Cônicas

MAP 2110 - Diurno

IME USP

14 de abril

Seções cônicas

Cônicas são curvas planas estudadas desde a antiga Grécia e que possuem muitas propriedades de interesse, principalmente na física. A parte, talvez, mais importante historicamente é a prova de que a trajetória dos planetas em torno do Sol é uma elipse. Formulada por Kepler, esta hipótese foi posteriormente provada por Newton. Quais propriedades são as mais interessantes? A resposta determina qual será a definição usada para nosso objeto.

Definição

O Apostol apresenta três possíveis definições de cônicas, e todos são equivalentes. Mas vamos usar a definição que faz mais uso do conceito de vetor, e coordenadas. Como as cônicas estão num plano podemos fazer todas as contas em V_2.

Definição: Se L é uma reta em V_2, F é um ponto fora de L e $e > 0$ um número real positivo, então o conjunto:

$$C = \{X : \|X - F\| = ed(X, L)\}$$

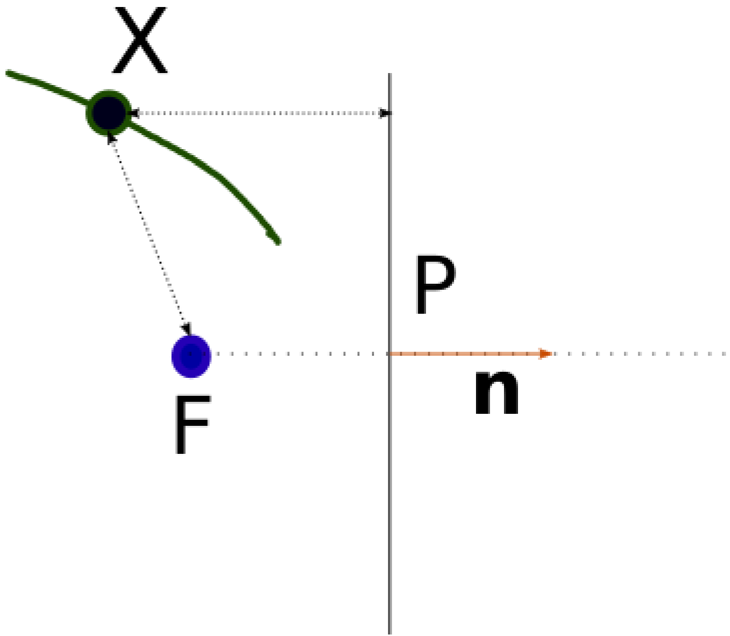
é uma cônica, e diremos que C é uma elípse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$

Como expressar $d(X, L)$

Nosso primeiro problema (exercício) é: Dado ponto qualquer P da reta L e N um vetor unitário, ortogonal à L, mostre que $d(x, L) = |(X - P) \cdot N|$

Escrevemos:

$$X - P = X - Q + Q - P$$
$$X - P = \pm d(X, L)N + Q - P \implies$$
$$(X - P) \cdot N = \pm d(X, L)$$


X
P
F
n

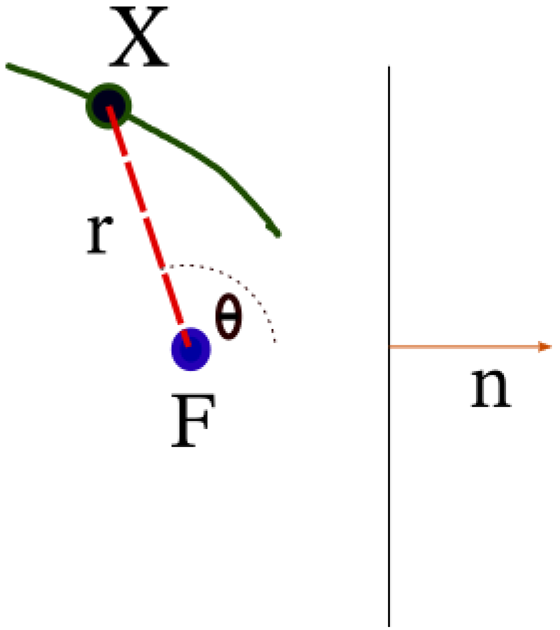
Na figura, n é um vetor unitário apontando para o lado contrário de F Então temos:

$$F - P = -d\mathrm{n} \ d > 0 \text{ e } F - P = (F - X) + (X - P)$$
$$(F - P) \cdot \mathrm{n} = (F - X) \cdot \mathrm{n} + (X - P) \cdot \mathrm{n}$$
$$-d = -(X - F) \cdot \mathrm{n} - d(X, L) \implies d(X, L) = |(X - F) \cdot \mathrm{n} - d|$$

Isto dá uma forma equivalente de definir a cônica onde não aparece diretamente a reta diretriz!

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot \mathrm{n} - d|$$

Equações polares



$$\|X - F\| = r \quad (X - F) \cdot \mathsf{n} = r\cos(\theta)$$
$$r = e|r\cos(\theta) - d|$$

Se $r\cos(\theta) - d <= 0$ então $|r\cos(\theta) - d| = d - r\cos(\theta)$ e a equação da cônica fica

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

No outro caso, se $r\cos(\theta) - d > 0$ teremos

$$r = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}$$

claramente isso só ocorre se $e > 1$, ou seja, só na hipérbole.

