

令和元年度

卒業研究

量子状態トモグラフィ

指導教員

山本 俊 教授

大阪大学 基礎工学部

電子物理科学科 物性物理科学コース

山本研究室

学籍番号 09D16031

小林哲也

2020年3月6日

目次

目次	i
図目次	ii
第1章 序論	1
1.1 研究の背景と目的	1
第2章 理論	2
2.1 量子状態トモグラフィーの一般的理論	2
2.1.1 密度行列	2
2.1.2 1 qubit トモグラフィー (直交基底)	2
2.1.3 1 qubit トモグラフィー (非直交基底)	3
2.1.4 Qudit への拡張	4
2.1.5 Multi qudits への拡張	5
2.1.6 密度行列の再構成	5
2.2 最尤推定	6

图 目 次

第1章 序論

1.1 研究の背景と目的

近年注目を増している量子情報、量子コンピューティング研究・開発において実験的に生成された量子状態を正確に認識することは極めて重要である。しかしながら、量子的制約により、量子状態を直接観測することは現時点では不可能である。そこで、量子状態トモグラフィーが用いられる。量子状態トモグラフィーとは、同じ量子状態を複数生成し、それぞれを測定基底を変えて測定をすることで得られた観測データから、最尤推定などを用いて真の量子状態を推定することである。本論文では、量子状態トモグラフィーの一般的理論を説明した後、実験的誤りに対する耐性があるアルゴリズムを紹介する。最後に、これらのアルゴリズムを実装し確認する。

第2章 理論

2.1 量子状態トモグラフィーの一般的理論

2.1.1 密度行列

量子状態は密度行列によって表される。密度行列 $\hat{\rho}$ とは以下の性質を満たす行列である。

$$\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1 \quad (2.1.1)$$

また、密度行列の固有値を λ とすると、

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad \forall \lambda \quad (2.1.2)$$

d 次元の密度行列を $\hat{\rho}_d$ と表記する。

2.1.2 1 qubit トモグラフィー (直交基底)

qubit は 2 次元の密度行列で表される。

1 qubit トモグラフィーのために、パウリ演算子を導入する。パウリ演算子は単位演算子 I と $SU(2)$ の X, Y, Z からなる。

$$\begin{aligned} I \equiv \hat{\lambda}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X \equiv \hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Y \equiv \hat{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \equiv \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

これらを用いて、1 qubit の密度行列 $\hat{\rho}_2$ は次のように表される。

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 r_j \hat{\lambda}_j, \quad r_j \in \text{Re} \quad (2.1.4)$$

$SU(2)$ はトレースが 0 なので、密度行列 $\hat{\rho}_2$ は規格化のために $r_0 = 1$ を満たす必要がある。また、ほかのパラメータ $r_{j=1,\dots,3}$ は

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1 \quad (2.1.5)$$

のみ満たす。また、 r_j は $r_j = \text{Tr}[\hat{\rho}_2 \hat{\lambda}_j]$ で得られる。

したがって、1 qubit の密度行列は

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \langle \hat{\lambda}_3 \rangle & \langle \hat{\lambda}_1 \rangle - i \langle \hat{\lambda}_2 \rangle \\ \langle \hat{\lambda}_1 \rangle + i \langle \hat{\lambda}_2 \rangle & 1 - \langle \hat{\lambda}_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

で表される。

上式から、1 qubit の密度行列は 3 つの測定だけで求まりそうだが、実験的には 4 つ目の基底 $\hat{\lambda}_0$ の測定によって密度行列の規格化が必要である。また、 $\langle \hat{\lambda}_j \rangle$ の値によっては、(2.1.2) 式を満たさないことがある。したがって、最尤推定などを用いて物理的に意味のある密度行列を見つける必要がある。

$SU(2)$ 生成子は必ず物理的状態を示すとは限らないが、 $\hat{\lambda}_{0,\dots,3}$ は常に物理的に意味のある状態の密度行列の線形和で表すことができる。例えば、パウリ演算子は光学系での測定としては物理的意味がない。しかし、光子の測定を偏向基底で行う際に以下のようなものが用いられる。

$$\begin{aligned} |H\rangle \langle H| &= \frac{1}{2} [\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_3] |V\rangle \langle V| = \frac{1}{2} [\hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_3] \\ |D\rangle \langle D| &= \frac{1}{2} [\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1] |L\rangle \langle L| = \frac{1}{2} [\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

