

Produto Vetorial e Cônicas

MAP 2110 - Diurno

IME USP

7 de abril

Definição do Produto Vetorial

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Exemplos

Uma reta L em V_2 contém os pontos $P = (-3, 1)$ e $Q = (1, 1)$,
quais dos seguintes pontos também estão em L

A $(0, 1, 2) \times (1, 0, -1)$

B $(i \times k) \times j$

C $(i \times i) \times j$

D $(i + 2j) \times (2i - k)$

Propiedades

- ▶ $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- ▶ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- ▶ $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$
- ▶ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Exercício

Sejam dados os vetores $\vec{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\vec{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, encontrar um vetor \vec{b} tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Esta solução é única?

solução

Seja $\vec{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ Então podemos escrever usando a propriedade distributiva :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times b_1\mathbf{i} + \vec{a} \times b_2\mathbf{j} + \vec{a} \times b_3\mathbf{k}$$

usamos que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-b_3 - 2b_2)\mathbf{i} + (2b_1 - 2b_3)\mathbf{j} + (b_1 + 2b_2)\mathbf{k}$$

Comparando os vetores temos o sistema

$$-2b_2 - b_3 = 3$$

$$2b_1 - 2b_3 = 4$$

$$b_1 + 2b_2 = -1$$

O sistema é indeterminado e podemos escrever as soluções como

$$\vec{b} = (2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}) + b_3(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Para que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ a solução é única ($b_3 = \frac{-11}{9}$)

Definição

O Apostol apresenta três possíveis definições de cônicas, e todos são equivalentes. Mas vamos usar a definição que faz mais uso do conceito de vetor. Nossa situação agora num plano. Então podemos fazer todas as contas em V_2 .

Definição: Se L é uma reta em V_2 , F é um ponto fora de L e $e > 0$ um número real positivo, então o conjunto:

$$C = \{X : \|X - F\| = ed(X, L)\}$$

é uma cônica, e diremos que C é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$

Como expressar $d(X, L)$

Exercício 4

solução

Equação do Plano

Solução

solução