

Homework 4

Parsa Eissazadeh 97412364

سوال 1

$M = N = 2$

$$F(u, v) = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$= f(0,0) e^{-j \cdot 0} + f(0,1) e^{-j2\pi \frac{v}{2}} + f(1,0) e^{-j2\pi \frac{u}{2}} + f(1,1) e^{-j2\pi(\frac{u}{2} + \frac{v}{2})}$$

0,0	0,1
1,0	1,1

$$= 2 + 3x e^{-j\pi v} + 1x e^{-j\pi u} + 4e^{-j(u+v)\pi}$$

$u=0, v=0: F(0,0) = 2 + 3 + 1 + 4 = 10$

$F(0,1) = 2 + 7e^{-j\pi} + 1 = 3 - 7 = -4$

$F(1,0) = 2 + 5e^{-j\pi} + 3 = 0$

$F(1,1) = 2 + \underbrace{4e^{-j\pi}}_{-4} + \underbrace{4e^{-j2\pi}}_4 = 2$

\Rightarrow

10	-4
0	2

$$e^{-j\pi} = \cos(-\pi) + j\sin(-\pi) = -1$$

$$e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi) = 1$$

سوال 2

(الف)

(ب)

فرمول تبدیل فوريه بدین شکل بود :

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

اگر u و v صفر باشد ، مقدار $|e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}|$ برابر با 1 می شود . در نتیجه تبدیل فوريه در آن نقطه برابر است با :

$$F(u, v) = \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y)$$

که برابر است با مجموع مقدار تابع f در همه نقاط . در نتیجه تبدیل فوريه در خانه 0,0 برابر است با مجموع روشنایی تمام پیکسل های عکس .

سوال 3

ساخت کرنل متوسط گیر : در کرنل متوسط گیر همه خانه ها مقدار 1 دارند (تا جمع بدون وزن روی شدت روشنایی پیکسل ها زده شود) سپس تقسیم بر تعداد پیکسل ها می شود تا به میانگین برسیم . تعداد پیکسل ها می شود سایز کرنل به توان 2 (در اینجا طول و عرض کرنل برابر است .)

کد بدین صورت است :

```
def averaging_kernel(size):
    """
    Returns an averaging kernel with the specified size.

    Parameters
    -----
    size: int
        Width and height of the kernel.

    Returns
    -----
    ndarray
        The averaging kernel.
    """
    result = np.ones((size, size))
    #####
    # Your code goes here. #
    #####
    pixel_counts = size**2
    return result / pixel_counts
```

همانطور که مشاهده می شود تنها یک خط به متد اضافه شد .

برای convolution ، در ابتدا باید یک padding به عکس اضافه کنیم (تا پیکسل های مرزی عکس همسایه داشته باشند) از متد np.pad استفاده می کنیم .

متد convolve را نوشتیم که در آن کل خانه های کرنل در خانه های همسایگی یک پیکسل مشخص ضرب می شود و در نهایت با هم جمع می شوند .

```
def convolve (image , center_index , kernel , kernel_size):

    x_domain = int(np.floor(kernel_size[0]/2))
    y_domain = int(np.floor(kernel_size[1]/2))

    sum = np.multiply(image[
        center_index[0]- x_domain:center_index[0]+ x_domain+ 1 ,
        center_index[1]- y_domain:center_index[1]+ y_domain+ 1
    ],kernel).sum()

    return sum
```

Center_index موقعیت پیکسلی است که میخواهیم خانه های کرنل را دانه دانه در پیکسل های همسایه اش ضرب کنیم .

متد `np.multiply` دو آرایه را به عنوان ورودی می گیرد و آرایه ای را به عنوان خروجی باز میگرداند که در هر اندیس خانه اش ضرب خانه همان اندیس در آرایه های ورودی است . سپس با متد `sum` این ها را با هم جمع می زنیم و باز میگردانیم .