ここで、 $|H\rangle = |0\rangle$, $|V\rangle = |1\rangle$, $|D\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, $|L\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$

このようにどの直交した測定基底を選んででも他のいくつかの測定演算子 $\hat{\Pi}_k$ を用いて $\hat{\lambda}_j = \frac{1}{2} \sum_k a_{jk} \hat{\Pi}_k$ と表すことができる。そして、トモグラフィーは測定結果 $a_{jk} = \langle \hat{\Pi}_k \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}_2 \hat{\Pi}_k]$ を測定することで行われる。

2.1.3 1 qubit トモグラフィー (非直交基底)

実際には、測定は測定装置側の基底を偏向せずに量子状態を変化させて測定する。そのため、1 qubit の状態を測定基底に合わせて、 $|0\rangle + |1\rangle$ や $|0\rangle + i|1\rangle$ から $|0\rangle$ へ量子状態を変化させることが難しい場合がある。その場合、測定基底を $|0\rangle$ と

$$\begin{aligned} |\theta_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \theta |0\rangle + \sin \theta |1\rangle] \\ |\varphi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \varphi |0\rangle + i \sin \varphi |1\rangle] \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

とすることができる。 θ, φ は小さい値でもよい。つまり、1 qubit トモグラフィーはある測定基底と少しの摂動があれば行える。実験系によってはこれは重要になることがある。

任意の基底 $|\psi_\nu\rangle$ での測定は射影子 $\hat{\lambda}_\nu = |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu|$ で表され、これらの基底による観測回数 n_ν は

$$n_\nu = \mathcal{N} \langle \psi_\nu | \hat{\rho} | \psi_\nu \rangle \quad (2.1.9)$$

で表される。 $(\mathcal{N}$ は定数)

2.1.4 Qudit への拡張

まず、 $SU(d)$ を準備する。 (d) 次元の SU 群

d 次元の要素行列 $\{e_j^k | k, j = 1, \dots, d\}$ は

$$(e_j^k)_{\mu\nu} = \delta_{\nu j} \delta_{\mu k}, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq d \quad (2.1.10)$$

で表され、 μ 行 ν 列目の要素が 1 で他の要素すべてが 0 である行列である。

これらの行列は交換関係を満たす。

$$[e_j^i, e_l^k] = \delta_{kj} e_l^i - \delta_{il} e_j^k \quad (2.1.11)$$

$d(d-1)$ 個のトレースが 0 の行列が存在する。

$$\Theta_j^k = e_j^k + e_k^j, \quad \beta_j^k = -i(e_j^k - e_k^j) \quad 1 \leq k < j \leq d \quad (2.1.12)$$

これらは $SU(d)$ 群の非対角生成子である。

対角生成子として残り $d-1$ 個のトレースが 0 の行列を

$$\eta_r^r = \sqrt{\frac{2}{r(r-1)}} \left[\sum_{j=1}^r e_j^j - r e_{r+1}^{r+1} \right] \quad (2.1.13)$$

とすると、これで $d^2 - 1$ 個の生成子が得られる。

ここで λ 行列を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{(j-1)^2+2(k-1)} &= \Theta_j^k \\ \hat{\lambda}_{(j-1)^2+2k-1} &= \beta_j^k \\ \hat{\lambda}_{j^2-1} &= \eta_{j-1}^{k-1} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

d 次元に拡張してもこれらの形式は完全エルミート演算子基底である。つまり、 $\hat{\lambda}$ がエルミートかつ次式を満たす。

$$\sum_{j=0}^{d^2-1} \hat{\lambda}_j = \hat{1} \quad (2.1.15)$$

d 次元に拡張しても (2.1.4) 式はそのまま適用できる。つまり、密度行列 $\hat{\rho}_d$ は生成子の線形結合で表される。

$$\hat{\rho}_d = \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d^2-1} r_j \hat{\lambda}_j \quad (2.1.16)$$

