\alpha)_t| \leq c_3 a_\alpha, \quad c_3 = \text{const} > 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Схема (39), очевидно, экономична, так как каждый из операторов $B_\alpha = E + 2\tau R_\alpha$ экономичен.

При решении системы разностных уравнений

$$B_1 B_2 y_t = -F, \quad B_\alpha = E + 2\tau R_\alpha, \quad y|_{\gamma_h} = \mu$$

можно воспользоваться алгоритмом

$$\begin{aligned} B_1 w_{(1)} &= -F, \quad x \in \omega_h, \quad w_{(1)} = B_2 \mu_t \quad \text{при } x_1 = 0, l_1, \\ B_2 w_{(2)} &= w_{(1)}, \quad x \in \omega_h, \quad w_{(2)} = \mu_t \quad \text{при } x_2 = 0, l_2, \\ y^{j+1} &= y^j + \tau w_{(2)}. \end{aligned}$$

Обращаем внимание на постановку краевых условий для $w_{(1)}$ при прогонке по строкам и для $w_{(2)}$ при прогонке по столбцам. Если μ не зависит от t , $\mu = \mu(x)$, то $w_{(1)}$ и $w_{(2)}$ удовлетворяют однородным граничным условиям.

Пример 5. Рассмотрим задачу (26). Оператор L в этом случае аппроксимируется разностным оператором

$$Ly = 0,5 \sum_{\alpha, \beta=1}^p \left[(k_{\alpha\beta}(x, t) y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x, t) y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right],$$

а коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 &\leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha \xi_\beta \leq \\ &\leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 \quad \text{для всех } x \in \bar{G}_0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $c_2 \geq c_1 > 0$ — постоянные. Липшиц-непрерывность оператора $A(t)y = -\Lambda(t)y$ в $H = \dot{\Omega}$ обеспечивается требованием $|(k_{\alpha\beta})_t| \leq c_3$, c_3 — постоянная.

Регуляризатор $R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$, где R_α выбирается так же, как и в предыдущем примере

$$R_\alpha y = -\sigma c_2 \dot{\Lambda}_\alpha y, \quad \dot{\Lambda}_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Факторизованная схема (39) в этом случае устойчива при условии (40) или $\sigma \geq (1 + \varepsilon)/4$, $\varepsilon > 0$, и имеет второй порядок точности по всем переменным.

Аналогично проводится построение факторизованной схемы для исходной схемы вида

$$(E + \tau^2 R) y_{tt} + Ay = \varphi, \quad R = \sum_{\alpha=1}^p R_{\alpha}, \quad (41)$$

где R_{α} — попарно перестановочные, самосопряженные и положительные операторы. Эта схема соответствует уравнению гиперболического типа $\partial^2 u / \partial t^2 = Lu + f$. Переход от схемы (41) к факторизованной схеме можно осуществить несколькими способами, факторизуя оператор при \hat{y} , y_{tt} или y_t . Мы рассмотрим один из этих способов. Заменяя оператор $E + \tau^2 R$ факторизованным оператором

$$E + \tau^2 \tilde{R} = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_{\alpha}), \quad \tilde{R} = R + \tau^2 Q_p, \quad Q_p = Q_p^* > 0,$$

получим схему

$$(E + \tau^2 \tilde{R}) y_{tt} + Ay = \varphi,$$

которая устойчива, если устойчива исходная схема (так как $\tilde{R} = \tilde{R}^* > R$), и отличается от исходной схемы по аппроксимации на величину $O(\tau^2)$.

Пример 6. Рассмотрим уравнение гиперболического типа в прямоугольнике $\bar{G}_0 = (0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2)$, на границе Γ которого заданы краевые условия первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (L_1 + L_2) u + f(x, t), \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad \alpha = 1, 2, \\ x \in G_0, \quad t \in (0, T], \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G}_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Выберем исходную схему с весами на равномерной прямоугольной сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_{\alpha} = 0, 1, \dots, N_{\alpha}, h_{\alpha} N_{\alpha} - l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} y_{tt} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi(x, t), \\ t = j\tau, \quad j = 1, 2, \dots, \quad x \in \omega_h, \\ y|_{\omega_h} = \mu(x, t), \quad t = j\tau, \quad j \geq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

где $\hat{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0))$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_{\alpha} y = y_{x_{\alpha} x_{\alpha}}$.

Предположим, что $4\sigma \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, т. е. исходная схема (43) устойчива.

Запишем схему (43) в каноническом виде

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{\bar{t},t} = \Lambda y + \varphi$$

и перейдем от нее к экономичной факторизованной схеме

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda_1)(E - \sigma \tau^2 \Lambda_2) y_{\bar{t},t} = \Lambda y + \varphi. \quad (44)$$

Перепишем схему (43) в виде

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_t = F, \quad F = (E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}} + \tau(\Lambda y + \varphi)$$

и факторизуем оператор $E - \sigma \tau^2 \Lambda$ при y_t :

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda_1)(E - \sigma \tau^2 \Lambda_2) y_t = F$$

или

$$\sigma^2 \tau^3 \Lambda_1 \Lambda_2 y_{\bar{t}} + (E - \sigma \tau^2 \Lambda + 0,5 \sigma^2 \tau^4 \Lambda_1 \Lambda_2) y_{\bar{t},t} = \Lambda y + \varphi. \quad (45)$$

Обе факторизованные схемы (44) и (45) имеют второй порядок аппроксимации по τ при любом σ и устойчивы при $4\sigma \geq 1 + \varepsilon$, так как операторы $R_\alpha = -\Lambda_\alpha$ (в пространстве $H = \dot{\Omega}$ функций, заданных на ω_h и равных нулю на границе γ_h сетки) перестановочные, самосопряженные и положительные.

При определении $\hat{y} = y^{j+1}$ из полученных разностных уравнений следует помнить о граничных условиях для промежуточного значения. Уравнение $B_1 B_2 y_{\bar{t},t} = \Lambda y$ можно решать так:

$$B_1 w_{(1)} = \Lambda y + \varphi, \quad w_{(1)}|_{\gamma_h} = B_2 \mu_{\bar{t},t}, \quad x_1 = 0, \quad l_1,$$

$$B_2 w_{(2)} = w_{(1)}, \quad w_{(2)}|_{\gamma_h} = \mu_{\bar{t},t}, \quad x_2 = 0, \quad l_2,$$

$$y^{j+1} = 2y^j - y^{j-1} + \tau^2 w_{(2)}.$$

Для вычисления y^{j+1} надо помнить три последовательности величин y^{j-1} , y^j и $w_{(2)}$. Если переписать схему в виде

$$B_1 B_2 y_t = \Phi, \quad \Phi = \tau(\Lambda y + \varphi) + B_1 B_2 y_{\bar{t}},$$

то для определения y^{j+1} надо помнить только две последовательности y^j и $w_{(2)}$. Однако при этом увеличивается объем вычислений из-за усложнения правой части.

Решение уравнения (45) приводилось выше.

Нетрудно построить экономичные факторизованные схемы для задачи (42), когда L_α определяются формулами

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2.$$

В этом случае в качестве исходной выбираем схему

$$(E + \tau^2 R) y_{tt} = \Lambda y + \varphi,$$

где

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha} y_{x_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \quad R y = -\sigma \hat{\Lambda} y, \quad \hat{\Lambda} y = y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2}.$$

Параметр σ выберем так, чтобы выполнялось условие устойчивости

$$(R y, y) \geq (1 + \varepsilon) (-\Lambda y, y) / 4, \quad \varepsilon > 0$$

при любом $y \in H = \mathcal{Q}$, где \mathcal{Q} — множество функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе сетки γ_h . Для этого, очевидно, достаточно положить $\sigma = (1 + \varepsilon) c_2 / 4$.

Заменяя оператор $E + \tau^2 (R_1 + R_2)$ факторизованным оператором $(E + \tau^2 R_1)(E + \tau^2 R_2)$, где $R_{\alpha} y = -\sigma y_{x_{\alpha} x_{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2$, получаем экономичную схему

$$(E + \tau^2 R_1)(E + \tau^2 R_2) y_{tt} = \Lambda y + \varphi,$$

$$y|_{\gamma} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x),$$

где $\tilde{u}_0 = \bar{u}_0 + 0,5\tau(Lu + f)|_{t=0}$.

Эта схема абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по τ и $|h|$.

5. Экономичные схемы для систем уравнений параболического и гиперболического типов. Пусть

$$\bar{G} = \{0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

— p -мерный параллелепипед,

$$\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T], \quad Q_T = G \times (0 \leq t \leq T).$$

Пусть $k = (k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{sm})$, $s, m = 1, 2, \dots, n$ — клеточная матрица $p \times p$ с клетками $n \times n$, удовлетворяющая условию симметрии

$$k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t) = k_{\beta\alpha}^{ms}(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \bar{Q}_T \quad (46)$$

и условию положительной определенности

$$c_1 \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 \leq \sum_{s, m=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t) \xi_{\beta}^m \xi_{\alpha}^s \leq c_2 \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2, \quad (47)$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, $\xi_{\alpha} = (\xi_{\alpha}^1, \dots, \xi_{\alpha}^s, \dots, \xi_{\alpha}^n)$ — произвольный вещественный вектор. Положительная определенность матрицы k является условием сильной эллиптичности

оператора

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta} u, \quad L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad (48)$$

где $u = (u^1, \dots, u^i, \dots, u^n)$ — вектор размерности n , т. е. условием выполнения неравенства

$$c_1(-L^{(0)}u, u) \leq (-Lu, u), \quad (49)$$

где

$$(u, v) = \sum_{s=1}^n \int_G u^s(x) v^s(x) dx, \quad dx = dx_1 \dots dx_p,$$

$L^{(0)}u = \Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$, u — произвольная достаточно гладкая вектор-функция, равная нулю на границе Γ .

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти непрерывное в \bar{Q}_T решение системы уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u &= \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G}. \end{aligned} \quad (50)$$

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p)\}$ — сетка в \bar{G} , $0 \leq i_\alpha \leq N_\alpha$, $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, и $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots\}$ — сетка на отрезке $0 \leq t \leq T$.

Оператор $L_{\alpha\beta}$ аппроксимируем разностным оператором (см. гл. IV)

$$\Lambda_{\alpha\beta} u = 0,5 \left[(k_{\alpha\beta} u_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right] \quad (51)$$

и обозначим

$$\Lambda u = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \Lambda_{\alpha\beta} u. \quad (52)$$

При $\beta = \alpha$ получаем

$$\Lambda_{\alpha\alpha} u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad a_\alpha = 0,5 (k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1)\alpha}).$$

Введем пространство $\mathring{\Omega}$ — множество сеточных вектор-функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе γ_h . Скалярное произведение в $\mathring{\Omega}$ определяется так:

$$(y, v) = \sum_{s=1}^n (y^s, v^s), \quad (y^s, v^s) = \sum_{x \in \omega_h} y^s(x) v^s(x) h_1 \dots h_p.$$

В силу (46) оператор Λ является самосопряженным оператором, так что $(\Lambda \mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{y}, \Lambda \mathbf{v})$.

Из (47) следуют равенства

$$c_1(-\Lambda^{(0)} \mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq (-\Lambda \mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq c_2(-\Lambda^{(0)} \mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathring{\Omega}, \quad (53)$$

где

$$\Lambda^{(0)} \mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^p \mathbf{y}_{\tilde{x}_\alpha x_\alpha}, \quad (-\Lambda^{(0)} \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^n \left[1, (y_{\tilde{x}_\alpha}^s)^2 \right].$$

В качестве регуляризатора выберем оператор

$$R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha, \quad R_\alpha \mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}_{\tilde{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (54)$$

где σ — числовой параметр, который будет выбран из соображений устойчивости.

Напишем сначала двухслойную экономичную схему. Исходная схема имеет вид

$$(E + \tau R) \mathbf{y}_t = \Lambda \mathbf{y} + \Phi,$$

где $\Phi = f^j + O(|h|^2 + \tau^2)$.

Заменяя $E + \tau R = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$ факторизованным оператором

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha) = E + \tau \tilde{R}, \quad \tilde{R} = R + \tau Q_p, \quad Q_p = \sum_{\alpha < \beta} R_\alpha R_\beta + \dots,$$

получаем экономичную факторизованную схему

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha) \mathbf{y}_t &= \Lambda \mathbf{y} + \Phi, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ \mathbf{y}(x, t) &= \mu(x, t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ \mathbf{y}(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (55)$$

Для отыскания вектор-функции $\mathbf{y}^{j+1} = \hat{\mathbf{y}}$ можно, например, воспользоваться таким алгоритмом:

$$(E + \tau R_1) \mathbf{w}_{(1)} = \Lambda \mathbf{y} + \Phi,$$

$$\mathbf{w}_{(1)} = \prod_{\beta=2}^p (E + \tau R_\beta) \mu_t \quad \text{при } x_1 = 0, l_1,$$

$$(E + \tau R_\alpha) \mathbf{w}_{(\alpha)} = \mathbf{w}_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$\mathbf{w}_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau R_\beta) \mu_t \quad \text{при } x_\alpha = 0, l_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p-1.$$

Схема (55) абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5 c_2$ и сходится со скоростью $O(\tau + |h|^2)$.

Второй порядок точности по τ имеет трехслойная схема

$$\mathbf{y}_i + \tau^2 R \mathbf{y}_{ii} = \Lambda \mathbf{y} + \varphi. \quad (56)$$

Перепишем ее в виде

$$(E + 2\tau R) \mathbf{y}_i = \mathbf{F}, \quad \text{где } \mathbf{F} = 2(\Lambda \mathbf{y} + \varphi) - (E - 2\tau R) \mathbf{y}_i,$$

и заменим оператор $E + 2\tau R = E + 2\tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$ факторизованным оператором

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_\alpha) = E + 2\tau R + 4\tau^2 Q_p.$$

Тогда получим факторизованную экономичную схему

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_\alpha) \mathbf{y}_i = \mathbf{F}. \quad (57)$$

Запишем ее в каноническом виде

$$(E + 2\tau^2 Q_p) \mathbf{y}_i + \tau^2 (R + \tau Q_p) \mathbf{y}_{ii} = \Lambda \mathbf{y} + \varphi, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mu \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_t, \\ \mathbf{y}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{y}_i(x, 0) = \tilde{\mathbf{u}}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_0(x) = L\mathbf{u}_0 + \mathbf{f}(x, 0)$.

Для определения $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{i+1}$ из (58) воспользуемся алгоритмом

$$(E + \tau R_1) \mathbf{w}_{(1)}^s = \mathbf{F}^s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{w}_{(1)}^s = \prod_{\beta=2}^p (E + \tau R_\beta) \mu_\beta^s \quad \text{при } x_1 = 0, l_1,$$

$$(E + \tau R_\alpha) \mathbf{w}_{(\alpha)}^s = \mathbf{w}_{(\alpha-1)}^s, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$\mathbf{w}_{(\alpha)}^s = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau R_\beta) \mu_\beta^s \quad x_\alpha = 0, \quad l_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p-1,$$

$$\mathbf{y}^{i+1} = \mathbf{y}^i + \tau \mathbf{w}_{(p)}.$$

Компоненты $\mathbf{w}_{(\alpha)}^s$ находятся независимо.

Исходная схема (56) устойчива, если положить

$$\sigma = c_2(1 + \epsilon)/4, \quad \epsilon = \text{const} > 0.$$

Операторы R_α попарно перестановочны и положительны, поэтому $Q_p > 0$, а также $\tilde{R} > R$, где $\tilde{R} = R + \tau Q_p$ — регуляризатор схемы (58). Отсюда следует, что схема (58) в Ω абсолютно устойчива.

Пусть \mathbf{y} — решение задачи (58), \mathbf{u} — решение исходной задачи (50). Подставляя в (58) $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{u}$, получим для погрешности \mathbf{z} условия

$$(E + 2\tau^2 Q_p) \mathbf{z}_i + \tau^2 (R + \tau Q_p) \mathbf{z}_{it} = \Lambda \mathbf{z} + \Psi,$$

$$\mathbf{z} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad \mathbf{z}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \quad (59)$$

$$\mathbf{z}_t(x, 0) = \mathbf{v}(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h,$$

где

$$\Psi = \Lambda \mathbf{u} + \varphi - \mathbf{u}_i - \tau^2 R \mathbf{u}_{it} - 2\tau^2 Q_p \mathbf{u}_t = \Psi_0 - 2\tau^2 Q_p \mathbf{u}_t, \quad (60)$$

Ψ_0 — погрешность аппроксимации исходной схемы (56), $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_t = O(\tau)$.

Так как $B = E + 2\tau^2 Q_p > E$, то для схемы (59) верны теоремы 6 и 9 из гл. VI, § 3. Погрешность аппроксимации \mathbf{v} второго начального условия оценивается в норме $\|\mathbf{v}\|_D$, где

$$\|\mathbf{v}\|_D^2 = (D\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \tau^2 (R\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \tau^3 (Q_p \mathbf{v}, \mathbf{v}) = O(\tau^6),$$

$$\|\mathbf{v}\|_D = O(\tau^3), \quad \text{так как } \mathbf{v} = O(\tau).$$

Из (60) видно, что $\Psi = O(\tau^2 + |h|^2)$. Требования гладкости, при которых $\Psi = O(\tau^2 + |h|^2)$ и $\|\mathbf{v}\|_D = O(\tau^2)$, возрастают с ростом числа измерений p . Эти требования можно ослабить, используя, например, при выводе априорных оценок для уравнения (59) с правой частью $\Psi = \tau^2 Q_p \mathbf{v} = \tau^2 \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} Q_p^{(s)} \mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t$, следующие неравенства:

$$2\tau (\Psi, \mathbf{z}_i) = 2\tau^3 (Q_p \mathbf{v}, \mathbf{z}_i) = 2\tau^3 (Q_p^{(2)} \mathbf{v}, \mathbf{z}_i) + 2\tau^3 \sum_{s=3}^p \tau^{s-2} (Q_p^{(s)} \mathbf{v}, \mathbf{z}_i) \leq$$

$$\leq \tau \|\mathbf{z}_i\|^2 + \tau^5 \|Q_p^{(2)} \mathbf{v}\|^2 + \sum_{s=3}^p \tau^s (Q_p^{(s)} \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) + \sum_{s=3}^p \tau^{s+2} (Q_p^{(s)} \mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq$$

$$\leq \tau (B \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) + \tau^5 \|Q_p^{(2)} \mathbf{v}\|^2 + \sum_{s=3}^p \tau^{s+2} (Q_p^{(s)} \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Два последних слагаемых в этом неравенстве есть величины $O(\tau^6)$; они дают вклад в оценку погрешности \mathbf{z} .

Таким образом, схема (58) сходится в сеточном пространстве \dot{W}_2^1 со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Перейдем теперь к системе уравнений гиперболического типа. Требуется найти непрерывное в цилиндре \bar{Q}_τ решение системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = L \mathbf{u} + \mathbf{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q_\tau, \quad L = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta}, \quad (61)$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mu(x, t) & \text{ при } x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{u}(x, 0)}{\partial t} = \bar{\mathbf{u}}_0(x) & \text{ при } x \in \bar{\Gamma}. \end{aligned} \quad (62)$$

Оператор $L = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta}$ определяется формулой (48).

Система уравнений теории упругости

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \Delta \mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_\alpha^2},$$

где $\lambda = \text{const} > 0$ и $\mu = \text{const} > 0$ — коэффициенты Ламэ, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^p)$ — вектор-функция размерности p , очевидно, является частным случаем системы (61) при $n = p$ и

$$k_{\alpha\beta}^{sm} = \mu \delta_{\alpha\beta} \delta_{sm} + (\lambda + \mu) \delta_{\alpha s} \delta_{\beta m}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Условие (46) выполняется автоматически. Условие (47) также выполнено при

$$c_1 = \mu, \quad c_2 = \lambda + 2\mu.$$

Покажем, что $c_1 = \mu$:

$$\begin{aligned} \sum_{s,m=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}^{sm} \xi_\alpha^s \xi_\beta^m &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha, s=1}^p \xi_\alpha^\alpha \xi_s^s = \\ &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 + (\lambda + \mu) \left(\sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^\alpha \right)^2 \geq \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать также, что $c_2 = \lambda + 2\mu$:

$$\begin{aligned} \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha, s=1}^p \xi_\alpha^\alpha \xi_s^s &\leq \\ &\leq \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 + \frac{\lambda + \mu}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^p (\xi_\alpha^\alpha)^2 + \sum_{s=1}^p (\xi_s^s)^2 \right] = \\ &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha=1}^p (\xi_\alpha^\alpha)^2 \leq (\lambda + 2\mu) \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_\alpha^s)^2. \end{aligned}$$

В качестве регуляризатора R выберем тот же оператор, что и ранее:

$$R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha, \quad R_\alpha y = -\sigma y_{x_\alpha x_\alpha}.$$

Исходная схема

$$y_{\bar{t}t} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi$$

устойчива, если

$$\sigma = \frac{c_2(1+\varepsilon)}{4}, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Заменяя $E + \tau^2 R = E + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$ факторизованным оператором

$D = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_\alpha)$, получим экономичную факторизованную схему

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_\alpha) y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad t \in \omega_v,$$

$$y = \mu \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_v,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h,$$

где

$$\bar{u}_0(x) = \bar{u}_0 + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)).$$

Можно показать, что эта схема абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации, $\Psi = O(\tau^2 + |h|^2)$ и $\nu = O(\tau^2)$. Отсюда следует ее сходимость со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Отыскание вектор-функции y^{j+1} сводится к последовательному от α к $\alpha+1$ решению методом прогонки трехточечных уравнений вида $(E + \tau^2 R_\alpha) w = F_\alpha$ для каждой из компонент вектора w .

Воспользуемся, например, следующим алгоритмом:

$$(E + \tau^2 R_1) w_{(1)} = F, \quad F = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_\alpha) y_{\bar{t}t} + \tau(\Lambda y + \varphi),$$

$$(E + \tau^2 R_\alpha) w_{(\alpha)} = w_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad y^{j+1} = y^j + \tau w_{(p)}.$$

Для вектор-функций $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, ставятся при $x_\alpha = 0$, l_α следующие краевые условия:

$$w_{(1)} = (E + \tau^2 R_2) \dots (E + \tau^2 R_p) \mu_t, \quad x_1 = 0, \quad l_1,$$

$$w_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau^2 R_\beta) \mu_t \quad \text{при} \quad x_\alpha = 0, \quad l_\alpha.$$

Так как операторы $D_\alpha = E + \tau^2 R_\alpha$ имеют диагональную матрицу коэффициентов с диагональными клетками, то компоненты вектора $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, определяются независимо.

§ 3. Метод суммарной аппроксимации

1. Постановка задачи. Рассмотренная в § 1 продольно-поперечная схема (метод переменных направлений) не допускает непосредственного обобщения на случай трех и большего числа измерений и для параболических уравнений общего вида. Что касается экономичных факторизованных схем из § 2, то они применимы в предположении, что область G изменения аргумента $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ есть параллелепипед.

Необходимо указать общий метод получения экономичных схем, пригодных для уравнений с переменными и даже разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений.

Таким методом является метод суммарной аппроксимации, которому и посвящен данный параграф.

Основное изложение мы проведем для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad k_\alpha \geq c_1 > 0,$$

в произвольной p -мерной области G с границей Γ , если заданы

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}. \quad (2)$$

Квазилинейное уравнение теплопроводности соответствует случаю

$$k_\alpha = k_\alpha(x, t, u) \quad \text{и} \quad f = f(x, t, u).$$

Конечно, термин «произвольная область» нельзя понимать буквально. Граница Γ области должна быть достаточно гладкой, чтобы обеспечить существование гладкого решения $u = u(x, t)$ исходной задачи (1)–(2). При оценке погрешности аппроксимации и точности разностных схем мы всегда предполагаем, что решение исходной задачи для дифференциального уравнения существует и имеет нужные по ходу изложения производные.

Все экономичные методы имеют одну общую алгоритмическую идею: процесс отыскания приближенного решения многомерной задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых решается простая задача. Так, например, для уравнений второго порядка параболического или гиперболического типа такой простой, «первичной», алгебраической задачей является трехточечная разностная задача (разностное уравнение второго порядка), которая решается методом прогонки. Эта трехточечная разностная задача, как правило, может быть трактована как разностная

аппроксимация одномерного (по x_α) дифференциального уравнения. Таким образом, экономичный алгоритм решения сложных задач есть цепочка простых алгоритмов. Отсюда становятся понятными применяемые различными авторами термины для экономичных методов решения многомерных задач — метод переменных направлений (на каждом этапе решается одномерная задача по фиксированному направлению x_α), метод дробных шагов (любой сложный вычислительный процесс ведется поэтапно с использованием промежуточных (дробных) значений), метод расщепления (сведение более сложной к более простым задачам, «расщепление» сложной задачи на простые) и др. Все эти термины, отражая одну из сторон экономичных методов, имеют право на существование.

Однако мы в основу классификации разностных методов положим здесь не способ получения, не способ решения разностных уравнений, а понятие самой разностной схемы.

2. **Суммарная аппроксимация.** Фундаментальным свойством разностной схемы является свойство аппроксимации на решении исходного дифференциального уравнения. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширяет класс решаемых задач и приводит к *аддитивным схемам*. Эти новые схемы (общее определение которых будет дано в п. 10) имеют две основные черты:

1) переход со слоя j на слой $j+1$ осуществляется при помощи последовательности обычных (двухслойных, трехслойных и т. д.) схем,

2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем (*аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией*).

При этом каждая из промежуточных схем цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.

Мы уже встречались в гл. II с необходимостью расширения понятия аппроксимации — разностная схема не имеет на сетке ω_t локальной аппроксимации (в норме C) требуемого порядка, однако имеет такой порядок аппроксимации в негативной норме, т. е. в некотором суммарном смысле.

Аналогично может оказаться, что схема на сетке ω_t по аргументу t не имеет локальной аппроксимации и аппроксимация достигается при суммировании невязки по нескольким временным слоям. Проиллюстрируем понятие суммарной аппроксимации на простых примерах.

Пример 1. Пусть дана задача Коши

$$\frac{du}{dt} + au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} + a_1 y^j = 0, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} + a_2 y^{j+1/2} = 0, \quad (3)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad y^0 = u_0, \quad a_1 + a_2 = a.$$

Она представляет собой цепочку из двух явных схем.

Вычислим невязки ψ_1 и ψ_2 для каждого из уравнений. Полагая $y^j = z^j + u^j$, $y^{j+1/2} = z^{j+1/2} - \bar{u}$, $\bar{u} = 0,5(u^j + u^{j+1})$, получим

$$\frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau} + a_1 z^j = -\psi_1^j, \quad \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau} + a_2 z^{j+1/2} = -\psi_2^j,$$

где

$$\psi_1 = \frac{u^{j+1} - u^j}{2\tau} + a_1 u^j, \quad \psi_2 = \frac{u^{j+1} - u^j}{2\tau} + a_2 \frac{u^j + u^{j+1}}{2}.$$

Подставим сюда

$$u^{j+1} = u^{j+1/2} + 0,5\tau \dot{u}^{j+1/2} + \tau^2/8 \ddot{u}^{j+1/2} + O(\tau^3),$$

$$u^j = u^{j+1/2} - 0,5\tau \dot{u}^{j+1/2} + \tau^2/8 \ddot{u}^{j+1/2} + O(\tau^3),$$

$$u^{j+1/2} = u(t_j + 0,5\tau), \quad \dot{u} = \partial u / \partial t, \quad \ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2,$$

тогда

$$\psi_1 = \left(\frac{1}{2} \dot{u} + a_1 u \right)^{j+1/2} - \frac{1}{2} a_1 \tau \dot{u}^{j+1/2} + O(\tau^2),$$

$$\psi_2 = \left(\frac{1}{2} \dot{u} + a_2 u \right)^{j+1/2} + O(\tau^2).$$

Отсюда видно, что

$$\psi_1 = O(1), \quad \psi_2 = O(1), \quad \psi_1 + \psi_2 = O(\tau),$$

т. е. ни одна из промежуточных схем не обладает аппроксимацией, а их совокупность имеет суммарную аппроксимацию $O(\tau)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t).$$

Обозначим $Lu = \partial^2 u / \partial x^2$.

Введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$ и оператор $\Lambda u = u_{xx} \sim Lu$. Будем пользоваться на нечетных слоях явной схемой, а на четных слоях — неявной схемой

$$\frac{y^{2j+1} - y^{2j}}{\tau} = 2(1 - \sigma) \Lambda y^{2j}, \quad \frac{y^{2j+2} - y^{2j+1}}{\tau} = 2\sigma \Lambda y^{2j+2}, \quad (4)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\sigma \geq 0$ — произвольный параметр. Вычислим невязки

$$\psi_1 = \frac{u^{2j+1} - u^{2j}}{\tau} - 2(1 - \sigma) \Lambda u^{2j},$$

$$\psi_2 = \frac{u^{2j+2} - u^{2j+1}}{\tau} - 2\sigma \Lambda u^{2j+2}.$$

Подставив сюда

$$\begin{aligned} u^{2j+2} &= u^{2j+1} + \tau \dot{u}^{2j+1} + 0,5\tau^2 \ddot{u}^{2j+1} + O(\tau^3), \\ u^{2j} &= u^{2j+1} - \tau \dot{u}^{2j+1} + 0,5\tau^2 \ddot{u}^{2j+1} + O(\tau^3), \\ \Lambda u &= Lu + O(h^2), \quad Lu = \dot{u}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \dot{\psi}_1 + \psi_1^*, \quad \psi_2 = \dot{\psi}_2 + \psi_2^*, \quad \psi_\alpha^* = O(\tau^2 + h^2), \quad \alpha = 1, 2, \\ \dot{\psi}_1 &= ((2\sigma - 1)\dot{u} + (1,5 - 2\sigma)\tau\ddot{u})^{2j+1}, \\ \dot{\psi}_2 &= (- (2\sigma - 1)\dot{u} + (0,5 - 2\sigma)\tau\ddot{u})^{2j+1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\psi_1 = O(1), \quad \psi_2 = O(1) \quad \text{при } \sigma \neq 0,5,$$

однако

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = O((\sigma - 0,5)\tau + h^2 + \tau^2) \quad \text{при любом } \sigma.$$

Нетрудно заметить, что можно исключить y^{2j+1} , сложив уравнения (4). Тогда мы получим схему с весами с шагом 2τ :

$$\frac{y^{2j+2} - y^{2j}}{2\tau} = \Lambda(\sigma y^{2j+2} + (1 - \sigma)y^{2j}), \quad j = 0, 1, \dots$$

Для удобства записи лучше ввести промежуточное значение $y^{j+1/2}$ и уменьшить шаг τ вдвое:

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = (1 - \sigma)\Lambda y^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \sigma\Lambda y^{j+1}.$$

Переход от слоя j к слою $j+1$ происходит в два этапа: сначала по явной, а затем по неявной схеме.

Конечно, приведенный пример не очень интересен сам по себе, так как здесь исключение промежуточного значения y легко достигается и приводит к хорошо известной схеме с весами, которая аппроксимирует дифференциальное уравнение в обычном смысле. Он носит лишь иллюстративный характер. В общем случае, исключение промежуточных значений и сведение к схеме, содержащей значения y лишь на целых шагах, не всегда возможно и нецелесообразно при теоретических исследованиях.

3. Сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Пусть дано многомерное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_p), \end{aligned} \tag{5}$$

где L — линейный дифференциальный оператор, действующий на

$u(x, t)$ как функцию x , $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точка p -мерной области G с границей Γ , на которой заданы некоторые граничные условия. Для построения экономичных методов основную роль играет возможность представления оператора L в виде суммы операторов более простой структуры

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p.$$

Так, например, если

$$Lu = \Delta u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},$$

то L_α есть оператор второй производной по аргументу x_α (одномерный оператор).

Поставим задаче (5) в соответствие цепочку «одномерных» уравнений (первую цепочку).

Уравнение (5) или

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f(x, t) = 0$$

перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{P}_\alpha u = 0, \quad \mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t)$, ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) — произвольные функции (обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$), удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке $0 \leq t \leq t_0$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом τ . Каждый интервал разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha\tau/p$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначая Δ_α — полунтервал $t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leq t_{j+\alpha/p}$. Будем последовательно (начиная с $\alpha = 1, 2, \dots$) решать уравнения

$$\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

полагая при этом

$$v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad (7) \\ \alpha = 1, 2, \dots, p$$

(для простоты будем считать, что на Γ задано однородное краевое условие первого рода). Решением этой задачи назовем значения $v(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, j_0$.

Каждое из уравнений $\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = 0$ или

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (6')$$

заменим разностной схемой (аппроксимируя du/dt и L_α соответствующими разностными выражениями на сетке ω_h с шагами h_1, h_2, \dots, h_p):

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

В простейшем случае это двухслойная схема, связывающая значения

$$y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p} \text{ и } y_{(\alpha-1)} = y^{j+(\alpha-1)/p}.$$

Например, это может быть схема с весами

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha (\sigma_\alpha y^{j+\alpha/p} + (1 - \sigma_\alpha) y^{j+(\alpha-1)/p}) + \varphi^{j+\alpha/p},$$

где σ_α — произвольный параметр, а $\Lambda_\alpha \sim L_\alpha$.

Схема (8) аппроксимирует уравнение $\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = 0$ в обычном смысле, так что

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\alpha/p} - (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+\alpha/p} \quad (9)$$

стремится к нулю (в некоторой норме) при $\tau \rightarrow 0$ и $h_\alpha \rightarrow 0$.

Система разностных уравнений (8) является аддитивной схемой. В самом деле, пусть $\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\alpha/p}$ — невязка для одной схемы (8) номера α .

Представляя Ψ_α в виде суммы

$$\Psi_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha^* \quad (10)$$

и учитывая, что $(\mathcal{P}_\alpha u)^{j+\alpha/p} = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$, получим

$$\Psi_\alpha = \dot{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*, \quad \dot{\Psi}_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2},$$

а $\|\Psi_\alpha^*\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, $|h| \rightarrow 0$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве сеточных функций, заданных на ω_h . Отсюда видно, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\Psi}_\alpha = 0, \quad \|\Psi\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0,$$

т. е. схема (8) обладает суммарной аппроксимацией, если каждая из схем (8) номера α аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (6).

Вопрос о близости решения разностной задачи сводится фактически к вопросу о близости решения исходной задачи (5) и решения цепочки задач (6) — (7), так как

$$\|y^j - u^j\| \leq \|y^j - v_{(p)}^j\| + \|v_{(p)}^j - u^j\|.$$

Наряду с (6) — (7) можно рассматривать также цепочку уравнений (вторую цепочку)

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad x \in G, \quad t_j < t \leq t_{j+1} \quad (11)$$

при дополнительных условиях сопряжения

$$\begin{aligned} v_{(\alpha)}(x, t_j) &= v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, n, \\ v_{(1)}(x, t_j) &= v(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad v_{(1)}(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Решением этой задачи является функция

$$v(x, t) = v_{(p)}(x, t).$$

В отличие от (6)–(7) здесь каждое из уравнений номера α решается на всем интервале $t_j < t \leq t_{j+1}$. Для некоторых частных случаев решения задач (6)–(7) и (11)–(12) совпадают (например, если $f_\alpha \equiv 0$ и L_α не зависят от t).

Обе цепочки (6)–(7) и (11)–(12) обладают свойством суммарной аппроксимации на решении $u = u(x, t)$ задачи (5). Проверим это для задачи (6)–(7).

Рассмотрим невязку

$$\Psi_\alpha = \mathcal{P}_\alpha u(x, t)$$

для уравнения (6) номера α . Так как $\mathcal{P}_\alpha u = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$, то $\Psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$, где $\dot{\psi}_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2}$, $\psi_\alpha^* = O(\tau)$, и следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0, \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* = O(\tau),$$

т. е. система (6)–(7) аппроксимирует уравнение (5) в суммарном смысле.

Таким образом, суммарная аппроксимация аддитивной схемы (8) достигается за счет того, что цепочка дифференциальных уравнений (6)–(7) аппроксимирует уравнения (5) в суммарном смысле, а каждая из схем (8) номера α аппроксимирует соответствующее уравнение (6) в обычном смысле.

Отметим, что суммарная аппроксимация для (6) и (11) гарантируется выполнением двух условий:

- 1) оператор L есть сумма $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$,
- 2) правая часть f есть сумма $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$.

Эти условия можно ослабить, положив

$$Lu - \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u = O(\tau), \quad f - \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = O(\tau).$$

Если L_α содержит производные лишь по переменному x_α , то такой оператор L_α называют одномерным, уравнения $\mathcal{P}_\alpha v_\alpha = 0$ —одномерными уравнениями, а соответствующую аддитивную схему (8)–локально-одномерной схемой (ЛОС).

В п. 5 мы рассмотрим локально-одномерную схему для уравнения теплопроводности.

4. Примеры сведения многомерной задачи к цепочке одномерных. Имеется класс задач, для которых решение задачи (6) или (11) совпадает на сетке ω_t с точным решением многомерной задачи (5).

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + au(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0,$$

где $a > 0$ — число. Очевидно, что $u(t) = u_0 e^{-at}$.

Представим a в виде суммы $a = a_1 + a_2$ и напишем задачу

$$\frac{dv_{(1)}}{dt} + a_1 v_{(1)}(t) = 0, \quad v_{(1)}(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

$$\frac{dv_{(2)}}{dt} + a_2 v_{(2)}(t) = 0, \quad v_{(2)}(0) = v_{(1)}(t^*), \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

где $t^* > 0$ — любое число. Решая эти уравнения, находим $v_{(1)}(t) = u_0 e^{-a_1 t}$, $v_{(2)}(t) = v_{(1)}(t^*) e^{-a_2 t} = u_0 e^{-a_1 t - a_2 t^*}$. Отсюда видно, что

$$v_2(t^*) = u(t^*).$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_1 u + L_2 u = 0, \quad L_\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$-\infty < x_\alpha < \infty, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \mu(x).$$

Решение этой задачи есть бегущая волна

$$u(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2 - t),$$

если $\mu(x)$ — дважды дифференцируемая функция.

Так как операторы L_1 и L_2 перестановочные, то

$$u(x, t^*) = v_{(2)}(x, t^*),$$

где $v_{(2)}(x, t^*)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x_1} = 0, \quad 0 < t \leq t^*, \quad v_{(1)}(x, 0) = \mu(x),$$

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x_2} = 0, \quad 0 < t \leq t^*, \quad v_{(2)}(x, 0) = v_{(1)}(x, t^*).$$

В самом деле, решение первого из этих уравнений имеет вид

$$v_{(1)}(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2).$$

Из второго уравнения находим

$$v_{(2)}(x, t) = \mu(x_1 - t^*, x_2 - t),$$

т. е. $v_{(2)}(x, t^*) = u(x, t^*)$.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2 + L_3) u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ -\infty < x_\alpha < \infty, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (13)$$

Ее решение дается формулой (см. [5]):

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t) =$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) u_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (14)$$

где $G(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ — функция источника, равная $G(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = G_0(x_1, \xi_1, t) G_0(x_2, \xi_2, t) G_0(x_3, \xi_3, t)$,

$$G_0(x_\alpha, \xi_\alpha, t) = \exp(-(x_\alpha - \xi_\alpha)^2/4t), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Здесь $G_0(x_\alpha, \xi_\alpha, t)$ — функция теплового источника для задачи Коши в случае одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)}, \quad t > 0, \quad v_{(\alpha)}(x, 0)$ задано.

Напишем цепочку одномерных уравнений теплопроводности:

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} = L_1 v_{(1)}, \quad \frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} = L_2 v_{(2)}, \quad \frac{\partial v_{(3)}}{\partial t} = L_3 v_{(3)}, \\ 0 < t \leq t^*, \quad v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(2)}(x, 0) = v_{(1)}(x, t^*), \\ v_{(3)}(x, 0) = v_{(2)}(x, t^*).$$

Отсюда находим

$$v_{(1)}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x_1, \xi_1, t) v_{(1)}(\xi_1, x_2, x_3, 0) d\xi_1, \\ v_{(2)}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x_2, \xi_2, t) v_{(2)}(\xi_1, \xi_2, x_3, 0) d\xi_2, \\ v_{(3)}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x_3, \xi_3, t) v_{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0) d\xi_3.$$

Подставляя сюда $v_{(1)}(\xi_1, x_2, x_3, 0) = u_0(\xi_1, x_2, x_3)$, $v_{(2)}(x_1, \xi_2, x_3, 0) = v_{(1)}(x_1, \xi_2, x_3, t^*)$, $v_{(3)}(x_1, x_2, \xi_3, 0) = v_{(2)}(x_1, x_2, \xi_3, t^*)$, получаем для $v_{(3)}(x, t^*)$ формулу (14) при $t = t^*$, т. е.

$$v_{(3)}(x, t^*) = u(x, t^*) \quad \text{при любом } t^* > 0.$$

Это свойство следует из представления функции $G(x, \xi, t) = G(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ в виде произведения одномерных функций источника $G_0(x_\alpha, \xi_\alpha, t)$. Для краевой задачи в парал-

лелепипеде $\{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$, когда помимо (13) заданы однородные краевые условия первого рода $u = 0$ при $x_\alpha = 0, l_\alpha; \alpha = 1, 2, 3$, указанное представление для функции источника сохраняет силу. Поэтому тождество (14) справедливо и в этом случае.

Очевидно, что для всех трех примеров совпадение $v_{(p)}(x, t)$ с $u(x, t)$ имеет место и во всех узлах сетки ω_τ .

Примеры 2 и 3 показывают, как можно разложить процесс, протекающий в пространстве, на последовательность процессов по координатным направлениям (одномерных процессов). Так, трехмерная задача о распространении тепла в пространстве (или в параллелепипеде с нулевой температурой на его поверхности) может быть смоделирована таким образом. Пусть при $t = t_0$ задано начальное распределение температуры. Установим при $t = t_0$ теплонепроницаемые перегородки по направлениям x_2, x_3 , т. е. будем пропускать тепло лишь по направлению x_1 . В момент $t = t_0 + \Delta t$ поменяем ролями направления x_1 и x_2 , а в момент $t = t_0 + 2\Delta t$ будем пропускать тепло лишь по направлению x_3 . В результате получим при $t = t_0 + 3\Delta t$ то же распределение температуры, что и в случае трехмерной теплопроводности (т. е. одновременно по всем направлениям x_1, x_2 и x_3) в момент $t = t_0 + \Delta t$. Таким образом, сведение трехмерного процесса к последовательности одномерных процессов приводит к увеличению продолжительности реального физического процесса в 3 раза.

Если среда неоднородна, например, оператор L_α в (6') имеет вид

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

то точного совпадения $v_{(p)}(x, t^*)$ с $u(x, t^*)$ нет, однако $v_{(p)}(x, t^*) = u(x, t^*) = O(t^*)$.

5. **Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области.** Пользуясь методом суммарной аппроксимации, нетрудно построить экономичные аддитивные схемы для параболических уравнений в области сложной формы. Мы проведем детальное исследование локально-одномерной схемы для уравнения теплопроводности в p -мерной области $\bar{G} = G + \Gamma$ сложной формы. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точка p -мерного евклидова пространства R_p .

Рассмотрим в цилиндре $\bar{Q}_{t_0} = \bar{G} \times [0 \leq t \leq t_0]$ следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \\ u|_\Gamma &= \mu(x, t), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь Γ —граница области G , L —эллиптический оператор второго порядка. Для упрощения изложения считаем, что $L = \Delta$ —оператор Лапласа, т. е. $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Предположим, что задача (15) имеет единственное достаточно гладкое решение.

Относительно области \bar{G} конструктивно используются два предположения: 1) пересечение области G любой прямой G_α , параллельной оси координат Ox_α , может состоять лишь из конечного числа интервалов, 2) возможно построение в области \bar{G} связной сетки ω_h , описанной в гл. IV, § 1, с шагами h_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Мы проведем изложение, предполагая, что пересечение прямой C_α и области G состоит из одного интервала Δ_α .

Итак, множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2, \dots, p$, а множество γ_h граничных узлов—из точек пересечения прямых C_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, проходящих через все внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ .

По аналогии с § 1 гл. IV вводятся $\gamma_{h, \alpha}$ —множество граничных по направлению x_α узлов, γ_h —множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega_{h, \alpha}^*$ —множество приграничных по направлению x_α узлов, ω_h^* —множество всех приграничных узлов, $\omega_{h, \alpha}^{**}$ —множество нерегулярных по направлению x_α узлов, ω_h^{**} —множество всех нерегулярных узлов, ω_h —множество всех регулярных узлов.

Для разностной аппроксимации оператора L_α в узле x выбираем трехточечный шаблон, состоящий из точек $x^{(-1\alpha)}$, x , $x^{(+1\alpha)}$. Разностный оператор $\Lambda_\alpha \sim L_\alpha$ имеет вид:

а) В регулярных узлах

$$\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1\alpha)} - 2y + y^{(-1\alpha)}). \quad (16)$$

б) В нерегулярных узлах

$$\Lambda_\alpha y = x_{x_\alpha x_\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_\alpha} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^*} \right), & x^{(-1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \\ \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha} \right), & x^{(+1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \end{cases} \quad (17)$$

где h_α^* —расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1\alpha)}$ или $x^{(-1\alpha)}$. Может оказаться, что оба соседних с $x \in \omega_{h, \alpha}^*$ узла $x^{(-1\alpha)}$ и $x^{(+1\alpha)}$ являются граничными, $x^{(\pm 1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}$, в этом случае

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha-}^*} \right), \quad (18)$$

где $h_{\alpha \pm}^*$ — расстояние между x и $x^{(\pm 1)} (h_{\alpha \pm}^* \leq h_{\alpha})$. Это выражение для $\Lambda_{\alpha} u$ является общим; если x — регулярный узел, то $h_{\alpha \pm}^* = h_{\alpha}^* = h_{\alpha}$, и мы приходим к формуле (16).

В регулярных узлах Λ_{α} имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_{\alpha} u - L_{\alpha} u = O(h_{\alpha}^2)$, в нерегулярных узлах $\Lambda_{\alpha} u - L_{\alpha} u = O(1)$

Перейдем теперь к написанию локально-одномерной схемы (ЛОС). Приведем сначала наводящие соображения согласно п. 3. На отрезке $0 \leq t \leq t_0$ введем сетку $\bar{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = t_0/j_0$. Пусть f_{α} — произвольные функции такие, что

$\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$. Формально заменим многомерное уравнение цепочкой одномерных уравнений теплопроводности

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_{\alpha} v_{(\alpha)} + f_{\alpha} \quad \text{при } t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leq t_{j+\alpha/p}, \quad (19)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in G,$$

с условиями

$$v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad (20)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots, p, \quad v_{(\alpha)} = \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma_{\alpha},$$

где $t_{j+\alpha/p} = (j + \alpha/p)\tau$.