متد `filter_2d` :

```
def filter_2d(image, kernel):
    """
    Convolves an image with the kernel, applying zero-padding to maintain the size of the image.

    Parameters
    -----
    image: ndarray
        2D array, representing a grayscale image.
    kernel: ndarray
        2D array, representing a linear kernel.
    Returns
    -----
    ndarray
        The result of convolving `image` with `kernel`.
    """
    result = np.zeros(image.shape)
    #####
    # Your code goes here. #
    #####

    # Adding padding
    padding_size = int(np.floor(kernel.shape[0] / 2))
    image_with_padding = np.pad(image , ((padding_size,padding_size) , (padding_size,padding_size)) , 'edge')
    print(image.shape)
    print(image_with_padding.shape)

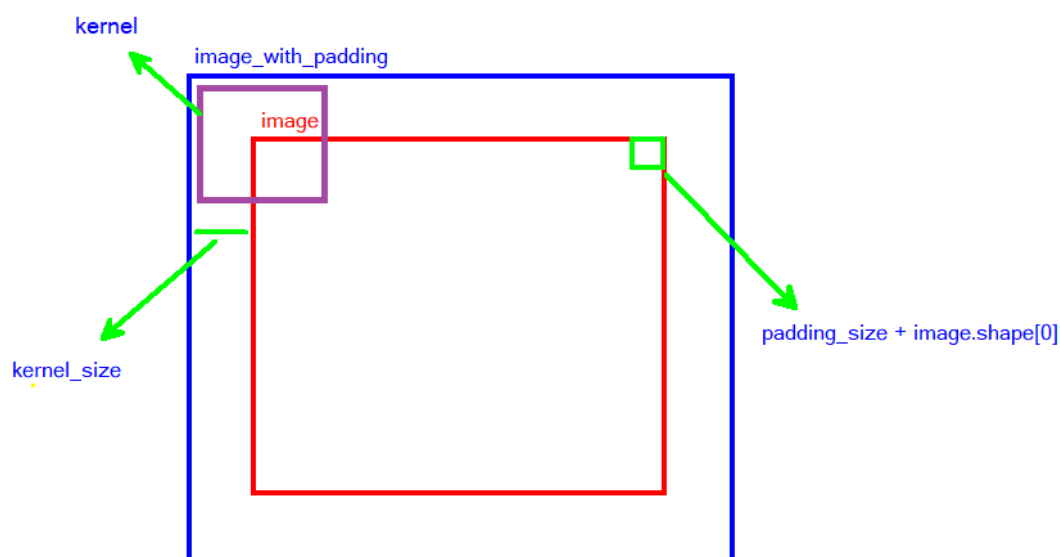
    print(padding_size+image.shape[0])

    # Convolution
    for i in range(padding_size , padding_size+image.shape[0] -1 ):
        for j in range(padding_size , padding_size+image.shape[1] -1 ):
            result[i-1][j-1] = convolve(image_with_padding ,(i,j) ,kernel ,kernel.shape )

    return result
```

کار اصلی در این متد انجام می شود :

همانطور که گفته شد ابتدا `padding` را به عکس اضافه میکنیم . طول `padding` باید به اندازه `kernel` باشد :



به اندازه اندازه کرنل تقسیم بر ۲ ، از پیکسل مورد نظر ، بالا ، پایین ، چپ و راست میرویم .
خروجی بدین شکل شد :

```
[41] im = cv2.imread('/content/salt_and_pepper_low.jpeg', cv2.IMREAD_GRAYSCALE)
plt.imshow(im)
plt.axis('off')

(-0.5, 224.5, 224.5, -0.5)
```



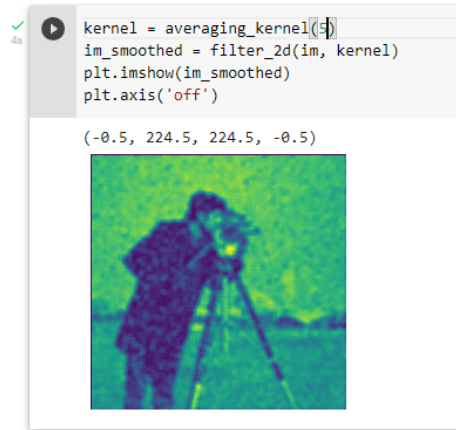
```
kernel = averaging_kernel(3)
im_smoothed = filter_2d(im, kernel)
plt.imshow(im_smoothed)
plt.axis('off')

(-0.5, 224.5, 224.5, -0.5)
```



