

Grundlagen der Rechnerarchitektur

Übungsblatt 6

Gruppe 121

Jonas Otto Dominik Authaler

7. Februar 2020

Aufgabe 1

a) Wahrheitstafel:

Tag	Tag - 1 binär ($x_3x_2x_1x_0$)	Angeschaltete Äste
1	0000	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
2	0001	2, 4, 6
3	0010	2, 4, 6
4	0011	1, 2, 4, 6
5	0100	2, 4, 6
6	0101	1, 2, 3, 4, 5, 6
7	0110	1, 2, 3, 4, 5, 6
8	0111	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9	1000	1, 3, 5
10	1001	1, 2, 3, 4, 5, 6
11	1010	1, 3, 4, 5, 6
12	1011	1, 3, 5
13	1100	1, 3, 5
14	1101	1, 2, 3, 4, 5, 6
15	1110	1, 3, 5, 7
16	1111	1, 2, 3, 5

Abbildung 1: Wahrheitstabelle zur Ansteuerung der Segmente

b) Kanonische Normalformen:

$$f_{1,DKNF} = \overline{x_0}x_1x_2x_3 + x_0x_1\overline{x_2}x_3 + x_0\overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1x_2\overline{x_3} + x_0x_1x_2\overline{x_3} + \overline{x_0}x_1\overline{x_2}x_3 + x_0\overline{x_1}\overline{x_2}x_3 + x_0x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_0}\overline{x_1}x_2x_3 + x_0\overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_0}x_1x_2x_3 + x_0x_1x_2x_3$$

$$f_{2,KKNF} = (x_0 + x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

c) Algebraische Minimierung:

$$\begin{aligned}
f_{1,DNF} &= f_{1,DKNF} \\
&= \overline{x_0 x_1 x_2 x_3} + x_0 x_1 \overline{x_2 x_3} + x_0 \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_0} x_1 x_2 \overline{x_3} + x_0 x_1 x_2 \overline{x_3} + \overline{x_0} \overline{x_1} x_2 x_3 + x_0 \overline{x_1} x_2 x_3 \\
&\quad + \overline{x_0} x_1 \overline{x_2} x_3 + x_0 x_1 \overline{x_2} x_3 + \overline{x_0} \overline{x_1} x_2 x_3 + x_0 \overline{x_1} x_2 x_3 + \overline{x_0} x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 x_2 x_3 \\
&\stackrel{P4, P6'}{=} \overline{x_0 x_1 x_2 x_3} + x_0 x_1 \overline{x_2 x_3} + x_0 \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_0} x_1 x_2 \overline{x_3} + x_0 x_1 x_2 \overline{x_3} + x_3 \\
&= \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_0 x_1 \bar{x}_2 + x_0 \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2 + x_3 \\
&= x_3 + x_2(x_0 \bar{x}_1 + \bar{x}_0 x_1 + x_0 x_1) + \bar{x}_2(\bar{x}_0 \bar{x}_1 + x_0 x_1) \\
&\stackrel{P8}{=} x_3 + x_2(x_1 + x_0) + \bar{x}_2(\bar{x}_0 \bar{x}_1 + x_0 x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1,KNF} &= f_{1,KKNF} \\
&= (x_0 + x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \\
&\quad \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \\
&\stackrel{P4'}{=} \bar{x}_3 + (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \bar{x}_1 + x_2)(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2)(x_0 + x_1 + \bar{x}_2)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\
&\stackrel{P4'}{=} \bar{x}_3 + (x_0 + (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2))(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + X_2) \\
&\stackrel{P5'}{=} \bar{x}_3 + x_0(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2) \\
&\stackrel{P9, P4}{=} \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 + x_0 x_2
\end{aligned}$$

d) Karnaugh-Veitch:

i) minimale disjunktive Normalform $f_{3,KV,DNF}$ für Segment 3:

	$\overline{x_0}$	x_0	x_0	$\overline{x_0}$	
$\overline{x_1}$	1	0	1	0	$\overline{x_3}$
x_1	0	0	1	1	$\overline{x_3}$
x_1	1	1	1	1	x_3
$\overline{x_1}$	1	1	1	1	x_3
	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	x_2	x_2	

Abbildung 2: KV-Diagramm für Segment 3

$$f_{3,KV,DNF} = x_3 + x_1x_2 + x_0x_2 + \overline{x_0x_1x_2} \quad (1)$$

ii) minimale konjunktive Normalform $f_{4,KV,KNF}$ für Segment 4:

	$\overline{x_0}$	x_0	x_0	$\overline{x_0}$	
$\overline{x_1}$	1	1	1	1	$\overline{x_3}$
x_1	1	1	1	1	$\overline{x_3}$
x_1	1	0	0	0	x_3
$\overline{x_1}$	0	1	1	0	x_3
	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	x_2	x_2	