Краевые условия для $v_{(\alpha)}$, очевидно, достаточно задавать не на всей границе Γ , а на ее части Γ_{α} , состоящей из точек пересечения Γ со всевозможными прямыми C_{α} , параллельными Ox_{α} и проходящими через любую внутреннюю точку $x \in G$ (см. гл. IV, § 1). Узлы $x \in \gamma_{h, \alpha}$ лежат на Γ_{α} .

Если, например, $G = \{0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}\}$ — параллелепипед, то Γ_{α} состоит из граней $x_{\alpha} = 0$ и $x_{\alpha} = l_{\alpha}$.

Аппроксимируя каждое уравнение теплопроводности номера α на полуинтервале $t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leq t_{j+\alpha/p}$ двухслойной схемой с весами, получим цепочку p одномерных схем, которую и назовем ЛОС:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} (\sigma_{\alpha} y^{j+\alpha/p} + (1 - \sigma_{\alpha}) y^{j+(\alpha-1)/p}) + \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p},$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \omega_{h, \alpha},$$

где σ_{α} — произвольное число. В дальнейшем мы ограничимся изучением лишь чисто неявных ЛОС ($\sigma_{\alpha} \equiv 1$):

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} y^{j+\alpha/p} + \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \omega_{h, \alpha}. \quad (21)$$

К этому уравнению следует присоединить краевое условие

$$y^{j+\alpha/p} = \mu^{j+\alpha/p} \quad \text{при } x \in \gamma_{h, \alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (22)$$

и начальное условие

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (23)$$

Из последующего будет видно, что правую часть $\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}$ и граничное значение $y^{j+\alpha/p}|_{\gamma_{h,\alpha}}$ можно выражать через $f_\alpha(x, t)$ и $\mu(x, t)$, взятые в произвольные моменты времени t_α^* и t_α^{**} на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$, так что $\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} = f_\alpha(x, t_\alpha^*)$, $\mu^{j+\alpha/p} = \mu(x, t_\alpha^{**})$. Это не отразится на порядке точности.

Для определенности будем полагать

$$\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} = f_\alpha(x, t_{j+0.5}), \quad \mu^{j+\alpha/p} = \mu(x, t_{j+\alpha/p}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Пусть известно y^j . Чтобы найти из (21)–(22) значение y^{j+1} на новом слое, мы должны решить p уравнений (21) с краевым условием (22), последовательно полагая $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Для определения $y^{j+\alpha/p}$ получаем краевую задачу вида

$$\begin{aligned} A_{i_\alpha} y_{i_\alpha-1}^{j+\alpha/p} - C_{i_\alpha} y^{j+\alpha/p} + A_{i_\alpha+1} y_{i_\alpha+1}^{j+\alpha/p} &= -F_\alpha^{j+\alpha/p} \quad \text{при } x \in \omega_h, \\ y^{j+\alpha/p} &= \mu^{j+\alpha/p} \quad \text{при } x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (24)$$

где указаны только те нижние индексы, которые меняются. Разностное уравнение пишется вдоль отрезка Δ_α , лежащего на прямой C_α ; концы этого отрезка принадлежат границе $\gamma_{h,\alpha}$. Разностное уравнение (24) решается методом прогонки вдоль всех отрезков Δ_α при фиксированном α . При этом затрачивается число арифметических операций, пропорциональное числу узлов сетки ω_h . Полагая последовательно $\alpha = 1, 2, \dots, p$ и меняя направления прогонок, определим $y^{j+1/p}, y^{j+2/p}, \dots, y^{j+\alpha/p}, \dots, y^{j+1}$, затратив при этом $O(1)$ операций на узел действий. Таким образом, ЛОС (21)–(23) является экономичной.

6. Погрешность аппроксимации ЛОС. Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) ЛОС и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (21) номера α не аппроксимирует уравнение (15), но сумма погрешностей аппроксимации $\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$ и $|h| \rightarrow 0$.

Пусть $u = u(x, t)$ — решение задачи (15) с $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$, а $y^{j+\alpha/p}, \alpha = 1, 2, \dots, p$, — решение задачи (21)–(23). Характеристикой точности ЛОС является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$.

Промежуточные значения $y^{j+\alpha/p}$ будем сравнивать с $u^{j+\alpha/p} = u(x, t_{j+\alpha/p})$, полагая $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$. Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в уравнение (21), получим для погрешности z^{j+1} задачу

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\alpha/p} + \psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} j &= 0, 1, \dots, j_0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ z^{j+\alpha/p} &= 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad z(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\psi^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}. \quad (26)$$

Вводя обозначение (верхние индексы при ψ_α опускаем)

$$\dot{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \quad (27)$$

и замечая, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f,$$

представим $\psi_\alpha = \psi_\alpha^{j+\alpha/p}$ в виде

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^* = & (\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}) + (\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}) - \\ & - \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \right). \end{aligned}$$

Из определения Λ_α и φ_α следует, что

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^* &= O(h_\alpha^2 + \tau) \quad \text{в регулярных узлах,} \\ \psi_\alpha^* &= O(1) \quad \text{в нерегулярных узлах.} \end{aligned}$$

Таким образом, $\psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* = O(\tau + |h|^2)$ в регулярных узлах, т. е. ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(\tau + |h|^2)$ в регулярных узлах сетки ω_h . В нерегулярных узлах $\psi = O(1)$.

7. Устойчивость ЛОС. Наша задача — показать, что из суммарной аппроксимации следует равномерная сходимость ЛОС со скоростью $O(\tau + |h|^2)$. Необходимо сначала доказать принцип максимума для ЛОС и получить априорные оценки в сеточной норме C для решения задачи (21) — (23), выражющие устойчивость ЛОС по начальным данным, по правой части и по граничным данным.

В § 2 гл. IV был доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$\begin{aligned} A(P)y(P) &= \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P) \quad \text{при } P \in \Omega, \\ y(P) &= \mu(P) \quad \text{при } P \in S, \end{aligned} \quad (28)$$

где P, Q — узлы связной сетки $\Omega + S$, $\mathcal{W}'(P)$ — окрестность узла P , не содержащая самого узла P . Коэффициенты $A(P)$ и $B(P, Q)$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} A(P) &> 0, \quad B(P, Q) > 0, \\ D(P) &= A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{W}'(P)} B(P, Q) \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Применим теоремы § 2 гл. IV к нашей задаче (21)–(23) и убедимся в том, что верна

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (21)–(23) равномерно (в метрике C) устойчива по начальным и граничным данным и по правой части, так что для решения задачи (21)–(23) при любых t и h справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|y^j\|_C &\leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq t^j} \|\mu(x, t')\|_{C_V} + \\ &+ \max_{0 < t' \leq t^j} h^2 \|\varphi(x, t')\|_{C^*} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi_{\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{\hat{C}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} t' &= t_{j'+\alpha/p}, \quad \varphi(x, t') = \varphi_{\alpha}^{j'+\alpha/p}, \\ h &= \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_{\alpha}, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y|, \quad \|y\|_{C_V} = \max_{x \in \gamma_h} |y|, \quad \|\varphi\|_{C^*} = \max_{x \in \omega_h^*} |\varphi|, \\ &\|\varphi\|_{\hat{C}} = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |\varphi|. \end{aligned}$$

Для доказательства представим решение задачи в виде суммы

$$y = \bar{y} + v + w,$$

где \bar{y} — решение однородных уравнений (21) с краевыми и начальными условиями (22)–(23), а v и w — решения неоднородных уравнений (21) с однородными краевыми и начальными условиями:

$$\frac{v^{j+\alpha/p} - v^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} v^{j+\alpha/p} + \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p}, \quad x \in \omega_h,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad v(x, 0) = 0, \quad v^{j+\alpha/p} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h, \alpha}, \quad (31)$$

$$\frac{w^{j+\alpha/p} - w^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} w^{j+\alpha/p} + \varphi_{\alpha}^{*j+\alpha/p}, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w^{j+\alpha/p} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h, \alpha}. \quad (32)$$

Здесь φ_{α} и φ_{α}^* определяются условиями

$$\varphi_{\alpha} = \begin{cases} \varphi_{\alpha} & \text{при } x \in \hat{\omega}_h, \\ 0 & \text{при } x \in \omega_h^*, \end{cases} \quad \varphi_{\alpha}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \hat{\omega}_h, \\ \varphi_{\alpha} & \text{при } x \in \omega_h^*, \end{cases}$$

так что

$$\varphi_{\alpha} + \varphi_{\alpha}^* = \varphi_{\alpha} \quad \text{при } x \in \omega_h.$$

т. е. φ_{α}^* отлична от нуля только в приграничных узлах.

Для удобства изложения введем сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{0, t_{j+\alpha/p} = (j + \alpha/p) \tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

содержащую не только узлы $t_j = j\tau$ сетки $\bar{\omega}_\tau$, но и фиктивные узлы $t_{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$; пусть ω'_τ — множество узлов сетки $\bar{\omega}_\tau$, для которых $t > 0$.

Обозначим через $P(x, t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$, — узел $(p+1)$ -мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S — границу Ω , состоящую из узлов $P(x, 0)$ при $x \in \omega_h$ и узлов $P(x, t_{j+\alpha/p})$ при $t_{j+\alpha/p} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_h$, для всех $\alpha = 1, 2, \dots, p$, $j = 0, 1, \dots, j_0$; пусть Ω_α^* есть множество узлов $P(x, t_{j+\alpha/p})$, где $x \in \omega_h$, α — приграничный по направлению x_α узел сетки $\bar{\omega}_h$.

Рассмотрим задачи для y и w . Запишем уравнение для y в канонической форме (28), используя выражение (18) для Λ_α , пригодное как для регулярных, так и для нерегулярных узлов:

$$\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{1}{h_{\alpha+}^*} + \frac{1}{h_{\alpha-}^*} \right) \right] \bar{y}^{j+\alpha/p} = - \frac{1}{h_{\alpha+}^* h_\alpha} \bar{y}_{\alpha+1}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{h_{\alpha-}^* h_\alpha} \bar{y}_{\alpha-1}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{\tau} \bar{y}^{j+(\alpha-1)/p}, \quad (33)$$

где

$$\bar{y}_{\alpha \pm 1}^{j+\alpha/p} = y(x(\pm 1\alpha), t_{j+\alpha/p}).$$

Отсюда видно, что условия (29) выполнены и $D(P) = 0$.

Из теоремы 2 § 2 гл. IV следует, что для решения уравнения (33) верна оценка

$$\max_{P \in \Omega + S} |\bar{y}(P)| \leq \max_{P \in S} |\bar{y}(P)|.$$

Учитывая, что

$$\max_{P \in \Omega + S} |\bar{y}(P)| = \max_{t' \in \omega'_\tau} \|\bar{y}(x, t')\|_C, \quad \text{где } \|y(x)\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|,$$

$$\max_{P \in S} |\bar{y}(P)| = \max \left(\max_{t' \in \omega'_\tau} \|\mu(x, t')\|_{C_\gamma}, \|u_0\|_C \right),$$

где $\|\mu(x)\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$, получаем

$$\|\bar{y}^{j_0}\|_C \leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j_0 \tau} \|\mu(x, t')\|_{C_\gamma}. \quad (34)$$

Обратимся теперь к задаче (32) для w . Перепишем (32) в каноническом виде (28)

$$\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{1}{h_{\alpha+}^*} + \frac{1}{h_{\alpha-}^*} \right) \right] w^{j+\alpha/p} = \frac{1}{h_{\alpha+}^* + h_\alpha} w_{\alpha+1}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{h_{\alpha-}^* - h_\alpha} w_{\alpha-1}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{\tau} w^{j+(\alpha-1)/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$w^{j+\alpha/p} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h_\alpha}, \quad w(x, 0) = 0,$$

т. е. $w = 0$ на границе S сетки Ω :

$$w(P) \equiv 0 \quad \text{при } P \in S.$$

Правая часть φ^* отлична от нуля лишь в узлах (x, t') , где $x \in \omega_h^*$. В этих узлах, в силу однородного краевого условия $w = 0$, имеем

$$D(P) \geq \min_\alpha \frac{1}{h_{\alpha \pm}^* + h_\alpha} = \frac{1}{h^2}, \quad \text{где } h = \max_\alpha h_\alpha,$$

Применяя затем теорему 4 из § 2 гл. IV, получаем

$$\max_{\Omega+S} |y(P)| \leq \max_{t' \in \omega_\tau^*} \left\| \frac{\varphi^*(x, t')}{D} \right\|_{C^*} \leq \max_{t' \in \omega_\tau^*} h^2 \|\varphi^*\|_{C^*}. \quad (35)$$

Чтобы оценить функцию v , предположим, что $P = x$ — точка p -мерной сетки ω_h , и запишем уравнение (31) в каноническом виде (28)

$$\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{1}{h_{\alpha+}^*} + \frac{1}{h_{\alpha-}^*} \right) \right] v^{j+\alpha/p} = \frac{1}{h_{\alpha+}^* + h_\alpha} v_{\alpha+1}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{h_{\alpha-}^* - h_\alpha} v_{\alpha-1}^{j+\alpha/p} + F_\alpha^{j+\alpha/p},$$

$$v^{j+\alpha/p} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h_\alpha}, \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{где}$$

$$F_\alpha^{j+\alpha/p} = \frac{v^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}.$$

В этом случае $D(P) = 1/\tau$ и теорема 3 из § 2 гл. IV дает

$$\|v^{j+\alpha/p}\|_C \leq \left\| \frac{F_\alpha^{j+\alpha/p}}{D} \right\|_C = \tau \|F_\alpha^{j+\alpha/p}\|_C \leq \|v^{j+(\alpha-1)/p}\|_C + \tau \|\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}\|_C. \quad (36)$$

Суммируем (36) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \|v^j\|_C + \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}\|_C,$$

а затем по $j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$:

$$\|v^{j_0}\|_C \leq \sum_{j=0}^{j_0-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi_\alpha^{j+\alpha/p}\|_C. \quad (37)$$

В силу произвольности j_0 из (34), (35) и (37) следует оценка (30) для решения задачи (21)–(23).

8. Равномерная сходимость ЛОС. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть задача (15) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_{t_0} решение $u=u(x, t)$ и существуют непрерывные в Q_{t_0} производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_\alpha^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq p.$$

Тогда схема (21)–(23) равномерно сходится со скоростью $O(h^2 + \tau)$ (имеет первый порядок точности по τ и второй порядок точности по h), так что

$$\|y^j - u^j\|_C \leq M(h^2 + \tau), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha$, $M = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h_α .

Доказательство. Введем сначала обозначение $z_{(\alpha)} - z^{j+\alpha/p}$ и представим решение $z_{(\alpha)} = y_{(\alpha)} - u^{j+\alpha/p}$ задачи (25) в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \dot{\psi}_\alpha \quad \text{при } x \in \omega_h + \gamma_{h, \alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (38)$$

$$\eta(x, 0) = 0.$$

Отсюда находим $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_p) = \eta^j = 0$ для $j = 0, 1, \dots, j_0$, так как $\eta^0 = 0$. Для $\eta_{(\alpha)}$ имеем $\eta_{(\alpha)} = \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_\alpha) = -\tau(\dot{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \dot{\psi}_p)$. Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (39)$$

$$v_{(\alpha)} = -\eta_{(\alpha)} \quad \text{при } x \in \gamma_{h, \alpha}, \quad v(x, 0) = 0,$$

где $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^* + \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}$.

Воспользуемся теперь теоремой 1 из п. 7 для оценки решения задачи (39). Так как $v = 0$ при $t = 0$, то

$$\|v^j\|_C \leq \max_{0 < j' + \alpha/p < j} (h^2 \|\tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}\|_{C^*} + \|\eta^{j'+\alpha/p}\|_{C_\gamma}) +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}\|_C. \quad (40)$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области \bar{Q}_{t_0} производные $\partial^4 u / \partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2$, $\alpha \neq \beta$, то $\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha (\dot{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \dot{\psi}_p) = O(\tau)$ во всех узлах $x \in \omega_h$, так как $\eta_{(\alpha)}$ определяется из уравнения (38) всюду в $\omega_h + \gamma_{h, \alpha}$. С другой стороны, имеем $\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$ в регулярных узлах ω_h , $\psi_\alpha^* = O(1)$ в нерегулярных узлах.

Поэтому $h^2 \|\tilde{\psi}\|_{C^1} = O(h^2 + \tau)$, $\|\tilde{\psi}\|_{\mathcal{E}} = O(h^2 + \tau)$ и оценка (40) дает

$$\|z^j\|_C = \|v^j\|_C \leq M(h^2 + \tau),$$

так как $\eta^j = 0$ для всех $j = 0, 1, \dots, j_0$.

Отметим, что из устойчивости по краевым условиям и по правой части следует, что t_α^* и t_α^{**} можно выбирать произвольно на интервале (t_j, t_{j+1}) (см. п. 5), не нарушая при этом порядка точности.

9. ЛОС для уравнений с переменными коэффициентами. Укажем, как применяется локально-одномерная схема для уравнений с переменными коэффициентами. При этом достаточно указать лишь изменения в формулах для операторов L_α и Λ_α , считая, что рассматривается задача (15). Локально-одномерная схема всегда записывается в виде (21)–(23).

1) **Линейное уравнение параболического типа.** Пусть в задаче (15)

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2.$$

В задаче (21)–(23) меняется лишь формула для Λ_α :

$$\Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = (a_\alpha(x, \bar{t}) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad 0 < c_1 \leq a_\alpha \leq c_2, \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$$

Коэффициент a_α выбирается так, чтобы Λ_α имел второй порядок аппроксимации на регулярном шаблоне,

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2),$$

например, можно взять

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{(-0,5\alpha)}, \bar{t}), \\ x^{(-0,5\alpha)} = (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0,5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p).$$

Теоремы 1 и 2 сохраняют силу.

2) **Квазилинейное уравнение параболического типа.** Пусть в задаче (15)

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha, \quad \frac{\partial k_\alpha}{\partial u} \geq c_0 > 0.$$

Возможны два способа аппроксимации оператора L_α :

а) $\Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = (a_\alpha(x, \bar{t}, 0,5(y_{(\alpha)} + y_{(\alpha)}^{(-1\alpha)})) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$

Для определения $y_{(\alpha)}$ получается нелинейное уравнение, которое решается тем или иным итерационным методом; каждая итерация находится при помощи прогонки.

б) $\Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = (a_\alpha(x, \bar{t}, 0,5(y_{(\alpha-1)} + y_{(\alpha-1)}^{(-1\alpha)})) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}.$

Для $y_{(\alpha)}$ получаем линейные уравнения, решаемые методом прогонки. Что касается устойчивости и сходимости, то при дополнительных предположениях относительно ограниченности производных $\partial^2 k_\alpha / \partial x^2$, $\partial^2 k_\alpha / \partial x_\alpha \partial x$, $\partial^2 k_\alpha / \partial x_\alpha^2$ имеет место равномерная сходимость со скоростью $O(\tau + h^2)$.

Локально-одномерные схемы можно применять и в случае третьей краевой задачи. Если, например, область G есть прямоугольник со сторонами l_1 и l_2 (или ступенчатая область), то уравнения (21) пишутся не только во внутренних узлах сетки, но и на соответствующих границах. Так, например, если на стороне $x_1 = 0$ прямоугольника ($0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$) задано краевое условие $\partial u / \partial x_1 = \sigma_1^{(-)} u + v_1^{(-)}$, то при $\alpha = 1$ уравнение (21) пишется и при $x_1 = 0$, причем в узле $x_1 = 0$ полагаем

$$\Lambda_1 y_{(1)} = \frac{y_{(1)} x_1 - \sigma_1^{(-)} y_{(1)}}{0.5 h_1}, \quad \Phi_1 = \frac{v_1^{(-)}}{0.5 h_1}.$$

Полученная локально-одномерная схема сходится равномерно со скоростью $O(\tau + |h|^2)$.

10. Аддитивные схемы. Общие формулировки. Переходим теперь к общим формулировкам понятий аддитивной схемы и суммарной аппроксимации.

В гл. VI было введено понятие n -слойной разностной схемы как разностного (по переменному t) уравнения $(n-1)$ -го порядка с операторными коэффициентами:

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} C_\beta(t_j) y(t_{j+1} - \beta\tau) = f(t_j), \quad (n-1)\tau \leq t_j \leq t_0,$$

где C_β — линейные операторы, заданные на линейном нормированном пространстве H_h . Для определения решения надо задать $n-1$ начальных векторов $y(0) = y_0$, $y(\tau) = y_1$, \dots , $y((n-2)\tau) = y_{n-2}$.

Назовем n -слойной составной схемой с периодом m (порядка m) систему разностных уравнений с операторными коэффициентами

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j + \beta\tau) = \sum_{\beta=0}^{n-2} D_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j - \beta\tau) + f_\alpha(t_j), \quad (41)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, m$, $(n-1)\tau \leq t_j \leq t_0$, с заданными начальными значениями $y(k\tau)$, $k = 0, 1, \dots, n-2$ (число слоев определяется числом начальных условий), причем t_j принимает значения, равные

$$t_j = (n-1)\tau + k m \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Чтобы найти $y(t_j + m\tau) = y_{j+m}$ по известным $y_{j-\beta}$, $\beta = 0, 1, \dots, n-2$, где $t_j = (m+n-1)\tau$, надо решить систему уравнений с операторной матрицей $C = (C_{\alpha\beta})$ размером $m \times m$.

При $m=1$ составная схема (41) переходит в написанную выше обычную n -слойную схему. При $n=2$ получаем *двуслойную составную схему с периодом m* :

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j + \beta\tau) = D_{\alpha 0} y(t_j) + f_{\alpha}(t_j), \quad 1 \leq \alpha \leq m, \quad y(0) = y_0. \quad (42)$$

Если для составной схемы (41) погрешность аппроксимации ψ определяется как сумма погрешностей аппроксимации ψ_{α} отдельных уравнений, $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_m$, то составная схема (41) называется *аддитивной схемой*.

Заменяя τ на τ/m , перепишем (42) в более удобной для дальнейшего изложения форме:

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j + \beta\tau/m) = D_{\alpha 0} y(t_j) + f_{\alpha}(t_j), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (42')$$

Двуслойную аддитивную схему всегда можно записать в следующем каноническом виде:

$$B \frac{y^{j+\alpha/m} - y^{j+(\alpha-1)/m}}{\tau} + \sum_{\beta=0}^m A_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} = \varphi_{\alpha}^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (43)$$

где $B, A_{\alpha\beta}$ — некоторые линейные операторы. Нетрудно убедиться в том, что все экономичные методы, записываемые в этом виде, обладают суммарной аппроксимацией.

Пусть $u(t) \in H_0$ — абстрактная функция $t \in [0, t_0]$ со значениями в некотором нормированном пространстве H_0 , $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$ — проекция u на H_h ,

$$\varphi_{\alpha}(u_h^j) = \varphi_{\alpha}^j - B \frac{u_h^{j+\alpha/m} - u_h^{j+(\alpha-1)/m}}{\tau} - \sum_{\beta=0}^m A_{\alpha\beta} u_h^{j+\beta/m}$$

— невязка для уравнения (43) номера α , $u^{j+\alpha/m} = u(t_j + \tau\alpha/m)$. Рассмотрим сумму

$$\psi(u_h^j) = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_{\alpha}(u_h^j).$$

Аддитивная схема (42) обладает суммарной аппроксимацией на функции $u(t) \in H_0$, если

$$\max_{0 \leq j \leq l_0} \|\psi(u_h^j)\|_{(2h)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

где $\|\cdot\|_{(2h)}$ — некоторая норма в H_h . По аналогии с § 2 будем говорить, что аддитивная схема (42) экономична, если матрица-оператор $C = (C_{\alpha\beta})$ экономична, т. е. для решения системы

операторных уравнений

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta} y^{i+\beta/m} = \Phi_{\alpha}^i \quad (44)$$

с заданным вектором Φ_{α}^i требуется минимальное в некотором смысле число действий, например, пропорциональное размерности N пространства H_h (числу узлов сетки ω_h).

Если $(C_{\alpha\beta}) = C$ — нижняя треугольная матрица, а операторы $C_{\alpha\alpha}$ обратимы, то решение системы уравнений (42') сводится к последовательному решению уравнений

$$C_{11} y^{i+1/m} = D_{10} y^i + f_1^i,$$

$$C_{\alpha\alpha} y^{i+\alpha/m} = D_{\alpha 0} y^i - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} C_{\alpha\beta} y^{i+\beta/m} + f_{\alpha}^i, \quad \alpha = 2, 3, \dots, m.$$

Такая треугольная аддитивная схема экономична, если экономичны диагональные операторы $C_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Все применяемые на практике экономичные схемы для многомерных задач математической физики являются треугольными (нижними, а иногда и верхними) аддитивными схемами, причем у матрицы $(C_{\alpha\beta})$ отличны от нуля, как правило, элементы на одной или двух диагоналях, соседних с главной диагональю. Так, например, схема может иметь вид

$$C_{\alpha\alpha} y^{i+\alpha/m} + C_{\alpha\alpha-1} y^{i+(\alpha-1)/m} = D_{\alpha 0} y^i + f_{\alpha}^i, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

В частности, если $D_{\alpha 0} = 0$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots, m$, то мы приходим к схеме

$$C_{\alpha\alpha} y^{i+\alpha/m} + C_{\alpha\alpha-1} y^{i+(\alpha-1)/m} = f_{\alpha}^i,$$

специальным случаем которой является схема с весами

$$\frac{y^{i+\alpha/m} - y^{i+(\alpha-1)/m}}{\tau} + A_{\alpha} (\sigma_{\alpha} y^{i+\alpha/m} + (1 - \sigma_{\alpha}) y^{i+(\alpha-1)/m}) = \Phi_{\alpha}^i.$$

Такие локально-одномерные схемы были уже рассмотрены выше. Для теории основными являются два вопроса:

- 1) Как оценить устойчивость и точность аддитивной схемы?
- 2) Как построить экономичную аддитивную схему для многомерного уравнения математической физики?

Ответ на второй вопрос был дан в пп. 3 и 4 для задачи (5), где были указаны эвристические приемы получения аддитивной схемы.

В п. 12 мы снова вернемся к нему. Сейчас же остановимся на первом вопросе.

11. Методы оценки сходимости аддитивной схемы. Мы ранее неоднократно убеждались в том, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует ее сходимость.

Для аддитивных схем устойчивость по правой части должна быть такой, чтобы из условия суммарной аппроксимации $\left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} \right\| \rightarrow 0$ следовало стремление к нулю решения разностной задачи (с нулевым начальным условием). Такие априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации, имеют место для аддитивных схем в случае систем параболических и гиперболических уравнений.

Рассмотрим аддитивную схему общего вида в гильбертовом пространстве H_h :

$$B \frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^p A_{\alpha\beta} z^{j+\beta/p} = \psi_{\alpha}^j, \quad (45)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, z^0 = 0.$$

Теорема 3. Если $B = B^*$ — положительно определенный постоянный оператор и матрица-оператор $A = (A_{\alpha\beta}) \geq 0$ неотрицательна, т. е. для любых векторов $\xi_{\alpha}, \xi_{\beta} \in H$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p (A_{\alpha\beta} \xi_{\alpha}, \xi_{\beta}) \geq 0, \quad (46)$$

то для решения задачи (45) справедлива априорная оценка

$$\|z^j\|_B \leq \max_{0 \leq k \leq j} \left\{ \sqrt{\epsilon} t_j \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^k \right\|_{B^{-1}} + p \sqrt{\tau t_j} \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_{\alpha}^k\|_{B^{-1}} \right\}. \quad (47)$$

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем. Оно приведено в книге: А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971.

Отсюда видно, что из суммарной аппроксимации в $H_{B^{-1}}$ следует сходимость в H_B , т. е. из условий

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} \right\|_{B^{-1}} \rightarrow \|\psi\|_{B^{-1}} \rightarrow 0, \quad \|\psi_{\alpha}\|_{B^{-1}} = O(1), \quad \tau \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0, \quad (48)$$

следует, что $\|z^j\|_B \rightarrow 0$ для всех $j = 1, 2, \dots$

Отметим, что оценка (47) получена при весьма слабых ограничениях: оператор B положительно определен и самосопряжен, матрица-оператор $A = (A_{\alpha\beta})$ неотрицательна.

Если схема (45) рассматривается в банаховом пространстве H_h , то применяется другой метод построения априорных оценок.

Пусть схема (45) устойчива, так что

$$\|z^j\|_{(1)} \leq M \max_{0 < k < j} \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_{\alpha}^k\|_{(2)}, \quad (49)$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы на H_h .

Предположим, что ψ_α можно представить в виде суммы

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \text{ так что } \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0. \quad (50)$$

Положим $z^{j+\alpha/p} = \eta^{j+\alpha/p} + v^{j+\alpha/p}$, где $\eta^{j+\alpha/p}$ определяется из условий

$$B \frac{\eta^{j+\alpha/p} - \eta^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \dot{\psi}_\alpha^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \eta^0 = 0.$$

Отсюда следует

$$B\eta^{j+\alpha/p} = B\eta^j + \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} \dot{\psi}_\beta^j, \quad B\eta^{j+1} = B\eta^j = \dots = B\eta^0 = 0,$$

т. е. $\eta^j = 0$, $z^j = v^j$ для всех $j = 1, 2, \dots$,

$$\eta^{j+\alpha/p} = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} B^{-1} \dot{\psi}_\beta^j = -\tau \sum_{\beta=\alpha+1}^p B^{-1} \dot{\psi}_\beta^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Для $v^{j+\alpha/p}$, очевидно, получим уравнение (45) с правой частью

$$\tilde{\psi}_\alpha^j = \psi_\alpha^{*j} + \tau \sum_{\beta=1}^p A_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=\beta+1}^p B^{-1} \dot{\psi}_{\beta'}^j,$$

и начальным условием $v^0 = 0$. Из (49) следует

$$\|z^j\|_{(1)} = \|v^j\|_{(1)} \leq M \max_{0 \leq j' < j} \sum_{\alpha=1}^p \|\tilde{\psi}_\alpha^{j'}\|_{(2)}.$$

Условие суммарной аппроксимации означает, что 1) ψ_α можно представить в виде (50), 2) $\|\tilde{\psi}_\alpha^j\|_{(2)} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, $|h| \rightarrow 0$. Второе требование будет выполнено, если $\|\psi_\alpha^*\|_{(2)} \rightarrow 0$ и $\|A_{\alpha\beta} B^{-1} \dot{\psi}_\beta^j\| = O(1)$ при $\tau \rightarrow 0$, $|h| \rightarrow 0$.

Второй метод исследования сходимости аддитивной схемы был применен в п. 8 при исследовании сходимости в C локально-одномерной схемы для уравнения теплопроводности.

Подчеркнем, что при изучении сходимости аддитивных схем мы предполагаем (как и всюду в теории разностных схем) единственность, существование и достаточную гладкость решения исходной многомерной задачи.

Пусть, например, u — решение задачи (5), $y = y_h$ — решение аддитивной схемы, $y_h \in H_h$, где H_h — пространство сеточных функций. Следуя § 1 гл. VI, мы должны оценить разность $z_h^j = y_h^j - u_h^j$, где $u_h = \mathcal{P}_h u$, \mathcal{P}_h — линейный оператор из H_h в H_h ($u \in H_h$, $u_h \in H_h$), точнее, величину $\|y_h^j - u_h^j\|_{(1_h)}$, где $\|\cdot\|_{(1_h)}$ — некоторая норма на H_h . Эта оценка производится непосредственно: пишется задача для z_h , вычисляются погрешности аппро-

ксимации $\Psi_\alpha = \dot{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$ и используется один из указанных в этом пункте методов оценки z_h .

12. Аппроксимация «многомерной» абстрактной задачи Коши цепочкой «одномерных» задач Коши. Остановимся еще раз на вопросе о сведении многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Обратимся к задаче (5). Пусть на Γ заданы однородные граничные условия. Будем рассматривать функцию $u(x, t)$ как функцию x в качестве элемента некоторого линейного нормированного пространства H_0 . Тогда L будет линейным оператором в этом пространстве, а $u = u(t)$ — абстрактной функцией t со значениями в H_0 ($u(t) \in H_0$ для всех $t \in [0, t_0]$). Вместо частной производной в (5) можно писать обыкновенную производную по t .

В результате мы приходим к абстрактной задаче Коши:

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0 \in H_0, \quad (51)$$

где \mathcal{A} — линейный оператор в банаевом пространстве H_0 . Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H_0$ оператора \mathcal{A} является всюду плотной в H_0 и состоит из функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям на Γ . Область значений $\Delta(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} принадлежит H_0 .

Пусть \mathcal{A} представлен в виде суммы

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{A}_\alpha \quad (52)$$

линейных операторов \mathcal{A}_α , пересечение областей определения которых есть $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. В этом случае решение задачи Коши (51) можно свести к последовательному решению задач Коши того же типа, но с операторами \mathcal{A}_α вместо \mathcal{A} .

Остановимся на двух способах такого сведения.

Пусть на отрезке $0 \leq t \leq t_0$ введена сетка $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, i_0\}$ с шагом τ . Представим f в виде суммы $f = \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha$.

Первый способ (см. п. 3). Рассматривается последовательность заселенных («цепочка») уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha v_{(\alpha)} = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leq t_{j+\alpha/p}, \quad (53)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} v_{(1)}(0) &= u_0, \quad v_{(1)}(t_j) = v_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ v_\alpha(t_{j+(\alpha-1)/p}) &= v_{(\alpha-1)}(t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha - 2, 3, \dots, p. \end{aligned} \quad (54)$$

Будем называть решением этой задачи при $t = t_{j+1}$ функцию $v(t_{j+1}) = v_{(p)}(t_{j+1})$. В общем случае $\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau)$ для всех $j = 1, 2, \dots$

Второй способ аппроксимации задачи Коши. На всем промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ последовательно решаются p задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{dv_{(1)}}{dt} + \mathcal{A}_1(t) v_{(1)}(t) &= f_1(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \dots &\dots \\ \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha(t) v_{(\alpha)}(t) &= f_\alpha(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \dots &\dots \\ \frac{dv_{(p)}}{dt} + \mathcal{A}_p(t) v_{(p)}(t) &= f_p(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \end{aligned} \quad (55)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} v_{(1)}(0) &= u_0, \quad v_{(1)}(t_j) = v_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ v_{(\alpha)}(t_j) &= v_{(\alpha-1)}(t_{j+1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Решением задачи (55) при $t = t_{j+1}$ является, по определению, элемент

$$v(t_{j+1}) = v_{(p)}(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

При $t = 0$ полагаем

$$v_{(1)}(0) = u(0) = u_0. \quad (57)$$

Пусть известно $v(t_j)$. Из первого уравнения при $v_{(1)}(t_j) = v(t_j)$ определяем $v_{(1)}(t_{j+1})$, которое затем используем в качестве начального значения при $t = t_j$ для $v_{(2)}(t)$, решаем второе уравнение (при $\alpha = 2$) и т. д. После решения всех p задач найдем $v_{(p)}(t_{j+1}) = v(t_{j+1})$. Это и есть решение системы уравнений (55) — (57) при $t = t_{j+1}$.

Если \mathcal{A}_α не зависят от t и $f = 0$, то обе задачи (53) — (54) и (55) — (57) эквивалентны.

Покажем, что задача (55) — (56) аппроксимирует задачу (51) в суммарном смысле. Пусть $u(t)$ — решение задачи Коши (51), $v_{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — решение задачи (55) — (56). Рассмотрим их разность

$$\begin{aligned} z_{(\alpha)}(t) &= v_{(\alpha)}(t) - u(t_{j+1}) \quad \text{при } \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \\ z_{(1)}(t) &= v_{(1)}(t) - u(t) \quad \text{при } t \in [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned}$$

Подставляя $v_{(\alpha)}(t) = z_{(\alpha)}(t) + u^{j+1}$, $u^{j+1} = u(t_{j+1})$, $\alpha = 2, \dots, p$, и $v_{(1)}(t) = z_1(t) + u(t)$ в (55), (56), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dz_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha(t) z_{(\alpha)}(t) &= \psi_\alpha(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad 1 \leq \alpha \leq p, \\ z_{(1)}(t_j) &= z_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, z_1(0) = 0, \\ z_{(\alpha)}(t_j) &= z_{(\alpha-1)}(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ z(t_{j+1}) &= z_{(p)}(t_{j+1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(t) &= -\mathcal{A}_\alpha(t)u^{j+1} + f_\alpha(t), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ \Psi_1(t) &= -\mathcal{A}_1(t)u(t) - \frac{du}{dt} + f_1(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\Psi = \Psi_1(t) + \dots + \Psi_p(t) = f(t) - \frac{du}{dt} - \mathcal{A}_1(t)u(t) - \sum_{\alpha=2}^p \mathcal{A}_\alpha(t)u^{j+1}.$$

Учитывая, что $u^{j+1} = u(t) + O(\tau)$ для любого $\alpha = 2, \dots, p$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, получаем

$$\Psi_\alpha = \dot{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*, \quad \Psi_\alpha^* = O(\tau), \quad \dot{\Psi}_\alpha = f_\alpha(t) - \mathcal{A}_\alpha(t)u(t) - \delta_{\alpha,1} \frac{du}{dt},$$

где $\delta_{\alpha,1}$ — символ Кронекера. Таким образом,

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\Psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{A}_\alpha(t)u(t) - \frac{du}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^* = O(\tau),$$

т. е. система дифференциальных уравнений (55)–(56) аппроксимирует задачу Коши (51) в суммарном смысле с первым порядком (при этом требуется существование и ограниченность (в некоторой норме) $\mathcal{A}(t)d^2u/dt^2$).

Представляет интерес сравнение решения $v(t_j)$ задачи (55)–(57) с решением $u(t_j)$ исходной задачи.

Приведем без доказательства некоторые результаты.

а) Пусть $f = 0$ и все $f_\alpha = 0$.

Если постоянные операторы \mathcal{A}_α попарно перестановочны, $\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$, то при любых τ имеет место равенство

$$v(t_j) = u(t_j) \quad \text{для всех } j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (58)$$

где v — решение задачи (55)–(57), а u — решение задачи (51).

Если же $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha(t)$ зависят от t , то (58) имеет место при перестановочности операторов $\mathcal{A}_\alpha(t')$ и $\mathcal{A}_\beta(t'')$, $\alpha \neq \beta$, взятых в разные моменты времени, $t' \neq t''$, так что

$$\mathcal{A}_\alpha(t') \mathcal{A}_\beta(t'') = \mathcal{A}_\beta(t'') \mathcal{A}_\alpha(t'), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p,$$

для любых $t', t'' \in [0, t_0]$.

В п. 4 были рассмотрены примеры, для которых имеет место равенство (58). Для каждого из них выполнено условие перестановочности $\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\alpha$.

6) Пусть операторы $\mathcal{A}_\alpha(t)$ и $\mathcal{A}_\beta(t)$ неперестановочны. Тогда справедлива оценка

$$\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (59)$$

при дополнительном условии «гладкости»

$$\|\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta u\| \leq M, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p.$$

Возникает вопрос, нельзя ли повысить точность по τ без существенного усложнения составной задачи Коши?

Составную задачу Коши (55) схематически запишем так:

$$\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_p.$$

Рассмотрим симметризованную составную задачу Коши, представляющую собой цепочку $2p$ задач Коши

$$0.5\mathcal{A}_1 \rightarrow 0.5\mathcal{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow 0.5\mathcal{A}_p \rightarrow 0.5\mathcal{A}_p \rightarrow 0.5\mathcal{A}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow 0.5\mathcal{A}_1,$$

что соответствует представлению оператора \mathcal{A} в виде суммы

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{2p} \mathcal{A}'_\alpha, \quad \text{где } \mathcal{A}'_\alpha = \begin{cases} 0.5\mathcal{A}_\alpha & \text{при } 1 \leq \alpha \leq p, \\ 0.5\mathcal{A}_{2p-\alpha+1} & \text{при } p < \alpha \leq 2p. \end{cases}$$

Эта задача имеет второй порядок точности по τ : $\|v' - u'\| = O(\tau^2)$ при некотором дополнительном требовании гладкости начального вектора u_0 вида $\|\mathcal{A}_\alpha^2 \mathcal{A}_\beta u_0\| \leq M$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$, и условиях гладкости $\mathcal{A}_\alpha(t)$ по t .

Итак, решение задачи (51) сводится к решению последовательности более простых задач (55)–(57). Для их решения можно использовать как аналитические, так и приближенные методы, в частности, метод конечных разностей.

Если \mathcal{A}_α попарно перестановочны, то точность приближенного метода решения задачи (51) целиком зависит от того, с какой точностью мы решаем каждую из промежуточных задач (55) номера α . Приведенное выше изложение справедливо для случая однородных краевых условий. Если краевые условия неоднородны, то точность составной задачи Коши (55)–(57) существенно зависит от способа задания краевых условий для $v_{(\alpha)}$. Это же замечание относится и к разностным аналогам задачи (55)–(57).

Разностная аппроксимация каждой из задач (55), например, простейшей двухслойной схемой с весами приводит к аддитивной разностной схеме. Она является экономичной, если экономична каждая из промежуточных схем номера α .

Замечание. В конце п. 11 был указан обычный прием оценки погрешности $z_h = y_h - u_h$ аддитивной схемы. Укажем другой способ оценки z_h . Пусть v — решение «локально-одномерной» задачи (53)–(54) или (55)–(57). Из неравенства треугольника $\|z_h\| = \|y_h - u_h\| \leq \|y_h - v_h\| + \|v_h - u_h\|$

видно, что оценку погрешности z_h можно свести к оценке близости y_h и v_h , v_h и u_h . При оценке $\|v_h - u_h\|$ потребуется информация о гладкости u , при оценке $\|y_h - v_h\|$ — о гладкости v . Такой способ исследования аддитивной схемы, очевидно, более сложен, чем тот, который используется здесь, поскольку требуется дополнительное изучение свойств решения v составной задачи Коши (53) — (54) или (55) — (57).

13. Методы переменных направлений как аддитивные схемы. Рассмотрим метод переменных направлений (продольно-поперечную схему) из § 1

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} &= 0,5 (\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j) + 0,5 \varphi^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} &= 0,5 (\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1}) + 0,5 \varphi^j. \end{aligned} \quad (60)$$

Нетрудно заметить, что эта система уравнений эквивалентна ЛОС следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1/4} - y^j}{\tau} &= 0,5 \Lambda_2 y^j + 0,5 \varphi^j, \quad \frac{y^{j+1/2} - y^{j+1/4}}{\tau} = 0,5 \Lambda_1 y^{j+1/2}, \\ \frac{y^{j+3/4} - y^{j+1/2}}{\tau} &= 0,5 \Lambda_1 y^{j+1/2}, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+3/4}}{\tau} = 0,5 \Lambda_2 y^{j+1} + 0,5 \varphi^j. \end{aligned} \quad (61)$$

Введенные здесь промежуточные значения $y^{j+1/4}$, $y^{j+3/4}$ легко исключаются.

Непосредственная проверка позволяет убедиться в том, что схема (61) обладает суммарной аппроксимацией

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Рассмотрим в качестве второго примера схему переменных направлений, часто называемую схемой Дугласа — Рэкфорда ($\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}$):

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j). \quad (62)$$

Вычисляя невязки ($u = u^j$, $\hat{u} = u^{j+1}$)

$$\Psi_1 = \Lambda_1 \frac{\hat{u} + u}{2} + \Lambda_2 u - \frac{\hat{u} - u}{2\tau}, \quad \Psi_2 = \Lambda_2 (\hat{u} - u) - \frac{\hat{u} - u}{2\tau},$$

видим, что $\Psi_1 = O(1)$, $\Psi_2 = O(1)$, а $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = O(|h|^2 + \tau)$, т. е. схема (62) обладает суммарной аппроксимацией $O(\tau + |h|^2)$. Если исключить промежуточное значение $y^{j+1/2}$, то мы получим факторизованную схему, содержащую y^j и y^{j+1} и аппроксимирующую уравнение теплопроводности с $O(\tau + |h|^2)$ в обычном смысле, однако факторизованная схема устойчива лишь при

условии перестановочности Λ_1 и Λ_2 , а для аддитивной схемы такого ограничения нет.

14. ЛОС для многомерного гиперболического уравнения второго порядка. Метод суммарной аппроксимации позволяет получить абсолютно устойчивые сходящиеся локально-одномерные схемы для уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u + f(x, t), \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad (63)$$

$$k_\alpha(x, t) \geq c_1 > 0, \quad c_1 = \text{const},$$

где $x = (x_1, \dots, x_p)$ — точка p -мерного пространства с координатами x_1, \dots, x_p . Пусть G — произвольная p -мерная область с границей Γ , $\bar{G} = G + \Gamma$,

$$\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T], \quad Q_T = G \times (0 < t \leq T).$$

Требуется найти непрерывное в цилиндре \bar{Q}_T решение уравнения (63), удовлетворяющее краевому условию

$$u = \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (64)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{G}. \quad (65)$$

Как обычно, предполагается, что эта задача имеет единственное решение $u = u(x, t)$, обладающее всеми требуемыми по ходу изложения производными.

Относительно G остаются в силе те же конструктивные предположения, что и в случае параболического уравнения (см. п. 5).

На отрезке $0 \leq t \leq T$ построим равномерную сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ с шагом τ . В \bar{G} выбирается такая же сетка ω_h , что и в п. 5.

Если G — p -мерный параллелепипед, то для численного решения задачи (63) — (65) можно построить экономичную факторизованную схему, имеющую точность $O(\tau^2 + |h|^2)$. Такая схема была исследована в § 2.

При построении локально-одномерной схемы поступаем по аналогии с п. 5: аппроксимируем с шагом τ/p последовательно операторы

$$\mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (L_\alpha u + f_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (66)$$

где f_α удовлетворяют условию $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$.

Для аппроксимации производной $\partial^2 u / \partial t^2$ с шагом τ/p используются выражения

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_{(\alpha)} - 2u_{(\alpha-1)} + u_{(\alpha-2)}}{\tau^2} \sim \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{j+(\alpha-1)/2}, \quad (67)$$

$\alpha = 1, 2$ при $p = 2$,

где $u_{(\alpha)} = u^{j+\alpha/2}$, $\check{u}_{(\alpha)} = u^{j-1+\alpha/2}$, $u_{(0)} = \check{u} = u^{j-1}$, $u_{(2)} = u^j$,

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_{(\alpha)} - u_{(\alpha-1)} - u_{(\alpha-2)} + \check{u}_{(\alpha)}}{\tau^2} \sim \frac{2}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (68)$$

$\alpha = 1, 2, 3$ при $p = 3$,

где $u_{(-1)} = \check{u}_{(2)} - u^{(j-1)+2/3}$, $u_{(-2)} = \check{u}_{(1)} - u^{j-2/3}$.