عکس اندکی تار تر شد ولی نویز هم بسیار کمتر شد . اگر اندازه پنجره را بزرگتر کنیم مشاهده می شود که عکس
بیشتر تار می شود و در نتیجه نویز بیشتری از دست می رود :

برای مثلا برای اندازه کرنل 5 :



برای حذف نویز نمک و فلفل گرفتن میانه راه حل بهتری است . همانند قسمت قبل padding اضافه میکنیم ،

```
def median_filter(image, size):
    """
    Applies the median filter to the image with the given window size.

    Parameters
    -----
    image: ndarray
        2D array, representing a grayscale image.
    size: int
        Size of the window for median calculation.
    Returns
    -----
    ndarray
        The result of convolving `image` with `kernel`.
    """
    result = np.zeros(image.shape)
    #####
    # Your code goes here. #
    #####

    # add padding
    padding_size = int(np.floor(kernel.shape[0] / 2))
    image_with_padding = np.pad(image, ((padding_size, padding_size), (padding_size, padding_size)), 'edge')

    for i in range(padding_size, padding_size + image.shape[0] - 1):
        for j in range(padding_size, padding_size + image.shape[1] - 1):
            result[i-1][j-1] = np.median(image[
                i - padding_size:i+ padding_size+ 1 ,
                j- padding_size:j+ padding_size+ 1
            ])

    return result
```

پیمایش عکس به کمک ماتریس های هم اندازه کرنل همانند بخش قبل است . نتیجه :

```
im = cv2.imread('/content/salt_and_pepper_high.jpeg', cv2.IMREAD_GRAYSCALE)
plt.imshow(im)
plt.axis('off')
```

(-0.5, 224.5, 224.5, -0.5)



```
im_smoothed = median_filter(im, size=3)
plt.imshow(im_smoothed)
plt.axis('off')
```

(-0.5, 224.5, 224.5, -0.5)



نویز عکس به مقدار زیادی کاهش یافته .

برای اینکه در یک راستا مشتق بگیریم ، باید از معادله زیر استفاده کنیم :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$$

برای اینکه این رفتار را شبیه سازی کنیم ، کرنل باید به صورت زیر باشد :

0	0	0
1/2-	0	1/2
0	0	0

بعد از اعمال کردن این فیلتر در هر پیکسل $\frac{1}{2} * (f(x+1) - f(x-1))$ باقی می ماند که مشتق تصویر است .
متد کانوالو کردن یک کرنل در یک عکس در بخش های قبلی پیاده سازی شده .

کد :

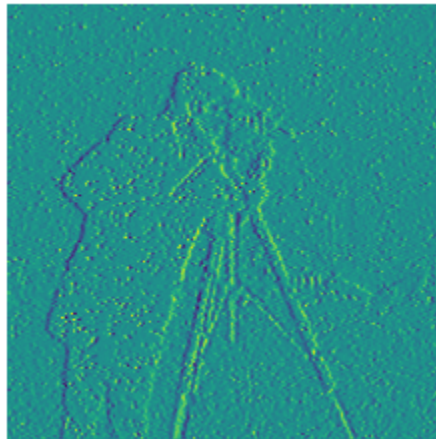
```

derivative_kernel = np.array([
    [0, 0, 0],
    [-.5, 0, .5],
    [0, 0, 0],
])

#####
# Your code goes here. #
#####
im_smoothed = filter_2d(im, kernel)
plt.imshow(im_smoothed)
plt.axis('off')

```

نتیجه :



در مکان هایی که رنگ پیکسل ها تغییر می کنند ، مشتق عکس مقداری غیر صفر دارد . در لبه های اشیا رنگ پیکسل ها تغییر می کنند . طبق این نکته عکس بالا به درستی نشان دهنده ی مشتق عکس است زیرا لبه های مرد فیلم بردار و پایه های دوربینش نمایان است .

