

Cônicas

MAP 2110 - Diurno

IME USP

14 de abril

Seções cônicas

Cônicas são curvas planas estudadas desde a antiga Grécia e que possuem muitas propriedades de interesse, principalmente na física. A parte, talvez, mais importante historicamente é a prova de que a trajetória dos planetas em torno do Sol é uma elipse. Formulada por Kepler, esta hipótese foi posteriormente provada por Newton. Quais propriedades são as mais interessantes? A resposta determina qual será a definição usada para nosso objeto.

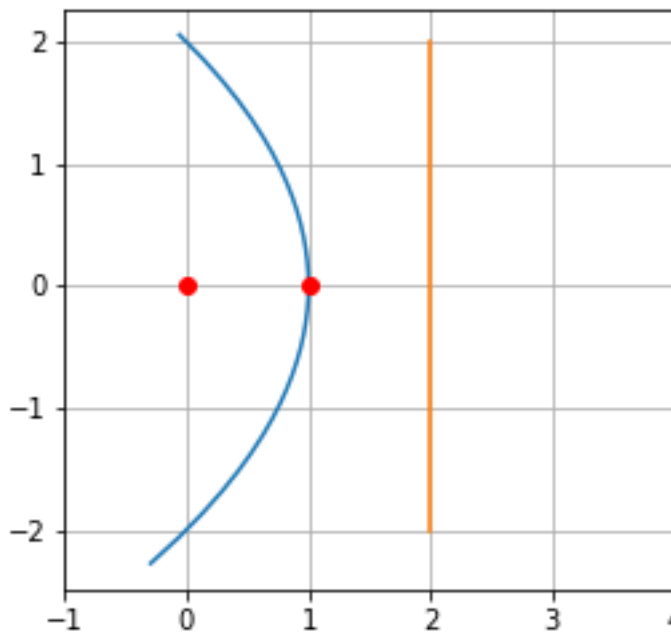
Definição

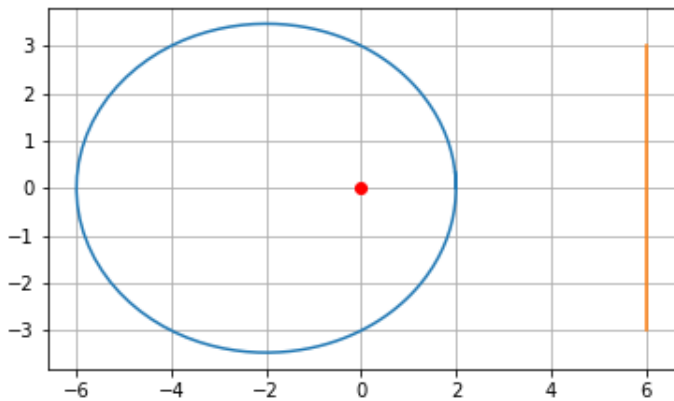
O Apostol apresenta três possíveis definições de cônicas, e todos são equivalentes. Mas vamos usar a definição que faz mais uso do conceito de vetor, e coordenadas. Como as cônicas estão num plano podemos fazer todas as contas em V_2 .

Definição: Se L é uma reta em V_2 , F é um ponto fora de L e $e > 0$ um número real positivo, então o conjunto:

$$C = \{X : \|X - F\| = ed(X, L)\}$$

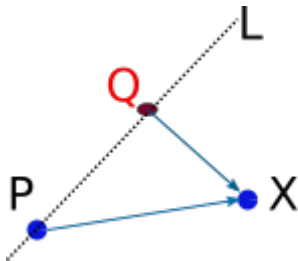
é uma cônica, e diremos que C é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$