Для аппроксимации $L_\alpha u + f_\alpha$ на пространственной сетке γ_h воспользуемся однородным разностным оператором второго порядка аппроксимации $\Lambda_\alpha y + \Phi_\alpha$.

Коэффициент оператора Λ_α и правая часть Φ_α берутся в момент

$$t'_\alpha = 0,5(t_{j+\alpha/p} + t_{j-1+\alpha/p}) = t_{j+\alpha/p-0,5} = t_j + (\alpha/p - 0,5)\tau,$$

так что $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t'_\alpha)$, $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(x, t'_\alpha)$.

Напишем теперь локально-одномерные схемы для гиперболических уравнений:

$$y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma_p \Lambda_\alpha (y_{(\alpha)} + \check{y}_{(\alpha)}) + 2\sigma_p \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad p = 2, 3, \quad (69)$$

где

$$\sigma_p = \begin{cases} 1/4 & \text{при } p = 2, \\ 1/3 & \text{при } p = 3, \end{cases}$$

а $y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}$ дается формулой (67) при $p = 2$ и формулой (68) при $p = 3$. При $p = 2$ получаем трехслойную аддитивную схему, при $p = 3$ — четырехслойную схему. В этом отличие от параболических уравнений, для которых вид локально-одномерных схем не зависит от числа измерений p .

Уравнение (69) можно записать в виде

$$(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_\alpha) (y_{(\alpha)} + \check{y}_{(\alpha)}) = \begin{cases} 2y_{(\alpha-1)} + 2\sigma_2 \tau^2 \Phi_\alpha & \text{при } p = 2, \\ y_{(\alpha-1)} + y_{(\alpha-2)} + 2\sigma_3 \tau^2 \Phi_\alpha & \text{при } p = 3. \end{cases} \quad (70)$$

Определение $y_{(\alpha)}$ сводится к решению трехточечного уравнения $(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_\alpha) y_\alpha = F_\alpha$ вдоль отрезков, параллельных оси Ox_α , что можно сделать методом прогонки, пользуясь краевым условием

$$y_{(\alpha)} = \mu(x, t_{j+\alpha/p}) \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha. \quad (71)$$

Первое из начальных условий $u(x, 0) = u_0(x)$ аппроксимируется точно:

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (72)$$

Для вычисления промежуточных значений $y^{1/2} = y(x, \tau/2)$ при $p=2$ и $y^{1/4} = y(x, \tau/3)$, $y^{2/3} = y(x, 2\tau/3)$ при $p=3$ применим следующие уравнения

$$\begin{aligned} & \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/2} = F_1, \\ & F_1 = u_0 + \frac{\tau}{2} \bar{u}_0 + \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left(f_1 - \frac{1}{8} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \end{aligned} \quad (73)$$

если $p=2$,

$$\begin{aligned} & \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/2} = F_1, \quad \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \right) (y^{1/2} + u_0) = 2y^{1/2} + F_2, \\ & F_2 = u_0 + \frac{\tau}{3} \bar{u}_0 + \tau^2 \Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left(\frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{6} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \\ & F_2 = \tau^2 \left(\frac{2}{3} f_2 - \frac{1}{9} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \end{aligned} \quad (74)$$

если $p=3$.

Остановимся более подробно на локально-одномерной схеме для случая двух измерений ($p=2$).

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/2} = F_1 \quad \text{при } t = 0,5\tau, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} & \frac{y^{I+1/2} - 2y^I + y^{I-1/2}}{\tau} = -\frac{1}{4} \Lambda_1 (y^I + y^{I-1/2}) + \frac{1}{2} \Phi_I^I, \\ & \frac{y^{J+1} - 2y^{J+1/2} + y^J}{\tau} = -\frac{1}{4} \Lambda_2 (y^{J+1} + y^J) + \frac{1}{2} \Phi_2^J, \quad J = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (76)$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} & y^{I+1/2} = \mu(x, t_{I+1/2}) \quad \text{при } x \in \gamma_h^1, \\ & y^{J+1} = \mu(x, t_{J+1}) \quad \text{при } x \in \gamma_h^2. \end{aligned} \quad (77)$$

Функция $y^{I+1/2}$ находится из уравнения

$$y^{I+1/2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 y^{I+1/2} = \Phi_1^I,$$

где Φ_1^I — известная правая часть, с краевыми условиями (77), а y^{I+1} — из уравнения

$$y^{J+1} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 y^{J+1} = \Phi_2^{J+1/2},$$

где $\Phi_2^{J+1/2}$ известна, с краевыми условиями (77). Каждое из уравнений решается методом одномерной прогонки.

Рассмотрим погрешность $z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} - u(x, t_{j+\alpha/2})$ схемы (75)–(77), где u —решение задачи (63)–(65), y —решение задачи (75)–(77). Подставляя $y_{(\alpha)} = z_{(\alpha)} + u^{j+\alpha/2}$ в уравнение (76), получим

$$\begin{aligned} z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} &= \frac{1}{4} \Lambda_\alpha (z_{(\alpha)} + \check{z}_{(\alpha)}) + \psi_\alpha & \text{при } t \geq \tau, \\ \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) \frac{z_{(1)}}{\tau^2} &= \psi_1 & \text{при } t = 0,5\tau, \end{aligned} \quad (78)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/2} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \alpha = 1, 2,$$

где

$$\psi_\alpha = \frac{1}{4} \Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) - u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} + 0,5 \varphi_\alpha \quad (79)$$

— погрешность аппроксимации для одного уравнения (66) номера $\alpha = 1, 2$.

Погрешность аппроксимации для локально-одномерной схемы (75)–(77) определяется как сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (80)$$

Покажем, что схема (76) аппроксимирует задачу (63)–(65) в суммарном смысле, $\psi = O(\tau + |h|^2)$.

В самом деле, учитывая, что

$$\begin{aligned} 0,5 \Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) &= (L_\alpha u)^{j+(\alpha-1)/2} + O(h_\alpha^2) & \text{при } x \in \dot{\omega}_{h, \alpha}, \\ 0,5 \Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) &= (L_\alpha u)^{j+(\alpha-1)/2} + O(h_\alpha) & \text{при } x \in \omega_{h, \alpha}^*, \\ u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{j+(\alpha-1)/2} + O(\tau^2), \quad \varphi_\alpha = f_\alpha^{j+(\alpha-1)/2} + O(\tau^2), \end{aligned}$$

получаем

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\alpha &= 0,5 \left(L_\alpha u - 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_\alpha \right)^{j+(\alpha-1)/2}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \psi_\alpha^* &= O(h_\alpha^2 + \tau^2) \quad \text{при } x \in \dot{\omega}_{h, \alpha}, \\ \psi_\alpha^* &= O(h_\alpha + \tau^2) \quad \text{при } x \in \omega_{h, \alpha}^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2^{j+1/2} &= 0,5 (L_1 u - 0,5 \ddot{u} + f_1)' + 0,5 (L_2 u - 0,5 \ddot{u} + f_2)' + \\ &= 0,5 ((L_1 + L_2) u - \ddot{u} + f_1 + f_2)' + 0,5 \tau \dot{\psi}_{\bar{t}_1}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое, в силу уравнения (63), равно нулю:

$$(L_1 + L_2) u - \ddot{u} + f = 0, \quad f = f_1 + f_2.$$

Поэтому

$$\dot{\psi}_1' + \dot{\psi}_2' = 0, \quad (81)$$

т. е. схема (75)–(77) обладает суммарной аппроксимацией.

Рассмотрим теперь сумму

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 + 2\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = 0,5 & [(L_2 u - \ddot{u} + f_2)^{i+1/2} + (L_2 u - \ddot{u} + f_2)^{i-1/2}] + \\ & + (L_1 u - \ddot{u} + f_1)^i = ((L_1 + L_2) u - \ddot{u} + f_1 + f_2)^i + \\ & + (\dot{\psi}_2^{i+1/2} - 2\dot{\psi}_2^i + \dot{\psi}_2^{i-1/2}) = \tau^2 (\dot{\psi}_2)_{\bar{t}_i \bar{t}_i}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{\psi}_2 + 2\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \tau^2 (\dot{\psi}_2)_{\bar{t}_i \bar{t}_i} = O(\tau^2). \quad (82)$$

Из априорных оценок, на выводе которых мы не останавливаемся, следует, что ЛОС (75)–(77) сходится в сеточной норме W_2^1 со скоростью $O(\tau + |h|^2)$, если решение $u = u(x, t)$ имеет непрерывные в \bar{Q}_T производные по x_α до четвертого порядка включительно и производные $\partial^4 u / \partial x_\alpha^4$ удовлетворяют условию Липшица по t ; правая часть f должна быть дважды дифференцируемой по t .

15. Аддитивные схемы для систем уравнений. Рассмотрим задачу (50) § 2 для системы уравнений параболического типа. Прежде чем переходить к написанию аддитивной схемы для решения задачи (50) § 2, представим оператор L в виде суммы двух треугольных операторов, $L = L^- + L^+$.

Для этого представим матрицы $k_{\alpha\alpha}$ в виде суммы $k_{\alpha\alpha} = k_{\alpha\alpha}^- + k_{\alpha\alpha}^+$, где $k_{\alpha\alpha}^- = (k_{\alpha\alpha}^{-sm})$, $k_{\alpha\alpha}^+ = (k_{\alpha\alpha}^{+sm})$ — треугольные матрицы с элементами

$$\begin{aligned} k_{\alpha\alpha}^{-sm} &= k_{\alpha\alpha}^{sm}, \quad k_{\alpha\alpha}^{+sm} = 0 \quad \text{при } m < s, \quad k_{\alpha\alpha}^{+sm} = k_{\alpha\alpha}^{sm}, \\ k_{\alpha\alpha}^{-sm} &= 0 \quad \text{при } m > s, \quad k_{\alpha\alpha}^{-ss} = k_{\alpha\alpha}^{+ss} = 0,5k_{\alpha\alpha}^{ss}. \end{aligned}$$

Матрицы $k_{\alpha\alpha}^-$ и $k_{\alpha\alpha}^+$ сопряжены друг другу, так как $k_{\alpha\alpha}^{-sm} = k_{\alpha\alpha}^{+ms}$. Отсюда следует, что

$$L_{\alpha\alpha} = L_{\alpha\alpha}^- + L_{\alpha\alpha}^+, \quad L_{\alpha\alpha}^\mp = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\alpha}^\mp \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right).$$

Введем операторы

$$L_{\alpha}^- u = L_{\alpha\alpha}^- u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta}^- u = \sum_{\beta=1}^{\alpha} L_{\alpha\beta}^- u,$$

$$L_{\alpha\beta}^- u = L_{\alpha\beta} u \quad \text{при } \beta < \alpha,$$

$$L_{\alpha}^+ u = L_{\alpha\alpha}^+ u + \sum_{\beta=\alpha+1}^p L_{\alpha\beta}^+ u = \sum_{\beta=\alpha}^p L_{\alpha\beta}^+ u,$$

$$L_{\alpha\beta}^+ u = L_{\alpha\beta} u \quad \text{при } \beta > \alpha$$

и представим L в виде

$$L = L^- + L^+, \quad L^- u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha^- u, \quad L^+ u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha^+ u. \quad (83)$$

Решение системы уравнений (50) § 2 или

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{1}{2p} \frac{\partial u}{\partial t} - (L_\alpha^- u + L_\alpha^+ u) - (f_\alpha^- + f_\alpha^+) \right] = 0, \quad (84)$$

где $\sum_{\alpha=1}^p (f_\alpha^- + f_\alpha^+) = f$, сведем к последовательному решению системы $2p$ уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_\alpha^- u + f_\alpha^-, \quad t_{j+(\alpha-1)/(2p)} \leq t \leq t_{j+\alpha/(2p)}, \\ \frac{1}{2p} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_\alpha^+ u + f_\alpha^+, \quad t_{j+1-\alpha/(2p)} \leq t \leq t_{j+1-(\alpha-1)/(2p)}, \\ \alpha &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (85)$$

Аппроксимируем L_α^\mp операторами Λ_α^\mp вида

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^- &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^-, \quad \Lambda_\alpha^+ = \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^\mp u &= 0,5 \left[\left(k_{\alpha\beta}^\mp u_{x_\beta}^- \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}^\mp u_{x_\beta}^+ \right)_{x_\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что Λ_α^\mp аппроксимирует L_α^\mp со вторым порядком. Коэффициенты $k_{\alpha\beta}^\mp$ будем брать в один и тот же для всех α и β момент $t = t_{j+1/2}$, или в какой-либо другой момент $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$.

Напишем теперь аддитивную схему

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+\alpha/(2p)} - y^{j+(\alpha-1)/(2p)}}{\tau} &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- y^{j+\beta/(2p)} + (\varphi_\alpha^-)^{j+\alpha/(2p)}, \\ \frac{y^{j+\alpha_1/(2p)} - y^{j+(\alpha_1-1)/(2p)}}{\tau} &= \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ y^{j+\beta_1/(2p)} + (\varphi_\alpha^+)^{j+\alpha_1/(2p)}, \\ \alpha &= 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (86)$$

где $\alpha_1 = 2p + 1 - \alpha$, $\beta_1 = 2p + 1 - \beta$ и α_1 меняется от $p + 1$ до $2p$, при этом α меняется от p до 1.

При $x \in \gamma_h^\alpha$ задаются обычные краевые условия:

$$\begin{aligned} y^{j+\alpha/(2p)} &= \mu^{j+\alpha/(2p)} \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y^{j+\alpha_1/(2p)} &= \mu^{j+\alpha_1/(2p)} \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\alpha_1}, \alpha_1 = p + 1, \dots, 2p. \end{aligned} \quad (87)$$

Начальное условие удовлетворяется точно:

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \quad (88)$$

Для определения $\mathbf{y}^{l+\alpha/(2p)} = \mathbf{y}_{(\alpha)}$ и $\mathbf{y}^{l+\alpha_1/(2p)} = \mathbf{y}_{(\alpha_1)}$ получаем системы уравнений

$$(E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^-) \mathbf{y}_{(\alpha)} = \mathbf{F}_{\alpha}^-, \quad (E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^+) \mathbf{y}_{(\alpha_1)} = \mathbf{F}_{\alpha_1}^+,$$

$$\mathbf{F}_{\alpha}^- = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{\alpha\beta}^- \mathbf{y}_{(\beta)} + \tau \varphi_{\alpha}^- + \mathbf{y}_{(\alpha-1)},$$

$$\mathbf{F}_{\alpha_1}^+ = \tau \sum_{\beta=\alpha+1}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ \mathbf{y}_{(\beta)} + \tau \varphi_{\alpha}^+ + \mathbf{y}_{(\alpha_1-1)}.$$

Так как $\Lambda_{\alpha\alpha}^-$ — диагональная матрица $p \times p$ с клетками, являющимися нижними треугольными матрицами, то из системы уравнений

$$(E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^-) \mathbf{y}_{(\alpha)} = \mathbf{F}_{\alpha}^-$$

последовательно от s к $s+1$ методом прогонки находятся компоненты $y_{(\alpha)}^s$, $s = 1, 2, \dots, n$, вектора $\mathbf{y}_{(\alpha)}$. Двигаясь от α к $\alpha+1$ и от s к $s+1$, мы при помощи формул прогонки для трехточечного уравнения последовательно определим векторы $\mathbf{y}_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Аналогично при переходе от $\alpha+1$ к α и от $s+1$ к s из системы

$$(E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^+) \mathbf{y}_{(\alpha_1)} = \mathbf{F}_{\alpha_1}^+$$

определяются векторы $\mathbf{y}_{(p+1)}, \dots, \mathbf{y}_{(2p)}$. Последний вектор $\mathbf{y}_{(2p)}$ и есть решение $\mathbf{y}^{l+1} = \mathbf{y}_{(2p)}$ на слое $t = t_{j+1}$.

Так как система дифференциальных уравнений (85) аппроксимирует уравнение (50) § 2 в суммарном смысле, а каждое из уравнений (86) номера α аппроксимирует уравнение (85) того же номера в обычном смысле, то аддитивная схема (86)–(88) аппроксимирует исходную задачу с порядком $\tau + |h|^2$:

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^p (\Psi_{\alpha}^- + \Psi_{\alpha}^+) = O(\tau + |h|^2).$$

Рассмотрим пространство $\mathring{\Omega}$ сеточных вектор-функций, заданных на сетке ω_h и равных нулю на границе γ_h сетки. Введем в $\mathring{\Omega} = H$ скалярное произведение

$$(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sum_{s=1}^n (y^s, v^s), \quad (y^s, v^s) = \sum_{x \in \omega_h} y^s(x) v^s(x) h_1 h_2 \dots h_p.$$

Рассмотрим операторы

$$A^- = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}^-, \quad A^+ = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}^+,$$

$$A_{\alpha}^- y = - \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- y, \quad A_{\alpha}^+ y = - \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ y, \quad y \in \dot{\Omega}.$$

Покажем, что операторы A^- и A^+ сопряжены:

$$(A^- y, v) = (y, A^+ v) \quad \text{для любых } y, v \in \dot{\Omega},$$

если матрица $k = (k_{\alpha\beta}^m)$ симметрична, т. е. выполнено условие $k_{\alpha\beta}^m = k_{\beta\alpha}^m$.

В самом деле, так как $k_{\beta\alpha}^- = k_{\alpha\beta}^+$, то

$$(A^- y, v) - 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha} [(k_{\alpha\beta}^- y_{\bar{x}_{\beta}}, v_{\bar{x}_{\alpha}}) + (k_{\alpha\beta}^- y_{\bar{x}_{\beta}}, v_{x_{\alpha}})] =$$

$$= 0,5 \sum_{\beta=1}^p \sum_{\alpha=\beta}^p [(k_{\alpha\beta}^- y_{\bar{x}_{\beta}}, v_{\bar{x}_{\alpha}}) + (k_{\alpha\beta}^- y_{x_{\beta}}, v_{x_{\alpha}})] =$$

$$= 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p [(k_{\beta\alpha}^- y_{\bar{x}_{\alpha}}, v_{\bar{x}_{\beta}}) + (k_{\beta\alpha}^- y_{x_{\alpha}}, v_{x_{\beta}})] =$$

$$= 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p [(k_{\alpha\beta}^+ v_{\bar{x}_{\beta}}, y_{\bar{x}_{\alpha}}) + (k_{\alpha\beta}^+ v_{x_{\beta}}, y_{x_{\alpha}})] = (y, A^+ v),$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что

$$(A^- y, y) = (A^+ y, y) - 0,5 (Ay, y) \geq 0,5 c_1 (\hat{A} y, y),$$

где $Ay = - \sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}$, так что

$$(\hat{A} y, y) - \sum_{\alpha=1}^p (1, y_{\bar{x}_{\alpha}}^2)_{\alpha} \geq 8 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{l_{\alpha}^2} \|y\|^2.$$

Таким образом A^- и A^+ — положительно определенные операторы: $A^- \geq \delta E$, $A^+ \geq \delta E$, $\delta = 4c_1 \sum_{\alpha=1}^p l_{\alpha}^{-2}$.

Чтобы доказать устойчивость схемы (86) — (88) с однородными граничными условиями, воспользуемся теоремой 3 из п. 11, согласно которой для задачи

$$z_{\bar{x}_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- z_{(\beta)} + \Psi_{\alpha}, \quad z_{\bar{x}_{\alpha_1}} = \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ z_{(\beta_1)} + \Psi_{\alpha},$$

$$z_{(\alpha)} = 0, \quad z_{(\alpha_1)} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\alpha}, \quad z(x, 0) = 0,$$

где

$$z_{\bar{t}_\alpha} = \frac{z_{(\alpha)} - z_{(\alpha-1)}}{\tau}, \quad z_{\bar{t}_{\alpha_1}} = \frac{z_{(\alpha_1)} - z_{(\alpha_1-1)}}{\tau},$$

имеет место априорная оценка

$$\|z^{j+1}\| \leq M_1 \max_{0 \leq j' \leq j} \left\| \sum_{\alpha=1}^p ((\bar{\Psi}_\alpha)^{j'+\alpha/(2p)} + (\bar{\Psi}_\alpha^+)^{j'+1-(\alpha-1)/(2p)}) \right\| + \\ + M_2 \sqrt{\tau} \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{\alpha=1}^p (\|(\bar{\Psi}_\alpha)^{j'+\alpha/(2p)}\| + \|(\bar{\Psi}_\alpha^+)^{j'+1-(\alpha-1)/(2p)}\|).$$

Отсюда следует, что аддитивная схема (86) — (88) сходится со скоростью $O(\sqrt{\tau} + |h|^2)$ в сеточной норме L_2 .

Перейдем теперь к задаче (61) — (62) § 2 для системы уравнений гиперболического типа

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_\alpha^- + L_\alpha^+) u + f_\alpha \right] = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f. \quad (89)$$

Решение этой системы сведем к последовательному от α к $\alpha+1$ решению (с шагом τ/p) более простых уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_\alpha^- u + L_\alpha^+ u + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (90)$$

Аппроксимируя каждое из этих уравнений в обычном смысле, получим аддитивную схему

$$\frac{1}{\sigma_p} y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- y_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ \check{y}_{(\beta)} + \Phi_\alpha, \\ \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_\tau, \quad (91) \\ y_{(\alpha)} = u(x, t'_\alpha), \quad x_\alpha = 0, \quad l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Phi_\alpha = f_\alpha(x, t'_\alpha)$, $t'_\alpha = t_{j+(\alpha/p-0,5)\tau}$; коэффициенты $\Lambda_{\alpha\beta}$ берутся в момент t'_α , $y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}$ определяется одной из формул (67) или (68), $\sigma_p = 0,5$ при $p = 2$, $\sigma_p = 1,5$ при $p = 3$.

Второе начальное условие аппроксимируем, полагая

$$y^{\alpha/p} = u_0(x) + \frac{\alpha\tau}{p} \bar{u}_0(x) + \frac{\alpha^2\tau^2}{2p^2} (L u_0 + f(x, 0)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Полученная аддитивная схема, очевидно, обладает суммарной аппроксимацией

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha = O(\tau + |h|^2).$$

Для определения вектора $\mathbf{y}'^{+1} = \mathbf{y}_{(p)}$ получаем систему уравнений

$$(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_{\alpha\alpha}^-) \mathbf{y}_{(\alpha)} = \mathbf{F}_\alpha,$$

где \mathbf{F}_α выражается через векторы $\mathbf{y}_{(\beta)}$, $\beta < \alpha$. Эта система решается последовательно от α к $\alpha+1$ и от s к $s+1$ при помощи обычных формул прогонки.

Меняя ролями Λ_α^- и Λ_α^+ , получим вторую схему

$$\frac{1}{\sigma_p} \mathbf{y}_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- \check{\mathbf{y}}_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ \mathbf{y}_{(\beta)} + \Phi_\alpha. \quad (92)$$

В этом случае счет идет от $\alpha+1$ к α и от s к $s+1$. Чередование схем (91) и (92) дает третью схему.

Пользуясь энергетическим методом, по аналогии с предыдущим пунктом, можно получить априорную оценку для погрешности $z = \mathbf{y} - \mathbf{u}$, использующую свойство суммарной аппроксимации. Из этой оценки следует сходимость аддитивной схемы.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

При помощи метода конечных разностей краевые задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$ и эллиптических уравнений общего вида в гл. IV были сведены к системе линейных алгебраических уравнений. Порядок системы равен числу внутренних узлов сетки и возрастает с уменьшением шага сетки.

В этой главе рассматриваются экономичные прямые и итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений.

В § 1 излагаются прямые экономичные методы, пригодные для решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Это — метод декомпозиции и метод быстрого преобразования Фурье (метод разделения переменных).

В следующих параграфах излагается общая теория итерационных методов для решения операторного уравнения первого рода $Au = f$, где A — самосопряженный положительный оператор в конечномерном евклидовом пространстве, и дается ее применение к эллиптическим сеточным уравнениям.

Эта теория является частью общей теории устойчивости разностных схем. Новым вопросом, возникающим здесь, является выбор итерационных параметров и оператора B . В § 2 указан оптимальный набор чебышевских параметров, при котором имеет место вычислительная устойчивость двухслойной итерационной схемы. В § 3 рассматривается универсальный попеременно-треугольный метод и его модификации для решения эллиптических уравнений с переменными коэффициентами в случае области произвольной формы.

В следующих параграфах изучаются методы переменных направлений и итерационные методы вариационного типа (метод скорейшего спуска, метод минимальных невязок и др.).

§ 1. Прямые методы

1. Прямые и итерационные методы. В результате разностной аппроксимации краевых задач для эллиптических уравнений мы получили в гл. IV системы линейных алгебраических уравнений (разностных или сеточных уравнений). Матрица A этой системы имеет большой порядок, равный числу N узлов сетки. Например, для сетки с шагом h по каждому из переменных x_1, x_2, \dots, x_p ($h_1 = h_2 = \dots = h_p = h$) число узлов $N = O\left(\frac{1}{h^p}\right)$, где p — число измерений. В случае двух и трех измерений число уравнений может быть большим, $N \approx 10^4 - 10^6$ (например, при $h = 1/100$). Кроме того, матрица системы имеет много нулевых элементов, специфическую (ленточную) структуру и, наконец,

является плохо обусловленной матрицей, т. е. отношение наибольшего собственного значения матрицы к ее наименьшему собственному значению очень велико ($\sim 10^3 - 10^4$) и является величиной $O(h^{-2})$.

Эти особенности эллиптических сеточных уравнений требуют разработки специальных экономичных алгоритмов для их численного решения.

Прямые экономичные методы применяются, как правило, для решения узкого, хотя и очень важного, класса сеточных уравнений. Кроме того, прямые методы используются в итерационных методах для обращения оператора на верхнем слое, который выбирается соответствующим образом.

В настоящее время существуют два экономичных прямых метода для решения разностных краевых задач в случае уравнения Пуассона в декартовой, полярной, цилиндрической и сферической системах координат. Один из них — метод декомпозиции или метод нечетно-четного исключения с факторизацией является модификацией метода исключения Гаусса.

Другой метод — метод разделения переменных основан на использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Для обоих методов справедлива следующая оценка числа арифметических операций Q , требуемых для нахождения решения в случае двумерной задачи, — $Q = O(N^2 \log_2 N)$, где N — число узлов по одному направлению.

В этом параграфе, кроме двух вышеуказанных методов, рассмотрен еще один прямой метод — метод матричной прогонки. Он пригоден для решения разностных эллиптических уравнений в областях сложной формы. Однако матричная прогонка требует $Q = O(N^4)$ арифметических действий и большую память для хранения промежуточных величин. В то же время при решении серии задач с различными правыми частями и граничными значениями методом прогонки можно за счет хранения прогоночных матриц уменьшить число действий до $O(N^3)$ для второго и последующих вариантов.

Итерационные методы последовательных приближений применимы для более общих задач в случае произвольной области, уравнения общего вида с переменными коэффициентами.

Эти методы рассмотрены в следующих параграфах.

Перейдем теперь к непосредственному изложению прямых методов.

Всюду в этом параграфе будем рассматривать задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (1)$$

Введем в \bar{G} прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2 :

$$\omega_h = \{x_{i_1 i_2} = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \bar{G}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Пусть $\gamma_h = \{x_{i_1 i_2} \in \Gamma\}$ — граница сетки.

Разностная задача Дирихле, соответствующая задаче (1), имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda y &= -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x), \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\tilde{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\ y_{i_1 i_2} &= y(i_1 h_1, i_2 h_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Задача (2) подробно исследована в гл. IV.

2. Метод декомпозиции. Сведем задачу (2) к системе векторных уравнений

$$\begin{aligned} -Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} &= F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ Y_0 &= F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где Y_j и F_j — векторы, компонентами которых являются значения решения $y_{ij} = y(ih_1, jh_2)$ и правой части $f_{ij} = f(ih_1, jh_2)$ на j -м столбце сетки ω_h , а C — квадратная матрица, которую мы определим ниже.

Действительно, если изменить правую часть в уравнениях (2) в приграничных узлах, то можно считать, что $y_{ij} = 0$ в граничных узлах при $i = 0, i = N_1$.

Перепишем уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} -y_{i, j-1} + (2y - h_2' y_{\tilde{x}_1 x_1})_{ij} - y_{i, j+1} &= h_2^2 \varphi_{ij}, \\ 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ y_{0j} = y_{N_1 j} &= 0, \quad 0 < j < N_2, \\ y_{i0} = \mu_{i0}, \quad y_{iN_2} &= \mu_{iN_2}, \quad 0 < i < N_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= f_{ij} \quad \text{при} \quad 1 < i < N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \varphi_{1j} &= f_{1j} + \frac{1}{h_1^2} \mu_{0j}, \quad \varphi_{N_1-1, j} = f_{N_1-1, j} + \frac{1}{h_1^2} \mu_{N_1 j}. \end{aligned}$$

Введем векторы Y_j и F_j :

$$\begin{aligned} Y_j &= (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{N_1-1, j}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ F_j &= \left(h_2^2 f_{1j} + \frac{h_2^2}{h_1^2} \mu_{0j}, \quad h_2^2 f_{2j}, \dots, h_2^2 f_{N_1-2, j}, \right. \\ &\quad \left. h_2^2 f_{N_1-1, j} + \frac{h_2^2}{h_1^2} \mu_{N_1 j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ F_j &= (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \dots, \mu_{N_1-1, j}) \quad \text{при} \quad j = 0, N_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Разностный оператор C определим следующим образом:

$$(CY_j)_i = (2y - h^2 y_{x_i x_i})_{ij}, \quad 0 < i < N_1, \\ y_{0j} = y_{N_1 j} = 0.$$

Отсюда и из (4) следует, что задача (2) эквивалентна системе векторных уравнений (3).

Перейдем к описанию метода декомпозиции, предполагая, что $N_2 = 2^n$. Его идея состоит в последовательном исключении из уравнений векторов Y_j , сначала с нечетными номерами; затем с номерами, кратными 2, 4, 8 и т. д.

Запишем для

$$j = 2, 4, 6, \dots, N_2 - 2, \quad \text{где } N_2 = 2^n,$$

следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} -Y_{j-2} + CY_{j-1} - Y_j &= F_{j-1}, \\ -Y_{j-1} + CY_j - Y_{j+1} &= F_j, \\ -Y_j + CY_{j+1} - Y_{j+2} &= F_{j+1}. \end{aligned}$$

Применяя ко второму уравнению оператор C и складывая все три уравнения, получим «укороченную» систему:

$$\begin{aligned} -Y_{j-2} + C^{(1)} Y_j - Y_{j+2} &= F_j^{(1)}, \\ j &= 2, 4, 6, \dots, N_2 - 2, \\ Y_0 &= F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая содержит неизвестные только с четными номерами. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= [C^{(0)}]^2 - 2E, \\ F_j^{(1)} &= F_{j-1}^{(0)} + C^{(0)} F_j^{(0)} + F_{j+1}^{(0)}, \end{aligned}$$

где

$$C^{(0)} = C, \quad F_j^{(0)} = F_j.$$

Если найдены из (6) Y_j с четными номерами, то неизвестные с нечетными номерами можно определить из уравнений

$$\begin{aligned} C^{(0)} Y_j &= F_j^{(0)} + Y_{j+1} + Y_{j-1}, \\ j &= 1, 3, 5, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Действуя так же, как и при исключении из (3) векторов с нечетными номерами, исключим из системы (6) неизвестные с номерами j , кратными 2, но не кратными 4 и т. д. В результате получаем систему уравнений для последовательного нахождения всех неизвестных путем решения уравнений

$$\begin{aligned} C^{(k-1)} Y_j &= F_j^{(k-1)} + Y_{j-2^{k-1}} + Y_{j+2^{k-1}}, \\ j &= 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \dots, N_2 - 2^{k-1}, \\ k &= n, n-1, \dots, 2, 1, \\ Y_0 &= F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $C^{(k)}$ и $F_j^{(k)}$ определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} C^{(k)} &= [C^{(k-1)}]^2 - 2E, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ C^{(0)} &= C, \\ F_j^{(k)} &= F_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + C^{(k-1)} F_j^{(k-1)} + F_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \\ j &= 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, N_2 - 2^k, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Алгоритм декомпозиции существенно использует факторизацию операторов $C^{(k)}$:

$$\begin{aligned} C^{(k)} &= \prod_{l=1}^{2^k} (C - \mu_l E), \\ \mu_l &= 2 \cos \frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

что позволяет свести обращение оператора $C^{(k)}$ к последовательному обращению методом прогонки трехточечных разностных операторов. В самом деле, пусть требуется решить уравнение

$$C^{(k)}v = \varphi.$$

Если учесть представление $C^{(k)}$ в виде (9), то определение v сводится к последовательному решению уравнений

$$\begin{aligned} (C - \mu_1 E) v^{(1)} &= \varphi, \\ (C - \mu_l E) v^{(l)} &= v^{(l-1)}, \quad l = 2, 3, \dots, 2^k, \end{aligned}$$

причем искомое решение $v = v^{(2^k)}$. Каждое из написанных выше уравнений есть трехточечное разностное уравнение

$$\begin{aligned} 2v^{(l)} - h_2^2 v_{x_1 x_1}^{(l)} - \mu_l v^{(l)} &= v^{(l-1)}, \quad h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ v^{(l)}(0) &= v^{(l)}(l_1) = 0, \end{aligned}$$

которое решается методом прогонки.

Для вычисления $F_j^{(k)}$ используется следующий алгоритм. Вводятся векторы $p_j^{(k)}$ и $q_j^{(k)}$, через которые $F_j^{(k)}$ выражается по формуле

$$F_j^{(k)} = C^{(k)} p_j^{(k)} + q_j^{(k)}. \quad (10)$$

Чтобы получить алгоритм для вычисления $p_j^{(k)}$ и $q_j^{(k)}$, подставим (10) в (8):

$$\begin{aligned} C^{(k)} p_j^{(k)} + q_j^{(k)} &= \\ &= C^{(k-1)} [p_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + p_{j+2^{k-1}}^{(k-1)} + q_j^{(k-1)}] + (C^{(k-1)})^2 p_j^{(k-1)} + \\ &\quad + q_{j-2^{k-1}}^{(k-1)} + q_{j+2^{k-1}}^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

после чего положим

$$q_j^{(k)} = 2p_j^{(k)} + q_{j-2}^{(k-1)} + q_{j+2}^{(k-1)} \quad (12)$$

и перепишем (11) в виде (учитывая, что $C^{(k)} = [C^{(k-1)}]^2 - 2E$)

$$(C^{(k-1)})^2 (p_j^{(k)} - p_j^{(k-1)}) = C^{(k-1)} (p_{j-2}^{(k-1)} + p_{j+2}^{(k-1)} + q_j^{(k-1)}).$$

После сокращения на $C^{(k-1)}$ получаем

$$\begin{aligned} C^{(k-1)} S_j^{(k-1)} &= p_{j-2}^{(k-1)} + p_{j+2}^{(k-1)} + q_j^{(k-1)}, \\ p_j^{(k)} &= p_j^{(k-1)} + S_j^{(k-1)}, \end{aligned}$$

а $q_j^{(k)}$ определяется согласно (12).

Подстановка (10) в (7) дает

$$C^{(k-1)} [Y_j - p_j^{(k-1)}] = q_j^{(k-1)} + Y_{j-2} + Y_{j+2}.$$

Таким образом, введение $q_j^{(k)}$ и $p_j^{(k)}$ вместо $F_j^{(k)}$ позволяет найти решение задачи (2), используя только обращение операторов $C^{(k-1)}$ и сложение векторов при вычислении правых частей уравнения.

Вычисления проводятся в следующей последовательности:

1) Задаются начальные значения $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$:

$$q_i^{(0)} = F_j, \quad p_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

2) Для всех $k = 1, 2, \dots, n - 1$ решаются уравнения

$$C^{(k-1)} S_j^{(k-1)} = q_j^{(k-1)} + p_{j-2}^{(k-1)} + p_{j+2}^{(k-1)},$$

и вычисляются векторы $p_j^{(k)}$ и $q_j^{(k)}$ по формулам

$$p_j^{(k)} = p_j^{(k-1)} + S_j^{(k-1)},$$

$$q_j^{(k)} = 2p_j^{(k)} + q_{j-2}^{(k-1)} + q_{j+2}^{(k-1)}$$

для всех

$$j = 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, N_2 - 2^k.$$

3) Решаются уравнения

$$C^{(k-1)} S_j^{(k-1)} = q_j^{(k-1)} + Y_{j-2} + Y_{j+2},$$

$$Y_0 = F_0, \quad Y_{N_2} = F_{N_2},$$

и вычисляется искомое решение

$$Y_j = p_j^{(k-1)} + S_j^{(k-1)}$$

для всех $j = 2^{k-1}, 3 \cdot 2^{k-1}, 5 \cdot 2^{k-1}, \dots, N_2 - 2^{k-1}$, $k = n, n - 1, \dots, 1$.

Метод декомпозиции требует $Q = O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ арифметических действий и полуторной памяти, т. е. используемая

машинная память в 1,5 раза больше числа неизвестных. Впрочем, небольшое изменение алгоритма, приводящее к незначительному увеличению времени решения, позволяет избавиться от увеличения памяти.

3. Метод разделения переменных. Рассмотрим решение задачи (2) с однородными граничными условиями

$$\Lambda y = -\varphi, \quad y|_{v_h} = 0, \quad (13)$$

где φ отличается от правой части f задачи (2) лишь в приграничных узлах на величину $\frac{1}{h_1^2} \mu$ при $i_1 = 1, i_1 = N_1 - 1$ и на $\frac{1}{h_2^2} \mu$ при $i_2 = 1, i_2 = N_2 - 1$.

Пусть $\mu_k(jh_2)$ и λ_k — собственная функция и собственное значение номера k задачи

$$\begin{aligned} \Lambda_2 \mu_k + \lambda_k \mu_k &= 0, \quad h_2 \leq x_2 \leq l_2 - h_2, \\ \mu_k(0) &= \mu_k(l_2) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно п. 2 § 3 гл. II имеем

$$\mu_k(jh_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k\pi j}{N_2}, \quad \lambda_k = \frac{4}{h_2^3} \sin^2 \frac{k\pi h_2}{2l_2},$$

$$k = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Решение задачи (13) ищем в виде суммы

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k(ih_1) \mu_k(jh_2), \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

где коэффициент Фурье c_k зависит от $x_1 = ih_1$.

После подстановки выражения (15) в уравнение (13) получим

$$\begin{aligned} \Lambda y &= \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = \\ &= \sum_{k=1}^{N_2-1} [\mu_k(jh_2) \Lambda_1 c_k(ih_1) + c_k(ih_1) \Lambda_2 \mu_k(jh_2)] = \\ &= - \sum_{k=1}^{N_2-1} \varphi_k(ih_1) \mu_k(jh_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varphi_k(ih_1)$ — коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_k(ih_1) = \sum_{j=1}^{N_2-1} \varphi(ih_1, jh_2) \mu_k(jh_2) h_2.$$

Учитывая (14), а также ортогональность функций μ_k , получим из (16) для определения c_k задачу

$$\begin{aligned} \Lambda_1 c_k - \lambda_k c_k &= -\varphi_k, \quad h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ c_k(0) &= c_k(l_1) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$.

Отсюда видно, что $c_k(ih_1)$ как функция $x_1 = ih_1$ для каждого k находится методом прогонки. Всего надо $N_2 - 1$ раз использовать алгоритм прогонки.

Зная $c_k(ih_1)$, по формуле (15) находим решение задачи (13).

Вычисление коэффициентов Фурье φ_k и нахождение решения y_{ij} может быть выполнено по одним и тем же формулам. Здесь общим является вычисление сумм вида

$$v_j = \sum_{k=1}^{N-1} z_k \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Для этого используется специальный алгоритм быстрого преобразования Фурье (на его описании мы не имеем возможности останавливаться), который позволяет вычислять все указанные суммы за $Q = 5N \log_2 N$ арифметических операций ($N = 2^n$) вместо $O(N^2)$ при обычном способе суммирования и тем самым найти решение разностной задачи Дирихле (2) в прямоугольнике за $O(N_1 N_2 \log_2 N_2)$ арифметических операций.

Метод декомпозиции можно применять в комбинации с методом разделения переменных.

В частности, метод разделения переменных можно применить для решения укороченной системы (6) (получающейся после исключения неизвестных с нечетными j). Тогда задача (2) может быть решена за $Q \approx 5N_1 N_2 \log_2 N_2$ арифметических действий, что в два раза меньше, чем требуется при решении задачи (2) методом разделения переменных.

4. Метод матричной прогонки. Система уравнений (3) является частным случаем задачи

$$\begin{aligned} -A_j Y_{j-1} + C_j Y_j - B_j Y_{j+1} &= F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_0 Y_0 - B_0 Y_1 &= F_0, \quad -A_N Y_{N-1} + C_N Y_N = F_N, \end{aligned} \quad (18)$$

где Y_j и F_j — векторы размерности M_j , C_j — квадратная матрица размерности $M_j \times M_j$, A_j — прямоугольная матрица размерности $M_j \times M_{j-1}$, а B_j — прямоугольная матрица размерности $M_j \times M_{j+1}$.

Решение задачи ищется (по аналогии с п. 5 § 2, гл. I) в виде

$$Y_j = \alpha_{j+1} Y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 1, 0,$$

где α_j — прямоугольная матрица размерности $M_{j-1} \times M_j$, а β_j — вектор размерности M_{j-1} .

Из (18) и (19) по аналогии со случаем обычной прогонки получаем рекуррентные формулы для определения α_j , β_j :

$$\alpha_{j+1} = (C_j - A_j \alpha_j)^{-1} B_j,$$

$$\alpha_1 = C_0^{-1} B_0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\beta_{j+1} = (C_j - A_j \alpha_j)^{-1} (F_j + A_j \beta_j),$$

$$\beta_1 = C_0^{-1} F_0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, N,$$

$$Y_N = (C_N - A_N \alpha_N)^{-1} (A_N \beta_N + F_N) = \beta_{N+1},$$

$$Y_j = \alpha_{j+1} Y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Метод матричной прогонки устойчив по отношению к случайной ошибке, т. е.

$$\|\alpha_j\| \leq 1, \quad j=1, 2, \dots, N,$$

если выполнены условия

$$\begin{aligned} \|C_0^{-1}B_0\| &\leq 1, \quad \|C_N^{-1}A_N\| \leq 1, \\ \|C_j^{-1}A_j\| + \|C_j^{-1}B_j\| &\leq 1, \quad 1 \leq j \leq N-1, \end{aligned}$$

причем хотя бы для одного из этих условий должно выполняться строгое неравенство.

Для интересующего нас частного случая (3) имеем $A_j = B_j = E$, $C_j = C$ для $1 \leq j \leq N-1$, а $B_0 = A_N = 0$, $C_0 = C_N = E$. Формулы матричной прогонки упрощаются:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1} &= (C - \alpha_j)^{-1}, \quad \alpha_1 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ \beta_{j+1} &= \alpha_{j+1}(F_j + \beta_j), \quad \beta_1 = F_0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \\ Y_j &= \alpha_{j+1}Y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad Y_{N_2} = F_{N_2}, \quad j = N_2 - 1, \dots, 2, 1. \end{aligned}$$

Векторы Y_j и β_j имеют размерность $N_1 - 1$, α_j и C — квадратные матрицы размерности $(N_1 - 1) \times (N_1 - 1)$, а достаточное условие устойчивости только одно, имеет вид

$$\|C^{-1}\| \leq 0.5,$$

оно выполнено, так как $C \geq 2E$.

Подсчитаем число действий для определения решения задачи (2) методом матричной прогонки.

Так как все матрицы α_j являются полными (хотя C — трехдиагональная матрица), то для вычисления α_{j+1} по заданному α_j требуется $O(N_1^3)$ арифметических операций, а для вычисления всех α_j , $j = 1, 2, \dots, N_2$, надо $O(N_1^3 N_2)$ операций. Далее, для определения β_{j+1} по заданному β_j надо $O(N_1^2)$ операций, а для определения всех векторов β_j — $O(N_1^2 N_2)$ операций.

Столько же действий надо для вычисления всех Y_j .

Общий объем работы $Q = O(N_1^3 N_2)$ операций.

Если решается серия задач, то α_j не надо пересчитывать, и при решении второго и следующих вариантов требуется $O(N_1^2 N_2)$ операций.

§ 2. Двухслойные итерационные схемы

1. Двухслойные итерационные схемы. Постановка задачи. Пусть требуется решить уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где $A: H \rightarrow H$ — линейный оператор в конечномерном (размерности N) вещественном пространстве H со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} A &= A^* > 0, \\ f &\in H — любой вектор. \end{aligned}$$

Остановимся сначала на общей характеристике итерационного метода (схемы). Итерационный метод позволяет, отправляясь от некоторого начального приближения $y_0 \in H$, последовательно находить приближенные решения уравнения (1): $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots$, называемые *итерациями*; здесь k — номер итерации. Значение y_{k+1} выражается через известные предыдущие итерации y_k, y_{k-1}, \dots . Если при вычислении y_{k+1} используется только предыдущая итерация y_k , то говорят, что итерационный метод (схема) является одношаговым, а если используются две предыдущие итерации, то метод итераций называют двухшаговым. Мы убедимся в том, что эти методы, по аналогии с гл. VI, естественно называть двухслойным и соответственно трехслойным. Ниже будет показано, что одношаговый итерационный метод по форме совпадает с двухслойной схемой, рассмотренной в гл. VI.

Любой линейный одношаговый итерационный метод для нахождения приближенного решения уравнения (1) может быть записан в виде

$$B_k y_{k+1} = C_k y_k + F_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где B_k и C_k — линейные операторы из H в H , зависящие, вообще говоря, от номера итерации k , $F_k \in H$ — заданная функция k , y_k — k -я итерация, причем существует B_k^{-1} .

Естественно требовать, чтобы не зависящее от k точное решение u уравнения (1) тождественно удовлетворяло уравнению (2):

$$(B_k - C_k) u = F_k.$$

Это возможно только при условии

$$(B_k - C_k) A^{-1} f = F_k.$$

Отсюда следует, что 1) существует обратный оператор $(B_k - C_k)^{-1}$, 2) $f = A (B_k - C_k)^{-1} F_k$. Всегда можно положить

$$\tau_{k+1}^{-1} (B_k - C_k) = A, \quad F_k = f \tau_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\tau_{k+1} > 0$ — числовой параметр.

В результате получим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

При $k = 0$ задается произвольное начальное приближение (нулевая итерация) $y_0 \in H$. Так как существует обратный оператор B_k^{-1} , то из (3) следует

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1} (A y_k - f) \quad (4)$$

или

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1} r_k = y_k - \tau_{k+1} w_k,$$

где $r_k = Ay_k - f$ — невязка, $w_k = B_k^{-1} r_k$ — поправка.