این فیلتر مشتق گیر در عکس بدون نویز عملکرد خیلی بهتری داشت :


```
im_smoothed = filter_2d(im, derivative_kernel)
plt.imshow(im_smoothed)
plt.axis('off')
```

```
(256, 256)
(258, 258)
257
(-0.5, 255.5, 255.5, -0.5)
```



سوال 4

```
def denoise_image(image):
    """
    Denoises the input image.
    -----
    Parameters:
        image (numpy.ndarray): The input image.

    Returns:
        numpy.ndarray: The result denoised image.
    """

    denoised = image.copy()
    #####
    # Your code goes here. #
    #####

    dft = np.fft.fft2(denoised)
    dft_shifted = np.fft.fftshift(dft)

    dft_shifted[:,134:] = 0
    dft_shifted[:,90] = 0
    dft_shifted[134:,:] = 0
    dft_shifted[:,90] = 0

    idft_shift = np.fft.ifftshift(dft_shifted)
    idft = np.fft.ifft2(idft_shift)

    denoised = np.real(idft)
    return denoised
```

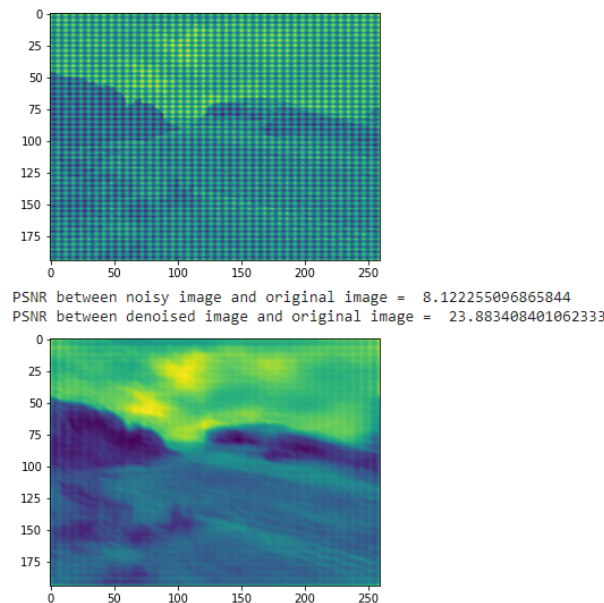
در ابتدا ، تبدیل فوریه میگیریم و شیفتش می دهیم به گونه ای که نقطه قوی در وسط تصویر بیفتد .

از آنجایی که ابعاد هر عکس 255 در 255 است و نقاط مرکزی که فرکانس صفر دارند عکس ما هستند ، ما پیکسل هایی که فاصله شان از مرکز از حدی بیشتر است حذف می کنیم .

این نقاط در راستای x ها کمتر از 90 و بیشتر از 134 هستند . (اعداد مختلفی را امتحان کردم ولی در این نقاط نویز کمترین مقدار و عکس بیشترین وضوح را داشت .)

Mask کردن به صورت دستی انجام شده است .

بقیه توابع از قبل نوشته شده بودند . خروجی :



هر چه مقدار PSNR بیشتر باشد مقدار efficiency تبدیل بیشتر است . در اینجا در ابتدا مقدار 8 داشته اما بعد از حذف کردن نویز به مقدار 23.8 (حدودا سه برابر رسیده است)

اگر از متد $f + g$ تبدیل فوریه بگیریم به H می رسم که برابر خواهد بود با $F + G$ که F تبدیل فوریه f و G تبدیل فوریه g است .

اما تبدیل فوریه $f * g$ پیچیده است . ما در اینجا به راحتی توانستیم با صفر کردن مقدار تبدیل فوریه در جاهایی که از مرکز دورند ، تبدیل فوریه نویز را حذف کنیم . این بدین معنی است که نویز جمع شونده بوده است . و ما بعد از صفر کردن G به F رسیدیم .