Exercício produto vetorial

MAP 2110 - Diurno

IME USP

10 de abril

Definição do Produto Vetorial

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Propriedades

- $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Exercício 15 do Apostol

Se A e B são vetores ortogonais e de norma 1 em V_3. Seja P um vetor que satisfaz a equação $P \times B = A - P$. Mostre cada uma das afirmações abaixo:

a P é ortogonal a B e mede $\sqrt{2}/2$.

b P, B e $P \times B$ formam uma base de V_3.

c $(P \times B) \times B = -P$

d $P = \frac{1}{2}(A - A \times B)$

solução

$$P \times B = A - P$$

$$(P \times B) \cdot B = (A - P) \cdot B = A \cdot B - P \cdot B$$

$$P \cdot B = 0$$

Agora

$$P = A - P \times B$$

Agora

$$P = A - P \times B$$

Então

$$\|P\|^2 = P \cdot P = A \cdot P$$

Agora

$$P = A - P \times B$$

Então

$$\|P\|^2 = P \cdot P = A \cdot P$$

Lembrando das propriedades do produto vetorial

$$\|P \times B\|^2 = \|P\|^2 \|B\|^2 - P \cdot B = \|P\|^2$$

e

$$\|P\|^2 = \|P \times B\|^2 = \|A - P\|^2 = \|A\|^2 - 2A \cdot P + \|P\|^2$$

Então $A \cdot P = 1/2$ e $\|P\| = \sqrt{2}/2$

Item b

P B e $P \times B$ são vetores ortogonais, LI, portanto formam uma base de V_3

Item c

$$(P \times B) \times B = aP + bB + c(P \times B)$$

Item c

$$(P \times B) \times B = aP + bB + c(P \times B)$$

$$(P \times B) \times B = aP$$

Item c

$$(P \times B) \times B = aP + bB + c(P \times B)$$

$$(P \times B) \times B = aP$$

tomando a norma dos dois lados temos

$$\|(P \times B)\|\|B\| = |a|\|P\|$$

ou seja

$$a = \pm 1$$

item c e d

Se $a = 1$ teriamos

$$(P \times B) \times B = P$$

e

$$P = (P \times B) \times B = (A - P) \times B = A \times B - (P \times B) = (A \times B) - A + P$$

oque acarretaria

$$A \times B = A \implies A = 0$$

contradizendo a hipótese.

item c e d

Se $a = 1$ teriamos

$$(P \times B) \times B = P$$

e

$$P = (P \times B) \times B = (A - P) \times B = A \times B - (P \times B) = (A \times B) - A + P$$

oque acarretaria

$$A \times B = A \implies A = 0$$

contradizendo a hipótese. então deve-se ter $a = -1$ e

$$-P = (A \times B) - A + P$$

e dai segue o resultados