Если итерация y_k известна, то y_{k+1} находится из уравнения (4). Зная y_0 , последовательно определим y_1, y_2, \dots

Очевидно, что итерационный метод имеет смысл, если он сходится, т. е.

$$\|y_k - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Обычно задают некоторую погрешность $\varepsilon > 0$ (относительную погрешность $\|y_k - u\|/\|y_0 - u\|$), с которой надо найти приближенное решение задачи (1). Вычисления прекращают, если выполнено условие

$$\|y_k - u\| \leq \varepsilon \|y_0 - u\|. \quad (6)$$

Это условие неудобно для практической проверки, так как u — неизвестный вектор, и может быть заменено требованием

$$\|Ay_k - f\| \leq \varepsilon \|Ay_0 - f\| \quad (7)$$

для невязки $r_k = Ay_k - f = Ay_k - Au$, которая может быть вычислена непосредственно.

В общем случае вместо (6) пишут неравенство

$$\|y_k - u\|_D \leq \varepsilon \|y_0 - u\|_D, \quad (8)$$

где $D = D^* > 0$ — некоторый оператор.

Полагая, например, $D = A^2$, получим из (8) неравенство (7).

Напишем уравнение для погрешности $z_k = y_k - u$. Так как $Au = f$, то

$$B_k \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

задано $z_0 \in H$.

Если $B_k = B$ не зависит от k , то поправка $w_k = B^{-1} r_k$ также удовлетворяет однородному уравнению

$$B \frac{w_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + Aw_k = 0. \quad (10)$$

В самом деле, из (4) следует

$$y_{k+1} - y_k = -\tau_{k+1} B^{-1} r_k = -\tau_{k+1} w_k.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором A и учитывая, что

$$\begin{aligned} Ay_{k+1} - Ay_k &= (Ay_{k+1} - f) - (Ay_k - f) = r_{k+1} - r_k, \\ r_{k+1} - r_k &= B(B^{-1} r_{k+1} - B^{-1} r_k) = B(w_{k+1} - w_k), \end{aligned}$$

получаем уравнение (10).

Из (9) видно, что

$$z_{k+1} = S_{k+1}z_k, \quad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}B_k^{-1}A, \quad (11)$$

где S_{k+1} — оператор перехода со слоя k на слой $k+1$.

Исключая z_k, z_{k-1}, \dots, z_1 , имеем при $k=n-1$

$$z_n = T_n z_0, \quad T_n = S_n S_{n-1} \dots S_2 S_1, \quad (12)$$

где T_n — разрешающий оператор схемы (9). Из (12) находим

$$\|z_n\|_D = \|T_n z_0\|_D \leq \|T_n\|_D \|z_0\|_D$$

или

$$\|z_n\|_D \leq q_n \|z_0\|_D, \quad q_n = \|T_n\|_D. \quad (13)$$

Условие окончания итераций выполнено, если

$$q_n \leq \epsilon.$$

Таким образом, для выяснения вопроса о сходимости итераций надо оценить норму разрешающего оператора T_k .

Схема (11) имеет точную аппроксимацию на решении u уравнения $Au=f$ при любых операторах $\{B_k\}$ и любых параметрах $\{\tau_{k+1}\}$. Однако величина q_n зависит от $\{B_k\}$ и $\{\tau_{k+1}\}$. Поэтому B_k и τ_{k+1} следует выбирать так, чтобы минимизировать норму $\|T_n\|_D = q_n$ разрешающего оператора T_n схемы (11). Кроме того, при выборе B_k естественно стремиться к минимуму арифметических действий, нужных для определения y_{k+1} при заданном y_k из уравнения

$$B_k y_{k+1} = F_k, \quad F_k = B_k y_k - \tau_{k+1} (A y_k - f).$$

В этом и состоит основная задача теории итерационных методов.

Из предыдущего ясно, что любой итерационный процесс (3) можно формально трактовать как двухслойную схему для решения нестационарной задачи

$$B \frac{du}{dt} + Au = f,$$

причем параметр τ_{k+1} можно рассматривать как шаг по фиктивному времени $t_{k+1} = \sum_{m=1}^{k+1} \tau_m$.

Различие между итерационными схемами и схемами для нестационарных задач состоит в следующем:

а) итерационная схема (3) точно аппроксимирует уравнение (1), так как решение u уравнения (1) при любых B_k и τ_{k+1} удовлетворяет уравнению (3),

б) выбор параметра τ_{k+1} и операторов B_k следует подчинить лишь требованиям сходимости итераций и минимума арифметических действий (экономичности) для получения решения

исходной задачи с заданной точностью (в случае нестационарных задач выбор шага подчинен прежде всего требованию аппроксимации).

Пусть $Q(\varepsilon)$ — общее число арифметических действий, которые надо выполнить, чтобы получить при помощи метода (3) решение уравнения (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ при любом выборе начального приближения. Схему (т. е. $\{\tau_k\}$ и $\{B_k\}$) надо выбирать так, чтобы $Q(\varepsilon)$ было минимальным. Если $n = n(\varepsilon)$ — минимальное число итераций, при котором достигается точность ε , то

$Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} Q_k = \bar{Q}_n n$, где Q_k — число действий для нахождения k -й итерации. Задача о минимуме $Q(\varepsilon)$ сводится к задаче о минимуме числа итераций $n(\varepsilon)$ и числа Q_k , которое зависит от B_k .

Если $B_k = E$ — единичный оператор, то (3) называется явной итерационной схемой

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

задано любое $y_0 \in H$.

Если же $B_k \neq E$, то схема (3) — неявная.

2. Явная схема с оптимальным чебышевским набором параметров. Рассмотрим явную схему (14) с параметрами

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n,$$

которые выберем так, чтобы число итераций $n = n(\varepsilon)$ было минимальным.

При этом предполагается, что A — самосопряженный положительный оператор и известны границы его спектра, т. е. наименьшее ($\gamma_1 > 0$) и наибольшее (γ_2) собственные значения:

$$A = A^* > 0, \quad \gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \quad (15)$$

Последнее условие означает, что

$$\gamma_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq \gamma_2 \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in H.$$

Если параметр $\tau = \text{const}$ не зависит от k ($\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = \tau$), то (14) называют схемой простой итерации

$$y_{k+1} = y_k - \tau (Ay_k - f). \quad (16)$$

Для невязки $r_k = Ay_k - f$, как было показано в п. 1, выполняется однородное уравнение

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{\tau_{k+1}} + Ar_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad r_0 = Ay_0 - f \in H \quad (17)$$

или

$$r_{k+1} = S_{k+1} r_k, \quad S_{k+1} = E - \tau_{k+1} A.$$

Отсюда выражим r_n через r_0 :

$$r_n = T_n r_0, \quad T_n = S_1 S_2 \dots S_n, \quad (18)$$

где T_n — разрешающий оператор, являющийся полиномом n -й степени относительно оператора A :

$$T_n = \mathcal{P}_n(A) = (E - \tau_1 A)(E - \tau_2 A) \dots (E - \tau_n A), \quad (19)$$

так что

$$r_n = \mathcal{P}_n(A) r_0.$$

Для r_n получаем оценку

$$\|r_n\| \leq \|\mathcal{P}_n(A)\| \|r_0\| = q_n \|r_0\|. \quad (20)$$

Наша задача состоит в оценке $\|\mathcal{P}_n(A)\|$ через γ_1 и γ_2 , в отыскании таких параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, при которых достигается минимум величины

$$q_n = \|\mathcal{P}_n(A)\|.$$

Операторный полином

$$\mathcal{P}_n(A) = \prod_{m=1}^n (E - \tau_m A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k, \quad c_0 = 1, \quad \mathcal{P}_n(0) = 1$$

является самосопряженным оператором, так как любая степень оператора A есть самосопряженный оператор

$$A^m = (A^m)^*.$$

Пусть $\{\lambda_s, \xi_s\}$ — собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A :

$$A \xi_s = \lambda_s \xi_s, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N,$$

где N — размерность H , причем

$$\lambda_1 = \min_s \lambda_s = \gamma_1, \quad \lambda_N = \max_s \lambda_s = \gamma_2.$$

Учитывая, что

$$A^k \xi_s = \lambda_s A^{k-1} \xi_s = \lambda_s^k \xi_s,$$

т. е. λ_s^k есть собственное значение оператора A^k , получаем

$$\mathcal{P}_n(A) \xi_s = \sum_{k=0}^n c_k A^k \xi_s = \left(\sum_{k=0}^n c_k \lambda_s^k \right) \xi_s = \mathcal{P}_n(\lambda_s) \xi_s$$

или

$$\lambda(\mathcal{P}_n(A)) = \mathcal{P}_n(\lambda(A)).$$

Таким образом, собственные значения операторного полинома $\mathcal{P}_n(A)$ равны полиному $\mathcal{P}_n(\lambda)$ от собственных значений $\lambda = \lambda(A)$ оператора A .

Так как $(\mathcal{P}_n(A))^* = \mathcal{P}_n(A)$, то

$$\|\mathcal{P}_n(A)\| \leq \max_{\gamma_1 \leq x \leq \gamma_2} |\mathcal{P}_n(x)|. \quad (21)$$

Наша задача — отыскание $\min_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n} \|\mathcal{P}_n(A)\|$ — сводится к задаче о минимаксе полинома $\mathcal{P}_n(x)$.

Проведем замену переменных, полагая

$$x = 0,5[(\gamma_2 - \gamma_1)t + \gamma_2 + \gamma_1]. \quad (22)$$

При этом отрезок $[\gamma_1, \gamma_2]$ отображается на отрезок $[-1, 1]$ и, следовательно,

$$\mathcal{P}_n(x) = \tilde{\mathcal{P}}_n(t), \quad t \in [-1, 1],$$

причем

$$\mathcal{P}_n(0) = 1.$$

Надо найти полином, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, для которого $\max_{-1 \leq t \leq 1} |\tilde{\mathcal{P}}_n(t)|$ минимален, при дополнительном условии нормировки

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(t_0) = 1,$$

где t_0 соответствует $x = 0$. Из (22) при $x = 0$ находим

$$t_0 = -\frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}. \quad (23)$$

Таким полиномом является полином Чебышева

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(t) = \frac{T_n(t)}{T_n(t_0)},$$

где

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) \quad \text{при } |t| \leq 1. \quad (24)$$

При $|t| \geq 1$ полином $T_n(t)$ определяется по формуле

$$T_n(t) = 0,5[(t + \sqrt{t^2 - 1})^n + (t - \sqrt{t^2 - 1})^n], \quad |t| > 1. \quad (25)$$

Так как $\max_{|t| \leq 1} |T_n(t)| = 1$, то

$$\min_{\{\tau_k\}} \max_{\gamma_1 \leq x \leq \gamma_2} |\mathcal{P}_n(x)| = \min_{\{\tau_k\}} \max_{-1 \leq t \leq 1} |\tilde{\mathcal{P}}_n(t)| = 1/|T_n(t_0)| = q_n. \quad (26)$$

Чтобы найти $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, потребуем совпадения нулей полинома $\tilde{\mathcal{P}}_n(t)$ с нулями полинома Чебышева, которые известны

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Полином

$$\mathcal{P}_n(x) = (1 - \tau_1 x)(1 - \tau_2 x) \dots (1 - \tau_n x)$$

имеет нули при

$$x_k = 1/\tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая связь (22) между x и t , получаем $2 = [(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_2 - \gamma_1) t_k] \tau_k$, откуда следует

$$\tau_k = 2/(\gamma_2 + \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (28)$$

Параметр τ_k запишем в виде

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 - \rho_0 t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

Итак, параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ определены. Найдем выражение для

$$q_n = 1/|T_n(t_0)|, \quad t_0 = -1/\rho_0.$$

Так как $|t_0| > 1$, то используем для $T_n(t_0)$ формулу (25)

$$|T_n(t_0)| = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho_0} + \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} \right)^n + \left(\frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} \right)^n \right].$$

Преобразуем выражения в скобках

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} + \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} &= \frac{1 + \sqrt{1 - \rho_0^2}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left[1 + \sqrt{\frac{4\xi}{(1 + \xi)^2}} \right] = \\ &= \frac{1 + \xi + 2\sqrt{\xi}}{1 - \xi} = \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1 + \xi - 2\sqrt{\xi}}{1 - \xi} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}} = \rho_1, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}. \quad (30)$$

Таким образом, для схемы (14) с оптимальным набором параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, определяемых по формуле (29), имеет

место оценка

$$\|Ay_n - f\| \leq q_n \|Ay_0 - f\|, \quad (31)$$

где q_n определяется по формуле (30).

Определим $n = n(\varepsilon)$ так, чтобы

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}} \leq \varepsilon.$$

Для этого достаточно, чтобы $\rho_1^n \leq \varepsilon/2$ или

$$n \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_1)}. \quad (32)$$

Из разложения функции

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} \right) x^3, \quad 0 < x < 1,$$

где $0 < \bar{x} < x$, видно, что

$$\ln \frac{1+\bar{x}}{1-\bar{x}} > 2\bar{x}, \quad \ln \frac{1}{\rho_1} = \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} > 2\sqrt{\xi},$$

и следовательно, неравенство (32) выполнено при

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \ln \frac{2}{\varepsilon}. \quad (33)$$

Эта оценка для числа итераций более удобна, чем (32).

3. Схема простой итерации. Формально полагая в (29) $n=1$, мы получаем *метод простой итерации*

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_0} + Ay_k = f \quad (34)$$

с параметром

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (34')$$

так как $t_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\tau_1 = \tau_0$. При этом

$$q_1 = \frac{2\rho_1}{1+\rho_1^2} = \rho_0. \quad (35)$$

Для невязки $r_k = Ay_k - f$ имеем уравнение

$$y_{k+1} = S y_k, \quad S = E - \tau_0 A.$$

Так как $T_1 = S$, то из (20) и (35) следует оценка для нормы оператора перехода

$$\|S\| = \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}.$$

Вычисляя n итераций по методу простой итерации, мы найдем

$$r_n = S^n r_0, \quad \|r_n\| \leq \rho_0^n \|r_0\|.$$

Условие $\rho_0^n \leq \epsilon$ выполнено, если $n \geq \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(1/\rho_0)}$, что, в свою очередь, имеет место при

$$n \geq n_0(\epsilon), \quad n_0(\epsilon) = \frac{\ln(1/\epsilon)}{2\epsilon}. \quad (36)$$

4. Модельная задача. Сравнение методов. Для сравнения различных итерационных методов используем разностную задачу Цирихле для уравнения Пуассона в квадрате $\{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ с $l_1 = l_2 = 1$, предполагая, что сетка ω_h квадратная, т. е. $h_1 = h_2 = h$. Это — специальный случай задачи (2) из § 1. Сточные уравнения имеют вид

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0, \quad (37)$$

где

$$\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}^{(\pm 1\alpha)} = \frac{y^{(\pm 1\alpha)} - 2y + y^{(\mp 1\alpha)}}{h^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Систему уравнений (37) можно записать в операторном виде

$$Ay = f,$$

где $Ay = -\Lambda y$ в пространстве $H = \dot{\Omega}$ сеточных функций, заданных на ω_h и обращающихся в нуль на границе γ_h сетки. В H вводится скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h^2$$

и норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Оператор A подробно изучен в гл. IV. Он является самосопряженным, положительным и имеет собственные значения

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{\pi k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\pi k_2 h}{2} \right),$$

$k_\alpha = 1, 2, \dots, N-1$, $\alpha = 1, 2$, так что

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \min \lambda_{k_1 k_2} = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \\ \gamma_2 &= \max \lambda_{k_1 k_2} = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Задачу (37) мы в дальнейшем будем называть модельной и использовать в качестве эталона при сравнении методов.

Сравним по числу итераций метод простой итерации (34), (34') и метод с чебышевским набором параметров (14), (29)

Для задачи (37) схема простой итерации записывается так (здесь, как и всюду в дальнейшем, при рассмотрении итерационных процессов для конкретных разностных уравнений, номер итерации k будем писать сверху над функцией y):

$$y^{k+1} = y^k + \tau_0 (\Lambda y^k + f), \quad (39)$$

где

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{h^2}{4}.$$

Подставляя в (39) значение τ_0 , получаем формулу

$$y_{i_1 i_2}^{k+1} = \frac{y_{i_1-1, i_2}^k + y_{i_1+1, i_2}^k + y_{i_1, i_2-1}^k + y_{i_1, i_2+1}^k}{4} + \frac{h^2}{4} f_{i_1 i_2}, \quad (40)$$

по которой находится $(k+1)$ -я итерация.

Для явной схемы (14) с чебышевским набором параметров вычисления ведутся по формуле

$$y_{i_1 i_2}^{k+1} = y_{i_1 i_2}^k + \frac{\tau_{k+1}}{h^2} \left(y_{i_1-1, i_2}^k + y_{i_1+1, i_2}^k + y_{i_1, i_2-1}^k + y_{i_1, i_2+1}^k - 4y_{i_1 i_2}^k \right) + \tau_{k+1} f_{i_1 i_2},$$

где

$$\tau_{k+1} = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \ell_k} = \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{1 + \rho_0 \ell_k}.$$

По количеству действий для нахождения y^{k+1} оба метода отличаются мало. Поэтому их сравнивать надо по числу итераций; пользуясь формулами (38), найдем

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4} \quad \text{при } h \ll 1.$$

Задавая затем точность, например,

$$\epsilon = 2e^{-10} \approx 10^{-4},$$

получаем

$n_0(\epsilon) \approx \frac{3,2}{h}$ для схемы с чебышевским набором параметров (ЧНП),

$n_0(\epsilon) \approx \frac{2}{h^2}$ для схемы простой итерации (СПИ).

Составим таблицу для числа итераций:

h	СПИ	ЧНП
1/10	200	32
1/50	5 000	160
1/100	20 000	320

Отсюда видно, что метод простой итерации требует значительно больше итераций, чем метод с ЧНП.

Следует иметь в виду, что оценки для числа итераций получены для любого начального приближения (любого элемента y_0 из пространства H), т. е. худшей сходимости быть не может; число итераций может лишь уменьшиться, если хорошо выбрать начальное приближение.

5. О вычислительной устойчивости итерационных методов. Описанный выше итерационный метод с ЧНП известен давно (иногда его называют также *методом Ричардсона*), однако до недавнего времени он почти не использовался в практике вычислений на ЭВМ при решении сеточных уравнений.

Дело в том, что этот метод изучался нами для идеального вычислительного процесса (с бесконечным числом знаков), в то время как на ЭВМ вычисления ведутся с конечным числом знаков, в связи с чем имеются числа, являющиеся машинной бесконечностью M_∞ и машинным нулем.

Если в процессе вычислений появляется число $M > M_\infty$, то происходит останов машины (авост).

С точки зрения идеального вычислительного процесса нули t_k и параметры t_k можно упорядочить любым из $n!$ способов. Любые две последовательности параметров $\{t_k\}$ будут эквивалентны, так как для них верна одна и та же априорная оценка, и точность ε достигается за одно и то же число итераций.

При вычислениях на ЭВМ различные последовательности $\{t_k\}$ неэквивалентны. Если использовать в методе с ЧНП параметры t_k , например, в порядке роста

$$t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (41)$$

или в обратном порядке, полагая

$$t_k = -\cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (42)$$

то при достаточно малых ξ возможен авост вследствие нарастания промежуточных значений y_k при $k \leq n$. Это связано с немонотонным характером приближения y_k к u из-за того, что норма оператора перехода $S_k = E - t_k A$ от $(k-1)$ -й к k -й итерации при отрицательных t_k может быть больше единицы.

Поясним ситуацию на простом примере.

П р и м е р. Требуется решить систему уравнений

$$v(x_{i-1}) - 2v(x_i) + v(x_{i+1}) = 0, \quad x_i = ih, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ v(0) = 1, \quad v(1) = 0, \quad h = 1/N,$$

аппроксимирующих задачу

$$u'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0;$$

точное решение $u(x) = 1 - x$, $v(x_i) = 1 - x_i$.

В этом случае

$$Ay = -y_{xx}, \quad \gamma_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \xi = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Возьмем 19 уравнений ($N = 20$) и положим $\varepsilon = 10^{-4}$. Теоретическая оценка (33) дает $n_0(\varepsilon) = 63,2$, так что $n = 64$, и параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ при $n = 64$ выбираем по формулам (29) и (41). Результаты вычислений даны в таблице 3. В первой строке указан номер итерации k , во второй строке — величина

$$\Delta_k = \|y_k - y_{k-1}\|_C = \max_{0 < x_i < 1} |y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i)|.$$

Итерационный процесс расходится, и при $k = 64$ наступает аварийный останов машины.

Таблица 3

k	53	54	55	56	57	58
Δ_k	0,12	1,5	27	$6,3 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^4$	$7,2 \cdot 10^5$
k	59	60	61	62	63	
Δ_k	$3,7 \cdot 10^7$	$2,6 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^{11}$	$3,3 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{15}$	

Если брать параметры τ_k в обратном порядке, т. е. определять t_k для (29) по формулам (42), то неустойчивость итерационной схемы выражена более сильно и автост наступает при $k = 12$ (см. таблицу 4).

Ошибки округления можно трактовать как возмущение правой части уравнения (1) на каждом шаге. Итерационная схема (14) с параметрами (29), (41) или (42) неустойчива по правой части. Причина неустойчивости в том, что норма оператора $S_k = E - \tau_k A$ — оператора перехода от $(k-1)$ -й итерации к k -й итерации при отрицательных t_k может быть больше единицы, так как

$$\|S_k\| = \frac{\rho_0(1 + |t_k|)}{1 - \rho_0|t_k|} \quad \text{при } t_k < 0$$

и

$$\|S_k\| > 1, \quad \text{если } \rho_0(1 + 2|t_k|) > 1.$$

В то же время

$$\|S_k\| = \frac{\rho_0(1+t_k)}{1+\rho_0 t_k} < 1 \quad \text{при } t_k > 0.$$

Установим эти формулы. Так как $S_k = S_k^*$, то $\|S_k\| = \sup_{\|x\|=1} |(S_k x, x)|$. Учитывая, что $\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E$, найдем

$$(\tau_k \gamma_1 - 1) E \leq \tau_k A - E \leq (\tau_k \gamma_2 - 1) E.$$

Подставим сюда $\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0 t_k}$ и учтем, что $\tau_0 \gamma_1 = 1 - \rho_0$, $\tau_0 \gamma_2 = 1 + \rho_0$. Тогда получим

$$\tau_k \gamma_1 - 1 = -\frac{\rho_0(1+t_k)}{1+\rho_0 t_k}, \quad \tau_k \gamma_2 - 1 = \rho_0 \frac{1-t_k}{1+\rho_0 t_k}.$$

Отсюда видно, что $\|S_k\| = \tau_k \gamma_2 - 1$ при $t_k < 0$, $\|S_k\| = 1 - \tau_k \gamma_1$ при $t_k > 0$. Если $t_k < 0$ и $k \geq k_0$, где k_0 — наименьшее число, для

Таблица 4

k	1	2	3	4	5	6
Δ_k	39,6	$2,6 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^5$	$8,2 \cdot 10^6$	$3,7 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^{10}$
k	7	8	9	10	11	
Δ_k	$3,3 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^{12}$	$1,2 \cdot 10^{14}$	$1,7 \cdot 10^{15}$	$1,9 \cdot 10^{16}$	

которого $t_{k_0} < 0$, и выполняется условие $\rho_0(1+2|t_{k_0}|) > 1$, то $\|S_{k+1}\| > \|S_k\| > 1$. Поэтому

$$\prod_{j=k_0}^n \|S_j\| > \|S_{k_0}\|^{n-k_0} > 1,$$

и погрешность округления, появившаяся при определении y_{k_0} , будет увеличиваться с ростом k от k_0 до n . Пусть $\xi = \gamma_1 / \gamma_2 \leq 1$, так что $\rho_0 = 1 - 2\xi + O(\xi^2)$ и $t_{k_1} = \cos \frac{2k_1 - 1}{2n} \pi < 0$, тогда

$$\|S_{k_1}\| = \frac{\rho_0(1+|t_{k_1}|)}{1-\rho_0|t_{k_1}|} = \frac{1+|t_{k_1}|}{1-|t_{k_1}|} \left(1 - 2\xi \left(1 + \frac{1}{1-|t_{k_1}|} \right) \right) + O(\xi^2).$$

Предположим, что $|t_{k_1}| > 0,5$, а $\xi < 0,01$. Тогда

$$\|S_{k_1}\| = 3(1-6\xi) + O(\xi^2) > 3 \cdot 0,9 = 2,7, \quad \prod_{j=k_1}^n \|S_j\| > 2,7^{n-k_1}.$$

Формулы (30) и (31) фактически выражают устойчивость схемы (14) с набором параметров (29) по начальным данным. В случае реального вычислительного процесса, как показывают приведенные выше примеры, необходимо исследовать устойчивость итерационной схемы по правой части, а также устойчивость по начальным данным при переходе от y_0 к y_k для любого $k = 1, 2, \dots, n$. Как было показано в гл. VI, § 1, устойчивость по правой части есть следствие равномерной устойчивости по начальным данным, т. е. устойчивости при переходе от любого y_j к любому y_k , где $k > j > 0$.

6. Упорядочение итерационных параметров. Возникает теоретическая проблема — упорядочить множество итерационных параметров $\{\tau_k\}$ так, чтобы для чебышевской схемы (14) с соответствующей последовательностью параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ влияние ошибок округления было минимальным и в процессе вычислений не возникало больших промежуточных значений, зависящих от n .

Приведем решение этой задачи и укажем способ упорядочения множества M_n параметров $\{\tau_k\}$, при котором схема (14) устойчива (т. е. найдем «устойчивый набор»).

Множество

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ -\cos \beta_i, \beta_i = \frac{\pi}{2n} \theta_n(i), i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

упорядочено, если построена последовательность целых нечетных чисел

$$\theta_n = \{\theta_n(1), \theta_n(2), \dots, \theta_n(n)\}, \quad 1 \leq \theta_n(i) \leq 2n-1 \\ \text{при } i = 1, 2, \dots, n.$$

Параметры $\{\tau_k\}$ вычисляются по формуле

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \sigma_k}, \quad \sigma_k = -\cos \left[\frac{\pi}{2n} \theta_n(k) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

Таким образом, достаточно упорядочить множество n нечетных чисел θ_n .

Алгоритм построения множества θ_n основан на поэтапных переходах от множеств θ_m к множествам θ_{2m} и от θ_{2m} к θ_{2m+1} .

При этом используются следующие формулы.

Переход от θ_m к θ_{2m} возможен по одной из двух групп формул

$$\theta_{2m}(2i-1) = \theta_m(i), \quad \theta_{2m}(2i) = 4m - \theta_{2m}(2i-1), \quad (44) \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

или

$$\theta_{2m}(2i-1) = \theta_m(i), \quad \theta_{2m}(2i) = 4m + 2 - \theta_{2m}(2i-1), \quad (45) \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Переход от θ_{2m} к θ_{2m+1} сводится к добавлению члена $\theta_{2m+1}(2m+1) = 2m+1$, так что

$$\begin{aligned}\theta_{2m+1}(i) &= \theta_{2m}(i), \quad i = 1, 2, \dots, 2m, \\ \theta_{2m+1}(2m+1) &= 2m+1.\end{aligned}\quad (46)$$

Если n есть степень 2:

$$n = 2^p, \quad p > 0 \text{ — целое число,}$$

то для определения θ_n последовательно применяются формулы (44) при $m = 1, 2, \dots, 2^{p-1}$ и учитывается, что

$$\theta_1 = \{1\}.$$

Например, если $n = 16 = 2^4$, то строятся последовательно множества

$$\theta_2 = \{1, 3\}, \quad \theta_4 = \{1, 7, 3, 5\},$$

$$\theta_8 = \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\},$$

$$\theta_{16} = \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}.$$

При переходе от θ_m к θ_{2m} , согласно (44), после каждого члена $\theta_m(i)$ ставится член $\theta_{2m}(2i) = 4m - \theta_m(i)$.

Рассмотрим общий случай, когда $n > 0$ — любое целое число. Представим его в виде

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_t},$$

где $t > 0$ — целое число, $k_i \geq 0$ — целые числа, $k_i \geq k_{i+1} + 1$, $i = 1, 2, \dots, t-1$, $k_t \geq 0$.

Образуем последовательность целых нечетных чисел

$$n_j = \sum_{i=1}^j 2^{k_i - k_j}, \quad j = 1, 2, \dots, t, \quad n_1 = 1, \quad (47)$$

и положим $n_{t+1} = 2n + 1$, что формально соответствует значению $k_{t+1} = -1$.

Из (47) видно, что

$$\frac{n_{j+1} - 1}{4} = 2^{k_j - k_{j+1} - 2} n_j.$$

Возможны два случая:

$$1) \quad r_j = k_j - k_{j+1} \geq 2, \quad \text{так что}$$

$$n_{j+1} = 2^j n_j + 1,$$

$$2) \quad r_j = k_j - k_{j+1} < 2, \quad \text{т. е. } r_j = 1,$$

$$n_{j+1} = 2n_j + 1.$$

Алгоритм построения упорядоченного множества θ_n основан на правилах перехода от θ_{n_j} к $\theta_{n_{j+1}}$.

Пусть множество θ_{n_j} известно. Найдем r_j .

1) Если $r_j \geq 2$, то по формулам (44) строим цепочку множеств

$$\theta_{2n_j} \rightarrow \theta_{2^2 n_j} \rightarrow \dots \rightarrow \theta_{2^{r_j} n_j},$$

что соответствует значениям

$$m = n_j, 2n_j, \dots, 2^{r_j-1} n_j.$$

Так как $n_{j+1} = 2^{r_j} n_j + 1$, то $\theta_{n_{j+1}}$ находится, согласно (46), при $2m = 2^{r_j} n_j$.

2) Если $r_j = 1$, т. е. $n_j = (n_{j+1} - 1)/2$, то, пользуясь (45), определяем θ_{2n_j} и затем по формулам (46) находим $\theta_{n_{j+1}} = \theta_{2n_j + 1}$.

После этого переходим от $\theta_{n_{j+1}}$ к $\theta_{n_{j+2}}$ и т. д.

Вычисления начинаются с $j = 1$, при котором $n_1 = 1$ и $\theta_{n_j} = \theta_1 = \{1\}$.

Если $k_t = 0$, то $n = n_t$ — нечетное число, и вычисления заканчиваются при $j = t - 1$ после применения формулы (46).

Если $k_t > 0$, то n — четное число $n = 2^{k_t} n_t$, $n_{t+1} = 2n + 1$. Так как $k_{t+1} = -1$, то $r_t \geq 2$ и при переходе от θ_{n_t} к θ_n применяются формулы (44) для значений

$$m = n_t, 2n_t, \dots, 2^{k_t-1} n_t = \frac{1}{2} n.$$

Отметим, что формулы (45) всегда используются только один раз, после чего применяется формула (46), в то время как (44) применяется 2^{r_j-1} раз.

Алгоритм описан полностью.

Пример 1. $n = 90$, $n = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$, т. е. $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $k_3 = 3$, $k_4 = 1$; $n_1 = 1$, $n_2 = 5$, $n_3 = 11$, $n_4 = 45$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$.

Теперь можно указать цепочку последовательно вычисляемых множеств, которая приводит к $\theta_n = \theta_{90}$:

$$\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_4 \rightarrow \theta_5 \rightarrow \theta_{10} \rightarrow \theta_{11} \rightarrow \theta_{22} \rightarrow \theta_{44} \rightarrow \theta_{45} \rightarrow \theta_{90}.$$

Здесь θ_{2m} ($m = 5$) обозначено то множество, которое, в отличие от остальных θ_{2m} , вычисляется по формулам (45).

Переход от каждого члена этой цепочки к последующему осуществляется, как было описано выше, по формулам (44), (45) или (46).

Пример 2. $n = 25$, $n = 2^4 + 2^3 + 2^0$; $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 3$; $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 25$.

Достаточно указать цепочку множеств

$$\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_6 \rightarrow \theta_{12} \rightarrow \theta_{24} \rightarrow \theta_{25}.$$

Таким образом, пользуясь указанным выше алгоритмом, мы получаем упорядоченное множество n нулей полинома Чебышева $T_n(t)$ и соответствующим образом перенумерованный («устойчивый») набор параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, определяемых по формуле (43). Условимся в дальнейшем полученное множество обозначать

$$\mathfrak{M}_n^* = \left\{ -\cos \left(\frac{\pi}{2n} \beta_n^*(i) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Схема (14) с параметрами

$$\tau_k = \tau_k^* = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \sigma_k}, \quad \sigma_k^* = -\cos \left(\frac{\pi}{2n} \beta_n^*(k) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

обладает свойством вычислительной устойчивости.

Можно считать, что учет ошибок округления эквивалентен возмущению входных данных, т. е. начального приближения, правой части и оператора A итерационной схемы (14). Тогда реальное (вычисленное) решение \tilde{y}_k задачи (14) можно рассматривать как точное решение следующей задачи:

$$\frac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k}{\tau_{k+1}} + \tilde{A}\tilde{y}_k = \tilde{f}_{k+1} + \frac{1}{\tau_{k+1}} \tilde{w}_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где слагаемое \tilde{w}_{k+1} учитывает погрешность, вносимую в $\frac{1}{\tau_{k+1}} y_k$.

Если пренебречь возмущением оператора A , то промежуточные решения \tilde{y}_m ограничены по норме

$$\|\tilde{y}_m\| \leq \frac{1}{\xi} \|\tilde{y}_0\| + \left(1 + \frac{c_m}{\xi^2} \right) \left(\frac{1}{\gamma_1} \max_{1 \leq i \leq m} \|\tilde{f}_i\| + \frac{1}{\xi} \max_{1 \leq i \leq m} \|\tilde{w}_i\| \right),$$

где $c_m = 1$, если $m \neq 2^p$; $c_m = 0$, если $m = 2^p$; и для погрешности $z_n = \tilde{y}_n - u$ после n итераций верна оценка

$$\|\tilde{y}_n - u\| \leq q_n \|\tilde{y}_0 - u\| + \frac{1 - q_n}{\gamma_1} \max_{1 \leq i \leq n} \|\tilde{f}_i - f\| + \frac{4}{3\sqrt{\xi}} \max_{1 \leq i \leq n} \|\tilde{w}_i\|.$$

На выводе этих оценок, выражающих вычислительную устойчивость итерационного метода с чебышевским набором $\{\tau_k^*\}$, мы останавливаются не будем.

В дальнейшем мы всегда будем пользоваться только набором параметров $\{\tau_k^*\}$, поэтому значок $*$ у τ_k^* часто будем опускать и писать просто τ_k .

Приведем результаты расчета примера из п. 5 по явной схеме (14) с упорядоченным набором параметров $\{\tau_k^*\}$. В этом случае ищется решение системы уравнений

$$v(x_{i-1}) - 2v(x_i) + v(x_{i+1}) = 0, \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ h = 1/N, \quad v(0) = 1, \quad v(1) = 0.$$

Число уравнений $N-1=19$, $\varepsilon=10^{-4}$, $n=64=2^6$. Строится цепочка $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_4 \rightarrow \theta_8 \rightarrow \theta_{16} \rightarrow \theta_{32} \rightarrow \theta_{64}$ с использованием формул (44).

Результаты вычислений с начальным приближением $y_0(0)=1$, $y_0(x_i)=0$, $i > 0$, даны в таблице 5.

Таблица 5

k	1	4	5	6	8	9	10	16	17	18	24
Δ_k	39,6	4,7	7,4	3,2	1,1	6,7	3,2	0,2	3,1	1,5	0,1
k	25	26	32	33	34	48	49	50	56		
Δ_k	0,8	0,1	0,04	0,3	0,14	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$		
k	57		58		59		60		61		62
Δ_k	$1,5 \cdot 10^{-3}$		$7,2 \cdot 10^{-4}$		$6,5 \cdot 10^{-4}$		$2,1 \cdot 10^{-4}$		$1,1 \cdot 10^{-4}$		$8,7 \cdot 10^{-5}$

Из этой таблицы виден немонотонный характер сходимости итераций. При переходе от итерации номера $k=4j$ к итерации номера $k+1=4j+1$ погрешность $\Delta_k = \|y_k - y_{k-1}\|_C$ возрастает, а затем, при переходе к $k=4j+2, 4j+3, 4j+4$, величина Δ_k , падает.

§ 3. Попеременно-треугольный метод

1. Метод Зейделя. Неявные схемы, как было показано в гл. VI, более устойчивы по сравнению с явными.

Простейшей неявной итерационной схемой является метод Зейделя.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \quad (1)$$

или

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Предполагая, что диагональные элементы матрицы $A = (a_{ij})$ отличны от нуля, $a_{ii} \neq 0$, напишем следующий итерационный метод (метод Зейделя):

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} u_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^k = f_i, \quad a_{ii} \neq 0, \quad (2)$$

где y_j — итерация номера k . Определение $(k+1)$ -й итерации начинаем с $i=1$:

$$a_{11} \overset{k+1}{y_1} + \sum_{i=2}^N a_{1i} \overset{k}{y_i} = f_1, \quad a_{11} \neq 0.$$

Отсюда найдем y_1 . Для $i=2$ имеем

$$a_{21} \overset{k+1}{y_1} + a_{22} \overset{k+1}{y_2} + \sum_{i=3}^N a_{2i} \overset{k}{y_i} = f_2, \quad a_{22} \neq 0.$$

Так как значение y_1 уже известно и $a_{22} \neq 0$, то находим y_2 и т. д.

Представим матрицу A в виде суммы

$$A = A^- + A^+ + D, \quad (3)$$

где $A^- = (a_{ij}^-)$, $a_{ij}^- = a_{ij}$ при $j < i$, $a_{ij}^- = 0$ при $j \geq i$, — нижняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, $A^+ = (a_{ij}^+)$, $a_{ij}^+ = a_{ij}$, $j > i$, $a_{ij}^+ = 0$ при $j \leq i$, — верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, $D = (a_{ii} \delta_{ij})$, $\delta_{ij} = 1$ при $j = i$, $\delta_{ij} = 0$ при $j \neq i$, — диагональная матрица.

Пользуясь этими обозначениями, запишем метод Зейделя в виде

$$(A^- + D) \overset{k+1}{y} + A^+ \overset{k}{y} = f, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N). \quad (4)$$

Приведем эту двухслойную схему к каноническому виду

$$(A^- + D) \left(\overset{k+1}{y} - \overset{k}{y} \right) + (A^- + D + A^+) \overset{k}{y} = f$$

или

$$(A^- + D) \left(\overset{k+1}{y} - \overset{k}{y} \right) + A \overset{k}{y} = f. \quad (5)$$

Сравнив ее с канонической формой

$$B \frac{\overset{k+1}{y} - \overset{k}{y}}{\tau_{k+1}} + A \overset{k}{y} = f, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

задано любое $\overset{0}{y} \in H$,

находим

$$B = A^- + D, \quad \tau_k = 1.$$

Схема неявная, матрица B — треугольная и, следовательно, несимметричная (оператор $B \neq B^*$ — несамосопряженный).

Для модельной задачи (см. § 2, п. 4, (37))

$$Ly = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0$$

метод Зейделя имеет вид

$$y_{i_1-1}^{k+1} + y_{i_2-1}^{k+1} - 4y^k + y_{i_1+1}^k + y_{i_2+1}^k = -h^2\varphi,$$

так что

$$y^k = \frac{y_{i_1-1}^{k+1} + y_{i_2-1}^{k+1} + y_{i_1+1}^k + y_{i_2+1}^k + h^2\varphi}{4}. \quad (7)$$

Вычисления начинаются с узла $i_1=1, i_2=1$. Так как узлы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ лежат на границе, то значения $y_{i_1-1}^{k+1}$ и $y_{i_2-1}^{k+1}$ известны и вся правая часть в (7) известна. Значение y^k найдено в узле $i_1=1, i_2=1$. Полагая затем $i_2=2, 3, \dots$ при $i_1=1$, находим y^k на нижней строке, после чего переходим к строкам $i_1=2, 3, \dots$ В результате y^k определяется во всех узлах сетки.

Известно, что метод Зейделя сходится, если оператор $A = A^* > 0$ — самосопряжен и положителен (и, следовательно, положительно определен, так как $A \geq \gamma_1 E$, $\gamma_1 = \min_k \lambda_k(A) > 0$). Итерации сходятся, хотя и быстрее метода простой итерации, но с тем же асимптотическим порядком в случае модельной задачи

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Чтобы оценить скорость сходимости метода Зейделя, используют различного рода предположения. Например, если

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq q |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

то при $q < 1$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии. В самом деле, из формулы

$$a_{ii} z_i = - \sum_{j < i}^{k+1} a_{ij} z_j - \sum_{j > i}^k a_{ij} z_j$$

для погрешности $z = y - u$ следует

$$|a_{ii}| |z_i| \leq \sum_{j < i}^{k+1} |a_{ij}| |z_j| + \sum_{j > i}^k |a_{ij}| \|z\|_C,$$

где $\|z\|_C = \max_{1 \leq i \leq N} |z_i|$.

Пусть $\max_i^{k+1} |z_i|$ достигается при некотором $i = i_0$, так что

$$\|z\|_C = |z_{i_0}|$$

$$\|z\|_C \leq \left[\sum_{j > i_0}^{k+1} |a_{i_0 j}| / \left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j < i_0} |a_{i_0 j}| \right) \right] \|z\|_C^k.$$

В силу условия (8)

$$\sum_{j > i_0} |a_{i_0 j}| \leq q |a_{i_0 i_0}| - \sum_{j < i_0} |a_{i_0 j}| < q \left(|a_{i_0 i_0}| - \sum_{j < i_0} |a_{i_0 j}| \right)$$

и, следовательно,

$$\|z\|_C \leq q \|z\|_C^k \leq q^{k+1} \|z\|_C^0,$$

что и требовалось доказать.

Условие (8) означает, что (a_{ij}) является матрицей с диагональным преобладанием. Это условие не выполняется, например, для разностного оператора Лапласа, однако сходимость метода Зейделя в этом случае следует из самосопряженности и положительности оператора A .

2. Метод верхней релаксации. Чтобы ускорить итерационный процесс, видоизменяют метод Зейделя, вводя в (5) итерационный параметр ω так, что

$$\left(A^- + \frac{1}{\omega} D \right) (y - y) + A^k y = f. \quad (9)$$

Этот метод называют *методом релаксации*. Метод Зейделя соответствует значению $\omega = 1$. Если параметр $\omega > 1$, то итерационный процесс (9) называют *методом верхней релаксации*.

Сравнивая (9) с (6), видим, что

$$B = A^- + \frac{1}{\omega} D, \quad \tau_k = 1$$

или

$$B = \omega A^- + D, \quad \tau_k = \omega.$$

Оператор B — несамосопряженный. Алгоритм вычисления y также сводится к обращению нижней треугольной матрицы.

Если метод Зейделя применим всегда для $A = A^* > 0$, то для сходимости метода релаксации нужно дополнительно потребовать, чтобы $0 < \omega < 2$.

Скорость сходимости зависит от параметра ω . Существуют теоретические оценки для ω и скорости сходимости, однако их применение требует знания спектра оператора $D^{-1}(A^- + A^+)$, который не всегда легко найти. Поэтому на практике параметр ω

подбирают так, чтобы минимизировать число итераций. Это особенно удобно, если решается класс однотипных задач.

Для модельной задачи можно показать, что метод верхней релаксации оказывается весьма эффективным и сравним по числу итераций с явным чебышевским методом, так что

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

3. Неявные итерационные схемы. В § 2 мы исследовали сходимость явных итерационных схем

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad (10)$$

задано любое $y_0 \in H$,

где итерация y_{k+1} непосредственно вычислялась по формуле

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f).$$

Методы Зейделя и верхней релаксации являются примерами неявных схем (6), для которых $B \neq E$.

При использовании неявного метода для определения новой итерации y_{k+1} надо решить уравнение

$$By_{k+1} = F_k, \quad F_k = By_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f) \quad (11)$$

с известной правой частью F_k . В случае метода Зейделя $B = -A^- + D$ — треугольная матрица, для метода верхней релаксации $B = A^- + \frac{1}{\omega} D$ — тоже треугольная матрица. Поэтому определение y_{k+1} требует минимального числа действий, а для модельной задачи — число действий, затрачиваемых для определения y_{k+1} , пропорционально числу узлов сетки.

В § 2 были сформулированы требования, которыми надо руководствоваться при выборе оператора B :

1) минимум числа итераций,

2) экономичность оператора B ; для разностных эллиптических уравнений второго порядка это значит, что решение уравнения $By_{k+1} = F_k$ при заданной правой части F_k должно быть найдено с затратой числа действий, пропорционального числу узлов сетки.

Основной результат § 2 — оптимальный выбор параметров $\{\tau_k\}$ — может быть перенесен на неявные схемы с $B \neq E$:

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

задано любое $y_0 \in H$.

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0, \\ \gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти условия определяют исходное семейство итерационных методов (6). Так как для методов Зейделя и верхней релаксации $B \neq B^*$ —несамосопряженный оператор, то они не принадлежат исходному семейству (6), (12).

Для невязки $r_k = Ay_k - f$ имеем однородное уравнение (см. § 2)

$$\begin{aligned} B \frac{r_{k+1} - r_k}{\tau_{k+1}} + Ar_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ r_0 = Ay_0 - f \in H \text{ задано.} \end{aligned} \quad (13)$$

Эта схема эквивалентна явной схеме

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Cx_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ x_0 \in H \text{ задано,} \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$x_k = B^{1/2} r_k, \quad C = B^{-1/2} AB^{-1/2}.$$

В самом деле, так как B —самосопряженный положительный оператор, $B = B^* > 0$, то существует оператор $B^{1/2}$ —корень из оператора B , причем

$$(B^{1/2})^* = B^{1/2} > 0.$$

Действуя на уравнение (13) оператором $B^{-1/2}$ и заменяя $r_k = B^{-1/2} x_k$, получаем (14). Обратный ход рассуждений очевиден.

Лемма 1. Пусть даны операторы

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad C = B^{-1/2} AB^{-1/2}.$$

Тогда операторные неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \\ \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E \end{aligned} \quad (15)$$

эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} I = ((A - \gamma B) y, y) &= (Ay, y) - \gamma (By, y) = \\ &= (AB^{-1/2} (B^{1/2} y), B^{-1/2} (B^{1/2} y)) - \gamma (B^{1/2} y, B^{1/2} y) = \\ &= (Cx, x) - \gamma (x, x) = ((C - \gamma E) x, x), \end{aligned}$$

где $x = B^{1/2} y$. Так как y (и, следовательно, x)—произвольный вектор из H , то из равенства

$$I = ((A - \gamma B) y, y) = ((C - \gamma E) x, x) \quad (16)$$

следует, что операторы

$$A - \gamma B \quad \text{и} \quad C - \gamma E$$

имеют одинаковые знаки.

Пусть, например, $A - \gamma_1 B \geq 0$. Полагая в (16) $\gamma = \gamma_1$, получаем $I = ((C - \gamma_1 E)x, x) \geq 0$, т. е. $C \geq \gamma_1 E$ и т. д.