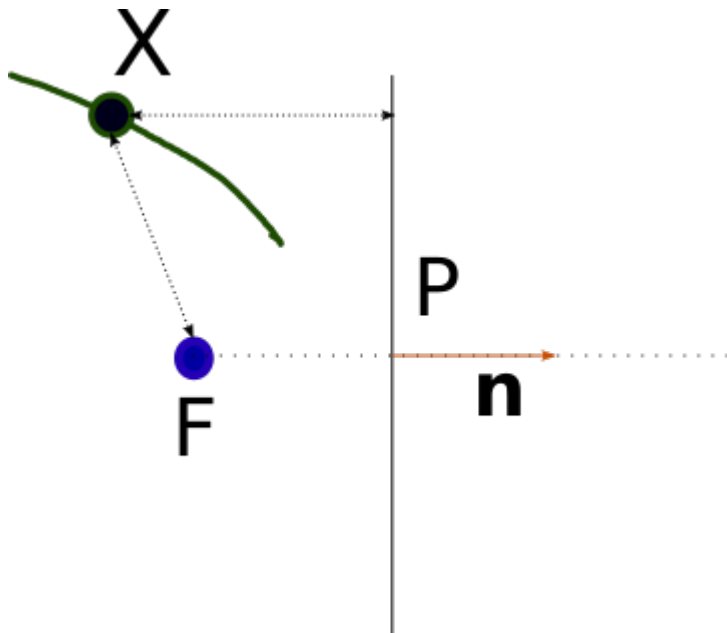
Como expressar $d(X, L)$

Nosso primeiro problema (exercício) é: Dado ponto qualquer P da reta L e N um vetor unitário, ortogonal à L , mostre que $d(x, L) = |(X - P) \cdot N|$



Escrevemos:

$$\begin{aligned}X - P &= X - Q + Q - P \\X - P &= \pm d(X, L)N + Q - P \implies \\(X - P) \cdot N &= \pm d(X, L)\end{aligned}$$



Na figura, n é um vetor unitário apontando para o lado contrário de F Então temos:

$$F - P = -dn \quad d > 0 \text{ e } F - P = (F - X) + (X - P)$$

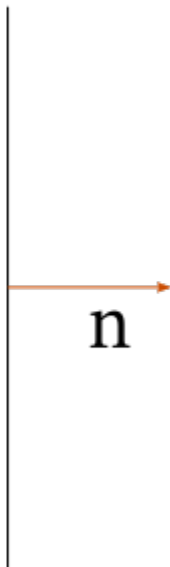
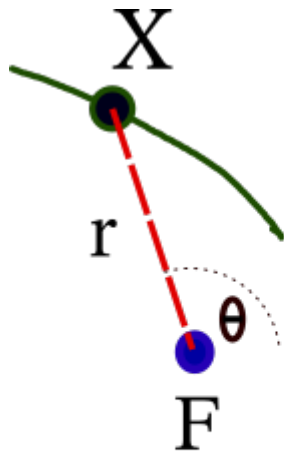
$$(F - P) \cdot n = (F - X) \cdot n + (X - P) \cdot n$$

$$-d = -(X - F) \cdot n - d(X, L) \implies d(X, L) = |(X - F) \cdot n - d|$$

Isto dá uma forma equivalente de definir a cônica onde não aparece diretamente a reta diretriz!

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot n - d|$$

Equações polares



$$\begin{aligned}\|X - F\| &= r (X - F) \cdot \mathbf{n} = r \cos(\theta) \\ r &= e|r \cos(\theta) - d|\end{aligned}$$

Se $r \cos(\theta) - d \leq 0$ então $|r \cos(\theta) - d| = d - r \cos(\theta)$ e a equação da cônica fica

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

No outro caso, se $r \cos(\theta) - d > 0$ teremos

$$r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1}$$

claramente isso só ocorre se $e > 1$, ou seja, só na hipérbole.

Equações cartesianas

Voltando às equações de definição das cônicas

$$\|X - F\| = e|(X - F) \cdot n - d|$$

Vamos assumir que temos simetria em relação à origem e elevar os lados ao quadrado.

$$\begin{aligned}(X - F)^2 &= e^2((X - F) \cdot n - d)^2 \\ \|X\|^2 - 2X \cdot F + \|F\|^2 &= e^2(X \cdot n)^2 + 2ea(X \cdot n) + a^2 \\ a &= ed + eF \cdot n\end{aligned}$$

