Korrelation & Regression

Stephanie Geise

Table of contents

Zur Analyse von Zusammenhängen bei zwei metrischen Variablen gibt es verschiedene statistische Verfahren. In diesem Teilkapitel schauen wir uns die *Korrelationsanalyse* sowie die *einfache lineare Regression* an.

1 Die Korrelationsanalyse

Die Korrelationsanalyse ist eine schnelle und einfache statistische Methode, um den Zusammenhang zwischen zwei oder mehr metrischen Variablen zu untersuchen. Ziel der Korrelationsanalyse ist, die Richtung (positiv oder negativ) und die Stärke eines linearen Zusammenhangs

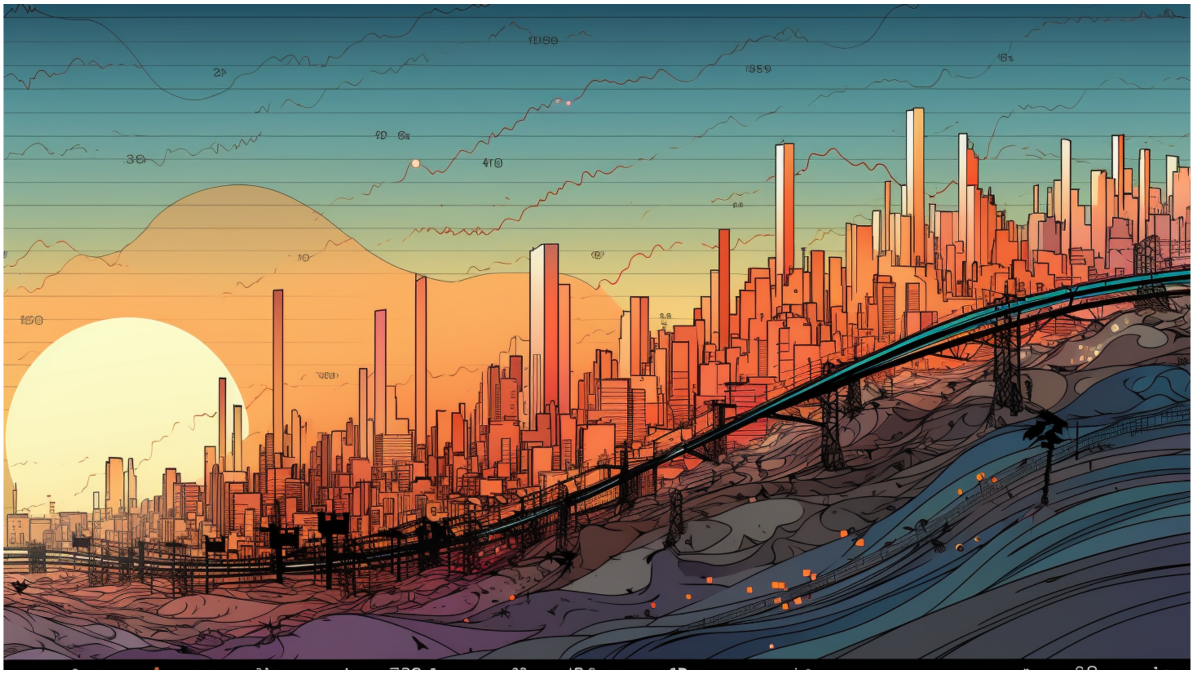


Figure 1: The Highway as regression curve, Bild generiert von Midjourney

zwischen den Variablen zu bestimmen. Als statistischer Kennwert wird ein *Korrelationskoeffizient*, zum Beispiel der *Pearson-Korrelationskoeffizient* (auch Pearson's r) ermittelt. Der Korrelationskoeffizient gibt an, wie sehr die Werte einer Variable mit den Werten einer anderen Variable zusammenhängen, d.h. *korrelieren.* Er nimmt Werte zwischen -1 und 1 an. Ein *hoher* Korrelationskoeffizient (nahe 1 oder -1) deutet auf einen *starken Zusammenhang* hin, während ein *niedriger* Koeffizient (nahe 0) auf einen *schwachen* oder *keinen Zusammenhang* hindeutet. Zudem deutet ein *positiver* Korrelationskoeffizient auf einen *positiven Zusammenhang* hin, während ein *negativer* Koeffizient auf einen *negativen Zusammenhang* verweist.

Der Zusammenhang zwischen den untersuchten Variablen wird dabei analysiert, *ohne* dass eine Richtung spezifiziert wird - es muss also nicht die eine Variable als unabhängig, und die andere als abhängige Variable festgelegt werden. Die Korrelationsanalyse kann vielfältig eingesetzt werden. Sie ist allerdings etwas empfindlich gegenüber Ausreißern und setzt einen linearen Zusammenhang voraus.