Лемма доказана.

Итог этих рассуждений таков: применение неявной схемы (6) для решения уравнения $Au = f$ эквивалентно решению уравнения $Cv = \varphi$ по явной схеме:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Cx_k = \varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

задано любое $x_0 \in H$,

если $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $\varphi = B^{-1/2}f$. Поэтому мы можем перенести на случай неявной схемы все результаты, полученные в § 2 для явной схемы. Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия (12). Тогда существует оптимальный набор параметров $\{\tau_k\}$, определяемых по формулам (27)–(29) из § 2, для решения задачи (6); причем справедлива оценка

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \leq q_n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}, \quad (18)$$

где

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (19)$$

Теорема 1 была доказана в § 2 для явной схемы с $B = E$. Сведем (6) к явной схеме (17). Поскольку для этой схемы справедливы, в силу леммы 1, операторные неравенства $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$, то из оценки (31) § 2 следует

$$\|Cx_n - \varphi\| \leq q_n \|Cx_0 - \varphi\|. \quad (20)$$

Вспомним, что $\varphi = B^{-1/2}f$, $B^{-1/2}x_n = y_n$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, и проведем преобразование

$$\begin{aligned} \|Cx_n - \varphi\|^2 &= (Cx_n - \varphi, Cx_n - \varphi) = \\ &= (B^{-1/2}(AB^{-1/2}x_n - f), B^{-1/2}(AB^{-1/2}x_n - f)) = \\ &= (B^{-1}(Ay_n - f), Ay_n - f) = \|Ay_n - f\|_{B^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Подставляя $\|Ay_n - f\|_{B^{-1}}$ в (20) вместо $\|Cx_n - \varphi\|$, получаем неравенство (18). Теорема 1 доказана.

При вычислении параметров $\{\tau_n\}$ следует воспользоваться построенным в п. 6 § 2 упорядоченным множеством \mathfrak{M}_n^* нулей полинома Чебышева n -го порядка. Нумерация параметров τ_1, \dots, τ_n не зависит от вида уравнения $Au = f$ и от оператора B схемы из исходного семейства и является универсальной.

4. Попеременно-треугольный метод. Перейдем теперь к вопросу о выборе оператора B .

Если оператор B есть произведение конечного числа экономичных операторов, то он также экономичен. Так, например, экономичным является оператор

$$B = B_1 B_2,$$

равный произведению «треугольных», т. е. имеющих треугольные матрицы, операторов B_1 и B_2 .

Рассмотрим оператор $R = R^* > 0$ и представим его в виде суммы треугольных операторов R_1 и R_2 :

$$R_1 + R_2 = R, \quad R = R^* > 0, \quad R_1^* = R_2. \quad (21)$$

Оператору R соответствует матрица $\mathcal{R} = (r_{ij})$; она симметрична, т. е. $r_{ij} = r_{ji}$. Соответствующие операторам R_1 и R_2 матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 , очевидно, равны

$$\mathcal{R}_1 = (r_{ij}^-), \quad r_{ij}^- = \begin{cases} r_{ij} & \text{при } j < i, \\ 0 & \text{при } j > i, \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = (r_{ij}^+), \quad r_{ij}^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } j < i, \\ r_{ij} & \text{при } j > i, \end{cases}$$

$$r_{ii}^- = r_{ii}^+ = 0,5r_{ii}.$$

Отсюда и из условия $r_{ij} = r_{ji}$ видно, что $\mathcal{R}_1^* = \mathcal{R}_2$.

Оператор B схемы (6) представим в виде произведения треугольных операторов

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad (22)$$

где $\omega > 0$ — параметр. Покажем, что B — самосопряженный и положительный оператор

$$B = B^* > 0,$$

т. е. схема (6) с оператором (22) принадлежит исходному семейству схем (12).

В самом деле, операторы

$$B_1 = E + \omega R_1 \quad \text{и} \quad B_2 = E + \omega R_2$$

являются сопряженными и положительными

$B_1^* = (E + \omega R_1)^* = E + \omega R_2 = B_2$, $B_1 > E$, $B_2 > E$ при $\omega > 0$, так как $R_1 > 0$, $R_2 > 0$:

$$(Ry, y) = (R_1 y, y) + (R_2 y, y) = 2(R_1 y, y) = 2(R_2 y, y) > 0.$$

Поэтому $(By, v) = (B_1 B_2 y, v) = (y, B_2^* B_1^* v) = (y, B_1 B_2 v)$, т. е. $B = B^*$; далее имеем

$$(By, y) = (B_1 B_2 y, y) = (B_2 y, B_2 y) = \|B_2 y\|^2 > 0.$$

Из уравнения

$$(E + \omega R_1)(E + \omega R_2) \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

задано любое $y_0 \in H$,

видно, что для определения y_{k+1} надо решать уравнение

$$(E + \omega R_1)(E + \omega R_2) y_{k+1} = F_k,$$

где

$$F_k = By_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f).$$

Это сводится к последовательному решению двух уравнений

$$(E + \omega R_1) \bar{y} = F_k, \quad (E + \omega R_2) y_{k+1} = \bar{y} \quad (24)$$

с нижней и верхней треугольными матрицами. Отсюда и следует название метода (23) с оператором (22): *попеременно-треугольный метод (ПТМ)*.

Что можно ожидать от этого метода?

Чтобы воспользоваться теоремой 1, надо получить параметры γ_1 и γ_2 .

Лемма 2. Пусть заданы оператор $R = R_1 + R_2$, $R_2^* = R_1$ и оператор B , определенный по формуле (22), и выполнены условия

$$R = R^*, \quad R \geq \delta E, \quad \delta > 0, \quad (25)$$

$$R_1 R_2 \leq \frac{\Delta}{4} R, \quad \Delta > 0. \quad (26)$$

Тогда справедлива оценка

$$\dot{\gamma}_1 B \leq R \leq \dot{\gamma}_2 B, \quad (27)$$

где

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\delta}{1 + \omega \delta + \frac{1}{4} \omega^2 \delta \Delta}, \quad \dot{\gamma}_2 = \frac{1}{2\omega}. \quad (28)$$

Отношение

$$\xi = \frac{\dot{\gamma}_1(\omega)}{\dot{\gamma}_2(\omega)}$$

имеет наибольшее значение при

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\delta \Delta}}; \quad (29)$$

при этом

$$\xi = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \dot{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \dot{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}. \quad (30)$$

Доказательство. Неравенства (25) и (26) означают, что $(Ry, y) \geq \delta(y, y)$, $(R_1 R_2 y, y) = (R_2 y, R_1 y) = \|R_2 y\|^2 \leq \frac{\Delta}{4} (Ry, y)$.

Отсюда нетрудно показать, что $\delta \leq \Delta$, $\eta \leq 1$.

Запишем оператор (22) в виде

$$B = E + \omega(R_1 + R_2) + \omega^2 R_1 R_2 = E + \omega R + \omega^2 R_1 R_2. \quad (31)$$

Учитывая, что $R \geq \delta E$ или $E \leq \frac{1}{\delta} R$, получаем для B оценку сверху:

$$B \leq \frac{1}{\delta} R + \omega R + \frac{\omega^2 \Delta}{4} R = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{1}{4} \omega^2 \Delta \right) R = \frac{1}{\gamma_1} R,$$

т. е. $R \geq \gamma_1 B$.

Преобразуем теперь формулу (31):

$$B = E - \omega(R_1 + R_2) + \omega^2 R_1 R_2 + 2\omega(R_1 + R_2) = \\ = (E - \omega R_1)(E - \omega R_2) + 2\omega R.$$

Отсюда следует, что

$$(By, y) = ((E - \omega R_1)(E - \omega R_2)y, y) + 2\omega(Ry, y) = \\ = ((E - \omega R_2)y, (E - \omega R_2)y) + 2\omega(Ry, y) = \\ = \|(E - \omega R_2)y\|^2 + 2\omega(Ry, y) \geq 2\omega(Ry, y) = \frac{1}{\gamma_2} (Ry, y),$$

т. е. $(Ry, y) \leq \gamma_2 (By, y)$.

Рассмотрим теперь отношение

$$\xi(\omega) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\omega\delta}{1 + \omega\delta + \frac{\omega^2\Delta\delta}{4}}$$

и найдем его максимум. Вычислим производную

$$\frac{d\xi}{d\omega} = 2\delta \frac{1 - \omega^2\delta\Delta/4}{\left(1 + \omega\delta + \frac{\omega^2\Delta\delta}{4}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что максимум $\xi(\omega)$ достигается при $\omega = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$, так как $\xi''(\omega) < 0$ при $\omega = \omega_0$.

Подставляя $\omega_0 = 2\sqrt{\eta}/\delta$ в (28), получаем формулы (30).

Теорема 2. Пусть даны операторы $A = A^* > 0$, $R = R^* > 0$ и выполнены условия леммы 2, а также неравенства

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad c_1 > 0. \quad (32)$$

Тогда для ПТМ (23) с чебышевским набором параметров

$$\tau_k^* = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \sigma_k^*}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= c_1 \dot{\gamma}_1, & \gamma_2 &= c_2 \dot{\gamma}_2, \\ \dot{\gamma}_1 &= \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, & \dot{\gamma}_2 &= \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \\ \eta &= \frac{\delta}{\Delta}, & \sigma_k^* &\in \mathfrak{M}_n, \end{aligned}$$

справедлива оценка (18), и для выполнения неравенства

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \leq \varepsilon \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}$$

достаточно n итераций, где

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\delta}{\eta}}}. \quad (34)$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, надо найти коэффициенты γ_1 и γ_2 в операторных неравенствах

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B.$$

Из (27) и (32) следует, что

$$\begin{aligned} A &\geq c_1 R \geq c_1 \dot{\gamma}_1 B = \gamma_1 B, \quad \text{т. е.} \quad \gamma_1 = c_1 \dot{\gamma}_1, \\ A &\leq c_2 R \leq c_2 \dot{\gamma}_2 B = \gamma_2 B, \quad \text{т. е.} \quad \gamma_2 = c_2 \dot{\gamma}_2. \end{aligned}$$

Параметр обусловленности при $\omega = \omega_0$

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{c_1}{c_2} \xi = \frac{c_1}{c_2} \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}.$$

Теперь применим теорему 1 и воспользуемся результатами § 2.

Условие $q_n \leq \varepsilon$, как было показано в п. 2 § 2, выполнено при $n \geq \ln \frac{2}{\varepsilon} / (2\sqrt{\xi})$. Подставляя сюда выражение для $\xi = \gamma_1 / \gamma_2$ и учитывая, что $\xi < \frac{c_1}{c_2} 2\sqrt{\eta}$, получаем достаточное условие (34). Оно удобно для проверки.

В частном случае

$$A = R = R_1 + R_2, \quad R_2^* = R_1, \quad c_1 = c_2 = 1$$

для числа итераций имеем оценку

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{\delta}{\eta}}}.$$

5. ПТМ для разностной задачи Дирихле. Проиллюстрируем ПТМ на примере разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_2, \bar{x}_1} = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x) \quad (35)$$

на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\} = \omega_h \cup \gamma_h$, где γ_h — граница сетки.

В этом случае

$$Ay = -\Lambda y, \quad y \in H = \dot{\Omega},$$

$$R = A, \quad R_1 y = y_{\bar{x}_1}/h_1 + y_{\bar{x}_2}/h_2, \quad R_2 y = -y_{\bar{x}_1}/h_1 - y_{\bar{x}_2}/h_2.$$

Вместо (35) получаем

$$Ay = \varphi, \quad y \in \Omega, \quad (35')$$

где φ отличается от f только в приграничных узлах.

Вычислим коэффициенты δ и Δ :

$$R \geq \delta E, \quad \delta = 4 \left(\frac{1}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} \right), \quad (36)$$

$$(R_1 R_2 y, y) = \|R_2 y\|^2 = \left\| \frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2} \right\|^2 = \left(\left(\frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2} \right)^2, 1 \right) \leq$$

$$\leq \left(\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (y_{\bar{x}_1}^2 + y_{\bar{x}_2}^2), 1 \right) \leq \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (Ry, y), \text{ т. е.}$$

$$\Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}. \quad (37)$$

При этом мы учли, что $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ и $(Ry, y) = (y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_1})_1 + (y_{\bar{x}_2}, y_{\bar{x}_2})_2 \geq \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|^2$, где $(u, v)_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} u_{i_1, i_2} v_{i_1, i_2} h_1 h_2$, аналогично определяется $(u, v)_2$.

Зная δ и Δ , находим η , γ_1 , γ_2 и ξ , после чего оцениваем число итераций.

Сравнение методов мы проводим для модельной задачи (35) на квадратной сетке $h_1 = h_2 = h$ в квадратной области G ($l_1 = l_2 = 1$).

В этом случае

$$\eta = \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \xi = \frac{2 \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \approx 2\sqrt{\eta} = 2 \sin \frac{\pi h}{2}.$$

При малых $\frac{\pi h}{2} \ll 1$ имеем

$$\sqrt{2} \sqrt{\eta} \approx \sqrt{\pi h} \approx 1.77 \sqrt{h},$$

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{0.29}{\sqrt{h}} \ln \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2.9}{\sqrt{h}} \quad \text{при} \quad \varepsilon = 2e^{-10} \approx 10^{-4}.$$

Сравним ПТМ по числу итераций $n_0(\varepsilon)$ со схемой простой итерации (СПИ) и явной чебышевской схемой (ЧНП):

	СПИ	ЧНП	ПТМ
$h = 1/10$	200	32	9
$h = 1/50$	5 000	160	21
$h = 1/100$	20 000	320	29

Остановимся на описании алгоритма вычисления $(k+1)$ -й итерации из уравнения

$$\begin{aligned} B^{k+1} y &= (E + \omega_0 R_1) (E + \omega_0 R_2) y = F, \\ F &= B y - \tau_{k+1} (A y - \varphi) = B y + \tau_{k+1} (\Lambda v + f), \end{aligned} \quad (38)$$

где $y^{k+1} = y^k = 0$ па границе γ_h , а $v = y^k$ при $x \in \omega_h$, $v = \mu$ при $x \in \gamma_h$.

Решением задачи (38) является функция v , определенная на $\omega_h + \gamma_h$: $v = y^k$ на ω_h , $v = \mu$ на γ_h .

Чтобы найти y^{k+1} , последовательно решаем задачи

$$(E + \omega_0 R_1) \bar{y} = F, \quad (E + \omega_0 R_2) \bar{y} = \bar{y}, \quad x \in \omega_h \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 y &= \frac{y - y_{i_1-1}}{h_1^2} + \frac{y - y_{i_2-1}}{h_2^2} = \\ &= \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y - \left(\frac{1}{h_1^2} y_{i_1-1} + \frac{1}{h_2^2} y_{i_2-1} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} R_2 y &= -\frac{y_{i_1+1} - y}{h_1^2} - \frac{y_{i_2+1} - y}{h_2^2} = \\ &= \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y - \left(\frac{1}{h_1^2} y_{i_1+1} + \frac{1}{h_2^2} y_{i_2+1} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $y = y(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $y_{i_1 \pm 1} = y((i_1 \pm 1) h_1, i_2 h_2)$, $y_{i_2 \pm 1} = y(i_1 h_1, (i_2 \pm 1) h_2)$.

Оператор $E + \omega_0 R_1$ определен на трехточечном шаблоне $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $((i_1 - 1) h_1, i_2 h_2)$, $(i_1 h_1, (i_2 - 1) h_2)$, а оператор $E + \omega_0 R_2$ — на трехточечном шаблоне $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $((i_1 + 1) h_1, i_2 h_2)$, $(i_1 h_1, (i_2 + 1) h_2)$. Подставляя выражения для $R_1 y$ и $R_2 y$ в (39), получаем для определения значений \bar{y} и y в центре шаблона

$(i_1 h_1, i_2 h_2)$ рекуррентные формулы

$$\bar{y} = \frac{\kappa_1 y_{i_1-1} + \kappa_2 y_{i_2-1} + F}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad \bar{y}|_{v_h} = 0, \quad (42)$$

$$y = \frac{\kappa_1 y_{i_1+1} + \kappa_2 y_{i_2+1} + \bar{y}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad y|_{v_h} = 0, \quad (43)$$

$$\kappa_1 = \omega_0/h_1^2, \quad \kappa_2 = \omega_0/h_2^2.$$

Чтобы определить \bar{y} на сетке v_h , выбираем левый нижний угол области и берем приграничный узел $i_1=1, i_2=1$ так, что другие два узла $((i_1-1)h_1, i_2h_2)$ и $(i_1h_1, (i_2-1)h_2)$ лежат на границе и, следовательно, y_{i_1-1} и y_{i_2-1} известны. По формуле (42) определяем значение \bar{y} и дальше движемся либо по строкам, либо по столбцам.

Счет по строкам ведется слева направо: фиксируем $i_2=1$ и меняем $i_1=2, 3, \dots, N_1-1$, затем полагаем $i_2=2$ и последовательно берем $i_1=1, 2, \dots, N_1-1$ и т. д. Счет по столбцам ведется снизу вверх.

Значение y выражается через y_{i_1+1} и y_{i_2+1} , поэтому счет надо начинать с правого верхнего угла, полагая $i_1=N_1-1, i_2=N_2-1$.

Тогда соседние узлы шаблона лежат на границе и y_{i_1+1}, y_{i_2+1} известны. Дальнейший счет ведется либо по строкам (справа налево), либо по столбцам (сверху вниз).

Все вычисления ведутся по рекуррентным формулам; счет, очевидно, устойчив. Такой алгоритм счета обычно называют *алгоритмом бегущего счета*.

Для вычисления y при заданном F требуется 4 операции сложения и 6 операций умножения (коэффициенты κ_1, κ_2 и $\frac{1}{1+\kappa_1+\kappa_2}$ постоянны) на один узел сетки. Для определения F надо затратить 10 операций сложения и 10 операций умножения, итого требуется для вычисления y по заданному y 14 операций сложения и 16 операций умножения.

Можно уменьшить эти числа, если хранить не одну последовательность y , а две последовательности. Для этого воспользуемся алгоритмом

$$(E + \omega_0 R_1) \bar{w} = \Phi_k, \quad \bar{w}|_{v_h} = 0,$$

$$(E + \omega_0 R_2) w = \bar{w}, \quad w|_{v_h} = 0, \quad (44)$$

$$y = y + \tau_{k+1} w,$$

где $\Phi_k = \Lambda v + f, \quad v|_{v_h} = \mu$.

Для определения y^{k+1} в этом случае требуется 10 операций сложения и 10 операций умножения на один узел, однако при переходе от k -й к $(k+1)$ -й итерации надо помнить не только $y(i_1h_1, i_2h_2)$, но и $w(i_1h_1, i_2h_2)$.

6. Схема повышенного порядка точности в прямоугольнике. В гл. IV, § 5 для задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G; \quad u = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (45)$$

была получена схема четвертого порядка точности

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h; \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda' y &= \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \varphi &= f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f. \end{aligned}$$

Пусть $H = \bar{\Omega}$ — пространство сеточных функций, заданных на ω_h и равных нулю на γ_h . Введем операторы $Ay = -\Lambda' y$, $Ry = -\Lambda y$ для любого $y \in H$ и вместо (46) получим $Ay = \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} \neq \varphi$ только в приграничных узлах. Воспользуемся оценками для A из гл. IV:

$$\frac{2}{3} R \leq A \leq R, \quad \text{т. е. } c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = 1.$$

Оператор R представим в виде суммы R_1 и R_2 :

$$R = R_1 + R_2, \quad R_1 y = \frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2}, \quad R_2 y = -\frac{y_{x_1}}{h_1} - \frac{y_{x_2}}{h_2}.$$

Величины δ , Δ , ω_0 те же, что и в п. 5, $\gamma_1 = \frac{2}{3} \dot{\gamma}_1$, $\gamma_2 = \dot{\gamma}_2$, где $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$ даны в п. 4:

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \dot{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}.$$

Остается найти итерационные параметры $\{\tau_k^*\}$, используя γ_1^* и γ_2^* .

Формулы (42) и (43) остаются в силе, меняется лишь F :

$$F = F_{(38)}^k + \Phi, \quad \Phi = -\tau_{k+1} \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \quad (47)$$

где $F_{(38)}$ — выражение, определяемое по формуле (38).

Число итераций, очевидно,

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{2}} n_0^*(\varepsilon),$$

где $n_0^*(\varepsilon)$ — число итераций в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона (35). Таким образом, для схемы повышенного порядка число итераций по ПТМ увеличивается в $\sqrt{1,5} \approx 1,22$ раза по сравнению со схемой второго порядка точности.

Для двумерного случая более экономичным является итерационный метод переменных направлений (см. § 4, п. 2) или даже прямой метод декомпозиции (см. § 1, п. 2).

Однако для многомерной задачи Дирихле $O(|h|^4)$ наиболее экономичным является ПТМ.

В этом случае оператор Λ' строится так (см. § 5 гл. IV):

$$\Lambda' y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p (E + \kappa_\beta \Lambda_\beta), \quad \kappa_\beta = \frac{h_\beta^2}{12}, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}. \quad (48)$$

Тогда справедливы операторные неравенства

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} R \leq A \leq R, \quad (49)$$

где

$$Ay = -\Lambda' y, \quad Ry = -\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad y \in H,$$

и

$$n_0(\varepsilon) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}} n_0^*(\varepsilon),$$

где $n_0^*(\varepsilon)$ — число итераций для решения уравнения $Ry = f$, оно практически не зависит от числа измерений p .

7. Разностные схемы для эллиптических уравнений общего вида. Чтобы применить ПТМ для решения операторного уравнения первого рода, надо найти оператор R , построить треугольные операторы R_1 и R_2 , вычислить постоянные эквивалентности c_1 и c_2 , а также δ и Δ . После этого можно пользоваться общей теорией из п. 4, в частности, теоремой 2, найти $n = n(\varepsilon)$ и построить набор параметров $\{\tau_k^*\}$.

В качестве оператора R в случае разностных эллиптических операторов A можно выбирать, как мы видели в п. 5, разностный оператор Лапласа.

Рассмотрим несколько примеров более сложных разностных эллиптических задач.

Всюду будем предполагать, что область $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ — p -мерный параллелепипед (при $p=2$ — прямоугольник) с границей Γ , на которой задано краевое условие первого рода

$$u|_{\Gamma} = \mu(x).$$

Требуется найти решение задачи Дирихле

$$Lu = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad (50)$$

непрерывное в \bar{G} . Здесь L — эллиптический оператор второго порядка.

В области \bar{G} вводится сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_p h_p) \in \bar{G}, i_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

с границей γ_h , так что $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Как обычно, вводим пространство $H = \dot{\Omega}$ сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на γ_h . Пусть

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2 \dots h_p$$

— скалярное произведение в H .

а) Уравнение эллиптического типа со смешанными производными. В этом случае

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta} u, \quad L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad (51)$$

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad (52)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ — произвольный вектор, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — постоянные.

Построим на ω_h разностные операторы (см. гл. IV, § 4)

$$\Lambda y = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \Lambda_{\alpha\beta} y, \quad \Lambda_{\alpha\beta} y = \frac{1}{2} \left[(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\alpha})_{x_\beta} \right] \quad (53)$$

и ставим задаче (50) в соответствие разностную задачу Дирихле

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (54)$$

Введем операторы A и R в пространстве $H = \Omega$:

$$Ay = -\Lambda y, \quad Ry = -\dot{\Lambda} y = -\sum_{\alpha=1}^p y_{x_\alpha} x_\alpha,$$

где $\dot{\Lambda}$ —разностный $(2p+1)$ -точечный оператор Лапласа, и вместо (54) запишем $Ay = \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi} \neq \varphi$ только в приграничных узлах.

В гл. IV, § 4 было показано, что

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad (55)$$

где c_1, c_2 —постоянные, входящие в условие эллиптичности (52).

Чтобы применить ПТМ, надо построить R_1 и R_2 .

По аналогии с п. 5 полагаем

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_2 y = -\sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_1 + R_2 = R.$$

Теперь надо найти постоянные δ и Δ . Так как δ —наименьшее собственное значение, то

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^p \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}.$$

Постоянная Δ равна

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^p \frac{4}{h_\alpha^2},$$

так как

$$\|R_2 y\|^2 = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha} \right\|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \sum_{\alpha=1}^p \|y_{x_\alpha}\|^2 \leq \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} (Ry, y).$$

Зная δ , Δ , c_1 и c_2 , вычисляем ω , $n(\varepsilon)$, $\{\tau_k^i\}$, после чего применяем ПТМ.

Число итераций

$$n(\varepsilon) \geq n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1} \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2} \sqrt[4]{\eta}}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta} \quad (56)$$

пропорционально $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$.

В случае кубической сетки ($h_1 = h_2 = \dots = h_p = h$) в p -мерном кубе ($l_1 = l_2 = \dots = l_p = 1$) имеем

$$\delta = \frac{4p}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4p}{h^2},$$

и величина $\eta = \sin^2 \frac{\pi h}{2}$, а значит, и число итераций не зависит от числа измерений.

Для определения \bar{y}^{k+1} решаем уравнения

$$B_1 \bar{y}^k = (E + \omega R_1) \bar{y}^k = \bar{F}^k, \quad B_2 \bar{y}^{k+1} = (E + \omega R_2) \bar{y}^{k+1} = \bar{y}^k, \quad (57)$$

$$\bar{F}^k = \bar{B}^k y^k - \tau_{k+1} (A y^k - \bar{\varphi}) = \bar{B}^k y^k + \tau_{k+1} (\Lambda v^k + \varphi). \quad (58)$$

Решением задачи (57) является $v^{k+1} = \bar{y}^k$ при $x \in \omega_h$ и $v^k = \mu$ при $x \in \gamma_h$, так что $v^k - \bar{y}^k = y^k - \bar{y}^k$. Напишем выражения для B_1 и B_2 :

$$B_1 y^k = y^k + \omega R_1 y^k = \left(1 + \omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right) y^k - \omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} y^{(-1)\alpha}, \quad (59)$$

$$B_2 y^k = y^k + \omega R_2 y^k = \left(1 + \omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right) y^k - \omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} y^{(+1)\alpha}. \quad (60)$$

Вычисления начинаются с узла $i_1 = 1, i_2 = 1, \dots, i_p = 1$ параллелепипеда, для которого все соседние узлы $x^{(-1)\alpha} \in \gamma_h$ являются граничными, и значения $y^{(-1)\alpha} = \mu$ в них известны. Поэтому определяем \bar{y}^k в этом узле. После этого фиксируем $i_2 = 1, \dots, i_p = 1$ и меняем $i_1 = 2, \dots, N_1 - 1$, затем полагаем $i_2 = 2$, проводим вычисления для $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ и т. д. В результате находим

$$\bar{y}^k = \left(\omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \bar{y}^{(-1)\alpha} + \bar{F}^k \right) / \left(1 + \frac{\omega \Delta}{4} \right)$$

во всех узлах $x \in \omega_h$. Чтобы найти \bar{y}^{k+1} на ω_h , выбираем в качестве исходного узел с номерами $i_\alpha = N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2, \dots, p$, и пользуемся формулой

$$\bar{y}^{k+1} = \left(\omega \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \bar{y}^{(+1)\alpha} + \bar{y}^k \right) / \left(1 + \frac{\omega \Delta}{4} \right).$$

б) Система эллиптических уравнений. Пусть $u = (u^1, u^2, \dots, u^{m_0})$ — вектор, $k = (k_{\alpha\beta}^{sm})$ — клеточная матрица $p \times p$ с клетками $m_0 \times m_0$, так что $k_{\alpha\beta} = (k_{\alpha\beta}^{sm})$ — матрица размерности $m_0 \times m_0$.

Рассмотрим задачу Дирихле для системы уравнений в параллелепипеде G :

$$Lu^s = -f^s, \quad x \in G, \quad u^s = \mu^s, \quad x \in \Gamma, \quad s = 1, 2, \dots, m_0, \quad (61)$$

где

$$Lu^s = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \sum_{m=1}^{m_0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}^{sm} \frac{\partial u^m}{\partial x_\beta} \right). \quad (62)$$

Условие эллиптичности имеет вид

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^{m_0} (\xi_\alpha^s)^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p \sum_{s, m=1}^{m_0} k_{\alpha\beta}^{sm}(x) \xi_\alpha^s \xi_\beta^m \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^{m_0} (\xi_\alpha^s)^2, \quad (63)$$

где $\xi_\alpha = (\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2, \dots, \xi_\alpha^{m_0})$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ — произвольные векторы, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — постоянные.

Строим разностный оператор

$$\Lambda y^s = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \sum_{m=1}^{m_0} \Lambda_{\alpha\beta}^{sm} y_\beta^m, \quad (64)$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{sm} y^m = \frac{1}{2} \left[(k_{\alpha\beta}^{sm} y_\beta^m)_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}^{sm} y_\beta^m)_{\bar{x}_\alpha} \right], \quad (65)$$

и рассматриваем разностную задачу Дирихле

$$\Lambda y^s = -\varphi^s, \quad x \in \omega_h, \quad y^s = \mu^s, \quad x \in \gamma_h. \quad (66)$$

Вводим пространство $H = \dot{\Omega}$ сеточных функций со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}, \mathbf{v}) &= \sum_{s=1}^{m_0} (y^s, v^s), \quad (y^s, v^s) = \sum_{x \in \omega_h} y^s(x) v^s(x) h_1 h_2 \dots h_p, \\ \mathbf{y} &= (y^1, y^2, \dots, y^s, \dots, y^{m_0}), \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^s, \dots, v^{m_0}), \\ y^s &\in H, \quad v^s \in H, \quad s = 1, 2, \dots, m_0. \end{aligned}$$

В пространстве H рассматриваем оператор

$$Ay^s = -\Lambda y^s$$

и регуляризатор

$$Ry^s = -\dot{\Lambda} y^s = - \sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^s,$$

где $\dot{\Lambda}$ — $(2p+1)$ -точечный разностный оператор Лапласа.

Пользуясь разностной формулой Грина и условием (63), получаем операторные неравенства (32). Так как оператор R тот же, что и для задачи (53), (54), то δ , Δ и, следовательно, ω известны и оператор B определен. Алгоритм определения $(k+1)$ -й итерации для каждой из компонент y^s тот же, что и для примера а).

в) Система уравнений теории упругости. Рассмотрим систему уравнений стационарной теории упругости (уравнений Ламэ)

$$Lu = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = -f(x), \quad (67)$$

где $u = (u^1, u^2, \dots, u^p)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ — векторы, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламэ. Напишем эту систему в виде

$$\mu \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_\alpha^2} + (\lambda + \mu) \sum_{\beta=1}^p \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial x_\beta \partial x_s} = -f^s, \quad s = 1, 2, \dots, p. \quad (68)$$

Сравнивая с (62), видим, что

$$k_{\alpha\beta}^s = \mu \delta_{\alpha\beta} \delta_{sm} + (\lambda + \mu) \delta_{\alpha s} \delta_{\beta m}, \quad (69)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$).

В гл. IX, § 2, п. 5 было показано, что для системы уравнений (68) постоянные c_1 и c_2 , входящие в неравенства (63), равны

$$c_1 = \mu, \quad c_2 = \lambda + 2\mu.$$

Получаем следующую разностную задачу Дирихле для (68):

$$\Lambda^s y^s = -f^s, \quad x \in \omega_n, \quad y^s = \mu^s, \quad x \in \gamma_h, \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^s y^s &= \mu \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^s + (\lambda + \mu) \sum_{\beta=1}^p \Lambda_\beta y^\beta, \\ \Lambda_\alpha y &= y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \Lambda_\beta y = \frac{1}{2} (y_{\bar{x}_\beta x_s} + y_{x_\beta \bar{x}_s}). \end{aligned}$$

Остается определить оператор

$$Ay^s = -\Lambda^s y^s \quad \text{для любого } y^s \in H$$

и регуляризатор

$$Ry^s = -\sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y^s,$$

т. е. R — тот же оператор, что и выше.

Пользуясь разностной формулой Грина, убеждаемся в том, что имеют место неравенства $c_1 R \leq A \leq c_2 R$, где $c_1 = \mu$, $c_2 = \lambda + 2\mu$.

Здесь дальнейшие рассуждения совпадают с теми, которые проводились для предыдущих примеров.

Таким образом, применение ПТМ требует числа итераций, пропорционального $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{2 + \frac{\lambda}{\mu}}$:

$$n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} n_0^*(\varepsilon), \quad (71)$$

где $n_0^*(\varepsilon)$ — число итераций для решения разностного уравнения Лапласа.

8. ПТМ для решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области. При решении эллиптических уравнений разностным методом в произвольной области даже при использовании постоянного шага по каждому направлению в приграничной зоне получается неравномерная сетка. Кроме того, на практике часто используются неравномерные сетки.

Между тем оказывается, что границы спектра разностного оператора на неравномерной сетке могут сильно меняться, и это приводит к ухудшению сходимости рассмотренных выше итерационных методов.

Поясним ситуацию на простом примере.

Для уравнения $u'' = -f(x)$, $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$, построим трехточечную разностную схему

$$\Lambda y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (72)$$

Возьмем сетку ω_h из двух внутренних узлов:

$$\omega_h = \{x_0 = 0, x_1 = h_1, x_2 = h_1 + h, x_3 = 1\},$$

так что

$$\Lambda y_1 = \frac{1}{h} \left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1}{h_1} \right), \quad \Lambda y_2 = \frac{-2y_2 + y_1}{h^2},$$

так как $y_0 = y_3 = 0$ (считаем, что $h_1 < h$ и $2h + h_1 = 1$).

Найдем собственные значения оператора Λ :

$$\Lambda y + \lambda y = 0$$

или

$$\frac{1}{h} \left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1}{h_1} \right) + \lambda y_1 = 0, \quad \frac{-2y_2 + y_1}{h^2} + \lambda y_2 = 0.$$

Исключая отсюда y_2 , получим для $\mu = \lambda h^2$ квадратное уравнение

$$t\mu^2 - (1 + 3t)\mu + 2 + t = 0, \quad t = h_1/h, \quad (73)$$

и найдем его корни

$$\mu_{(1, 2)} = \frac{1 + 3t \pm \sqrt{(1 + 3t)^2 - 4t(2 + t)}}{2t}, \quad \lambda_{(1, 2)} = \frac{\mu_{(1, 2)}}{h^2},$$

а также характерное отношение $\lambda_{(1)} = \lambda_{\min} = \delta$ к $\lambda_{(2)} = \lambda_{\max} = \Delta$:

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{2t(2 + t)}{[(1 + 3t)^2 - 2t(2 + t) + (1 + 3t)\sqrt{(1 + 3t)^2 - 4t(2 + t)}]}.$$

Отсюда видно, что при $t = 1$, т. е. на равномерной сетке, $\eta = 1/3$, а при малых $t = h_1/h \ll 1$ имеем

$$\eta \approx 2t = 2h_1/h,$$

т.е. обусловленность системы уравнений (72) ухудшается при уменьшении h_1/h .

Число итераций для решения системы (72) по явной схеме с ЧНП или по схеме простой итерации обратно пропорционально $\sqrt{\eta}$ или η и потому будет неограниченно возрастать при $h_1 \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь для того же оператора Λ обобщенную задачу на собственные значения

$$\Lambda y + \lambda D y = 0,$$

где D —диагональная матрица, $Dy = d(x)y$, $d(x) > 0$.

В данном случае $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, и мы получаем для определения λ задачу

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1}{h_1} \right) + \lambda d_1 y_1 &= 0, \\ -\frac{2y_2 + y_1}{h^2} + \lambda d_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Вместо (73) получаем квадратное уравнение

$$d_1 d_2 t \mu^2 - [(1+t)d_2 + 2t d_1] \mu + 2 + t = 0.$$

Выбирая $d_1 = 1/t$, $d_2 = 1$, получим отсюда $\eta = 1/(2+t)$ и $\eta \approx 0,5$ при $t \ll 1$, т.е. η остается конечным при $h_1 \rightarrow 0$.

Поэтому вместо явной схемы целесообразно пользоваться схемой

$$D \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} = \Lambda y_k + f. \quad (74)$$

Аналогичная ситуация имеет место и при использовании ПТМ для эллиптических уравнений на неравномерных сетках или в произвольной области.

Поэтому оказалось необходимым модифицировать попеременно-треугольный метод за счет введения в состав B еще одного оператора $D = D^* > 0$, который должен выбираться из соображений минимума итераций и экономичности каждой итерации.

Пусть $D = D^* > 0$ —произвольный оператор, а оператор $A = A^* > 0$ уравнения

$$Au = f$$

представлен в виде суммы двух сопряженных друг другу операторов A_1 и A_2 :

$$A = A^* > 0, \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1^* = A_2. \quad (75)$$

Образуем факторизованный оператор

$$B = (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2), \quad (76)$$

где $\omega > 0$ —итерационный параметр.

Очевидно, что B —самосопряженный и положительный оператор. Предположим, что вместо (25), (26) выполнены условия

$$A \geq \delta D, \text{ т. е. } (Ax, x) \geq \delta (Dx, x), \delta > 0, \quad (77)$$

$$A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\Delta}{4} A, \text{ т. е. } (D^{-1} A_2 x, A_2 x) \leq \frac{\Delta}{4} (Ax, x), \Delta > 0, \quad (78)$$

для всех $x \in H$.

Тогда справедлива теорема 2 и все формулы (27)–(30), в которых оператор R следует заменить оператором A . Нет необходимости их переписывать.

Как выбирать оператор D ?

В тех задачах, которые рассматриваются ниже, достаточно предположить, что D —диагональная матрица,

$$Dy = d(x)y, \quad d(x) > 0. \quad (79)$$

Поэтому для модифицированного попеременно-треугольного метода (МПТМ) возникает задача выбора $d(x)$ так, чтобы отношение $\eta = \delta/\Delta$ было максимальным.

Покажем эффективность МПТМ для задачи Дирихле в произвольной области G с границей Γ в случае эллиптического уравнения с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = \\ &= -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \\ u(x) &= \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad k_\alpha(x) \geq c_1 > 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (80)$$

Предположим, что граница Γ достаточно гладкая. Кроме того, для простоты изложения будем считать, что пересечение области G прямой, проходящей через любую точку $x \in G$ параллельно оси координат Ox_α , $\alpha = 1, 2$, состоит из одного интервала.

Для того чтобы написать разностную схему для задачи (80), построим сетку $\bar{\omega}_h$ (вообще говоря, неравномерную не только вблизи границы Γ).

Проведем семейство прямых $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)}$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2$. Тогда точки $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ образуют основную решетку R_2^h на плоскости (x_1, x_2) .

Точку x_i решетки R_2^h , принадлежащую G , назовем *внутренним узлом сетки*. Множество всех внутренних узлов обозначим ω_h , т. е. $\omega_h = \{x_i \in G \cap R_2^h\}$.

Пересечением любой прямой, проведенной через точку $x_i \in \omega_h$ параллельно оси Ox_α , с областью G является интервал $\Delta_\alpha(x_i)$. Концы этого интервала назовем граничными узлами по направлению x_α . Множество всех граничных узлов по x_α обозначим через γ_α . Граница γ_h сетки ω_h есть сумма $\gamma_h = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Тогда $\omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$.

Обозначим $\omega_\alpha(x_\beta)$, $\beta = 3 - \alpha$, $\alpha = 1, 2$, — множество узлов, лежащих на интервале Δ_α ; $\omega_\alpha^+(x_\beta)$ — множество, состоящее из ω_α и правого конца интервала Δ_α , $\omega_\alpha(x_\beta)$ состоит из $\omega_\alpha(x_\beta)$ и концов интервала Δ_α .

Обозначим $x^{(+1)_\alpha}$ и $x^{(-1)_\alpha}$ узлы, соседние с $x \in \omega_\alpha(x_\beta)$ справа и слева и принадлежащие $\bar{\omega}_\alpha(x_\beta)$. Здесь x — внутренний узел. Если $x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_\alpha$, то этот узел может не совпадать с узлом $x^{(1_\alpha+1)}$ решетки. Пусть $h_\alpha^\pm(x)$ — шаги сетки ω_h , определяемые как расстояния между узлами сетки $x \in \omega_h$ и узлами $x^{(\pm 1)_\alpha} \in \bar{\omega}_h$.

Во всех внутренних узлах сетки ω_h определим также средние шаги

$$\bar{h}_\alpha(x_\alpha) = 0,5(x_\alpha^{(1_\alpha+1)} - x_\alpha^{(1_\alpha-1)}).$$

Если решетка равномерна по каждому из направлений x_α , т. е.

$$x_\alpha^{(1_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то все средние шаги $\bar{h}_\alpha = h_\alpha$ — постоянные, а h_α^\pm в приграничной зоне отличны от h_α :

$$\begin{aligned} \text{если } h_\alpha^+ < h_\alpha, \text{ то } x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_h, \\ x_\alpha^{(+1)_\alpha} &\neq x_\alpha^{(1_\alpha+1)} = (i_\alpha + 1) h_\alpha. \end{aligned}$$

Напишем разностную схему

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (81)$$

где $\Lambda = \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{\Lambda}_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\alpha y &= (a_\alpha y_{\tilde{x}_\alpha})_{\tilde{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \left(a_\alpha^+ \frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha^+} - a_\alpha^- \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^-} \right), \\ y^{(\pm 1)_\alpha} &= y(x^{(\pm 1)_\alpha}), \quad a_\alpha^+ = a_\alpha(x^{(+1)_\alpha}), \\ y_{\tilde{x}_\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} (y - y^{(-1)_\alpha}), \quad y_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^+} (y^{(+1)_\alpha} - y), \\ y_{x_\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} (y^{(+1)_\alpha} - y). \end{aligned}$$

Коэффициенты a_α и $\varphi(x)$ выбраны так, чтобы схема на равномерной сетке имела второй локальный порядок аппроксимации. По аналогии с § 3 гл. IV можно доказать равномерную сходимость схемы (81) со скоростью $O(|h|^2)$.

Перейдем к описанию МПТМ для решения написанной системы разностных уравнений (81).

Прежде всего представим Λ в виде суммы

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 y = - \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{a_\alpha}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{1}{2h_\alpha} \left(\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} - \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-} \right) y \right], \quad (82)$$

$$\Lambda_2 y = - \sum_{\alpha=1}^2 \left[\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} y_{x_\alpha} + \frac{1}{2h_\alpha} \left(\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} - \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-} \right) y \right], \quad (83)$$

причем $y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} y$, если $x^{(\alpha-1)} \in \gamma_h$, $y_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} y$ при $x^{(\alpha+1)} \in \gamma_h$.

Введем на множестве Ω сеточных функций, равных нулю на γ_h , операторы A_1 и A_2 , полагая $A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y$, $\alpha = 1, 2$, для любых $y \in \Omega = H$. Тогда $A = A_1 + A_2 = -\Lambda$.

В $H = \Omega$ вводится скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2.$$

Операторы A_1 и A_2 сопряжены друг другу: $(A_1 y, v) = (y, A_2 v)$. В этом можно убедиться непосредственно с помощью формулы суммирования по частям. Отсюда следует, что оператор $A = A_1 + A_2$ самосопряжен.

Мы опускаем те выкладки, которые приводят к выбору $d(x)$ из условия максимума отношения $\eta = \delta/\Delta$, и остановимся лишь на описании окончательных результатов.

Для $d(x)$ получается формула

$$d(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+ \sqrt{\varphi_\alpha}} + \frac{1}{2h_\alpha} \left| \frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} - \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-} \right| \right) \frac{1}{\sqrt{\varphi_\alpha + \psi_\alpha}}, \quad (84)$$

$$\varphi_\alpha(x_\beta) = \max_{x_\alpha \in \omega_\alpha} v_1^{(\alpha)}(x), \quad \psi_\alpha(x_\beta) = \max_{x_\alpha \in \omega_\alpha} v_2^{(\alpha)}(x),$$

$$\beta = 3 - \alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (85)$$

Функции $v_1^{(\alpha)}(x)$ и $v_2^{(\alpha)}(x)$ определяются как решения задач

$$\left(a_\alpha v_{1\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)_{\bar{x}_\alpha} = -\rho_1^{(\alpha)}, \quad x_\alpha \in \omega_\alpha(x_\beta),$$

$$v_1^{(\alpha)}|_{\gamma_\alpha} = 0, \quad \rho_1^{(\alpha)} = \frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+}, \quad (86)$$

$$\left(a_\alpha v_{2\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)_{\bar{x}_\alpha} = -\rho_2^{(\alpha)}, \quad x_\alpha \in \omega_\alpha(x_\beta),$$

$$v_2^{(\alpha)}|_{\gamma_\alpha} = 0, \quad \rho_2^{(\alpha)} = \frac{1}{2h_\alpha} \left| \frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} - \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-} \right|. \quad (87)$$

Всего надо определить четыре функции $v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$. Это можно сделать методом прогонки с затратой $O(1)$ действий на узел сетки.

Зная $v_1^{(\alpha)}(x)$ и $v_2^{(\alpha)}(x)$, строим сеточные функции одного переменного $\varphi_\alpha(x_\beta), \psi_\alpha(x_\beta)$, после чего определяем $d(x)$ согласно (84). При таком выборе $d(x)$ имеем

$$\delta = 1, \Delta = 4 \max_{\alpha=1,2} \left(\max_{x_\beta \in \omega_\beta} (\sqrt{\varphi_\alpha(x_\beta)} + \psi_\alpha(x_\beta))^2 \right). \quad (88)$$

Теперь можно определить итерационные параметры ω_0 и $\{\tau_k\}$ и воспользоваться итерационной схемой

$$(D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2) \frac{\frac{y^{k+1}}{\tau_{k+1}} - y^k}{\tau_{k+1}} + A y = \varphi, \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Для определения y^{k+1} надо решить уравнение

$$(D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2) y^{k+1} = F,$$

$F_k = B y^k + \tau_{k+1} (\Lambda v + \varphi)$, ($v = y^k$ на ω_h , $v = \mu$ на γ_h), что сводится к последовательному решению уравнений

$$(D + \omega A_1) \bar{y} = F, \quad \bar{y}|_{\gamma_h} = 0, \\ (D + \omega A_2) \bar{y} = D \bar{y} = d(x) \bar{y}, \quad \bar{y}|_{\gamma_h} = 0.$$

Напишем более подробные формулы

$$\bar{y} = \frac{1}{K} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega a_\alpha}{h_\alpha h_\alpha^-} \bar{y}^{(-1)_\alpha} + F \right], \\ y^{k+1} = \frac{1}{K} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega a_\alpha^+}{h_\alpha h_\alpha^+} y^{(k+1)_\alpha} + \bar{y} \right], \quad (89)$$

где

$$K = d + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha} \left(\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} + \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-} \right). \quad (90)$$

Вычислительная процедура та же, что и в п. 5.

9. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области. Рассмотрим в качестве примера применения изложенного выше алгоритма МПТМ задачу Дирихле для уравнения

Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x \in G,$$

$$u = \mu(x), \quad x \in \Gamma.$$

Предположим, что решетка квадратная, т. е. $x_\alpha^{(i_\alpha+1)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} + h$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2$, $\omega_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h) \in G, i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2\}$. При этом все $h_\alpha = h$, а h_α^\pm отличны от h только в приграничных узлах сетки.

Воспользуемся схемой (81), в которой положим $a_\alpha(x) \equiv 1$ и $\tilde{h}_\alpha \equiv h$, так что

$$\Lambda y = y_{x_1 x_1}^- + y_{x_2 x_2}^- = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\Gamma_h} = \mu.$$

Чтобы применить МПТМ, надо найти функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ как решения уравнения

$$\Lambda v = v_{x_\alpha x_\alpha}^- = -\rho(x), \quad x_\alpha \in \omega_\alpha(x_\beta), \quad v|_{\Gamma_\alpha} = 0,$$

$$\beta = 3 - \alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

с правыми частями

$$\rho_1(x) = \frac{1}{h h_\alpha^+}, \quad \rho_2(x) = \frac{1}{2h} \left| \frac{1}{h_\alpha^+} - \frac{1}{h_\alpha^-} \right|.$$

Рассмотрим интервал Δ_α и обозначим его концы $x_\alpha = l_\alpha(x_\beta)$ и $x_\alpha = L_\alpha(x_\beta)$, h_α^- и h_α^+ — нерегулярные шаги на левом и правом концах интервала Δ_α . При этом

$$\Lambda v = \begin{cases} \frac{1}{h} \left(\frac{v^{(+1)_\alpha} - v}{h} - \frac{v - v^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^-} \right), & x_\alpha = l_\alpha + h_\alpha^-, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{v^{(+1)_\alpha} - v}{h} - \frac{v - v^{(-1)_\alpha}}{h} \right), & l_\alpha + h_\alpha^- < x_\alpha < L_\alpha - h_\alpha^+, \\ \frac{1}{h} \left(\frac{v^{(+1)_\alpha} - v}{h_\alpha^+} - \frac{v - v^{(-1)_\alpha}}{h} \right), & x_\alpha = L_\alpha - h_\alpha^+. \end{cases}$$

Функции $v_1^\alpha(x)$ и $v_2^\alpha(x)$ находятся в явном виде; для $\varphi_\alpha(x_\beta)$ и $\psi_\alpha(x_\beta)$ получаем выражения

$$\varphi_\alpha(x_\beta) = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{L_\alpha(x_\beta) - l_\alpha(x_\beta)}{2} \right)^2 + 1,$$

$$\psi_\alpha(x_\beta) = \frac{1}{2}, \quad \beta = 3 - \alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Отсюда, в силу (88), определяем Δ и оцениваем число итераций

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{3,4 \sqrt{h/l_0}}, \quad (91)$$

где l_0 — диаметр области G .

Таким образом, число итераций для произвольной области зависит лишь от основного шага h сетки ω_h и не зависит от шагов в приграничных узлах.

Сравним (91) с формулой для итераций в случае модельной задачи в квадрате со стороной l_0 :

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{3,54 \sqrt{h/l_0}}.$$

Отсюда видно, что для произвольной области G число итераций увеличивается в $3,54/3,4 = 1,04$, т. е. на 4% по сравнению с квадратом, сторона которого совпадает с диаметром области G . Практически, это означает увеличение числа итераций на 1—2 итерации при $\varepsilon = 10^{-4}$ и $h = 1/100$.

Можно сделать такой вывод:

Число итераций с использованием МПТМ в случае произвольной области близко к числу итераций для той же задачи Дирихле в минимальном прямоугольнике, содержащем область G .

Численные расчеты подтверждают теоретические оценки.

10. О решении разностных уравнений для задач с переменными коэффициентами. В п. 8 мы рассматривали метод решения разностных уравнений, аппроксимирующих эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами в случае, когда область G имеет произвольную форму. В п. 9 мы оценили эффективность модификации ПТМ при решении разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Весьма важным является также вопрос об уменьшении числа итераций при решении уравнений с переменными коэффициентами.

В п. 7 было показано, что для ПТМ число итераций пропорционально $\sqrt{c_2/c_1}$, где c_1 — наименьшее, а c_2 — наибольшее значение коэффициентов. Оператору A (с переменными коэффициентами) ставится в соответствие оператор R (например, $R = -\hat{\Delta}$, где $\hat{\Delta}$ — разностный оператор Лапласа), так что

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R,$$

и в дальнейшем именно R используется для построения факторизованного оператора

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_1 + R_2 = R, \quad R_1^* = R_2.$$

Возможен, однако, случай, когда коэффициенты дифференциального уравнения меняются очень сильно, но в малой области (локально), так что границы спектра оператора A нашей задачи меняются мало. Естественно ожидать, что при этом число итераций изменится мало, но это не так из-за большой величины отношения c_2/c_1 .

Если область G — прямоугольник, то можно положить $B = R_{k+1}$ и использовать для определения y прямой метод. Тогда $\xi = c_1/c_2$ и число итераций не зависит от h :

$$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \ln \frac{2}{\varepsilon}.$$

В модифицированном ПТМ (см. п. 8) оператор R не вводится, и постоянные c_1 и c_2 поэтому не фигурируют при выборе параметров $\{\tau_k\}$. Оператор A представляется в виде суммы

$$A = A_1 + A_2.$$

Рассмотрим для иллюстрации эффективности МПТМ в качестве примера задачу (81) в единичном квадрате. Введем квадратную сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h), i_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N, hN = 1, \alpha = 1, 2\}$ и напишем уравнения

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ определяются формулами

$$a_1(x) = 1 + K_0 [(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2],$$

$$a_2(x) = 1 + K_0 [0,5 - (x_1 - 0,5)^2 - (x_2 - 0,5)^2],$$

$$K_0 = \text{const} > 0.$$

Правая часть $\varphi(x)$ выбирается так, что $y(x) = x_1(1 - x_1)x_2 \times (1 - x_2)$ есть точное решение задачи.

Обозначая $c_1 = \min_{x, \alpha=1, 2} a_\alpha(x) = 1$, $c_2 = \max_{x, \alpha=1, 2} a_\alpha(x) = 1 + 0,5K_0$ и выбирая в качестве R_1 и R_2 операторы

$$R_1 y = y_{\bar{x}_1}/h + y_{\bar{x}_2}/h, \quad R_2 y = -y_{x_1}/h - y_{x_2}/h,$$

можно воспользоваться ПТМ согласно п. 7, выбирая в качестве B оператор $(E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$.

Далее, согласно, п. 8, положим

$$A = A_1 + A_2,$$

где

$$A_1 y = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{a_\alpha}{h} y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{y}{2h^2} (a_\alpha^+ - a_\alpha^-) \right),$$

$$A_2 y = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{a_\alpha^+}{h} y_{x_\alpha} + \frac{y}{2h^2} (a_\alpha^+ - a_\alpha^-) \right).$$

Строим оператор D способом, описанным в п. 8, после чего образуем оператор $B = (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2)$.

Вычислительная процедура МПТМ описана в п. 8, и мы не будем ее повторять.

Были проведены численные эксперименты.

Ниже приводится таблица для числа итераций при $\varepsilon = 10^{-4}$, различных значениях отношения c_2/c_1 и шага h для модифицированного попеременно-треугольного метода (МПТМ) и обычного варианта этого метода (ПТМ), изложенного в п. 7.

Таблица 6

c_2/c_1	$h = 1/32$		$h = 1/64$		$h = 1/128$	
	МПТМ	ПТМ	МПТМ	ПТМ	МПТМ	ПТМ
2	20	23	28	32	39	45
8	23	46	33	64	47	90
32	25	92	37	128	53	180
128	26	184	39	256	57	360
512	26	367	39	512	59	720

Эти расчеты показывают, что МПТМ эффективен не только для произвольной области, но и в случае переменных коэффициентов.

§ 4. Итерационные методы переменных направлений

1. Метод переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле в прямоугольнике. Рассмотрим разностную задачу Дирихле в прямоугольнике $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$ для уравнения Пуассона. Ее формулировка дана в § 1, п. 1:

$$\begin{aligned} \Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad u|_{\gamma_h} = \mu(x), \\ \Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \bar{G}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения задачи (1) в качестве итерационной схемы можно взять схему переменных направлений для уравнения теплопроводности $\partial u / \partial t = \Delta u + f(x)$. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x), \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1} + f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu(x) \end{aligned} \quad (2)$$

для $j = 0, 1, \dots$ при произвольных начальных данных $y^0 = y(x, 0)$.

Здесь j — номер итерации, $y^{j+1/2}$ — промежуточная итерация (подытерация), $\tau_{j+1}^{(1)} > 0$ и $\tau_{j+1}^{(2)} > 0$ — итерационные параметры, подлежащие выбору из условия минимума итераций.

Переход от j -й итерации к $(j+1)$ -й итерации достигается последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов для трехточечных уравнений

$$y^{j+1/2} - \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1 y^{j+1/2} = F^j, \quad F^j = y^j + \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_2 y^j + \tau_{j+1}^{(1)} f \quad (\text{вдоль строк})$$

и

$$y^{j+1} - \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2 y^{j+1} = F^{j+1/2}, \quad F^{j+1/2} = y^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_1 y^{j+1/2} + \tau_{j+1}^{(2)} f \quad (\text{вдоль столбцов}).$$

Таким образом, для вычисления одной итерации требуется $O(1/(h_1 h_2))$ арифметических действий или $O(1)$ действий на один узел сетки ω_h .

По аналогии с разностной схемой для нестационарного уравнения теплопроводности будем называть итерационный процесс (2) методом переменных направлений (МПН).

Для изучения сходимости МПН (2) напишем однородные уравнения для погрешности $z^{j+1} = y^{j+1} - u$, полагая при этом $z^{j+1/2} = y^{j+1/2} - u$:

$$\begin{aligned} \frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} &= \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^j, \quad x \in \omega_h, \quad z^{j+1/2}|_{\gamma_h} = 0, \\ \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} &= \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^{j+1}, \quad x \in \omega_h, \quad z^{j+1}|_{\gamma_h} = 0, \\ z^0 &= y^0 - u. \end{aligned}$$

Дальше целесообразно перейти к операторно-разностным схемам, вводя, как обычно, пространство $H = \Omega$ сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе сетки γ_h , операторы $A_1 y = -\Lambda_1 y$, $A_2 y = -\Lambda_2 y$ для любых h , $y \in \Omega$.

В $H = \Omega$ вводится скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2.$$

Введенные таким образом операторы, как было показано в гл. IV, § 4, обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} A_\alpha^* &= A_\alpha, \quad \delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ \delta_\alpha &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Операторы A_1 и A_2 перестановочны, $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Это свойство выполняется только для прямоугольника.

2. Общая формулировка МПН. Дадим общую формулировку итерационного метода переменных направлений (МПН) для операторного уравнения

$$Au = f, \quad A = A_1 + A_2, \quad (4)$$

где $A: H \rightarrow H$, H — конечномерное евклидово пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Будем предполагать, что

$$1) \quad A = A_1 + A_2, \quad A_1^* = A_1, \quad A_2^* = A_2, \quad (5)$$

$$2) \quad \delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

3) операторы A_1 и A_2 перестановочны, $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Итерационный МПН в общем случае записывается аналогично (2):

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1/2} - y_j}{\tau_{j+1}^{(1)}} + A_1 y_{j+1/2} + A_2 y_j &= f, \\ \frac{y_{j+1} - y_{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} + A_1 y_{j+1/2} + A_2 y_{j+1} &= f, \end{aligned} \quad (7)$$

задано $y_0 \in H$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Для погрешности $z_{j+1} = y_{j+1} - u$ получаем однородные уравнения

$$(E + \tau_{j+1}^{(1)} A_1) z_{j+1/2} = (E - \tau_{j+1}^{(1)} A_2) z_j,$$

$$(E + \tau_{j+1}^{(2)} A_2) z_{j+1} = (E - \tau_{j+1}^{(2)} A_1) z_{j+1/2},$$

$$z_0 = y_0 - u \in H, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Исключим отсюда $z_{j+1/2}$:

$$(E + \tau_{j+1}^{(1)} A_1) (E + \tau_{j+1}^{(2)} A_2) z_{j+1} = (E - \tau_{j+1}^{(2)} A_1) (E - \tau_{j+1}^{(1)} A_2) z_j.$$

Так как A_1 и A_2 перестановочны, то

$$z_{j+1} = S_{j+1} z_j, \quad S_{j+1} = S_{j+1}^{(1)} S_{j+1}^{(2)},$$

$$S_j^{(1)} = (E + \tau_j^{(1)} A_1)^{-1} (E - \tau_j^{(2)} A_1),$$

$$S_j^{(2)} = (E + \tau_j^{(2)} A_2)^{-1} (E - \tau_j^{(1)} A_2).$$

Отсюда следует, что

$$z_n = T_n z_0, \quad T_n = \prod_{j=1}^n S_j, \quad (8)$$

где T_n — разрешающий оператор, представляющий собой произведение перестановочных самосопряженных операторов и поэтому являющийся также самосопряженным, $T_n^* = T_n$.

Из (8) находим

$$\|z_n\| \leq \|T_n\| \|z_0\|.$$

Величина $\|T_n\|$ зависит от параметров $\tau_j^{(1)}$ и $\tau_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Выбор этих параметров надо проводить из условия минимума числа итераций, т. е. минимума $\|T_n\|$.

Точнее, задача состоит в отыскании таких параметров $\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}, \dots, \tau_n^{(1)}$ и $\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}, \dots, \tau_n^{(2)}$, где $n = n(\epsilon)$ задано, при которых достигается

$$\min_{\{\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}\}} \|T_n\| = q_n.$$

3. Выбор оптимальных итерационных параметров (по Жордану). Спектры операторов A_1 и A_2 , согласно (6), расположены на разных отрезках $\delta_\alpha \leq \lambda(A_\alpha) \leq \Delta_\alpha$, $\delta_1 \neq \delta_2$ и $\Delta_1 \neq \Delta_2$.

Заменим A_1 и A_2 операторами A'_1 и A'_2 , у которых границы спектров совпадают

$$\eta E \leq A'_\alpha \leq E, \quad \alpha = 1, 2, \quad \eta > 0.$$

Для этого положим

$$A_1 = (qE - rA'_1)^{-1}(A'_1 - pE), \quad A_2 = (qE + rA'_2)^{-1}(A'_2 + pE), \quad (9)$$

где r, p, q — числа, подлежащие выбору, и введем параметры

$$\omega^{(1)} = \frac{\tau^{(1)} - r}{q - \tau^{(1)}p}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\tau^{(2)} + r}{q + \tau^{(2)}p}. \quad (10)$$

При этом получим

$$S_j = \tilde{S}_j^{(1)} \tilde{S}_j^{(2)}, \quad \tilde{S}_j^{(1)} = (E + \omega_j^{(1)} A'_1)^{-1} (E - \omega_j^{(2)} A'_1), \\ \tilde{S}_j^{(2)} = (E + \omega_j^{(2)} A'_2)^{-1} (E - \omega_j^{(1)} A'_2).$$

Найдем выражение для $\|T_n\|$ через собственные значения операторов A'_1 и A'_2 . Обозначим

$$\alpha_{k_1} = \lambda_{k_1}^{(1)}(A'_1), \quad \beta_{k_2} = \lambda_{k_2}^{(2)}(A'_2), \\ k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

— собственные значения операторов A'_1 и A'_2 .

Так как A'_1 и A'_2 перестановочны, то они имеют общую систему собственных функций, ту же, что и операторы A_1, A_2, A и T_n . Обозначим $\lambda_k(T_n)$ собственные значения оператора T_n . Учитывая, что

$$\lambda(\tilde{S}^{(1)}) = (1 - \omega^{(2)}\alpha) / (1 + \omega^{(1)}\alpha), \quad \lambda(\tilde{S}^{(2)}) = (1 - \omega^{(1)}\beta) / (1 + \omega^{(2)}\beta)$$

(индексы j и k пока опускаем), находим

$$\lambda(T_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - \omega_j^{(2)}\alpha}{1 + \omega_j^{(1)}\alpha} \frac{1 - \omega_j^{(1)}\beta}{1 + \omega_j^{(2)}\beta}, \quad (11)$$

причем

$$0 < \eta \leq \alpha_{k_1} \leq 1, \quad 0 < \eta \leq \beta_{k_2} \leq 1, \quad k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Норма оператора T_n равна наибольшему собственному значению $\max_k \lambda_k(T_n)$. Заменим в (11) α_{k_1} и β_{k_2} непрерывными аргументами α и β . При этом максимум правой части в (11), вообще говоря, увеличится, т. е.

$$\|T_n\| \leq \max_{\alpha, \beta \in [\eta, 1]} \left| \prod_{j=1}^n \frac{1 - \omega_j^{(2)} \alpha}{1 + \omega_j^{(1)} \alpha} \cdot \frac{1 - \omega_j^{(1)} \beta}{1 + \omega_j^{(2)} \beta} \right|. \quad (12)$$

Далее, поскольку α и β меняются на одном отрезке $[\eta, 1]$ и $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ входят в формулу (12) симметрично, то можно положить $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega$ и $\alpha = \beta$. В результате приходим к следующей задаче: требуется найти параметры $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, при которых достигается минимум $\|T_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\|$, точнее,

$$\min_{\{\omega_j\}} \max_{\alpha \in [\eta, 1]} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 - \omega_j \alpha}{1 + \omega_j \alpha} \right)^2. \quad (13)$$

Решение этой задачи известно.

Мы приведем лишь окончательные формулы для вычисления оптимальных параметров $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$.

Остановимся сначала на определении постоянных p, q, r, η . Они находятся из условий $\alpha = \beta = \eta$ при $\lambda(A_1) = \delta_1, \lambda(A_2) = \delta_2$ и $\alpha = \beta = 1$ при $\lambda(A_1) = \Delta_1, \lambda(A_2) = \Delta_2$ и выражаются формулами

$$\eta = \frac{1-t}{1+t}, \quad t = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_1 + \delta_2)(\Delta_2 + \delta_1)}}, \quad (14)$$

$$p = \frac{\kappa - t}{\kappa + t}, \quad \kappa = \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2 + \delta_1)\Delta_1}, \quad r = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)p}{2\Delta_1\Delta_2}, \quad q = r + \frac{1-p}{\Delta_1}, \quad (15)$$

причем $\kappa > t$ и $p > 0$.

Пусть задана точность $\varepsilon > 0$ итерационного процесса и известны границы $\delta_\alpha, \Delta_\alpha$ операторов A_α . По формулам (14) и (15) находим η и p, q, r . После этого можно определить число итераций $n = n(\varepsilon)$, обеспечивающих заданную точность $\varepsilon > 0$:

$$\|y_n - u\| \leq \varepsilon \|y_0 - u\|.$$

Справедлива приближенная формула

$$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\eta}. \quad (16)$$

Вводя обозначения

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad \sigma = \frac{2j-1}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

получим для определения ω_j формулу

$$\omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^\sigma)}{2\theta^{\sigma/2}(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma})}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь остается определить, согласно (10), искомые параметры

$$\tau_j^{(1)} = \frac{q\omega_j + r}{1 + \omega_j p}, \quad \tau_j^{(2)} = \frac{q\omega_j - r}{1 - \omega_j p}.$$

После этого можно приступить к решению задачи (7).

В частном случае при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ формулы (14) и (15) дают $\kappa = \xi$, $p = r = 0$, $q = 1/\Delta$, а $\xi = (1 - \eta)/(1 + \eta)$, $\eta = \delta/\Delta$. Преобразования (9) — (10) принимают вид $A_1 = \Delta A'_1$, $A_2 = \Delta A'_2$, $\omega^{(1)} = \Delta \tau^{(1)}$, $\omega^{(2)} = \Delta \tau^{(2)}$. Условие $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$ дает $\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \tau$.

Для модельной задачи (37) из § 2 имеем

$$\eta = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}, \quad \frac{4}{\eta} = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{h^2} \approx \frac{1.6}{h^2}.$$

Отсюда и из (16) видно, что

$$n(\varepsilon) \approx 0.2 \ln \frac{1.27}{h} \ln \frac{4}{\varepsilon}.$$

Так, например, для $\varepsilon = 2e^{-10} \approx 10^{-4}$ получаем $n(\varepsilon) \approx 6$ при $h = 1/10$, $n(\varepsilon) \approx 9$ при $h = 1/50$, $n(\varepsilon) \approx 11$ при $h = 1/100$.

4. МПН для случая неперестановочных операторов. Рассмотрим уравнение

$$Au = (A_1 + A_2)u = f,$$

где A_1 и A_2 — неперестановочные операторы ($A_1 A_2 \neq A_2 A_1$), удовлетворяющие условиям (5) и (6):

$$A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad \delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Для решения уравнения $(A_1 + A_2)u = f$ в этом случае применяют двухпараметрический итерационный МПН:

$$\begin{aligned} (E + \omega_1 A_1) y_{k+1/2} &= (E - \omega_1 A_2) y_k + \omega_1 f, \\ (E + \omega_2 A_2) y_{k+1} &= (E - \omega_2 A_1) y_{k+1/2} + \omega_2 f, \\ y_0 \in H, \quad k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ — параметры, подлежащие выбору.

Для погрешности $z_{k+1} = y_{k+1} - u$, $z_{k+1/2} = y_{k+1/2} - u$ получаем однородные уравнения

$$\begin{aligned} (E + \omega_1 A_1) z_{k+1/2} &= (E - \omega_1 A_2) z_k, \\ (E + \omega_2 A_2) z_{k+1} &= (E - \omega_2 A_1) z_{k+1/2} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, $z_0 \in H$ задано. (18)

Обозначая

$$v_k = (E + \omega_2 A_2) z_k$$

и исключая из (18) $z_{k+1/2}$, получим уравнение

$$v_{k+1} = S_1 S_2 v_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad v_0 \in H, \quad (19)$$

с оператором перехода

$$\begin{aligned} S = S_1 S_2, \quad S_1 = (E + \omega_1 A_1)^{-1} (E - \omega_2 A_1), \\ S_2 = (E + \omega_2 A_2)^{-1} (E - \omega_1 A_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда видно, что

$$\|v_{k+1}\| \leq \|S_1 S_2\| \|v_k\|,$$

надо оценить $\|S_1 S_2\|$ и найти $\min_{\omega_1, \omega_2} \|S_1 S_2\|$.

Нам понадобится следующая

Лемма. Пусть дан оператор $A: H \rightarrow H$ и выполнены условия

$$A = A^* > 0, \quad \delta E \leq A \leq \Delta E, \quad \delta > 0. \quad (21)$$

Тогда норма $\|S(\omega)\|$ оператора .

$$S(\omega) = (E + \omega A)^{-1} (E - \omega A)$$

при

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta \Delta}}$$

имеет наименьшее значение, равное

$$\min_{\omega} \|S(\omega)\| = \|S(\omega_0)\| = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \text{где } \eta = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Для доказательства заметим, что $S(\omega)$ есть оператор перехода двухслойной схемы

$$(E + \omega A) \frac{y_{k+1} - y_k}{2\omega} + A y_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H, \quad (22)$$

с оператором $B = E + \omega A$, так что

$$y_{k+1} = S(\omega) y_k \quad \text{и} \quad \|y_{k+1}\| \leq \rho \|y_k\|,$$

где

$$\rho = \rho(\omega) = \|S(\omega)\|.$$

Чтобы найти $\min_{\omega} \rho(\omega)$, воспользуемся теоремой 3 из § 2 гл. VI о ρ -устойчивости схемы (22). В этой теореме утверждается, что необходимые и достаточные условия для выполнения оценки $\|y_{k+1}\|_D \leq \rho \|y_k\|_D$ имеют вид

$$\frac{1 - \rho}{2\omega} (E + \omega A) \leq A \leq \frac{1 + \rho}{2\omega} (E + \omega A)$$

при любом $0 < \rho < 1$ и любом операторе $D = D^* > 0$, перестановочном с A , например, $D = E$ или $D = A$ (в теореме 3 $D = B$ или $D = A$, у нас $B = E + \omega A$). Эти условия эквивалентны опе-

раторным неравенствам

$$\frac{\xi}{\omega} E \leq A \leq \frac{1}{\xi\omega} E, \quad \text{где } \xi = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}.$$

Сравнивая их с (21), видим, что

$$\frac{\xi}{\omega} \leq \delta, \quad \frac{1}{\xi\omega} \geq \Delta \quad \text{или} \quad \xi\omega \leq \frac{1}{\Delta}, \quad \text{так что} \quad \xi^2 \leq \eta. \quad (23)$$

Минимум ρ соответствует максимуму ξ , который достигается, если в (23) взять знаки равенства

$$\xi/\omega = \delta, \quad 1/(\xi\omega) = \Delta, \quad \xi = \sqrt{\eta}$$

и, следовательно, $\omega = \xi/\delta = \sqrt{\eta}/\delta = 1/\sqrt{\delta\Delta} = \omega_0$.

При этом $\min_{\omega} \rho(\omega) = \rho(\omega_0) = (1 - \sqrt{\eta})/(1 + \sqrt{\eta})$, что и требовалось доказать.

Этот же результат можно было бы получить и другим способом, если учесть, что

$$\rho = \|S(\omega)\| = \max_{\delta < \lambda \leq \Delta} \left| \frac{1-\omega\lambda}{1+\omega\lambda} \right|,$$

где $\lambda = \lambda(A)$ — собственное значение оператора A .

Непосредственно убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \rho(\omega) &= \min_{\omega} \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} \left| \frac{1-\omega\lambda}{1+\omega\lambda} \right| = \min_{\frac{1}{\Delta} < \omega \leq \frac{1}{\delta}} \max \left(\frac{1-\omega\delta}{1+\omega\delta}, \frac{\omega\Delta-1}{\omega\Delta+1} \right) = \\ &= \rho(\omega_0) = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_0. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к задаче (19).

Воспользуемся преобразованиями (9) и (10) для операторов A_1 , A_2 и параметров ω_1 и ω_2 , полагая

$$\frac{\omega_1 - r}{q - \omega_1 p} = \omega, \quad \frac{\omega_2 + r}{q + \omega_2 p} = \omega.$$

Тогда оператор (20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S &= \tilde{S}_1 \tilde{S}_2, \quad \tilde{S}_1 = (E + \omega A'_1)^{-1} (E - \omega A'_1), \\ \tilde{S}_2 &= (E + \omega A'_2)^{-1} (E - \omega A'_2), \end{aligned}$$

причем

$$\eta E \leq A'_\alpha \leq E, \quad \alpha = 1, 2, \quad \eta > 0,$$

где η и параметры p , q , r определяются по формулам (14) и (15).

Учитывая затем неравенство

$$\|S\| \leq \|\tilde{S}_1\| \|\tilde{S}_2\|$$

и в силу леммы $\min_{\omega} \|\tilde{S}_1\| = \min_{\omega} \|\tilde{S}_2\| = (1 - \sqrt{\eta})/(1 + \sqrt{\eta})$ при $\omega = \omega_0 = \sqrt{\eta}/\delta$, убеждаемся в том, что для решения задачи (18) верна априорная оценка

$$\|(E + \omega_2 A_2) z_n\| \leq \rho^n \|(E + \omega_2 A_2) z_0\|, \quad \rho = \left(\frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right)^2, \quad (24)$$

если ω_1 и ω_2 определяются по формулам

$$\omega_1 = \frac{r + q\omega_0}{1 + p\omega_0}, \quad \omega_2 = (q\omega_0 - r)/(1 - p\omega_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\eta}/\delta. \quad (25)$$

В частности, при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ имеем $\eta = \delta/\Delta$.

Из (24) следует, что условие окончания итераций $\rho^n < \varepsilon$ выполнено, если

$$n \geq n^{(1)}(\varepsilon), \quad n^{(1)}(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}, \quad \text{где } \xi = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \eta}.$$

Рассмотрим в качестве примера модельную задачу из § 2, п. 4. Для нее $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 4 \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)/h^2$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 4 \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right)/h^2$ и $\sqrt{\eta} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi h}{2}} \approx \frac{\pi h}{2} \approx 1,57h$.

Сравним МПН (17) с параметрами (25) с явным чебышевским методом

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, \dots,$$

исследованным в § 2. Там было показано, что число итераций

$$n \geq n^{(0)}(\varepsilon), \quad n^{(0)}(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \gamma_1/\gamma_2.$$

В данном случае $\gamma_1 = \delta_1 + \delta_2 = 2\delta$, $\gamma_2 = \Delta_1 + \Delta_2 = 2\Delta$ и $\xi = \delta/\Delta = \eta$.

Таким образом,

$$n^{(0)}(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\eta}}, \quad n^{(1)}(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{4\sqrt{\eta}},$$

т. е. МПН требует примерно в 2 раза меньше итераций, чем явный чебышевский метод.

Однако для модельной задачи при переходе от k -й к $(k+1)$ -й итерации на один узел сетки надо выполнить: 1) 5 сложений и 4 умножения в случае явного чебышевского метода, 2) 12 сложений и 14 умножений в случае МПН (увеличение числа операций связано с применением метода прогонки сначала по строкам, а затем по столбцам).

Отсюда следует, что явный чебышевский метод более экономичен, чем МПН в случае неперестановочных операторов. Оба метода для модельной задачи требуют $O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ итераций.

5. Факторизованные итерационные схемы и МПН. Рассмотренный выше метод переменных направлений эквивалентен двухслойной итерационной схеме

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f \quad (26)$$

с факторизованным оператором (ФО)

$$B = (E + \omega_1 A_1)(E + \omega_2 A_2) \quad (27)$$

и итерационным параметром

$$\tau = \omega_1 + \omega_2. \quad (28)$$

В самом деле, перепишем (17) в виде

$$B_1 y_{k+1/2} = C_2 y_k + \omega_1 f, \quad B_2 y_{k+1} = C_1 y_{k+1/2} + \omega_2 f, \quad (29)$$

где $B_1 = E + \omega_1 A_1$, $B_2 = E + \omega_2 A_2$, $C_1 = E - \omega_2 A_1$, $C_2 = E - \omega_1 A_2$.

Исключим подытерацию $y_{k+1/2}$. Для этого применим к первому уравнению (29) оператор C_1 , ко второму — оператор B_1 , сложим полученные уравнения и учтем, что $B_1 C_1 = C_1 B_1$, $\omega_1 C_1 + \omega_2 B_1 = \omega_1 (E - \omega_2 A_1) + \omega_2 (E + \omega_1 A_1) = (\omega_1 + \omega_2) E$:

$$B_1 B_2 y_{k+1} = C_1 C_2 y_k + (\omega_1 + \omega_2) f. \quad (30)$$

Заметим теперь, что $B_1 B_2 - C_1 C_2 = (\omega_1 + \omega_2)(A_1 + A_2)$, и запишем (30) в каноническом виде (26). Обратный ход рассуждений очевиден.

Если A_1 и A_2 неперестановочны, то оператор (27) не является самосопряженным и схема (26) не принадлежит семейству двухслойных итерационных схем из § 3, для которого развита общая теория.

Рассмотрим случай, когда A_1 и A_2 — перестановочные операторы, $A_1 A_2 = A_2 A_1$ и выполнены условия (5), (6).

Тогда ФО (27) самосопряжен и положителен:

$$B = B^* > 0.$$

Из (30) видно, что схема (26) имеет оператор перехода

$$S = S_1 S_2, \quad S_\alpha = B_\alpha^{-1} C_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

В п. 4 найдены параметры ω_1 и ω_2 , при которых достигается минимум $\|S(\omega)\|$, равный ρ :

$$\min_{\omega_1, \omega_2} \|S\| = \rho, \quad \rho = \left(\frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right)^2 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{2 \sqrt{\eta}}{1 + \eta},$$

где η , ω_1 , ω_2 определяются согласно (14), (15) и (25).

Зная ρ , ω_1 и ω_2 , нетрудно найти постоянные эквивалентности $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$ операторов B и A :

$$\dot{\gamma}_1 B \leq A \leq \dot{\gamma}_2 B, \quad (31)$$

необходимые для использования оператора B в общей теории.

Воспользуемся теоремой 3 из § 2 гл. VI о необходимых и достаточных условиях ρ -устойчивости схемы (26):

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B.$$

Подставляя сюда ρ и $\tau = \omega_1 + \omega_2$, находим

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{1-\rho}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\xi}{(1+\xi)(\omega_1 + \omega_2)}, \quad \dot{\gamma}_2 = \frac{1+\rho}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2}{(1+\xi)(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (32)$$

Факторизованный оператор вида (27) можно построить на базе некоторого оператора

$$R = R^* > 0,$$

который представим в виде суммы

$$R = R_1 + R_2, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1,$$

$$R_\alpha = R_\alpha^* > 0, \quad \delta_\alpha E \leq R_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \alpha = 1, 2.$$

Образуем факторизованный оператор

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2). \quad (33)$$

Тогда вместо (31) напишем

$$\dot{\gamma}_1 B \leq R \leq \dot{\gamma}_2 B,$$

где $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$ вычисляются по формулам (32).

Если оператор R есть регуляризатор для A :

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R,$$

то постоянные эквивалентности A и B :

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B,$$

очевидно, равны

$$\gamma_1 = c_1 \dot{\gamma}_1 \quad \text{и} \quad \gamma_2 = c_2 \dot{\gamma}_2.$$

Построенный таким образом факторизованный оператор (33) используем для метода с чебышевским набором параметров

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad y_0 \in f.$$

Для числа итераций имеем

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} \frac{c_1}{c_2},$$

где η определяется, согласно (22), через параметры δ_1 , δ_2 , Δ_1 и Δ_2 операторов R_1 и R_2 .

Для попеременно-треугольного метода (ПТМ) с чебышевским набором параметров в § 3 была получена такая же оценка $n_0(\varepsilon)$, однако там η выражалось через δ_α и Δ_α по другим формулам. Если $R = -\Lambda$, Λ — разностный оператор Лапласа и рассматривается задача Дирихле на квадратной сетке в единичном квадрате, то $\eta = \delta/\Delta = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}$ как для ПТМ, так и для факторизованной схемы МПН (26)–(28). Поэтому оба метода требуют одинакового числа итераций, однако ПТМ в целом экономичнее; так, для вычисления одной итерации в этом случае требуется меньше арифметических действий. Впрочем, для такой модельной задачи лучше всего положить $B = R$ и определять y_{k+1} , решая уравнение $Ry_{k+1} = F_k$, $F_k = Ry_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f)$ прямым методом (декомпозиции или быстрого преобразования Фурье).

Таким образом, трудно указать ситуацию, в которой схема (26)–(28) предпочтительнее, чем, например, ПТМ.

Замечание 1. Рассмотренный в пп. 2, 3 МПН с переменными параметрами, очевидно, эквивалентен двухслойной схеме (26) с параметром $\tau = \tau_k = \tau_k^{(1)} + \tau_k^{(2)}$ и факторизованным оператором

$$B_k = (E + \tau_k^{(1)} A_1)(E + \tau_k^{(2)} A_2).$$

Замечание 2. Если A есть сумма $p > 2$ попарно перестановочных операторов:

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha, \quad A_\alpha^* = A_\alpha > 0, \quad \delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \\ \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p,$$

то непосредственное применение МПН (17) невозможно, и в качестве итерационного МПН можно рассматривать схему (26) с факторизованным оператором

$$B_k = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau_k^{(\alpha)} A_\alpha), \quad \tau_k^{(\alpha)} > 0.$$

В этом случае точное решение задачи о минимаксе неизвестно, а используется так называемый ~~циклический~~ набор параметров.

Для вычисления новой итерации y_{k+1} надо решить уравнение

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau_k^{(\alpha)} A_\alpha) y_{k+1} = F_k,$$

что сводится к последовательному решению уравнений

$$(E + \tau_k^{(1)} A_1) y^{(1)} = F_k, \quad (E + \tau_k^{(\alpha)} A_\alpha) y^{(\alpha)} = y^{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \dots, p,$$

причем

$$y_{k+1} = y^{(p)}.$$

В случае разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в p -мерном единичном кубе $A_\alpha y = -\Delta_\alpha y$, $\Delta_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, и вычисление y_{k+1} сводится к последовательным прогонкам по направлениям x_1, x_2, \dots, x_p , т. е. к алгоритму типа МПН. Если взять циклический набор параметров, то этот МПН обеспечивает точность ε через

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ итераций,}$$

где $h = h_1 = h_2 = \dots = h_p$ — шаг сетки.

Для этой же задачи ПТМ с операторами

$$R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \quad R_2 y = -\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{x_\alpha}$$

требуется

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{3,54 \sqrt{h}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

т. е. асимптотика для ПТМ хуже, чем для МПН.

Однако уже для $p=3$ при $h \geq 1/60$, т. е. для сеток с числом узлов $\leq 2,16 \cdot 10^5$, число итераций для ПТМ меньше, чем для МПН с циклическим набором параметров, а по общему объему вычислительной работы преимущество ПТМ весьма значительно (ПТМ экономичнее МПН в 2–2,5 раза). В целом ПТМ экономичнее МПН на любых допустимых сетках.

6. МПН для случая несамосопряженных операторов. Пусть дано уравнение

$$A u = (A_1 + A_2) u = f,$$

где A_1 и A_2 — несамосопряженные положительно определенные операторы, и выполнены условия

$$A_\alpha \geq \delta_\alpha E, \quad A_\alpha^{-1} \geq \frac{1}{\Delta_\alpha} E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \Delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (34)$$

Второе условие, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\|A_\alpha y\|^2 \leq \Delta_\alpha (A_\alpha y, y). \quad (35)$$

В самом деле, $0 \leq (A_\alpha^{-1} x, x) - \frac{1}{\Delta_\alpha} (x, x) - (y, A_\alpha y) - \frac{1}{\Delta_\alpha} (A_\alpha y, A_\alpha y)$, если положить $x = A_\alpha y$.

Для решения уравнения $Au = f$ рассмотрим итерационный МПН с параметром ω :

$$\begin{aligned}(E + \omega A_1) y_{k+1/2} &= (E - \omega A_2) y_k + \omega f, \\ (E + \omega A_2) y_{k+1} &= (E - \omega A_1) y_{k+1/2} - \omega f.\end{aligned}\quad (35)$$

По аналогии с п. 4 для

$$v_{k+1} = (E + \omega A_2) z_{k+1},$$

где $z_{k+1} = y_{k+1} - u$ — погрешность, получаем

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= S_1 S_2 v_k, \quad S_\alpha = (E + \omega A_\alpha)^{-1} (E - \omega A_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \\ \|v_{k+1}\| &\leq \|S_1 S_2\| \|v_k\| \leq \|S_1\| \|S_2\| \|v_k\|.\end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий (34) справедлива оценка

$$\|S_\alpha\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha}, \quad \text{где} \quad \kappa_\alpha = \frac{2\delta_\alpha\omega}{1 + \omega^2\delta_\alpha\Delta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (37)$$

В самом деле, рассмотрим тождества

$$\begin{aligned}\|(E - \omega A_\alpha)x\|^2 &= \|(E + \omega A_\alpha)x\|^2 - 4\omega(A_\alpha x, x), \\ \|(E + \omega A_\alpha)x\|^2 &= \|x\|^2 + \omega^2\|A_\alpha x\|^2 + 2\omega(A_\alpha x, x).\end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенств (34), (35) следует

$$\begin{aligned}\|(E + \omega A_\alpha)x\|^2 &\leq (1/\delta_\alpha + \omega^2\Delta_\alpha + 2\omega)(A_\alpha x, x), \\ (A_\alpha x, x) &\geq \frac{\delta_\alpha}{1 + \omega^2\delta_\alpha\Delta_\alpha + 2\omega\delta_\alpha} \|A_\alpha x\|^2, \\ \|(E - \omega A_\alpha)x\|^2 &\leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha} \|(E + \omega A_\alpha)x\|^2.\end{aligned}$$

Полагая затем $x = (E + \omega A_\alpha)^{-1}y$, имеем $\|S_\alpha y\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha} \|y\|^2$, что и требовалось.

Пользуясь (37), получаем

$$\|S_1 S_2\|^2 \leq \|S_1\|^2 \|S_2\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \frac{1 - \kappa_2}{1 + \kappa_2} = F(\omega).$$

Параметр ω выбирается из условия минимума функции $F(\omega)$. Функция $F_1(\omega) = (1 - \kappa_1)/(1 + \kappa_1)$ достигает минимума (а κ_1 — максимума) при

$$\omega = 1/\sqrt{\delta_1\Delta_1}, \quad \text{а} \quad F_2(\omega) = (1 - \kappa_2)/(1 + \kappa_2) \quad \text{при} \quad \omega = 1/\sqrt{\delta_2\Delta_2}.$$

Эти значения совпадают при $\delta_1\Delta_1 = \delta_2\Delta_2$, и в этом случае справедливо неравенство

$$\|S_1 S_2\|^2 \leq \rho^2, \quad \rho^2 = \frac{1 - \sqrt{\eta_1}}{1 + \sqrt{\eta_1}} \frac{1 - \sqrt{\eta_2}}{1 + \sqrt{\eta_2}}, \quad \eta_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (38)$$

причем

$$\omega = 1/\sqrt{\delta_1 \Delta_1} = 1/\sqrt{\delta_2 \Delta_2},$$

а для погрешности $z_n = y_n - u$ верна оценка

$$\|(E + \omega A_2) z_n\| \leq \rho^n \|(E + \omega A_2) z_0\|. \quad (39)$$

Если $\delta_1 \Delta_1 \neq \delta_2 \Delta_2$, то полагаем $\omega = 1/\sqrt{\delta \Delta}$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, а $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$.

По сравнению со случаем самосопряженных операторов A_1 и A_2 (см. п. 4) число итераций увеличивается в 2 раза. Это видно, например, при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ из (38): $\rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}$ вместо $\rho = \left(\frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}\right)^2$, полученного в п. 4, если применить оценку (39) для случая самосопряженных A_1 и A_2 .

§ 5. Другие итерационные методы

1. Трехслойные итерационные схемы. До сих пор мы изучали только двухслойные итерационные схемы для решения операторных уравнений $Au = f$ с самосопряженным оператором A в предположении, что известны границы γ_1 и γ_2 спектра оператора A в H либо в H_B , где $B = B^* > 0$ — некоторый оператор (стабилизатор). В этом параграфе мы рассмотрим и другие итерационные методы. Начнем с трехслойных (двуухшаговых) итерационных схем.

Пусть требуется решить уравнение

$$Au = f, \quad A: H \rightarrow H, \quad (1)$$

с самосопряженным и положительным оператором, границы спектра которого известны:

$$A = A^*, \quad \gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \quad (2)$$

Трехслойная итерационная схема связывает три итерации y_{k-1} , y_k и y_{k+1} , так что y_{k+1} определяется через y_{k-1} , y_k .

Явная схема обычно записывается в виде

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= (1 + \alpha) S y_k - \alpha y_{k-1} + (1 + \alpha) \tau_0 f, \\ k &= 1, 2, \dots, \\ y_1 &= S y_0 + \tau_0 f, \quad \text{любое } y_0 \in H \text{ задано,} \end{aligned} \quad (3)$$

где $S = E - \tau_0 A$ — оператор перехода для двухслойной схемы простой итерации с оптимальным параметром τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \alpha = \rho_1^2, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (4)$$

Первую итерацию y_1 находим по двухслойной схеме простой итерации.

Схему (3) обычно получают следующим образом. Уравнение (1) записывают в так называемом подготовленном виде

$$u = u - \tau A u + \tau f = S(\tau) u + \tau f, \quad S(\tau) = E - \tau A,$$

и выбирают параметр τ так, чтобы $\|S\|$ была минимальной. Для этого, как мы знаем из § 2, надо положить $\tau = \tau_0$:

$$u = S(\tau_0) u + \tau_0 f. \quad (5)$$

Это уравнение можно переписать иначе:

$$(1 + \alpha) u = (1 + \alpha) S u + (1 + \alpha) \tau_0 f, \\ u = (1 + \alpha) S u - \alpha u + (1 + \alpha) \tau_0 f,$$

и уже к нему применить явную схему, заменив $(1 + \alpha) S u$ на $(1 + \alpha) S y_k$, а αu на αy_{k-1} . Параметр α выбирается из требования минимума итераций. Мы не имеем возможности останавливаться на оценке скорости сходимости схемы (3) и выборе α . Приведем лишь окончательный результат.

Применяя к (3) оператор A , убеждаемся в том, что невязка $r_k = Ay_k - f$ удовлетворяет однородным уравнениям

$$r_{k+1} = (1 + \alpha) S r_k - \alpha r_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6) \\ r_1 = S r_0, \quad \text{где} \quad r_0 = Ay_0 - f \in H \quad \text{любое.}$$

Для этой задачи при $\alpha = \rho_1^2$ справедлива оценка

$$\|Ay_n - f\| \leq q_n \|Ay_0 - f\|, \quad (7)$$

где

$$q_n = \rho_1^n \left(1 + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} n \right). \quad (8)$$

Для числа итераций, очевидно, верна оценка

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(1 + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} n \right)}{\ln \frac{1}{\rho_1}},$$

которая выполнена при

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(1 + \frac{2\sqrt{\xi}n}{1+\xi} \right)}{2\sqrt{\xi}}. \quad (9)$$

Сравнение с выражением для q_n в случае чебышевской схемы

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}$$

показывает, что обе схемы имеют одинаковый асимптотический порядок при $\xi \rightarrow 0$ по числу итераций

$$n = n(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

однако число итераций для трехслойной схемы несколько больше.

Трехслойная схема требует большей памяти (при определении y_{k+1} надо помнить векторы y_k и y_{k-1}), сильнее зависит от неточностей в задании постоянных γ_1 и γ_2 , чем двухслойная чебышевская схема. Поэтому на практике целесообразнее пользоваться чебышевской схемой, а не трехслойной, если заданы γ_1 и γ_2 .

З а м е ч а н и е. Переход от явной к неявной трехслойной схеме сводится к замене в уравнении (3) A на $B^{-1}A$ и f на $B^{-1}f$, так что

$$y_{k+1} = (1 + \alpha)(E - \tau_0 B^{-1}A)y_k - \alpha y_{k-1} + (1 + \alpha)\tau_0 B^{-1}f$$

или

$$By_{k+1} = (1 + \alpha)(B - \tau_0 A)y_k - \alpha By_{k-1} + (1 + \alpha)\tau_0 f, \quad (10)$$

$$By_1 = By_0 - \tau_0 Ay_0 + \tau_0 f, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 \in H \quad \text{задано.}$$

Уравнение (10) можно получить, если вместо (5) написать тождество

$$Bu = (1 + \alpha)(Bu - \tau_0 Au) - \alpha Bu + (1 + \alpha)\tau_0 f$$

и расставить в соответствующих местах итерации.