usando a simetria teremos

$$\|X\|^2 + e^2a^2 = e^2(X \cdot n)^2 + a^2$$

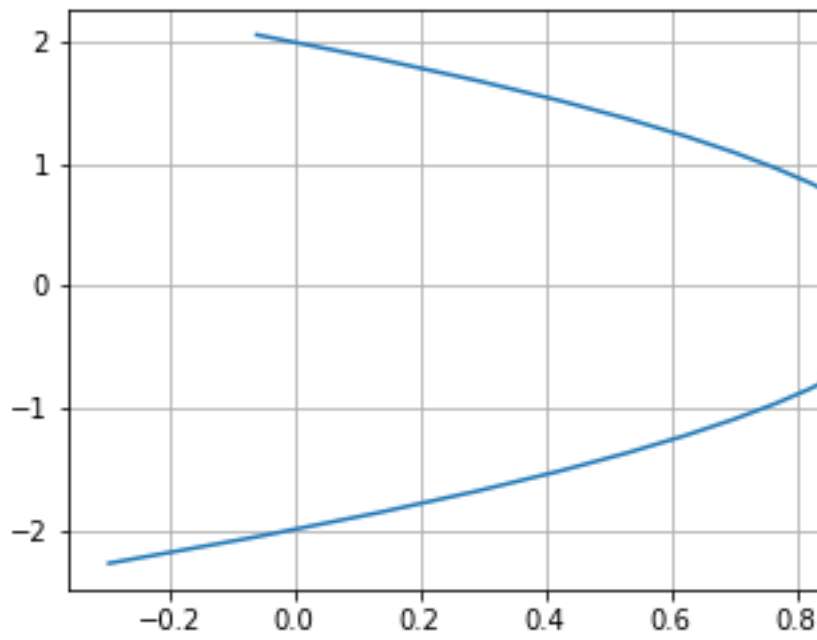
Exercício 1

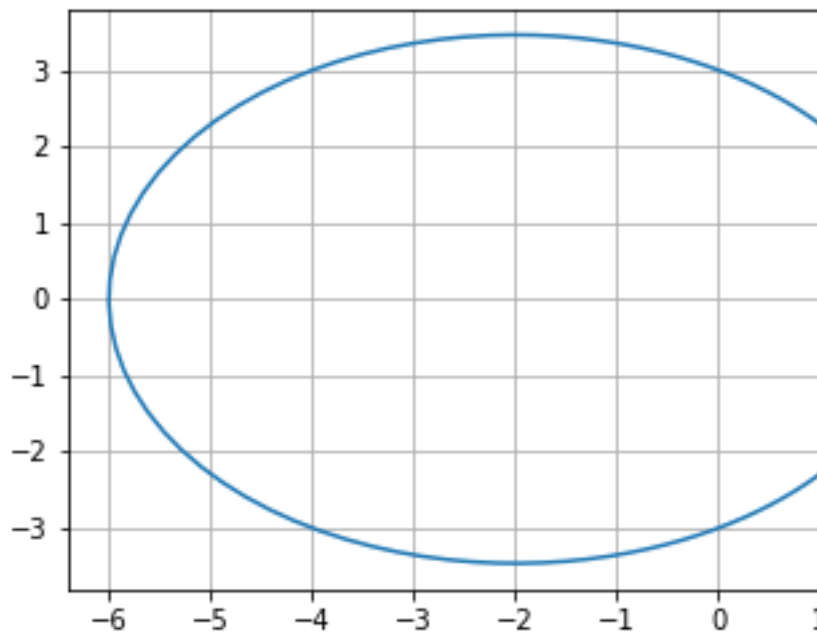
fazer o esboço da curva:

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$$

$$r = \frac{3}{1 + 0.5 \cos(\theta)}$$

No primeiro caso temos uma parábola ($e = 1$), com $d = 2$, e no segundo caso uma elipse ($e = 0.5$) com $d = 6$





Achar a equação polar da cônica com $e = 1/2$ e diretriz $3x + 4y = 25$. (Foco em $(0, 0)$)

A reta diretriz passa por $(3, 4)$, e também $(3, 4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3, 4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

A reta diretriz passa por $(3, 4)$, e também $(3, 4)$ é um vetor normal à diretriz. Temos então que $d = 5 = \|(3, 4)\|$ como $e = 0.5$ a equação polar fica

$$r = \frac{2.5}{1 + 0.5 * \cos(\theta - \theta_0)}$$

Aqui θ_0 é o ângulo que a reta normal à diretriz forma com i , ou seja $\cos(\theta_0) = 3/5$.