Equações cartesianas

Voltando às equações de definição das cônicas

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot \mathrm{n} - d|$$

Vamos assumir que temos simetria em relação à origem e elevar os lados ao quadrado.

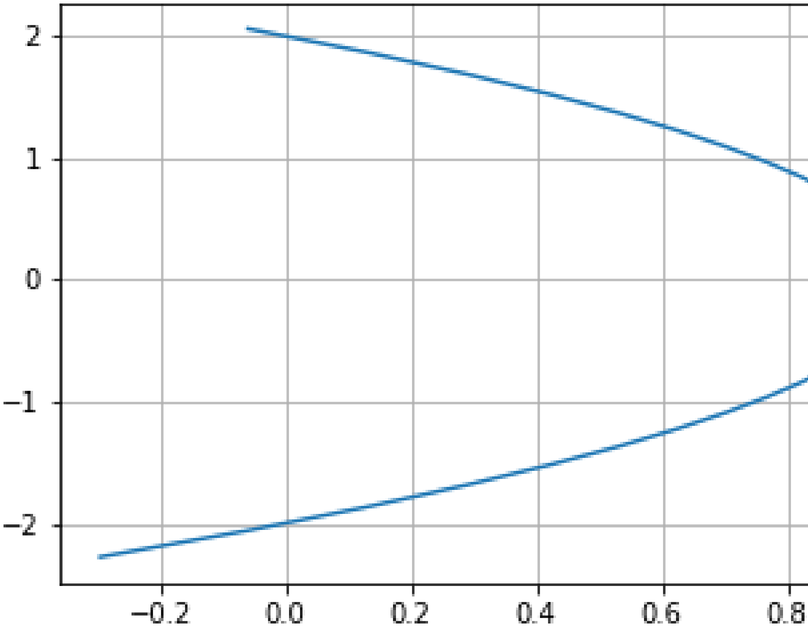
$$(X - F)^2 = e^2((X - F) \cdot \mathrm{n} - d)^2$$
$$\|X\|^2 - 2X \cdot F + \|F\|^2 = e^2(X. \cdot \mathrm{n})^2 + 2ea(X. \cdot \mathrm{n}) + a^2$$
$$a = ed + eF \cdot \mathrm{n}$$
$$\text{usando a simetria teremos}$$
$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X. \cdot \mathrm{n})^2 + a^2$$

Exercício 1

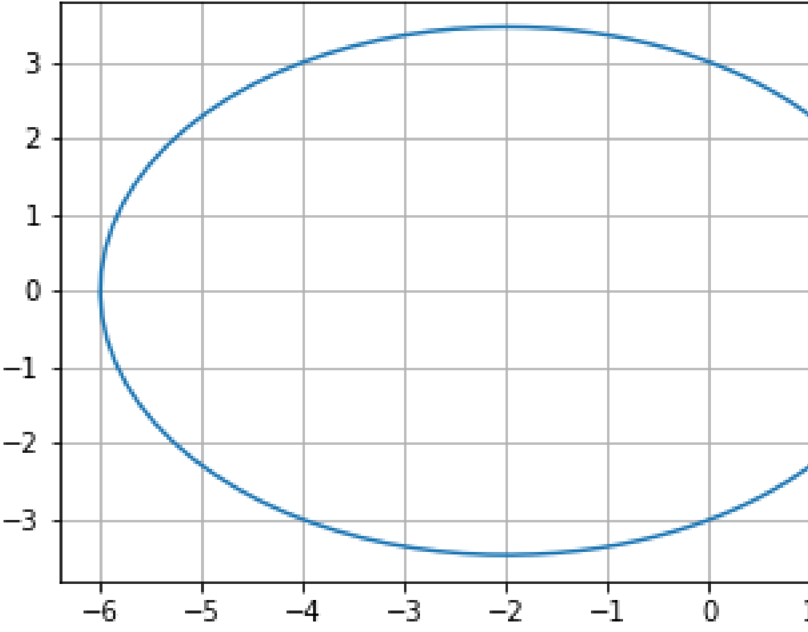
fazer o esboço da curva:

$$r = \frac{2}{1 + \cos\theta}$$
$$r = \frac{3}{1 + 0.5\cos(\theta)}$$

No primeiro caso temos uma paràbola ($e = 1$), com $d = 2$, e no segundo caso uma elipse ($e = 0.5$) com $d = 6$



2
1
0
−1
−2
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8


3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0

Achar a equação polar da cônica com $e = 1/2$ e diretriz $3x + 4y = 25$. (Foco em $(0, 0)$)

A reta diretriz passa por $(3,4)$, e também $(3,4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3,4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

A reta diretriz passa por $(3,4)$, e também $(3,4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3,4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

Aqui θ_0 é o ângulo que a reta normal à diretriz forma com i, ou seja $\cos(\theta_0) = 3/5$.