Формулы (4) для τ_0 и α остаются в силе, однако γ_1 и γ_2 — границы оператора A не в H , а в H_B

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \quad B = B^* > 0. \quad (11)$$

При этом для решения задачи (10) вместо (7) выполняется оценка

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \leq q_n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}, \quad (12)$$

где q_n по-прежнему определяется формулой (8).

2. Метод минимальных невязок. До сих пор мы всюду предполагали, что постоянные γ_1 и γ_2 — границы оператора A (в H или в H_B) — неизвестны. Может оказаться, что они либо априори неизвестны, либо вычисляются очень грубо. Тогда целесообразно пользоваться так называемыми итерационными методами вариационного типа, которые не используют в явном виде первичной информации о параметрах γ_1 и γ_2 . Это — методы скорейшего спуска, минимальных невязок, сопряженных градиентов (трехслойная схема) и др.

Мы рассмотрим здесь лишь два метода: метод минимальных невязок и метод скорейшего спуска. Это двухслойные схемы.

Начнем, как обычно, с явной схемы

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{задано } y_0 \in H, \quad (13)$$

или

$$y_{k+1} - y_k - \tau_{k+1}r_k, \quad r_k = Ay_k - f - \text{невязка}. \quad (13')$$

Различие между методами минимальных невязок и скорейшего спуска только в формуле для параметра τ_{k+1} .

Для метода минимальных невязок τ_{k+1} вычисляется:

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{\|Ar_k\|^2}, \quad \text{где } r_k = Ay_k - f. \quad (14)$$

Это получается из условия минимума нормы невязки $\|r_{k+1}\|$. Напишем уравнение для невязки

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{\tau_{k+1}} + Ar_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

и вычислим

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|r_k\|^2 - 2\tau_{k+1}(Ar_k, r_k) + \tau_{k+1}^2 \|Ar_k\|^2. \quad (16)$$

Правая часть в (16) есть полином второй степени $P_2(\tau_{k+1})$ от параметра τ_{k+1} . Приравнивая нулю производную $P'_2(\tau_{k+1})$, находим τ_{k+1} согласно (14). Вторая производная при этом значении τ_{k+1} положительна и, следовательно, величина $\|r_{k+1}\|$ минимальна.

Все эти рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда A — несамосопряженный оператор.

Отсюда сразу следует и априорная оценка

$$\|r_{k+1}\| \leq \rho_0 \|r_k\|, \quad \text{т. е. } \|Ay_n - f\| \leq \rho_0^n \|Ay_0 - f\|, \quad (17)$$

где $\rho_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi)$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$, а γ_1 и γ_2 — точные границы оператора $A = A^* > 0$.

В самом деле, так как при значении τ_{k+1} (14) правая часть в (16) минимальна при фиксированном $r_k \in H$, то при любом другом значении и, в частности, при $\tau = \tau_0$ она должна возрастать:

$$\begin{aligned} \|r_{k+1}\|^2 &\leq \|r_k\|^2 - 2\tau_0(Ar_k, r_k) + \tau_0 \|Ar_k\|^2 \leq \|r_k - \tau_0 Ar_k\|^2 \leq \\ &\leq \|E - \tau_0 A\|^2 \|r_k\|^2, \\ \|r_{k+1}\| &\leq \|E - \tau_0 A\| \|r_k\|. \end{aligned}$$

С другой стороны, из § 2, п. 3 известно, что

$$\|E - \tau_0 A\| = \rho_0 \quad \text{при } \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2).$$

Тем самым доказана оценка (17), из которой видно, что метод минимальных невязок сходится с той же скоростью, что и метод простой итерации (если для вычисления τ_0 при этом используются точные значения γ_1 и γ_2).

Вычисления в методе минимальных невязок проводятся по формулам

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} (A y_k - f) = y_k - \tau_{k+1} r_k \quad (13')$$

и (14). Объем вычислений из-за формулы (14) для τ_{k+1} здесь больше, чем в случае простой итерации.

Нетрудно написать неявный метод минимальных невязок:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} w_k, \quad w_k = B^{-1} (A y_k - f), \quad (18)$$

который обычно называют методом минимальных поправок.

В этом случае вместо уравнения $Au = f$ надо рассмотреть уравнение

$$Cv = \varphi, \quad v = B^{1/2} u, \quad C = B^{-1/2} A B^{-1/2}, \quad \varphi = B^{-1/2} f, \quad (19)$$

и применить к нему явный метод минимальных невязок

$$x_{k+1} = x_k - \tau_{k+1} (C x_k - \varphi),$$

где

$$\tau_{k+1} = \frac{(C \tilde{r}_k, \tilde{r}_k)}{(C \tilde{r}_k, C \tilde{r}_k)}, \quad \tilde{r}_k = C x_k - \varphi.$$

Подставляя сюда $x_k = B^{1/2} y_k$, $C = B^{-1/2} A B^{-1/2}$, $\varphi = B^{-1/2} f$ и преобразуя $\tilde{r}_k = B^{-1/2} (A y_k - f) = B^{-1/2} r_k$,

$$(C \tilde{r}_k, \tilde{r}_k) = (B^{-1/2} A B^{-1/2} r_k, B^{-1/2} r_k) = (A w_k, w_k),$$

$$(C \tilde{r}_k, C \tilde{r}_k) = (B^{-1/2} A w_k, B^{-1/2} A w_k) = (B^{-1} A w_k, A w_k),$$

где $w_k = B^{-1} r_k$ — поправка, получаем уравнение (18), в котором надо положить

$$\tau_{k+1} = \frac{(A w_k, w_k)}{(B^{-1} A w_k, A w_k)}, \quad w_k = B^{-1} r_k. \quad (20)$$

Вместо оценки (17), очевидно, получим

$$\|A y_n - f\|_{B^{-1}} \leq \rho_0^n \|A y_0 - f\|_{B^{-1}}. \quad (21)$$

3. Метод скорейшего спуска. Для явного метода скорейшего спуска

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} (A y_k - f), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

задано любое $y_0 \in H$,

параметр τ_{k+1} определяется по формуле

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(A r_k, r_k)}, \quad r_k = A y_k - f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Эта формула может быть получена из условия минимума нормы погрешности $z_k = y_k - u$ в H_A , т. е. из условия

$$\min_{\{\tau_{k+1}\}} \|z_{k+1}\|_A, \quad \|z\|_A = \sqrt{(A z, z)}.$$

Для погрешности $z_k = y_k - u$ имеем уравнение

$$z_{k+1} = z_k - \tau_{k+1} A z_k.$$

Вводя $v_k = A^{1/2} z_k$, получим

$$v_{k+1} = v_k - \tau_{k+1} A v_k. \quad (23)$$

Вычислим квадрат нормы

$$\|v_{k+1}\|^2 = \|v_k\|^2 - 2\tau_{k+1} (v_k, A v_k) + \tau_{k+1}^2 \|A v_k\|^2. \quad (24)$$

Условие $\min_{\{\tau_{k+1}\}} \|v_{k+1}\|^2$ дает

$$\tau_{k+1} = \frac{(A v_k, v_k)}{\|A v_k\|^2}. \quad (25)$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 2, получаем оценку

$$\|v_n\| \leq \rho_0^n \|v_0\|. \quad (26)$$

Теперь остается перейти от v_k к $z_k = A^{-1/2} v_k$.

Учитывая, что $A z_k = A(y_k - u) = A y_k - f = r_k$, $(A v_k, v_k) = \|A z_k\|^2 = \|r_k\|^2$, $\|A v_k\|^2 = (A r_k, r_k)$, преобразуем (25) к виду (22). Из неравенства (26) следует

$$\|y_n - u\|_A \leq \rho_0^n \|y_0 - u\|_A, \quad (27)$$

так как $\|v_n\|^2 = (v_n, v_n) = (A z_n, z_n) = \|z_n\|_A^2$.

Таким образом, метод скорейшего спуска сходится в H_A с той же скоростью, что и метод простой итерации. Заметим, что метод минимальных невязок сходится в H_A , т. е. в более сильной норме.

Для неявного метода скорейшего спуска

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

задано любое $y_0 \in H$,

по аналогии с п. 2 получаем

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, w_k)}{(A w_k, w_k)}, \quad w_k = B^{-1} r_k, \quad r_k = A y_k - f. \quad (29)$$

Оценка (21) в этом случае остается без изменения, если выполнены условия

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0.$$

4. Решение уравнений с несамосопряженными операторами. Рассмотрим уравнение

$$A u = f, \quad A: H \rightarrow H,$$

где A — положительно определенный несамосопряженный линейный оператор.

Будем пользоваться сначала двухслойной схемой с постоянным параметром («стационарным» итерационным методом)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (30)$$

задано любое $y_0 \in H$

Для оценки скорости сходимости итераций рассмотрим однородное уравнение

$$z_{k+1} = Sz_k, \quad S = E - \tau A, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z_0 \in H,$$

для погрешности $z_k = y_k - u$.

Отсюда следует

$$\|z_{k+1}\| \leq \|S\| \|z_k\|.$$

Параметр τ надо выбирать из условия $\min_{\tau} \|S(\tau)\|$.

Пусть заданы нижние грани операторов A и A^{-1} :

$$\begin{aligned} A &\geq \gamma_1 E \quad \text{или} \quad (Ay, y) \geq \gamma_1 \|y\|^2, \quad \gamma_1 > 0, \\ A^{-1} &\geq \frac{1}{\gamma_2} E \quad \text{или} \quad \|Ay\|^2 \leq \gamma_2 (Ay, y), \quad \gamma_2 > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Второе условие при $A = A^*$ эквивалентно условию $A \leq \gamma_2 E$. Предполагая, что $2 - \tau \gamma_2 \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \|Sy\|^2 &= \|y - \tau Ay\|^2 = \|y\|^2 - 2\tau (Ay, y) + \tau^2 \|Ay\|^2 \leq \\ &\leq \|y\|^2 - 2 (Ay, y) + \tau^2 \gamma_2 (Ay, y) = \|y\|^2 - \tau (2 - \tau \gamma_2) (Ay, y) \leq \\ &\leq \|y\|^2 - \tau (2 - \tau \gamma_2) \gamma_1 \|y\|^2 = (1 - 2\tau \gamma_1 + \tau^2 \gamma_1 \gamma_2) \|y\|^2, \quad \text{т. е.} \\ \|S\|^2 &\leq 1 - 2\tau \gamma_1 + \tau^2 \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

Выбирая τ из условия минимума трехчлена, находим

$$\begin{aligned} \tau &= 1/\gamma_2, \quad \|S\|^2 \leq (1 - \gamma_1/\gamma_2), \quad \text{т. е.} \\ \|S\| &\leq \sqrt{1 - \xi} \quad \text{при} \quad \tau = 1/\gamma_2, \quad \xi = \gamma_1/\gamma_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим теперь случай, когда вместо двух параметров γ_1, γ_2 задано три параметра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Представим A в виде суммы симметричного (самосопряженного) A_0 и кососимметрического оператора A_1 :

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*), \quad (33)$$

так что $A_0^* = A_0, A_1^* = -A_1$,

$$(A_1 x, x) = -(x, A_1 x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad (Ax, x) = (A_0 x, x).$$

Предположим, что A удовлетворяет условиям

$$\gamma_1 E \leq A_0 \leq \gamma_2 E, \quad \|A_1\| \leq \gamma_3, \quad (34)$$

где $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ и $\gamma_3 \geq 0$ — заданные числа.

Запишем уравнение $z_{k+1} = (E - \tau A) z_k$ для погрешности $z_{k+1} = y_{k+1} - u$ в виде

$$z_{k+1} = (E - \tau A_0 - \tau A_1) z_k = (\theta E - \tau A_0) z_k + [(1 - \theta) E - \tau A_1] z_k, \quad (35)$$

где $0 < \theta < 1$ — произвольное число.

Выберем τ и θ так, чтобы норма $\|S\| = \|E - \tau(A_0 + A_1)\|$ была минимальной.

В силу неравенства треугольника

$$\|z_{k+1}\| \leq \theta \|E - \frac{\tau}{\theta} A_0\| \|z_k\| + \|(1 - \theta) z_k - \tau A_1 z_k\|. \quad (36)$$

Оператор A_0 — самосопряженный и $\gamma_1 E \leq A_0 \leq \gamma_2 E$, поэтому

$$\min_{\tau/\theta} \|E - \frac{\tau}{\theta} A_0\| = \rho_0 \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\theta} = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (37)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \text{так что} \quad \tau = \tau_0 \theta.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (36):

$$\begin{aligned} \|(1 - \theta) y - \tau A_1 y\|^2 &= (1 - \theta)^2 \|y\|^2 - 2\tau(1 - \theta)(A_1 y, y) + \tau^2 \|A_1 y\|^2 = \\ &= (1 - \theta)^2 \|y\|^2 + \tau^2 \|A_1 y\|^2 \leq [(1 - \theta)^2 + \tau^2 \gamma_3^2] \|y\|^2 = \\ &= [(1 - \theta)^2 + \tau_0^2 \theta^2 \gamma_3^2] \|y\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau = \tau_0 \theta$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\| &\leq \|S\| \|z_k\|, \quad \|S\| \leq f(\theta), \\ f(\theta) &= \theta \rho_0 + \sqrt{(1 - \theta)^2 + \theta^2 a^2}, \quad a^2 = \tau_0^2 \gamma_3^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Найдем теперь минимум функции $f(\theta)$. Вычислим производную

$$f'(\theta) = \rho_0 - \frac{1 - \theta - a^2 \theta}{\sqrt{(1 - \theta)^2 + a^2 \theta^2}} = \rho_0 - \frac{\alpha - a^2}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}, \quad \alpha = \frac{1 - \theta}{\theta}.$$

Условие $f'(\theta) = 0$ дает

$$\rho_0 \sqrt{a^2 + \alpha^2} = \alpha - a^2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для α :

$$(1 - \rho_0^2) \alpha^2 - 2a^2 \alpha + a^2 (a^2 - \rho_0^2) = 0$$

и решаем его:

$$\alpha = a \frac{a + \rho_0 \sqrt{1 - \rho_0^2 + a^2}}{1 - \rho_0^2}$$

(второй корень непригоден, так как он может быть отрицательным при некоторых значениях параметров a и ρ_0). Введем

обозначение $\kappa = \gamma_3 / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2}$, так что

$$\gamma_3^2 = \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \gamma_1 \gamma_2, \quad a^2 = \tau_0^2 \gamma_3^2 = \frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \cdot \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} = \frac{(1 - \rho_0^2) \kappa^2}{1 - \kappa^2},$$

$$\frac{a^2}{\kappa^2} = \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение $1 - \rho_0^2 + a^2 = 1 - \rho_0^2 +$
 $+ \frac{\kappa^2 (1 - \rho_0^2)}{1 - \kappa^2} = \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2} = \frac{a^2}{\kappa^2}$, откуда получим

$$\alpha = \frac{a^2 (\kappa + \rho_0)}{\kappa (1 - \rho_0^2)} = \frac{\kappa (\kappa + \rho_0)}{1 - \kappa^2}, \quad 1 + \alpha = \frac{1 + \kappa \rho_0}{1 - \kappa^2},$$

$$\theta = \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa \rho_0}.$$

Найдем теперь $f(\theta) = \frac{1}{1 + \alpha} \rho_0 + \frac{1}{1 + \alpha} \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{\rho_0^2 + \alpha - a^2}{(1 + \alpha) \rho_0}$. Учитывая, что $\rho_0^2 + \alpha - a^2 = (1 + \alpha) - (1 - \rho_0^2 + a^2) = 1 + \alpha - \frac{a^2}{\kappa^2} = \frac{1 + \kappa \rho_0}{1 - \kappa^2} -$
 $- \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2} = \rho_0 \frac{\kappa + \rho_0}{1 - \kappa^2}$, получаем

$$\|S\| \leq \frac{\kappa + \rho_0}{1 + \kappa \rho_0} \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0 \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa \rho_0}.$$

Таким образом, для решения задачи (30), если оператор A удовлетворяет условиям (34), справедлива оценка

$$\|y_n - u\| \leq \rho^n \|y_0 - u\|,$$

где

$$\rho = \frac{\kappa + \rho_0}{1 + \kappa \rho_0}, \quad \kappa = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2}},$$

$$\tau = \bar{\tau} = \tau_0 (1 - \kappa^2) / (1 + \kappa \rho_0). \quad (39)$$

Число итераций

$$n \geq \ln \frac{1}{\rho} / \ln \frac{1}{\rho}.$$

Вместо явной схемы можно рассмотреть и неявную схему

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, y_0 \in H, \quad (40)$$

с самосопряженным оператором $B = B^* > 0$. В этом случае надо перейти к явной схеме

$$x_{k+1} = x_k - \tau (Cx_k - \varphi),$$

$$x_k = B^{-1/2} y_k, \quad C = B^{-1/2} A B^{-1/2}, \quad \varphi = B^{-1/2} f$$

и условия (34) для C переформулировать, как условия для A и B :

$$\begin{aligned} \gamma_1 B &\leq A_0 \leq \gamma_2 B, \\ (B^{-1}A_1 y, A_1 y) &\leq \gamma_3^2 (By, y), \end{aligned} \quad (41)$$

т. е.

$$\|A_1 y\|_{B^{-1}} \leq \gamma_3 \|y\|_B.$$

Тогда вместо (39) получим

$$\|y_n - u\|_B \leq \rho^n \|y_0 - u\|_B.$$

Для решения уравнения $Au = f$ с несамосопряженным оператором A можно воспользоваться методом минимальных невязок, который сходится с той же скоростью, что и схема (30) при $\tau = \bar{\tau}$.

Для явной схемы

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 \in H, \quad (13)$$

параметр τ_{k+1} вычисляется, согласно п. 2, по формуле

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{\|Ar_k\|^2}, \quad r_k = Ay_k - f, \quad (14)$$

которая получается из условия минимума $\|r_{k+1}\|^2$.

При этом нигде не используется самосопряженность A . При доказательстве сходимости несколько изменяются рассуждения из п. 2. В правую часть тождества (16) вместо τ_{k+1} подставляется $\bar{\tau}$:

$$\begin{aligned} \|r_{k+1}\|^2 &\leq \|r_k\|^2 - 2\bar{\tau}(Ar_k, r_k) + \bar{\tau}^2 \|Ar_k\|^2 = \\ &= \|r_k - \bar{\tau}Ar_k\|^2 \leq \|E - \bar{\tau}A\|^2 \|r_k\|^2 \leq \rho^2 \|r_k\|^2, \end{aligned}$$

т. е. $\|r_{k+1}\| \leq \rho \|r_k\|$.

Тем самым доказано, что при выполнении условий (34) для метода минимальных невязок, определяемого формулами (13) и (14), справедлива оценка

$$\|Ay_n - f\| \leq \rho^n \|Ay_0 - f\|,$$

где y_n — решение задачи (13), а ρ определяется по формуле (39).

Метод скорейшего спуска в данном случае неприменим, так как он предполагает самосопряженность оператора A .

Для неявного метода минимальных поправок верна оценка

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \leq \rho^n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}},$$

где $B = B^* > 0$ и выполнены условия (34).

5. Гибридные методы. Для решения разностных эллиптических уравнений могут применяться гибридные (комбинированные) численные методы, сочетающие прямые и итерационные методы,

а также итерационные методы разного типа (двухступенчатые методы).

Рассмотрим итерационную схему

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad \text{задано } y_0 \in H. \quad (42)$$

Отсюда находим

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} w_k, \quad (43)$$

где w_k — поправка, являющаяся решением уравнения $B_k w_k = r_k$,
 $r_k = Ay_k - f$ — невязка

Пусть $R = R^* > 0$ — регуляризатор и

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad c_1 > 0.$$

Чтобы найти $(k+1)$ -ю итерацию y_{k+1} согласно (43), надо вычислить поправку w_k .

Оператор B_k может быть задан в явном виде, например,

$$B_k = R, \quad (44)$$

$$B_k = (E + \omega_k^{(1)} R_1) (E + \omega_k^{(2)} R_2), \quad (45)$$

где R_1 и R_2 — экономичные операторы, а $\omega_k^{(1)}$ и $\omega_k^{(2)}$ — итерационные параметры. С факторизованным оператором вида (45) мы встречались как в случае попеременно-треугольного метода (ПТМ), когда $R_1 = R_2^*$, $\omega_k^{(1)} = \omega_k^{(2)} = \omega$, так и в случае метода переменных направлений (МПН), когда $R_\alpha^* = R_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$, $R_1 R_2 = R_2 R_1$.

а) Вычисление поправки прямым методом. Пусть $B_k = R$, и система алгебраических уравнений $Rw = r_k$ решается одним из прямых методов (изложенных для эллиптических сеточных уравнений в § 1, пп. 2, 3, например — методом декомпозиции). При этом $\gamma_1 = c_1$, $\gamma_2 = c_2$. Выбирая чебышевские параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, получаем для числа итераций оценку

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \ln \frac{2}{\varepsilon}.$$

В случае разностных эллиптических задач из § 3, п. 7 $n_0(\varepsilon)$ не зависит от шага сетки, а общее число действий $O\left(\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right)$, если область G — прямоугольник и $h_1 = h_2 = h$ — шаг сетки.

б) Вычисление поправки итерационным методом. Для решения уравнения

$$Rw_k = r_k$$

применяем некоторый (внутренний) итерационный метод и полагаем

$$w^{(m)} = w_k,$$

где m — номер внутренней итерации.

Поскольку неявная двухслойная итерационная схема с самосопряженными операторами может быть сведена к явной, например, путем перехода от w к $R^{1/2}w$, то можно написать

$$R^{1/2}(w^{(m)} - w) = T_m R^{1/2}(w^{(0)} - w),$$

где w — точное решение уравнения $Rw = r_k$, а T_m — разрешающий оператор такой, что

$$T_m^* = T_m, \quad \|T_m\| \leq q < 1 \quad (46)$$

(зависимость q от m опускаем).

Выбирая начальное приближение

$$w^{(0)} = 0,$$

найдем $w = R^{-1/2}(E - T_m)^{-1}R^{1/2}w^{(m)}$. После подстановки этого выражения в $Rw = r_k$ получим $Bw_k = r_k$, где

$$B = R^{1/2}(E - T_m)^{-1}R^{1/2}, \quad w_k = w^{(m)}.$$

Поправка найдена и $y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}w_k$.

Чтобы применить общую теорию, надо убедиться в самосопряженности $B = B^*$ и вычислить постоянные γ_1 и γ_2 энергетической эквивалентности B и A .

Первое утверждение очевидно, так как $R^* = R$, $T_m^* = T_m$.
В силу (46) имеем

$$(1 - q)E \leq E - T_m \leq (1 + q)E,$$

$$(1 + q)^{-1}E \leq (E - T_m)^{-1} \leq (1 - q)^{-1}E,$$

$$(Bx, x) = (R^{1/2}(E - T_m)^{-1}R^{1/2}x, x) = ((E - T_m)^{-1}y, y),$$

где $y = R^{1/2}x$.

Отсюда сразу видно, что

$$(1 - q)B \leq R \leq (1 + q)B, \quad \text{т. е.} \quad \dot{\gamma}_1 = 1 - q, \quad \dot{\gamma}_2 = 1 + q$$

и, следовательно, $\gamma_1 = c_1(1 - q)$, $\gamma_2 = c_2(1 + q)$.

Для чебышевской схемы с этим оператором

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2(1+q)}{c_1(1-q)}} \ln \frac{2}{\varepsilon}, \quad \text{так как} \quad \xi = \frac{c_1}{c_2} \frac{1-q}{1+q}.$$

В качестве внутреннего итерационного процесса можно взять МПН из пп. 2, 3 § 4, если $R = R_1 + R_2$, $R_\alpha^* = R_\alpha > 0$, а $R_1 R_2 = R_2 R_1$. Величина q выбирается из условия минимума всей вычислительной работы для решения уравнения $Au = f$.

Если спектр R априори неизвестен, то целесообразно для определения поправки использовать итерационные методы вариационного типа. Можно применять и другие комбинации, на которых мы не имеем возможности останавливаться.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Некоторые сведения из функционального анализа

При изложении теории разностных схем мы пользуемся простейшими понятиями функционального анализа. Приведем здесь краткий перечень используемых нами сведений из теории линейных операторов.

1. Линейные операторы. Пусть X и Y —линейные нормированные пространства, \mathcal{D} —некоторое подпространство X . Если каждому вектору $x \in \mathcal{D}$ по определенному правилу сопоставлен вектор $y = Ax \in Y$, то говорят, что на \mathcal{D} (или в X) задан **оператор** A со значениями в Y . Множество \mathcal{D} называется **областью определения** оператора A и обозначается $\mathcal{D}(A)$. Множество всех векторов вида $y = Ax$, когда $x \in \mathcal{D}(A)$, называется **областью значений** оператора A и обозначается $\mathcal{R}(A)$. Иногда вместо Ax будем также писать $A(x)$.

Два оператора A и B называются **равными**, если области их определения совпадают и для всех $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ выполнено условие

$$Ax = Bx.$$

Оператор A называется **линейным**, если он

1) **аддитивен**, т. е. для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

2) **однороден**, т. е. для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ и любых чисел λ

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Линейный оператор A называется **ограниченным**, если существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\|Ax\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad (1)$$

для любых $x \in \mathcal{D}(A)$ (здесь $\|\cdot\|_1$ —норма в X , $\|\cdot\|_2$ —норма в Y). Наименьшая из постоянных M , удовлетворяющих условию (1), называется **нормой оператора** A и обозначается $\|A\|_{X \rightarrow Y}$ или просто $\|A\|$.

Из определения нормы следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \quad \text{или} \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}. \quad (2)$$

Отметим, что в конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен.

Всевозможные линейные ограниченные операторы, действующие из X в Y , образуют линейное нормированное пространство, так как норма $\|A\|$ оператора A удовлетворяет всем аксиомам нормы: 1) $\|A\| \geq 0$; если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\|_2 = 0$ для всех x и $A = 0$, 2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Будем обозначать через $(X \rightarrow X)$ множество линейных ограниченных операторов, область определения которых совпадает с X , а значения при-
надлежат X . На множестве $(X \rightarrow X)$ можно ввести произведение AB опера-
торов A и B , $(AB)x = A(Bx)$. Очевидно, что AB —линейный ограниченный

оператор: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Если $(AB)x = (BA)x$ для всех $x \in X$, то A и B называются *перестановочными* или *коммутативными*; в этом случае пишут $AB = BA$.

В связи с решением уравнений вида $Ax = u$ вводится понятие обратного оператора A^{-1} . Пусть A — оператор из X на Y , т. е. $\mathcal{D}(A) = X$, $\mathcal{R}(A) = Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует только один $x \in X$, для которого $Ax = y$, то этим соотношением определяется оператор A^{-1} , называемый *обратным* для A и имеющий область определения Y и область значений X . Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеем, из определения обратного оператора, тождество $A^{-1}(Ax) = x$, $A(A^{-1}y) = y$. Нетрудно показать, что если A линеен, то и A^{-1} (если он существует) также линеен.

Лемма 1. Для того чтобы аддитивный оператор A с $\mathcal{D}(A) = X$ и $\mathcal{R}(A) = Y$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $Ax = 0$ только при $x = 0$.

Теорема 1. Пусть A — линейный оператор из X на Y . Для того, чтобы обратный оператор A^{-1} существовал и был ограниченным (как оператор из Y на X), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $\delta > 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_2 \geq \delta \|x\|_1 \quad (\|\cdot\|_1 — норма в X , \|\cdot\|_2 — норма в Y). \quad (3)$$

При этом справедлива оценка $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.

2. Линейные ограниченные операторы в вещественном гильбертовом пространстве. Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Будем рассматривать ограниченные линейные операторы, заданные на H ($\mathcal{D}(A) = H$). Введем ряд определений. Оператор A будем называть:

1) *неотрицательным*, если

$$(Ax, x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in H, \quad (4)$$

2) *положительным*, если

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{для всех } x \in H, \text{ кроме } x = 0, \quad (5)$$

3) *полуограниченным снизу*, если

$$(Ax, x) \geq -c_* \|x\|^2 \quad \text{для любых } x \in H, \quad (6)$$

где c_* — положительное число,

4) *положительно определенным*, если

$$(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2 \quad \text{для любых } x \in H, \quad (7)$$

где $\delta > 0$ — число.

Пусть A — произвольный неотрицательный оператор, $x \in H$. Число (Ax, x) назовем *энергией* оператора A . Будем сравнивать операторы A и B по энергии. Если $((A-B)x, x) \geq 0$ для всех x , то будем писать $A \geq B$. Неравенства (4) — (7), в частности, можно заменить операторными неравенствами

$$\begin{aligned} A &\geq 0, & \text{т. е. } (Ax, x) \geq 0, \\ A &> 0, & \text{т. е. } (Ax, x) > 0, \\ A &\geq -c_* E, & \text{т. е. } (Ax, x) \geq -c_* \|x\|^2, \\ A &\geq \delta E, & \text{т. е. } (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где E — единичный оператор ($Ex = x$).

Нетрудно убедиться в том, что введенное на множестве линейных операторов ($H \rightarrow H$) отношение неравенства обладает следующими свойствами:

- 1) из $A \geq B$ и $C \geq D$ следует $A + C \geq B + D$,
- 2) из $A \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ следует $\lambda A \geq 0$,
- 3) из $A \geq B$ и $B \geq C$ следует $A \geq C$,
- 4) если $A > 0$ и A^{-1} существует, то $A^{-1} > 0$.

Если A —линейный оператор, заданный на H , то оператор A^* , также заданный на H , для которого при всех $x, y \in H$ выполнено равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y),$$

называется *сопряженным* к оператору A .

Если A —линейный ограниченный оператор, то сопряженный оператор определен однозначно и является линейным ограниченным оператором с нормой $\|A^*\| = \|A\|$.

Линейный ограниченный оператор A называется *самосопряженным* оператором, если $A^* = A$, т. е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для любых } x, y \in H.$$

Если A —любой линейный оператор, то A^*A и AA^* —самосопряженные неотрицательные операторы:

$$\begin{aligned} (A^*Ax, y) &= (Ax, Ay) = (x, A^*Ay), \\ (A^*Ax, x) &= \|Ax\|^2 \geq 0, \quad (AA^*x, x) = \|A^*x\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что $(A^*)^* = A$, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

В комплексном гильбертовом пространстве \tilde{H} из требования неотрицательности оператора A следует его самосопряженность:

$$\text{если } (Ax, x) \geq 0 \text{ для всех } x \in \tilde{H}, \text{ то } A = A^*.$$

Для вещественного пространства H это утверждение неверно. Поскольку мы рассматриваем только вещественное гильбертово пространство, то будем пользоваться операторными неравенствами и для несамосопряженных операторов.

Теорема 2. *Произведение AB двух перестановочных неотрицательных самосопряженных операторов A и B есть также неотрицательный самосопряженный оператор.*

Оператор B называется *квадратным корнем* из оператора A , если $B^2 = A$.

Теорема 3. *Существует единственный неотрицательный самосопряженный квадратный корень B из любого неотрицательного самосопряженного оператора A , перестановочный со всяkim оператором, перестановочным с A .*

Квадратный корень из оператора A будем обозначать через $A^{1/2}$.

Пусть A —положительный и самосопряженный линейный оператор. Вводя на линейной системе H скалярное произведение $(x, y)_A = (Ax, y)$ и норму $\|x\|_A = \sqrt{(x, x)_A}$, получим гильбертово пространство H_A , которое обычно называют *энергетическим пространством* H_A . Нетрудно показать, что скалярное произведение $(x, y)_A = (Ax, y)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения: 1) $(x, y)_A = (y, x)_A$, 2) $(x+y, z)_A = (x, z)_A + (y, z)_A$, 3) $(\lambda x, y)_A = \lambda (x, y)_A$, 4) $(x, x)_A > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x)_A = 0$ только при $x = 0$.

Аксиомы 2) и 3) выполняются в силу линейности, 4)—в силу положительности оператора A . Требование $(x, y)_A = (y, x)_A$ или $(Ax, y) = (x, Ay) = (Ay, x)$ означает самосопряженность оператора A и тоже выполнено. Из аксиом скалярного произведения следует неравенство Коши—Буняковского $|(x, y)_A| \leq \|x\|_A \|y\|_A$ и неравенство треугольника $\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$. Тем самым доказана

Лемма 2. *Для любого положительного самосопряженного оператора в вещественном гильбертовом пространстве справедливо обобщенное неравенство Коши—Буняковского*

$$(Ax, y)^2 \leq (Ax, x)(Ay, y). \quad (9)$$

Замечание. Это неравенство имеет место и в том случае, когда A —неотрицательный оператор.

Если A —самосопряженный положительный оператор и A^{-1} существует, то можно ввести «негативную» норму

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = (A^{-1}\varphi, \varphi)^{1/2}. \quad (10)$$

Покажем, что

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A}. \quad (10')$$

Действительно, из неравенства (9) имеем

$$|(\varphi, x)| = |(A^{-1}\varphi, Ax)| \leq \|\varphi\|_{A^{-1}} \|x\|_A.$$

Следовательно,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\varphi\|_{A^{-1}} \|x\|_A}{\|x\|_A} = \|\varphi\|_{A^{-1}}.$$

С другой стороны, если $x = A^{-1}\varphi$, то

$$\frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A} = \frac{(\varphi, A^{-1}\varphi)}{(A^{-1}\varphi, A^{-1}\varphi)^{1/2}} = \|\varphi\|_{A^{-1}},$$

что и доказывает эквивалентность (10) и (10').

Для нас в дальнейшем важную роль будут играть достаточные условия существования ограниченного обратного оператора A^{-1} , определенного во всем пространстве H , $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$.

Заметим, что лемма 1 и теорема 1 гарантируют существование обратного оператора, определенного лишь на $\mathcal{R}(A)$ —множестве значений оператора A , которое может не совпадать с H .

Если известно, что множество значений оператора A совпадает со всем пространством H , $\mathcal{R}(A) = H$, то выполнение условий леммы 1 или теоремы 1 обеспечивает существование оператора A^{-1} с $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$. В частности, положительный оператор A с $\mathcal{R}(A) = H$ имеет обратный A^{-1} с $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$, так как из условия $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$ следует, что $Ax \neq 0$ при $x \neq 0$ и потому применима лемма 1.

Теорема 4. Пусть A —линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , $\mathcal{D}(A) = H$. Для того чтобы оператор A имел обратный A^{-1} с областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$, необходимо и достаточно существование постоянной $\delta > 0$ такой, что при всех $x \in H$ выполняются неравенства

$$\|Ax\| \geq \delta \|x\|, \quad \|A^*x\| \geq \delta \|x\|.$$

При этом справедлива оценка $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.

Следствие. Пусть A —положительно определенный линейный ограниченный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A) = H$. Тогда существует ограниченный обратный оператор A^{-1} с $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$.

В самом деле, из $A \geq \delta E$, $\delta > 0$ следует

$$\begin{aligned} \|Ax\| \|x\| &\geq (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \\ \|A^*x\| \|x\| &\geq |(A^*x, x)| = |(x, Ax)| = (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \end{aligned}$$

т. е. $\|Ax\| \geq \delta \|x\|$, $\|A^*x\| \geq \delta \|x\|$ и выполнены условия теоремы 4. Для нормы обратного оператора имеем оценку $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.

Замечание. В конечномерном гильбертовом пространстве для существования обратного оператора A^{-1} достаточно требовать положительности оператора A , так как из условия $A > 0$ следует существование постоянной $\delta > 0$ такой, что $(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$ для всех x . Действительно, $(Ax, x) = (A^*x, x)$, где

$A_0 = (A + A^*)/2$ — самосопряженный оператор. Поэтому $(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$, где δ — наименьшее собственное значение оператора A_0 . Число δ не может равняться нулю в силу положительности оператора A .

Для простоты изложения в книге проведено в предположении конечномерности пространства H .

Напомним, что норма оператора A определяется так:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Если A — самосопряженный оператор, то имеет место формула

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}. \quad (11)$$

Лемма 3. *Если $S = S^*$ — линейный ограниченный оператор, $n > 0$ — целое число, то*

$$\|S^n\| = \|S\|^n. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда

$$\|S^2\| = \sup_{\|x\|=1} |(S^2x, x)| = \sup_{\|x\|=1} \|Sx\|^2 = \|S\|^2.$$

т. е. $\|S^2\| = \|S\|^2$.

Пусть формула (12) верна для $n = k - 1$ и $n = k$. Покажем, что она верна для $n = k + 1$, $k > 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|S^{2k}\| &= \sup_{\|x\|=1} |(S^{2k}x, x)| = \sup_{\|x\|=1} |(S^{k+1}x, S^{k-1}x)| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|S^{k+1}x\| \|S^{k-1}x\| \leq \|S^{k+1}\| \|S^{k-1}\|, \end{aligned}$$

т. е. $\|S^{k+1}\| \|S^{k-1}\| \geq \|S^{2k}\| = \|S^k\|^2 = \|S\|^{2k}$. Так как $\|S^{k-1}\| = \|S\|^{k-1}$ то отсюда следует $\|S^{k+1}\| \geq \|S\|^{k+1}$. С другой стороны, $\|S^{k+1}\| \leq \|S\|^{k+1}$. Таким образом, $\|S^{k+1}\| = \|S\|^{k+1}$. Так как формула (12) верна при $n = 1$ и $n = 2$, то она верна для любого n .

Лемма 4. *Если A — самосопряженный положительный и ограниченный оператор, то справедлива оценка*

$$\|Ay\|^2 \leq \|A\|(Ay, y). \quad (13)$$

Так как $A^* = A > 0$, то существует оператор $A^{1/2}$. Полагая $v = A^{1/2}y$, получим

$$(Ay, Ay) = (Av, v) \leq \|A\| \|v\|^2 = \|A\|(Ay, y).$$

3. Линейные операторы в пространстве конечного числа измерений. Рассмотрим n -мерное линейное пространство R_n со скалярным произведением $(,)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

По определению конечномерного пространства любой вектор $x \in R_n$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации $x = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n$ линейно независимых векторов ξ_1, \dots, ξ_n , образующих базис пространства R_n . Числа c_k называются координатами вектора x . В качестве базиса всегда можно выбрать ортогональную и нормированную систему векторов ξ_1, \dots, ξ_n , т. е. такую, что

$$(\xi_i, \xi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $c_k = (x, \xi_k)$.

Пусть A — линейный оператор, заданный на R_n . Каждому оператору A в базисе ξ_1, \dots, ξ_n соответствует матрица $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ размером $n \times n$, где a_{ik} — i -я компонента вектора $A\xi_k$.

Обратно, всякая матрица $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $i, k = 1, \dots, n$ определяет линейный оператор.

Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе есть симметричная матрица.

Остановимся на свойствах собственных значений и векторов линейного самосопряженного оператора A . Собственным значением оператора A называется такое число λ , что существует вектор $\xi \neq 0$, обладающий свойством $A\xi = \lambda\xi$. Этот вектор называется собственным вектором, принадлежащим (соответствующим) данному собственному значению λ .

1. Самосопряженный оператор A в R_n имеет n взаимно ортогональных собственных векторов ξ_1, \dots, ξ_n . Будем считать, что все ξ_k нормированы к единице. Тогда $(\xi_i, \xi_k) = \delta_{ik}$. Соответствующие собственные значения расположим в порядке возрастания их абсолютных величин: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.

2. Если линейный оператор A , заданный на R_n , имеет n взаимно ортогональных собственных векторов, то A — самосопряженный оператор, $A = A^*$.

3. Если $A^* = A \geq 0$, то все собственные значения оператора A неотрицательны.

4. Произвольный вектор $x \in R_n$ можно разложить по собственным векторам оператора $A = A^*$:

$$x = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k, \quad c_k = (x, \xi_k), \quad \text{причем } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

5. Пусть $A^* = A \geq 0$ (A самосопряжен и неотрицателен). Тогда $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$ и

$$\lambda_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq \lambda_n \|x\| \quad \text{для всех } x \in R_n,$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$ — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора A .

Норма самосопряженного неотрицательного оператора в R_n равна его наибольшему собственному значению, $\|A\| = \lambda_n$.

6. Если самосопряженные операторы A и B перестановочны, т. е. $AB = BA$, то они имеют общую систему собственных функций.

7. Пусть A и B — перестановочные ($AB = BA$), самосопряженные операторы. Тогда оператор AB имеет ту же систему собственных функций, что и операторы A и B , и собственные значения

$$\lambda_{AB}^{(k)} = \lambda_A^{(k)} \lambda_B^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\lambda_A^{(k)}$, $\lambda_B^{(k)}$ и $\lambda_{AB}^{(k)}$ — собственные значения номера k операторов A , B и $AB = BA$ соответственно. Имеют место также равенства $\lambda_{A+B}^{(k)} = \lambda_A^{(k)} + \lambda_B^{(k)}$.

§ 2. Некоторые варианты метода прогонки

1. Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. Рассмотрим вариант метода прогонки, применяемый при решении задач с сильно меняющимися коэффициентами. Примерами таких задач являются задачи гидродинамики с теплопроводностью и магнитной гидродинамики, где коэффициенты теплопроводности, электропроводности сильно зависят от термодинамических параметров среды. В случае тепловых задач могут иметь место адиабатические участки, где теплопроводность отсутствует, а также изотермические участки, где теплопроводность бесконечно велика. В магнитных задачах — соответственно, идеально проводящие и

неэлектропроводные участки. При решении разностных уравнений второго порядка, получающихся при аппроксимации этих задач, по обычным прогоночным формулам часто наблюдается значительная потеря точности. Избавиться от этого недостатка удается путем перехода к так называемому потоковому варианту метода прогонки. Формулы для этого варианта прогонки можно получить в результате преобразования формул обычной прогонки.

Итак, рассмотрим разностную краевую задачу

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$y_0 = x_1 y_1 + v_1, \quad y_N = x_2 y_{N-1} + v_2, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= a_{i+1} + a_i + d_i, \quad d_i > 0, \quad 0 \leq a_i \leq \infty, \\ 1 &\geq x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 < 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы обычной прогонки (см. гл. I, § 2, п. 5) для задачи (1)–(2) с учетом (3) принимают вид

$$\begin{aligned} y_i &= \dot{\alpha}_{i+1} y_{i+1} + \dot{\beta}_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \dot{\alpha}_{i+1} &= \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + a_i (1 - \dot{\alpha}_i) + d_i}, \\ \dot{\beta}_{i+1} &= \frac{a_{i+1}}{a_{i+1}} (a_i \dot{\beta}_i + f_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем новую неизвестную разностную функцию (поток) по формуле

$$w_i = a_i (y_{i-1} - y_i) \quad (5)$$

и перепишем уравнение (1) и краевые условия (2) в виде

$$w_i - w_{i+1} - d_i y_i = -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$a_1 (1 - x_1) y_1 + w_1 = a_1 v_1, \quad a_N (1 - x_2) y_N - x_2 w_N = a_N v_2. \quad (7)$$

В первую из формул (4) подставим значение y_i из (5):

$$y_i = y_{i+1} + w_{i+1} / a_{i+1}.$$

Тогда получим

$$a_{i+1} (1 - \dot{\alpha}_{i+1}) y_{i+1} + w_{i+1} = a_{i+1} \dot{\beta}_{i+1}. \quad (8)$$

Введя обозначения

$$\alpha_i = a_i (1 - \dot{\alpha}_i), \quad \gamma_i = a_i \dot{\beta}_i,$$

перепишем (8) следующим образом:

$$\alpha_i y_i + w_i = \gamma_i. \quad (9)$$

После исключения y_i из (6) и (9) получаем

$$w_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} w_{i+1} + \frac{d_i \gamma_i - \alpha_i f_i}{\alpha_i + d_i}. \quad (10)$$

Напишем рекуррентные формулы для определения α_i и γ_i :

$$\alpha_{i+1} = a_{i+1} (1 - \dot{\alpha}_{i+1}) = \frac{a_{i+1} [a_i (1 - \dot{\alpha}_i) + d_i]}{a_{i+1} + a_i (1 - \dot{\alpha}_i) + d_i}$$

или

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i + d_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}}, \quad (11)$$

$$\gamma_{i+1} = a_{i+1} \beta_{i+1} = \dot{\alpha}_{i+1} (a_i \beta_i + f_i) = \dot{\alpha}_{i+1} (\gamma_i + f_i) = \frac{a_{i+1} (\gamma_i + f_i)}{a_{i+1} + a_i (1 - \alpha_i) + d_i}$$

или

$$\gamma_{i+1} = \frac{\gamma_i + f_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}}. \quad (12)$$

Из сравнения первого краевого условия (7) с (9) при $i = 1$ находим

$$\alpha_1 = a_1 (1 - \kappa_1), \quad \gamma_1 = a_1 v_1. \quad (13)$$

Формулы (11), (12) удобны для счета при $a_i \gg 1$.

При $a_i \ll 1$ формулами (11) и (12) нужно пользоваться в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1} (\alpha_i + d_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}, \quad (11')$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{a_{i+1} (\gamma_i + f_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}. \quad (12')$$

При выполнении условий (3) из формул (11) и (11') следует, что $\alpha_i \geq 0$.

Тогда коэффициент $\alpha_i/(\alpha_i + d_i)$ в формуле (10) всегда меньше единицы, что обеспечивает устойчивость при вычислении w_i .

Для определения y_i можно воспользоваться следующими формулами

$$y_i = \dot{\alpha}_{i+1} y_{i+1} + \dot{\beta}_{i+1} = \left(1 - \frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}}\right) y_{i+1} + \frac{\gamma_{i+1}}{a_{i+1}} \quad (14)$$

при $a_i \gg 1$ и

$$y_i = \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + a_i + d_i} y_{i+1} + \frac{\gamma_i + f_i}{a_{i+1} + a_i + d_i} \quad (15)$$

при $a_i \ll 1$.

Из (14), (15) видно, что прогонка устойчива. Для счета по формулам (10), (14) и (15) нужно знать величины w_N и y_N . Они определяются из второго краевого условия (7) и соотношения (9), взятого при $i = N$:

$$y_N = \frac{a_N v_2 + \gamma_N \kappa_2}{a_N (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N}, \quad w_N = \frac{\gamma_N a_N (1 - \kappa_2) - \alpha_N a_N v_2}{a_N (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N}.$$

Отметим, что из (3) следует, что знаменатели этих двух выражений всегда больше нуля.