Abbildung 3: KV-Diagramm für Segment 4

$$f_{3,KV,DNF} = (x_0 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1} + \overline{x_3}) \cdot (x_0 + x_1 + \overline{x_3}) \quad (2)$$

e) Quine McCluskey

Terme, welche nicht zur weiteren Minimierung genutzt werden konnten sind farblich hervorgehoben.

i) Segment 5:

$$\begin{aligned} f_{5,DKNF} = & \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} \\ & + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} \\ & + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0x_1\overline{x_2x_3} \end{aligned}$$

$$Q_{4,4} = \{\overline{x_0x_1x_2x_3}\}$$

$$Q_{4,3} = \{\overline{x_0x_1x_2x_3}\}$$

$$Q_{4,2} = \{x_0\overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_2x_3}, x_0\overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_2x_3}\}$$

$$Q_{4,1} = \{x_0x_1\overline{x_2x_3}, x_0x_1\overline{x_2x_3}, x_0\overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_2x_3}\}$$

$$Q_{4,0} = \{x_0x_1x_2x_3\}$$

$$Q_{3,3} = \{\overline{x_0x_1x_2}\}$$

$$Q_{3,2} = \{\overline{x_0x_2x_3}, \overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_3}\}$$

$$Q_{3,1} = \{x_0x_2\overline{x_3}, x_0\overline{x_1x_2}, x_1x_2\overline{x_3}, \overline{x_0x_1x_2}, x_1\overline{x_2x_3}, \overline{x_0x_1x_3}, x_0\overline{x_1x_3}, \overline{x_1x_2x_3}, \overline{x_0x_2x_3}\}$$

$$Q_{3,0} = \{x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3\}$$

$$Q_{2,2} = \{\}$$

$$Q_{2,1} = \{\overline{x_0x_3}, \overline{x_2x_3}, \overline{x_1x_3}\}$$

$$Q_{2,0} = \{\overline{x_0x_2}, \overline{x_1x_2}, x_1x_3, x_0x_3, x_2x_3\}$$

$$Q_{1,1} = \{\}$$

$$Q_{1,0} = \{x_3\}$$

$$f_{5,QMC} = \overline{x_0x_1x_2} + x_0x_2 + x_1x_2 + x_3$$

ii) Segment 6:

$$\begin{aligned} f_{6,DKNF} = & \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} \\ & + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} + x_0x_1\overline{x_2x_3} + x_0\overline{x_1x_2x_3} + \overline{x_0x_1x_2x_3} \\ & + x_0\overline{x_1x_2x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{4,4} &= \{\overline{x_0 x_1 x_2 x_3}\} \\
Q_{4,3} &= \{x_0 \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_2 x_3}\} \\
Q_{4,2} &= \{x_0 x_1 \overline{x_2 x_3}, x_0 \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_2 x_3}, x_0 \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_2 x_3}\} \\
Q_{4,1} &= \{x_0 \overline{x_1 x_2 x_3}, x_0 x_1 \overline{x_2 x_3}\} \\
Q_{4,0} &= \{\} \\
\hline
Q_{3,3} &= \{\overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_3}\} \\
Q_{3,2} &= \{x_0 \overline{x_2 x_3}, x_0 \overline{x_1 x_3}, x_0 \overline{x_1 x_2}, x_1 \overline{x_2 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_3}, \overline{x_0 x_1 x_2}, \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_0 x_2 x_3}\} \\
Q_{3,1} &= \{x_0 x_1 \overline{x_3}, x_0 \overline{x_1 x_2}, x_0 x_2 \overline{x_3}, x_1 x_2 \overline{x_3}, x_0 \overline{x_1 x_3}\} \\
Q_{3,0} &= \{\} \\
\hline
Q_{2,2} &= \{\overline{x_2 x_3}, \overline{x_1 x_3}, \overline{x_0 x_3}\} \\
Q_{2,1} &= \{x_0 \overline{x_3}, \overline{x_0 x_1}, x_1 \overline{x_3}, x_2 \overline{x_3}\} \\
Q_{2,0} &= \{\} \\
\hline
Q_{1,1} &= \{\overline{x_3}\} \\
Q_{1,0} &= \{\}
\end{aligned}$$

$$f_{6,QMC} = \overline{x_0 x_1 x_2} + x_0 \overline{x_1} + \overline{x_3}$$

- f) f_1 Anzahl Transistoren KNF: $N = 13 \cdot 10 + 23 \cdot 2 + 26 = 371$, Anzahl minimiert: $N_m = 8 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 50 \implies$ Ersparnis von 86.5%.
- f_2 Anzahl Transistoren KNF: $N = 11 \cdot 2 + 5 \cdot 10 + 12 = 84$, Anzahl minimiert: $N_m = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 8 = 24 \implies$ Ersparnis von 71.4%.