Produto Vetorial e Cônicas

MAP 2110 - Diurno

IME USP

7 de abril

Definição

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Exemplos

Uma reta L em V_2 contém os pontos $P = (-3, 1)$ e $Q = (1, 1)$, quais dos seguintes pontos também estão em L

A $(0, 1, 2) \times (1, 0, -1)$

B $(\mathsf{i} \times \mathsf{k}) \times \mathsf{j}$

C $(\mathsf{i} \times \mathsf{i}) \times \mathsf{j}$

D $(\mathsf{i} + 2\mathsf{j}) \times (2\mathsf{i} - \mathsf{k})$

Propriedades

- $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$
-

Exercicio 2

Verifique em cada um dos casos se os três pontos estão numa mesma reta:

- $P = (2,1,1)$ $Q = (4,1,-1)$ e $R = (3,-1,1)$
- $P = (2,2,3)$ $Q = (-2,3,1)$ e $R = (-6,4,1)$
- $P = (2,1,1)$ $Q = (-2,3,1)$ e $R = (5,-1,1)$

solução

Devemos, em cada caso verificar se os vetores $R - P$ e $Q - P$ são paralelos.

- $R - P = (1, -2, 0)$ e $R - Q = (-1, -2, 2)$ não são.
- $R - P = (-8, 2, -2)$ e $R - Q = (-4, 1, 0)$ não são.
- $R - P = (3, -2, 0)$ e $R - Q = (7, -4, 0)$ não são.

Exercício 3

Uma reta L_1 passa pelo ponto $P = (1,1,1)$ e é paralela ao vetor $A = (1,2,3)$. Uma outra L_2 passa pelo ponto $Q = (2,1,0)$ e é paralela ao vetor $B = (3,8,13)$. Mostre que as duas retas se interceptam e determine o ponto de intersecção.

Solução

$$L1 : (1,1,1) + s(1,2,3)$$
$$L2 : (2,1,0) + t(3,8,13)$$

$$(1,1,1) + s(1,2,3) = (2,1,0) + t(3,8,13)$$

Resolvendo o sistema temos $t = 1$ e $s = 4$ $(5,9,13)$ é o ponto de intersecção.

Exercício 4

Seja $X(t) = P + tA$ um ponto genérico da reta $L(P, A)$ onde $P = (1, 2, 3)$ e $A = (1, -2, 2)$. Tomemos o ponto $Q = (3, 3, 1)$

- Calcule $\|X(t) - Q\|^2$
- Mostre que existe um único ponto $X(t_0)$ que minimiza $\|X(t) - Q\|^2$
- Mostre que $Q - X(t_0)$ é ortogonal a A

solução

$$X(t) = (1,2,3) + t(1,-2,2)$$
$$Q = (3,3,1)$$
$$X(t) - Q = (-2+t, -1-2t, 2+2t)$$
$$\|X(t) - Q\|^2 = (-2+t)^2 + (-1-2t)^2 + (2+2t)^2$$
$$\|X(t) - Q\|^2 = 9t^2 + 8t + 9$$

que tem um único ponto de mínimo em $t_0 = -\frac{4}{9}$

solução item 3

Fazendo $t_0 = -4/9$ temos

$$X(t_0) - Q = (\frac{-22}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{10}{9})$$

que é ortogonal a $(1, -2, 2)$

Equação do Plano

Dada a equação vetorial de um plano $M = \{P + sA + tB\}$ com $P = (1, 2, -3)$ e $A = (3, 2, 1)$ $B = (1, 0, 4)$. Verificar se o ponto $(1, 2, 0) \in M$

Solução

$$X = (1, 2, 0) \text{ e } X - P = (0, 0, 3)$$
$$(0, 0, 3) = t(3, 2, 1) + s(1, 0, 4)?$$
$$3t + s = 0$$
$$2t + 0 = 0$$
$$t + 4s = 4$$

sistema impossível!

Achar a equação cartesiana de M quando este é um plano que passa por $(2, 3, 1)$ gerado por $(3, 2, 1)$ e $(-1, -2, -3)$.

solução

$M = \{(2,3,1) + s(3,2,1) + t(-1,-2,-3)\}$ Então um ponto genérico (x, y, z) de M satisfaz

$$x - 2 = 3s - t$$
$$y - 3 = 2s - 2t$$
$$z - 1 = s - 3t$$

Usando as duas últimas equações resolvemos o sistema para s e t
-7/4 $t = 1/4(y - 2z - 1)$ e $s = 3/4y - z/2$. Substituo na primeira equação.

$$x - 2y + z = 3$$