Приведем окончательные формулы алгоритма потоковой прогонки:

1) Вычисляем

$$\alpha_1 = a_1 (1 - \kappa_1), \quad \gamma_1 = a_1 v_1.$$

2) Для $i = 1, 2, \dots, N-1$ последовательно находим

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i + d_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}}, \quad \text{если } a_{i+1} \geq 1,$$

или

$$\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1}(\alpha_i + d_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}, \text{ при } a_{i+1} < 1,$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\gamma_i + f_i}{1 + (\alpha_i + d_i)/a_{i+1}}, \text{ если } a_{i+1} \geq 1,$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1}(\gamma_i + f_i)}{a_{i+1} + (\alpha_i + d_i)}, \text{ если } a_{i+1} < 1.$$

3) Определяем

$$y_N = \frac{v_2 + \gamma_N \kappa_2 / a_N}{1 - \kappa_2 + \kappa_2 \alpha_N / a_N} \text{ при } a_N \geq 1,$$

$$y_N = \frac{a_N v_2 + \gamma_N \kappa_2}{a_N (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N}, \text{ если } a_N < 1,$$

$$w_N = \frac{\gamma_N (1 - \kappa_2) - \alpha_N v_2}{1 - \kappa_2 + \kappa_2 \alpha_N / a_N}, \text{ если } a_N \geq 1,$$

$$w_N = \frac{\gamma_N (1 - \kappa_2) \alpha_N - \alpha_N v_2 a_N}{a_N (1 - \kappa_2) + \kappa_2 \alpha_N}, \text{ если } a_N < 1.$$

4) Для $i = N-1, N-2, \dots, 0$ вычисляем

$$w_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} w_{i+1} + \frac{d_i \gamma_i - \alpha_i f_i}{\alpha_i + d_i},$$

$$y_i = \left(1 - \frac{\alpha_{i+1}}{a_{i+1}}\right) y_{i+1} + \frac{\gamma_{i+1}}{a_{i+1}}, \text{ если } a_{i+1} \geq 1,$$

$$y_i = \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i} y_{i+1} + \frac{\gamma_i + f_i}{a_{i+1} + \alpha_i + d_i} \text{ при } a_{i+1} < 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Выше приведены формулы для определения не только функции y_i , но и потока w_i . При больших коэффициентах a_i вычисление потока по формуле $w_i = a_i (y_{i-1} - y_i)$ приводит к существенной потере точности. Это и послужило одной из причин введения потока w_i в качестве дополнительной искомой функции и вычисления его по рекуррентному соотношению (10).

З а м е ч а н и е 2. Устойчивость приведенных выше рекуррентных формул очевидна.

2. Циклическая прогонка. Циклическая прогонка используется для нахождения периодического решения разностного уравнения (или системы разностных уравнений). Подобные задачи возникают при приближенном решении уравнений с частными производными в цилиндрических и сферических координатах.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1 y_{i,N} - c_1 y_{i,1} + b_1 y_{i,2} &= -f_1, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} &= -f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 &= -f_N. \end{aligned} \tag{16}$$

Такая алгебраическая задача возникает при отыскании периодического, $y_{i+N} = y_i$, решения системы трехчленных уравнений $a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i$ при условии

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i.$$

Относительно коэффициентов системы (1) будем предполагать, что

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > a_i + b_i. \tag{17}$$

Приведем получающиеся формулы решения задачи (16) — формулы циклической прогонки:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \gamma_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{a_i \gamma_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad (18)$$

$$i = 2, 3, \dots, N, \quad \alpha_2 = b_2/c_1, \quad \beta_2 = f_1/c_1, \quad \gamma_2 = a_1/c_1,$$

$$\rho_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad (19)$$

$$i = N-2, \dots, 1, \quad p_{N-1} = \beta_N, \quad q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N,$$

$$y_N = \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1} p_1}{1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1}}, \quad y_i = p_i + y_N q_i, \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Метод циклической прогонки является устойчивым, так как решения задач (19) ищутся методом прогонки, который устойчив при выполнении условий (17), а знаменатель $1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1}$ в выражении для y_N не обращается в нуль. Действительно, из (17), (18) видно, что

$$\alpha_i < 1, \quad \gamma_i > 0, \quad \alpha_2 + \gamma_2 < 1.$$

Предполагая $\alpha_i + \gamma_i < 1$, получаем

$$\alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} = \frac{b_i + a_i \gamma_i}{c_i - a_i \alpha_i} < \frac{b_i + a_i - a_i \alpha_i}{c_i - a_i \alpha_i} < 1. \quad (21)$$

Учитывая (19) и (21), находим $q_{N-1} < 1$, $q_i < 1$. Из всего сказанного следует, что $1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1} > 0$.

3. Метод факторизации разностного уравнения. Формулы прогонки для решения разностной краевой задачи

$$Ly_k = A_k y_{k-1} - C_k y_k + B_k y_{k+1} = -F_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (22)$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + v_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + v_2$$

могут быть получены путем факторизации разностного уравнения.

Вводя оператор сдвига T так, что $Ty_k = y_{k+1}$, представим левую часть уравнения (22) в виде произведения

$$(b_k T - A_k)(\alpha_k T - E)y_{k-1} = (b_k T - A_k)(\alpha_k y_k - y_{k-1}) =$$

$$= b_k \alpha_{k+1} y_{k+1} - (A_k \alpha_k + b_k) y_k + A_k y_{k-1},$$

где E — единичный оператор, $Ey_k = y_k$. Сравнивая это выражение с (22), получим

$$\alpha_{k+1} b_k = B_k, \quad A_k \alpha_k + b_k = C_k.$$

После исключения отсюда $b_k = C_k - A_k \alpha_k$ найдем

$$\alpha_{k+1} = \frac{B_k}{C_k - A_k \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (23)$$

Решение факторизованного уравнения

$$(b_k T - A_k)(\alpha_k y_k - y_{k-1}) = -F_k$$

находится так: сначала из уравнения

$$(b_k T - A_k) \beta_k = b_k \beta_{k+1} - A_k \beta_k = F_k$$

или :::

$$\beta_{k+1} = \frac{A_k \beta_k + F_k}{C_k - A_k \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (24)$$

определяется функция β_k , затем находим y_k по формуле $\alpha_k y_k - y_{k-1} = -\beta_k$ или

$$y_k = \alpha_{k+1} y_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (25)$$

В результате получаем формулы обычной прогонки (см. гл. I, § 2, п. 5). К формулам (23)–(25) следует добавить начальные условия

$$\alpha_1 = x_1, \quad \beta_1 = v_1, \quad y_N = \frac{\kappa_2 \beta_N + v_2}{1 - \kappa_2 \alpha_N}. \quad (26)$$

Если ввести операторы правой и левой разностей $\Delta v_k = v_{k+1} - v_k$, $\nabla v_k = v_k - v_{k-1}$, то факторизацию оператора

$$Ly_k = A_k y_{k-1} - C_k y_k + B_k y_{k+1}$$

можно осуществить, полагая

$$L = L_1 L_2, \quad \text{где} \quad L_1 = b_k \Delta + \gamma_k, \quad L_2 = \nabla + (\alpha_k - 1).$$

Равенство $L_1 L_2 y_k = Ly_k$ будет выполнено, если положить

$$\gamma_k = b_k - A_k, \quad \alpha_{k+1} b_k = B_k, \quad A_k \alpha_k + B_k / \alpha_{k+1} = C_k,$$

что снова приводит нас после исключения γ_k и b_k к тем же формулам прогонки (23)–(26).

§ 3. Задачи

1. Задачи к главе VI. Для иллюстрации общей теории устойчивости мы приведем ряд простейших разностных схем для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t \leq t_0, \quad 0 < x < 1; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad 0 \leq x_\alpha \leq 1, \quad \alpha = 1, 2; \quad u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \quad (2)$$

с нулевыми граничными условиями.

Предварительно напомним правила, которыми следует руководствоваться при исследовании конкретных разностных схем.

1) Вводится пространство H_h сеточных функций, заданных на сетке ω_h и удовлетворяющих однородным граничным условиям (в случае первой краевой задачи — обращающихся в нуль на границе γ_h сетки), определяется скалярное произведение (.,).

2) Разностная схема приводится к каноническому виду. Двухслойная схема имеет канонический вид

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A y^j = \varphi^j. \quad (3)$$

Трехслойная схема имеет канонический вид

$$B \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} + A y^j = \varphi^j. \quad (4)$$

При этом определяются операторы B , R и A схемы.

Каноническая форма записи схем удобна не только для проверки устойчивости, но и для оценки порядка аппроксимации.

3) После того, как операторы схемы найдены, исследуются их свойства как линейных операторов в пространстве H_h (положительность, самосопряженность и т. д.).

4) Проверяется выполнение достаточных условий устойчивости для данной схемы. Эти условия имеют вид:

а) для двухслойных схем

$$B > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0,5\tau A \quad (5)$$

(устойчивость в H_A), либо

$$B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0,5\tau A \quad (6)$$

(устойчивость в H_B и H_A).

б) для трехслойных схем

$$B \geq 0, \quad R = R^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad (7)$$

$$R > \frac{1}{4}A, \quad (8)$$

или $R \geq \frac{1+\epsilon}{4}A$, где $\epsilon > 0$ — любое число.

5) Если достаточные условия устойчивости для данной схемы выполнены, то она устойчива и для нее можно пользоваться априорными оценками, полученными в гл. VI.

Сделаем некоторые замечания. Следует обратить внимание на возможность использования другой формы записи двухслойных схем

$$By'^{+1} = Cy' + \tau\varphi', \quad \text{где } C = B - \tau A, \quad A = (B - C)/\tau \quad (9)$$

и трехслойных схем

$$B_0y'^{+1} + B_1y' + B_2y'^{-1} = 2\tau\varphi'. \quad (10)$$

Сравнивая (4) и (10), находим

$$B_0 = B + 2\tau R, \quad B_1 = 2\tau(A - 2R), \quad B_2 = 2\tau R - B, \quad (11)$$

$$R = \frac{1}{4\tau}(B_0 + B_2), \quad A = \frac{1}{2\tau}(B_0 + B_1 + B_2), \quad B = \frac{1}{2}(B_0 - B_2). \quad (12)$$

Достаточные условия устойчивости (5) эквивалентны условиям

$$(B - C) = (B - C)^* > 0, \quad B + C \geq 0. \quad (13)$$

Для трехслойной схемы (4) или (10) условия (7), (8) эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} B_0 + B_2 &= (B_0 + B_2)^*, \quad B_1 = B_1^*, \quad B_0 - B_2 \geq 0, \\ B_2 - B_1 + B_0 &> 0, \quad B_2 + B_1 + B_0 > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В ряде случаев удобно пользоваться записью схем (3) и (4) в виде (9) и (10), после чего проверять достаточные условия устойчивости (13) и (14) соответственно.

Напомним достаточные условия (вытекающие из условий (5) или (8)) устойчивости схем с весами.

Пусть дана двухслойная схема с весами

$$\frac{y'^{+1} - y'}{\tau} + A(\sigma y'^{+1} + (1 - \sigma)y') = \varphi'. \quad (15)$$

где $A > 0$ — несамосопряженный оператор. Тогда схема устойчива при $\sigma \geq 0,5$. Если, кроме того, дано, что

$$\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x), \quad (16)$$

то схема устойчива в H при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \Delta}. \quad (17)$$

Наконец, если $A = A^* > 0$ и A — постоянный оператор, то $\Delta = \|A\|$ и схема (15) устойчива в H и H_A при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}. \quad (18)$$

Для трехслойной схемы с весами

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} + A(\sigma_1 y^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y^j + \sigma_2 y^{j-1}) = \varphi^j, \quad (19)$$

где $A > 0$ — несамосопряженный оператор, $\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x)$, достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau \Delta}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (20)$$

Обратимся теперь к схемам для уравнений (1) и (2). На отрезке $0 \leq x \leq 1$ вводится равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

с шагом $h = 1/N$. Пусть H_h — пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе (при $x=0, x=1$),

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

— скалярное произведение и норма в H_h .

В случае задачи (2) в квадрате вводим сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h); \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\}$$

и пространство H_h функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $i_1=0, i_1=N, i_2=0, i_2=N$ со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i_1, i_2=1}^{N-1} y_{i_1, i_2} v_{i_1, i_2} h^2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В следующих задачах требуется привести к каноническому виду и указать условия устойчивости разностных схем.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{12} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{y_{i-1}^{j+1} - y_{i-1}^j}{\tau} = \\ & = \frac{1}{2h^2} [(y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) + (y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j)]. \end{aligned}$$

Ответ. $y_t - \sigma \tau \Delta y_t = \Lambda y$, или

$$(E + \sigma \tau A) y_t + A y = 0,$$

где $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, $\Delta y = y_{xx}$, $Ay = -\Lambda y$.

Схема устойчива в H при любых h и τ и имеет погрешность аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Указание. Следует преобразовать левую часть уравнения, для чего воспользоваться соотношениями

$$v_{t+1} - 10v_t + v_{t-1} = (v_{t+1} - 2v_t + v_{t-1}) + 12v_t = h^2 \Lambda v_t + 12v_t,$$

$$v^{t+1} = v^t + \tau v_t^t.$$

$$2. (1+\theta) \frac{y_t^{t+1} - y_t^t}{\tau} - \theta \frac{y_t^t - y_{t-1}^{t-1}}{\tau} = \Lambda y_t^{t+1}.$$

Ответ. $(E - \tau \Lambda) y_t^t + \left[(0,5 + 0) \tau E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda \right] y_{t-1}^t = \Lambda y_t^t$.

Схема устойчива при $\theta > -\frac{1}{2} - \frac{\tau \delta}{4}$, $\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$.

Указание. Сравнение с (4) дает

$$B = E + \tau A, \quad R = \frac{1}{2} A + \frac{1+2\theta}{2\tau} E.$$

Отсюда следует

$$R - \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} A + \frac{1+2\theta}{2\tau} E \geq \left(\frac{1}{4} \delta + \frac{1+2\theta}{2\tau} \right) E > 0$$

при $0 > -\frac{1}{2} - \tau \delta / 4$, так как $A \geq \delta E$.

$$3. 2\gamma y_t^{t+1} = (\gamma - 0,5) (y_{t-1}^{t+1} + y_{t+1}^{t+1}) + 0,5 (y_{t-1}^t + y_{t+1}^t), \quad \gamma = \tau / h^2.$$

Ответ. $(E - \sigma \tau \Lambda) y_t^t = \Lambda y_t^t$, $\sigma = 1 - 1/(2\gamma)$.

Схема устойчива при $\gamma \geq 0,5$ и имеет погрешность аппроксимации $O(h^2 + \tau)$

$$4. y_t^{t+1} = \frac{1}{5+6\gamma} [(3\gamma - 0,5) (y_{t-1}^{t+1} + y_{t+1}^{t+1}) + (5 - 6\gamma) y_t^t + (3\gamma + 0,5) (y_{t-1}^t + y_{t+1}^t)],$$

$$\gamma = \tau / h^2.$$

Ответ. Та же схема, что и в задаче 1.

$$5. y_{t,k}^{t+1} = \frac{1}{\omega + \alpha + \beta} [\alpha y_{t+1,k}^{t+1} + \beta y_{t,k+1}^{t+1} + (1 - \alpha) y_{t+1,k}^t +$$

$$+ (1 - \beta) y_{t,k+1}^t - (4 - \omega - \alpha - \beta) y_{t,k}^t + y_{t-1,k}^t + y_{t,k-1}^t],$$

$$\omega = h^2 / \tau.$$

Ответ $y_t^t - \frac{\tau}{h} (\alpha y_{x,t}^t + \beta y_{x,t}^t) = \Lambda y_t^t$, где $\Lambda y = y_{x_1}^t + y_{x_2}^t$. Условие устойчивости $\alpha + \beta \geq 2 - 0,5h^2 / \tau$. Если $\alpha = O(1)$, $\beta = O(1)$, $\tau / h \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, то схема аппроксимирует уравнение (2) с погрешностью $O(\tau + h^2 + \tau / h)$.

$$6. y_t^{t+1} = \left(\frac{7}{6} - 3\gamma \right) y_t^t + \frac{1}{2} \left(3\gamma - \frac{1}{6} \right) (y_{t-1}^t + y_{t+1}^t) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{6} \right) (y_{t-1}^{t-1} - 2y_t^{t-1} + y_{t+1}^{t-1}), \quad \gamma = \tau / h^2.$$

Ответ. $E y_t^t + \tau^2 R y_{t,t}^t + A y = 0$, где

$$B = E - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6\gamma} - 1 \right) \tau A, \quad R = \frac{1}{2\tau} E + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6\gamma} - 1 \right) A, \quad A y = -y_{xx}^t.$$

Схема устойчива при $\gamma \leq 1/3$.

$$7. 10y_i^{j+1} = 3(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + 2(y_i^j + y_i^{j-1}), \quad \tau = h^2/4.$$

Ответ. $y_j + \frac{\tau}{3} y_{-j} = \Lambda y$. Схема устойчива.

$$8. y_i^{j+1} = \frac{1}{40} [2y_i^{j-1} + 32y_i^j + 3(y_{i-1}^{j-1} + y_{i+1}^{j-1})], \quad \tau = h^2/16.$$

Ответ. Схема приводится к виду (4) с

$$B = E - \tau A, \quad R = \frac{1}{3\tau} E + 0.5A, \quad Ay = -y_{xx}$$

и устойчива.

$$9. y_{i,k}^{j+1} - \frac{1}{4} (y_{i-1,k}^{j+1} + y_{i+1,k}^{j+1}) = \frac{1}{4} (y_{i,k-1}^j + y_{i,k+1}^j), \quad \tau = 0.5h^2.$$

Ответ. Схема имеет канонический вид (3), где $A = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$, $B = E - \tau \Lambda_1$, $\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, устойчива и аппроксимирует уравнение (2) с погрешностью $O(\tau + h^2) = O(h^2)$.

$$10. \frac{1}{12} \frac{1.5y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + 0.5y_{i+1}^{j-1}}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{1.5y_i^{j+1} - 2y_i^j + 0.5y_i^{j-1}}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{1.5y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + 0.5y_{i-1}^{j-1}}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1}.$$

Ответ. Схема имеет вид (4), где

$$B = E + \left(1 - \frac{h^2}{12\tau}\right) \tau A, \quad R = \frac{1}{\tau} E + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}\right) A, \quad Ay = -y_{xx}.$$

абсолютно устойчива, погрешность аппроксимации на решении уравнения (1) равна $O(\tau^3 + h^4)$.

Указание. Воспользоваться соотношением

$$\frac{3}{2} v^{j+1} - 2v^j + \frac{1}{2} v^{j-1} = \tau v_j^j + \tau^2 v_{\frac{j}{2}}^j.$$

11. Рассмотрим задачу для системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{ij} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u^{(i)}(0, t) = 0, \quad u^{(i)}(1, t) = 0, \quad u^{(i)}(x, 0) = u_0^{(i)}(x).$$

Известно, что

$$c_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i, j=1}^n k_{ij} \xi_i \xi_j \leq c_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad c_1 > 0.$$

Пусть

$$\Lambda_{ij} y^{(j)} = (a_{ij} y_{\frac{j}{2}}^{(j)})_x, \quad a_{ij}(x_i, t) = k_{ij}(x_{i-1/2}, t),$$

$$\Lambda^0 y^{(i)} = y_{xx}^{(i)}, \quad R y^{(i)} = -\sigma \Lambda^0 y^{(i)}, \quad \sigma > \frac{c_2}{4}.$$

$$Ay^{(i)} = -\sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} y^{(j)}.$$

Показать, что схема

$$\frac{y^{(i)}}{t} + \tau^2 R \frac{y^{(i)}}{t^2} + A y^{(i)} = 0$$

- а) устойчива при любых h и τ ,
 б) имеет точность $O(h^2 + \tau^2)$.

2. Задачи к главе IX. Здесь будут рассмотрены примеры экономичных методов для решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad p = 2, 3,$$

в цилиндре $\bar{G} \times [0 \leq t \leq t_0]$, где \bar{G} — прямоугольник

$$(0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$$

при $p = 2$ или параллелепипед

$$(0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3)$$

при $p = 3$. На границе Γ области G задано краевое условие первого рода

$$u|_\Gamma = \mu(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p).$$

В \bar{G} вводится сетка $\bar{\omega}_h$, равномерная по каждому направлению x_α ($\alpha = 1, \dots, p$) с шагом h_α ; пусть γ_h, α — множество граничных узлов при $x_\alpha = 0, x_\alpha = l_\alpha$. Как обычно, обозначаем $\Lambda_\alpha y = y_{-x_\alpha x_\alpha}$.

Пусть H_h — пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе γ_h сетки,

$$(y, v) = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} y(x) v(x) h_1 \dots h_p,$$

где суммирование проводится по внутренним узлам $x \in G$ сетки. На отрезке $0 \leq t \leq t_0$ введена равномерная сетка с шагом τ .

Будем рассматривать здесь только те экономичные схемы, которые эквивалентны факторизованной схеме.

Требование эквивалентности, как мы отмечали, означает, что для промежуточных значений $y^{i+\alpha/p}$ краевые условия на γ_h, α должны быть заданы специальным образом.

Следует иметь в виду, что при изучении устойчивости мы предполагаем, что $y|_{\gamma_h} = 0$. Только при этом условии можно рассматривать $y(x)$ как элемент пространства H_h .

Если дан какой-либо экономичный метод, то надо: а) исключить промежуточные значения и написать факторизованную схему, б) сформулировать краевые условия для $y^{i+\alpha/p}$, при которых имеет место эквивалентность этой схемы, соответствующей факторизованной схеме, в) оценить порядок аппроксимации, г) исследовать устойчивость факторизованной схемы (пользуясь общей теорией).

В каждой задаче требуется выполнить все четыре пункта.

При изучении устойчивости факторизованной схемы

$$By_t + Ay = \Phi,$$

где $B = B_1 \dots B_p$, $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$, рекомендуется использовать следующий критерий. Если схема с $B = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$ устойчива и операторы R_α положительные, самосопряженные и попарно перестановочные, то факторизованная схема с $B = B_1 \dots B_p$ также устойчива.

$$1. \frac{y^{J+1/2} - y^J}{\tau} = \Lambda_1 y^{J+1/2} + \Lambda_2 y^J, \quad \frac{y^{J+1} - y^{J+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{J+1} - y^J)$$

(схема Дугласа — Рекфорда).

Ответ. а) $(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2)y_t = \Lambda y$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. б) $y^{J+1/2} = \mu^{J+1} - \tau \Lambda_2 (\mu^{J+1} - \mu^J)$ при $x_1 = 0$, l_1 , $y^{J+1} = \mu^{J+1}$ при $x_2 = 0$, l_2 . в) Схема имеет аппроксимацию $O(|h|^2 + \tau)$. г) Схема устойчива.

Указание. Приведем схему к виду

$$(E - \tau \Lambda_1) \frac{y^{J+1/2} - y^J}{\tau} = \Lambda y^J, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (E - \tau \Lambda_2) \frac{y^{J+1} - y^{J+1/2}}{\tau} = \frac{y^{J+1/2} - y^J}{\tau}.$$

Отсюда сразу исключаем $y^{J+1/2} - y^J$ и получаем факторизованную схему. Краевое условие для $y^{J+1/2}$ следует из второго уравнения.

$$2. \frac{y^{J+1/2} - y^J}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{J+1/2} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^J + \Lambda_2 y^J, \\ \frac{y^{J+1} - y^{J+1/2}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 (y^{J+1} - y^J).$$

Ответ. а) $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1)(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2)y_t = \Lambda y$.

б) $y^{J+1/2} = \mu^{J+1} - \tau \sigma_2 \Lambda_2 (\mu^{J+1} - \mu^J)$ при $x_1 = 0$, l_1 .

в) Схема имеет аппроксимацию

$$O(\tau^2 + |h|^2) + O(|\sigma_1 - 0.5| \tau) + O(|\sigma_2 - 0.5| \tau),$$

т. е. $O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$.

г) Схема устойчива при

$$\sigma_1 \sigma_2 \geq 0 \text{ и } \sigma_\alpha \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau \|A_\alpha\|}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Схема абсолютно устойчива при $\sigma_\alpha \geq 0.5$.

Указание. г) Пусть $y|_{V_h} = 0$. Тогда $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$, $A = A_1 + A_2$, A_1 и A_2 — положительно определенные, самосопряженные и перестановочные операторы, так что $A_1 A_2 > 0$. В данном случае

$$B = (E + \sigma_1 \tau A_1)(E + \sigma_2 \tau A_2) = E + \sigma_1 \tau A_1 + \sigma_2 \tau A_2 + \sigma_1 \sigma_2 \tau^2 A_1 A_2, \\ B - 0.5 \tau A = E + (\sigma_1 - 0.5) \tau A_1 + (\sigma_2 - 0.5) \tau A_2 + \sigma_1 \sigma_2 \tau^2 A_1 A_2 \geq \\ \geq E + (\sigma_1 - 0.5) \tau A_1 + (\sigma_2 - 0.5) \tau A_2,$$

так как $\sigma_1 \sigma_2 \geq 0$. Учитывая затем, что $E \geq A_\alpha / \|A_\alpha\|$, и требуя

$$0.5E + (\sigma_\alpha - 0.5) \tau A_\alpha \geq \left(\frac{1}{2 \|A_\alpha\|} + (\sigma_\alpha - 0.5) \tau \right) A_\alpha \geq 0,$$

получаем $\sigma_\alpha \geq 0.5 - \frac{1}{2\tau \|A_\alpha\|}$.

$$3. \quad \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{j+1/2} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^j + (\Lambda_2 + \Lambda_3) y^j,$$

$$\frac{y^{j+2/2} - y^{j+1/2}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 (y^{j+2/2} - y^j),$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+2/2}}{\tau} = \sigma_3 \Lambda_3 (y^{j+1} - y^j)$$

(при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,5$ — схема Дугласа).

Ответ. а) $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) (E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) y_t = \Lambda y$, $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha}$;

б) $y^{j+1/2} = \mu^j + \tau (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) (E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) \mu_t^j$ при $x_1 = 0$, l_1 , $y^{j+2/2} = \mu^{j+1} - \tau^2 \sigma_3 \Lambda_3 \mu_t^j$ при $x_2 = 0$, l_2 . в) Схема имеет аппроксимацию $O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,5$, $O(|h|^2 + \tau)$ при $\sigma_{\alpha} \neq 0,5$, $\alpha = 1, 2, 3$. г) Схема устойчива при $\sigma_{\alpha} \geq 0,5$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Указание. а) Обозначим

$$w_{\alpha} = (y^{j+\alpha/2} - y^j)/\tau.$$

Тогда уравнения записутся в виде

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) w_1 = \Lambda y^j, \quad (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) w_2 = w_1, \quad (E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) w_3 = w_2.$$

Последовательно исключая отсюда w_2 и w_1 и заменяя $w_3 = (y^{j+1} - y^j)/\tau$, получим искомую факторизованную схему.

$$4. \quad \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{j+1/2} + (1 - \sigma_2) \Lambda_2 y^j,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 y^{j+1} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^{j+1/2}.$$

Показать, что при $\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{h_{\alpha}^2}{12\tau}$, $\alpha = 1, 2$, эта схема имеет аппроксимацию $O(|h|^4 + \tau^2)$.

Ответ. а) $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda_1 \Lambda_2 y$, б) $y^{j+1/2} = \sigma_1 \mu^{j+1} - \sigma_1 \sigma_2 \tau \Lambda_2 \mu^{j+1} + (1 - \sigma_1) \mu^j + (1 - \sigma_1) (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2 \mu^j$ при $x_1 = 0$, l_1 .

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$, то $y^{j+1/2} = 0,5 (\mu^j + \mu^{j+1}) - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \mu_t^j$ при $x_1 = 0$, l_1 . в) Схема при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ имеет точность $O(|h|^2 + \tau^2)$, а при $\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{h_{\alpha}^2}{12\tau}$ — точность $O(|h|^4 + \tau^2)$. г) Схема устойчива при $\sigma_{\alpha} \geq 0,5$ и $\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{h_{\alpha}^2}{12\tau}$.

Указание. а) Перепишем уравнения в виде

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} = (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j,$$

$$(E + (1 - \sigma_1) \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} = (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1}.$$

Умножая второе уравнение на σ_1 , первое — на $(1 - \sigma_1)$ и складывая их, получим

$$y^{j+1/2} = \sigma_1 (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1} + (1 - \sigma_1) (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j.$$

Подставим это выражение в первое уравнение и после очевидных преобразований получим

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1} = (E + (1 - \sigma_1) \tau \Lambda_1) (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j$$

(при этом перестановочность Λ_1 и Λ_2 не используется). б) Краевое условие при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ следует из полученной выше формулы для $y^{j+1/2}$. в) Погрешность аппроксимации схемы при $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$ исследована И. В. Фрязиновым (ЖВМ и МФ, т. 9, № 6 (1969)).

Замечание. Эта схема имеет точность $O(|h|^4 + \tau^2)$ в случае, когда область G — ступенчатая, т. е. составлена из прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, причем не только для первой краевой задачи, но и для третьей краевой задачи.

$$5. \quad \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \frac{1}{3} [\Lambda_1 y^{j+1/2} + (\Lambda_2 + \Lambda_3) y^j],$$

$$\frac{y^{j+2/3} - y^{j+1/2}}{\tau} = \frac{1}{3} [\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+2/3} + \Lambda_3 y^{j+1/2}],$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+2/3}}{\tau} = \frac{1}{3} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) y^{j+2/3} + \Lambda_3 y^{j+1}].$$

Ответ. Схема не является безусловно устойчивой (см. [15]). Факторизованная схема имеет вид

$$B_1 B_2 B_3 y^{j+1} = C_1 C_2 C_3 y^j,$$

где $B_\alpha = E - \frac{1}{3} \tau \Lambda_\alpha$, $C_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{3} \Lambda$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$.

$$6. \quad (E - \sigma \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} = (E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_1) (E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_2) y^j,$$

$$(E - \sigma \tau \Lambda_2) y^{j+1} = y^{j+1/2}$$

Ответ. а) $(E - \sigma \tau \Lambda_1) (E - \sigma \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y - (2\sigma - 1) \tau \Lambda_1 \Lambda_2 y$. б) $y^{j+1/2} = (E - \sigma \tau \Lambda_2) y^{j+1}$ при $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$. в) $O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0,5$. г) Схема устойчива при $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h_1^2 h_2^2}{4\tau(h_1^2 + h_2^2)}$.

$$7. \quad \left(E - \frac{2\tau}{3} \Lambda_1 \right) y^{j+1/2} = \frac{4}{3} y^j - \frac{1}{3} y^{j-1}, \quad \left(E - \frac{2\tau}{3} \Lambda_2 \right) y^{j+1} - y^{j+1/2}.$$

Ответ. а) $\left(E - \tau \Lambda + \frac{2\tau^2}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) y_t + \tau^2 \left(\frac{1}{\tau} E - \frac{1}{2} \Lambda + \frac{\tau}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) y_{tt} = \Lambda y - \frac{2\tau}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 y$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. б) $y^{j+1/2} = \mu^{j+1} - \frac{2\tau}{3} \Lambda_2 \mu^{j+1}$ при $x_1 = 0$, l_1 . в) $O(|h|^2 + \tau)$. г) Схема устойчива при любых h_α и τ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

К гл. I, § 1. Изложение следует книге [14]; понятие обобщенного решения см. [2], [5].

К гл. I, § 2. Необходимые сведения из линейной алгебры можно найти в книгах: В. А. Ильин и Э. Г. Позяк, Введение в линейную алгебру, «Наука», М., 1974; В. В. Воеводин, Линейная алгебра, «Наука», М., 1975.

§ 2, п. 5. Метод прогонки предложен в начале 50-х годов независимо большим числом авторов, литературные ссылки см., например, в [10] (гл. I, § 2, п. 9), [6], [7], а также в книге: В. Н. Фаддеев и Д. К. Фаддеев, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963, где показано, что метод прогонки является реализацией метода исключения Гаусса для трехдиагональной матрицы.

К гл. II, § 2. Понятие устойчивости разностной схемы в современном виде впервые введено А. Ф. Филипповым (ДАН СССР 100, 6(1955)); см. также [8], [10], [11].

К гл. II, § 3. Более подробные сведения о математическом аппарате теории разностных схем можно найти в гл. V и VI книги [13]. В гл. II и IV этой книги даны другие примеры разностных аппроксимаций простейших дифференциальных операторов второго и четвертого порядка.

К гл. III. Подробное изложение теории однородных разностных схем дано в работе А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (ЖВМ и МФ 1, № 1, (19 1)), в которой (см. также [13]) показана необходимость свойства консервативности для сходимости однородной схемы в классе разрывных коэффициентов. Соответствующая литература указана в [10]. Интегро-интерполяционный метод предложен А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским в начале 50-х годов и развивался в их работах, обзор которых дан в статье в ЖВМ и МФ 1, № 1 (1961) и в [10], а также в работах Г. И. Марчука (см., например, книгу: Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1961), И. В. Фрязинова и др.

К гл. III, § 8. Методы построения разностных схем см. также в [13]. Там же приведены примеры получения с помощью метода конечных элементов (вариационно-сеточного метода) разностных схем для уравнений четвертого порядка.

К гл. IV, §§ 1, 4. Аппроксимация уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат рассматривается в [13]. Там же можно найти аппроксимацию краевых задач второго и третьего рода для уравнений с переменными коэффициентами на неравномерных сетках, а также схемы повышенного порядка точности. В [13], гл. IV построены разностные схемы для эллиптических уравнений четвертого порядка с краевыми условиями и условиями сопряжения различного вида, а в качестве приложений рассматриваются задачи теории упругости (о равновесии стержней и пластин).

К гл. IV, § 2. Изложение принципа максимума см. в [9], [10], [11], а также в [13].

К гл. V, §§ 1, 2. Теория устойчивости двухслойных схем общего вида, в том числе схем с весами, дана в гл. VI. Об асимптотической устойчивости см. [11].

К гл. V, §§ 4, 5. См. [11].

К гл. V, § 6, п. 3. Условие устойчивости $\tau \leq h/a$ было впервые получено в работе Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви (см. УМН, вып. 8 (1940)).

§ 6, п. 4. Этот пункт содержит результаты, полученные М. Н. Москальковым (ЖВМ и МФ 14, № 2 (1974); 15, № 1 (1975)). Используемое понятие обобщенного решения дано в [14].

К гл. VI. Более полная общая теория устойчивости разностных схем дана в [11], где содержится большое число примеров, а также обзор работ по теории устойчивости разностных схем. Изложение гл. VI основано на работах А. А. Самарского и А. В. Гулина. Асимметричные схемы (§ 2, п. 12) были предложены В. К. Саульевым в 1960 г.

К гл. VII. Изложение основано на работах А. А. Самарского, перечень которых дан в [10].

К гл. VIII, § 1, п. 5. См. А. А. Самарский (ЖВМ и МФ 2, № 1, (1962)).

§ 1, п. 6. Схемы сквозного счета для температурных волн см. в статье А. А. Самарского и И. М. Соболя (ЖВМ и МФ 3, № 4 (1963)).

Алгоритм § 1, п. 7 излагается по работе А. А. Самарского, Б. Д. Моисеенко (ЖВМ и МФ 5, № 5 (1965)); см. также: Б. М. Будак, Е. Н. Соловьева, А. Б. Успенский (ЖВМ и МФ 5, № 5 (1965)).

К гл. VIII, § 2. Изложение разностных методов решения одномерных нестационарных задач газодинамики и магнитной гидродинамики можно найти в [12]. Доказательство сходимости метода Ньютона для разностных уравнений газодинамики, приведенное в книге, дано в статье Ю. П. Попова и Е. А. Самарской (ЖВМ и МФ 17, № 1 (1977)).

К гл. IX, §§ 1, 2. Экономичным методам решения многомерных задач посвящено большое число работ, ссылки на которые можно найти в [10], [6], [15]. Первые экономичные схемы — схемы переменных направлений были предложены Писменом и Рэкфордом, Дугласом (1955) и В. К. Саульевым (1956). Н. Н. Яненко (1959) впервые предложил аппроксимировать многомерную разностную схему для уравнения теплопроводности системой одномерных схем с весами, введя для этого алгоритма термины «метод расщепления», «метод дробных шагов». Для выяснения вопроса об устойчивости и сходимости был предложен переход от цепочки одномерных схем путем исключения промежуточных значений $y^{j+\alpha/p}$ к схеме «в целых шагах», связывающей y^j и y^{j+1} ; это — факторизованная схема, она устойчива при попарной перестановочности одномерных разностных операторов (об этой схеме см. [15], [10]). В дальнейшем предлагались различные способы получения экономичных факторизованных схем: 1) метод расщепляющегося оператора (Е. Г. Дьяконов, 1962), 2) метод приближенной факторизации (Г. И. Марчук и Н. Н. Яненко, 1966), 3) метод факторизации (оператора на верхнем слое) (А. А. Самарский, 1963—1966, см. § 2 гл. IX); он основан на методе регуляризации разностных схем, изложенном в § 3 гл. VI. Отметим также работу К. А. Багриновского и С. К. Годунова (ДАН 115, № 3 (1957)).

К гл. IX, § 3. Понятие суммарной аппроксимации, а также одномерные модели

$$\frac{1}{p} \frac{dv(\alpha)}{dt} + A_\alpha v(\alpha) = t_\alpha(t), \quad t \in [t_{i+(\alpha-1)/p}, t_{i+\alpha/p}], \quad (1)$$

$$\frac{dv(\alpha)}{dt} + A_\alpha v(\alpha) = t_\alpha(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (2)$$

многомерной задачи

$$\frac{du}{dt} + (A_1 + A_2 + \dots + A_p) u = f, \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_p, \quad (3)$$

впервые предложены А. А. Самарским (1962, вторая модель в 1965 г.) и использовались в дальнейшем многими авторами. Для первой модели Н. Н. Яненко (1964) оценил погрешность $v_{(p)} - u = O(\tau)$, воспользовавшись понятием суммар-

ной аппроксимации (введя для нее термин «слабая аппроксимация»). Изучению первой модели посвящена также работа Д. Г. Гордезиани (1965). Метод суммарной аппроксимации как способ редукции многомерной задачи к цепочке задач (1) или (2) и последующей их разностной аппроксимации широко применялся в задачах гидродинамики, метеорологии, теории переноса излучения и др. рядом авторов и прежде всего Г. И. Марчуком, Н. Н. Яненко и др.

Большое число работ по развитию и применению метода суммарной аппроксимации выполнено И. Ф. Фрязиновым, который построил и исследовал аддитивные схемы высокого порядка точности, схемы на графах и аддитивные векторные схемы для параболических уравнений общего вида с переменными коэффициентами в области произвольной формы с краевыми условиями первых трех типов (ссылки см. в статье А. А. Самарского и И. В. Фрязинова УМН 31, № 6 (1976)).

К гл. X. При изложении использованы работы А. А. Самарского и Е. С. Николаева (см. [10], А. А. Самарский (ДАН СССР 185, № 3 (1969); 186, № 1 (1969)), Е. С. Николаев и А. А. Самарский (ЖВМ и МФ 12 № 6, 1972))), а также работы Писмена, Дугласа и Рэкфорда (§ 4); к § 5 относятся также работы М. А. Красносельского и С. Г. Крейна (метод минимальных невязок, п. 2), Е. Г. Дьяконова и Гана (двухступенчатыи метод, п. 5) и др.. ссылки на которые см. в [10].

К гл. X, § 2. Способ упорядочения итерационных параметров дан по работе Е. С. Николаева и А. А. Самарского (ЖВМ и МФ 12, № 5 (1972)), несколько другой способ упорядочения предложен В. И. Лебедевым и С. А. Финогеновым (ЖВМ и МФ 13, № 1 (1973)).

К гл. X, § 3. Попеременно-треугольный метод предложен А. А. Самарским в 1964 г. (ЖВМ и МФ 4, № 3 (1964)) и усовершенствован в [10]; модифицированный вариант ПТМ предложен в статье А. Б. Кучерова и Е. С. Николаева (ЖВМ и МФ 16, № 5 (1976)).

К Дополнению, § 1. Более подробное изложение используемых нами фактов из функционального анализа можно найти в [4], а также в книгах Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1970, и Б. З. Вулих, Введение в функциональный анализ, «Наука», М., 1967.

К § 2. Метод потоковой прогонки предложен Л. М. Дегтяревым и А. П. Фаворским (ЖВМ и МФ 8, № 3 (1968); 9, № 1 (1969)).

К § 3. Метод циклической прогонки принадлежит А. А. Абрамову и В. Б. Андрееву (ЖВМ и МФ 3, № 2 (1963)); вывод формул см. также в [10]. Сборник работ советских авторов по теории разностных схем дан в статье А. А. Самарского в книге «История отечественной математики», том 4, Киев, «Наукова думка», 1970; литературные ссылки см. также в [10], [6], [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1963.
2. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, «Наука», М., 1976.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы (введение в теорию). «Наука», М., 1972.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959. (Изд. 2-е выйдет в свет в 1977 г.)
5. Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, «Наука», М., 1973.
6. Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, «Наука», Новосибирск, 1973.
7. Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, «Мир», М., 1972.
8. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.
9. Самарский А. А., Лекции по теории разностных схем, ВЦ АН СССР, М., 1969.
10. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1974.
11. Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, «Наука», М., 1973.
12. Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, «Наука», М., 1973.
13. Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений «Наука», М., 1976.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», М., 1972.
15. Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», Новосибирск, 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная устойчивость 286, 351
Абстрактная задача Коши 346, 535
Аддитивная схема 512, 531
Асимптотическая устойчивость 301
Аппроксимация интегрального закона сохранения 159
— разностная 71
— суммарная 512

Безусловная устойчивость 286
Бубнова — Галеркина метод 217
Быстро преобразование Фурье 557

Внутренний узел сетки 69, 236, 521
Входные данные 97

Гармоника 284
Границочное условие второго рода 39
— первого рода 39
— третьего рода 39
Границный узел 69, 236, 521

Двухслойная итерационная схема 559
— схема 279, 348
— с весами 320
Дивергентная разностная схема 157
Дивергентный оператор 144
Дугласа — Рэнфорда схема 539
Дюфорта и Франкела схема 297, 405

Задача Коши для разностного уравнения 38
— на собственные значения 111.
Зейделя метод 576

Интегро-интерполяционный метод 157, 210
Итерационные параметры «по Жордану» 609
Итерационный метод Ньютона 445, 452
— — — переменных направлений 606
— — — релаксации 579
— — — решения систем линейных алгебраических уравнений 33
— — — Ричардсона 569
— — — с факторизованным оператором 615

Каноническая форма схемы двухслойной 348
— — — — итерационной 559
— — — — трехслойной 349
Квадратная сетка 234
Консервативная схема 156, 463
Корректность разностной схемы 106, 133, 223
Коши — Буняковского неравенство 110
Ко-эквивалентность разностных схем 223
Коэффициентная устойчивость операторного уравнения 224
— — — схемы 221
Краевая задача для разностного уравнения 38

Лагранжа переменные 460
Ламэ коэффициенты 509
— система уравнений 30
Лапласа уравнение 22
Левая разностная производная 72
Линейный неотрицательный функционал 162
Локально-одномерная схема 517

Мажоранта 46, 247
Максвелла уравнения 24
Метод баланса 157
— верхней релаксации 579
— встречных прогонок 44
— декомпозиции 552
— конечных элементов 217
— минимальных невязок 622
— поправок 624
— модифицированный попеременно-треугольный 599
— пробных функций 156
— прогонки 40
— левой 43
— — матричной 557
— — циклической 184
— простой итерации 566
— разделения переменных 285, 365, 556
— скорейшего спуска 624
— энергетических неравенств 121, 341
Монотонная схема 184, 432

Нанлучшая схема второго порядка 164
— на неравномерной сетке 172
Невязка 90, 413
Негативная норма 84
Некорректная разностная схема 134
ε-неравенство 111
Неравномерная сетка 68
Нерегулярный узел 237, 521
Нестационарное уравнение Шредингера 320
Неявная схема

Обобщенное решение 343
Однородная схема 149
— консервативная 152, 463
Одношаговый итерационный метод 559
Окрестность узла 242
Ома закон 25
Оператор перехода 349
Операторная схема 126
Операторно-разностная схема 347
Оптимальный набор итерационных параметров 565

Писмена — Рэнфорда схема 478
Погрешность аппроксимации 72, 82, 356
— — — на решении задачи 90
— — — сетке 81
— — — оператора 138
— — — разностной схемы 137
Полностью консервативная схема 465

Попеременно-треугольный метод 584
 Порядок аппроксимации схемы 90
 — точности схемы 90
 Потоковая сетка 193, 435
 Правая разностная производная 72
 Приграничный узел 237, 521
 Принцип максимума 45, 245
 — регуляризации разностных схем 403, 490
 Продольно-поперечная схема 478, 539
 Прямой метод решения системы линейных разностных уравнений 33, 551
 Прямоугольная сетка 234
 Псевдовязкость 462
 Пуассона уравнение 23

Равномерная сетка 68
 — устойчивость по начальным данным 353
 Разностная задача Дирихле 234
 — производная 72
 — схема 86, 133
 — — —, сходимость 135, 356
 — формула Грина вторая 60, 110
 — — — первая 60, 109
 Разностное уравнение 35
 Разностный эллиптический оператор 264
 Разрешающий оператор 353, 561
 Регуляризатор 403
 Регулярный режим 301
 Режим с обострением 452
 Ритца метод 215
 Ричардсона схема 296
 Рунге метод 175

Самосопряженный оператор 61
 Сетка 67, 236
 — связная 237
 Сеточная норма 70
 — функция 67
 Сильная устойчивость 224
 Система уравнений теории упругости 509
 — — гиперболического типа 508, 548
 — — параболического типа 505, 544
 Скорость сходимости разностной схемы 135
 Собственные векторы оператора 65
 — значения оператора 65
 Сопряженный оператор 61, 145
 Сосредоточенная масса 33
 — сила 33
 — теплопроводность 32, 426
 Сосредоточенный источник тепла 32, 424
 Составная схема 530
 Спектральная устойчивость 285
 Стефана задача 458

Схема переменных направлений 478, 539
 — повышенного порядка точности 269, 318, 487
 — с весами 278, 317
 — — опережением 280
 — точная 203
 Сходимость разностной схемы 1:5, 356

Точность разностной схемы 136, 356
 Трехслойная схема 296, 322, 349
 — — итерационная 620

Узел сетки 67, 236
 Упорядоченный чебышевский набор параметров 573
 Уравнение колебаний 29
 — переноса 324
 — теплопроводности 27
 Усеченная разностная схема 208
 Условие согласования норм 355
 Условная устойчивость разностной схемы 286
 Устойчивость схемы нелинейной 138
 — — разностной 106, 133, 351
 — — — по начальным данным 283, 351
 — — — правой части 283, 351

Факторизованная схема 491
 Формула Грина вторая 59, 110
 — — первая 59, 109
 Функция Грина 197
 — — разностная 198

Центральная разностная производная 72

Чебышевский набор итерационных параметров 565

Шаблон 71
 Шаблонная функция 204
 Шаблонный функционал 150
 Шеститочечная симметричная схема 280

Эйлера переменные 459
 — схема 102, 313
 Экономичная схема 476

Явная схема 279
 — — двухслойная 313
 — — трехслойная 316