これは 1 qudit の密度行列である。規格化のために係数 r_0 は 1 とし、 $Tr[\hat{\rho}_d^2] \leq 1$ より $\sum_{j=1}^{d^2-1} r_j^2 \leq d(d-1)/2$ を満たす。

2.1.5 Multi qudits への拡張

Multi qubits では、演算子のヒルベルト空間を規格化された単位行列 $\hat{\lambda}_0$ を含んだ $SU(2)$ を生成子のテンソル積で定義する。

$$SU(2) \otimes SU(2) \otimes \cdots \otimes SU(2) \quad (2.1.17)$$

2 qudits では d^2 の次元を持った密度行列 $\hat{\rho}_{2d}$ は同様に拡張できる。 $\hat{\lambda}_0$ を含む $\hat{\lambda}$ 行列のテンソル積 $\hat{\lambda}_{j1} \otimes \hat{\lambda}_{j2}$ のすべての組はそれぞれ線形独立なので、 $\hat{\rho}_{2d}$ は次のように表される。

$$\hat{\rho}_{2d} = \frac{1}{d^2} \sum_{j1, j2=0}^{d^2-1} r_{j1, j2} \hat{\lambda}_{j1} \otimes \hat{\lambda}_{j2} \quad (2.1.18)$$

同様に、n qudits では

$$\hat{\rho}_{nd} = \frac{1}{d^n} \sum_{j1, \dots, jn=0}^{d^2-1} r_{j1, \dots, jn} \hat{\lambda}_{j1} \otimes \cdots \otimes \hat{\lambda}_{jn} \quad (2.1.19)$$

2.1.6 密度行列の再構成

簡単のために $\hat{\Gamma}_\nu = \hat{\lambda}_{j1} \otimes \cdots \otimes \hat{\lambda}_{jn}$ とすると、密度行列は

$$\hat{\rho}_{nd} = \sum_{\nu=0}^{d^n-1} \tilde{r}_\nu \hat{\Gamma}_\nu \quad (2.1.20)$$

で表される。 \tilde{r}_ν は d^n 要素あるベクトルの ν 番目の要素で

$$\tilde{r}_\nu = Tr[\hat{\Gamma}_\nu \hat{\rho}_{nd}] \quad (2.1.21)$$

これを (2.1.9) 式に代入して

$$n_\nu = \mathcal{N} \sum_{\mu=0}^{d^n-1} B_{\nu, \mu} \tilde{r}_\mu \quad (2.1.22)$$

ここで、 $B_{\nu, \mu}$ は $d^n \times d^n$ 行列の ν 行 μ 列番目の要素で

$$B_{\nu, \mu} = \langle \psi_\nu | \hat{\Gamma}_\mu | \psi_\nu \rangle \quad (2.1.23)$$

$B_{\nu, \mu}$ が可逆行列であれば

$$\tilde{r}_\nu = \mathcal{N}^{-1} \sum_{\nu=0}^{d^n-1} \hat{M}_\nu n_\nu = \sum_{\nu=0}^{d^n-1} \hat{M}_\nu s_\nu \quad (2.1.24)$$

ここで、 \hat{M}_ν は $d \times d$ 行列で

$$\hat{M}_\nu = \sum_{\nu=0}^{d^n-1} (B^{-1})_{\nu, \mu} \hat{\Gamma}_\mu \quad (2.1.25)$$

\hat{M}_ν の性質から

$$\sum_\nu \text{Tr}[\hat{M}_\nu] |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu| \hat{\rho}_{nd} = \hat{\rho}_{nd} \quad (2.1.26)$$

両辺でトレースをとると

$$\sum_\nu \text{Tr}[\hat{M}_\nu] n_\nu = \mathcal{N} \quad (2.1.27)$$

したがって、任意の密度行列 $\hat{\rho}_{nd}$ は次のように再構成される。

$$\hat{\rho}_{nd} = \frac{\sum_\nu \hat{M}_\nu n_\nu}{\sum_\nu \text{Tr}[\hat{M}_\nu] n_\nu} \quad (2.1.28)$$

2.2 最尤推定