Vorsicht! Lasst euch nicht verwirren: Der *Pearson-Korrelationskoeffizient* und die *Rangkorrelation nach Pearson* sind unterschiedliche Kennwerte, die nur ähnlich klingen. Der *Pearson-Korrelationskoeffizient* misst den linearen Zusammenhang zwischen den tatsächlichen Messwerten, während die *Rangkorrelation nach Pearson* (auch als *Spearman-Korrelationskoeffizient* bezeichnet) den monotonen Zusammenhang zwischen den Rängen der Daten untersucht. Daher ist die Rangkorrelation besser geeignet, wenn der Zusammenhang *nicht-linear* ist oder wenn *Ausreißer in den Daten* vorhanden sind. Nun soll es aber um die Analyse eines *linearen*

Zusammenhangs zwischen zwei metrischen Variablen gehen. Dazu widmen wir uns nun der Korrelationsanalyse mittels Pearson-Korrelationskoeffizient.

Mit dieser Methode wollen wir untersuchen, ob es einen Zusammenhang zwischen der metrischen Variable tägliche Fernsehnutzung in Minuten (`lm02`) sowie der quasi-metrischen Variable Vertrauen ins Fernsehen (`pt09`) gibt. Wir vermuten, dass es einen positiven Zusammenhang gibt: Wer ein höheres Vertrauen in das Fernsehen hat, schaut auch mehr fern.

1.1 Data Management

Um das zu prüfen, müssen wir zunächst wieder unsere Pakete und Allbus-Daten laden und aufbereiten. Los geht's!

```
if(!require("pacman")) {install.packages("pacman");library(pacman)}
p_load(tidyverse, haven, dplyr)
theme_set(theme_classic())
```

```
daten = haven::read_dta("Datensatz/Allbus_2021.dta")
```

Dann erzeugen wir einen neuen Teildatensatz, benennen die benötigten Variablen in "TV_Konsum" und "TV_Vertrauen" um und selektieren die fehlende Werte (z.B. -9=Keine Angabe) mittels Filter-Funktion.

```
daten_neu <- daten %>%
  rename(TV_Konsum = lm02)%>%
  rename(TV_Vertrauen= pt09)%>%
  filter(between(TV_Konsum, 0, 1500))%>%
  filter(between(TV_Vertrauen, 1, 7))
```

1.2 Berechnen der Korrelation

Nun berechnen wir, ob eine Korrelation zwischen beiden Variablen vorliegt. Dazu nutzen wir die Funktion `cor()`. Mit dem `print`-Befehl geben wir uns den Wert aus:

```
korrelation <- daten_neu %>%
  summarize(correlation = cor(TV_Konsum, TV_Vertrauen, use = "complete.obs"))
print(korrelation)
```

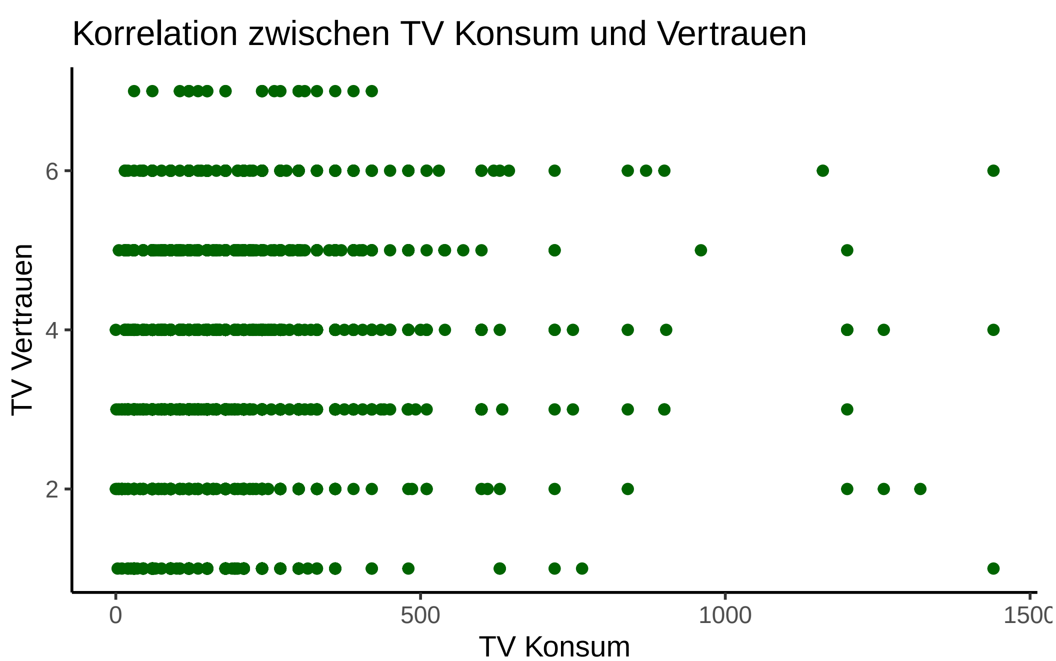
```
# A tibble: 1 x 1
  correlation
        <dbl>
1       0.114
```

Schauen wir uns den (sehr übersichtlichen) Output an: Wie erhalten einen Korrelationskoeffizient von 0,113903. Das bedeutet, dass zwischen den beiden Variablen TV_Konsum und TV_Vertrauen ein schwacher positiver linearer Zusammenhang besteht. Höhere Werte in einer Variable gehen also tendenziell mit höheren Werten in der anderen Variable einher. Jedoch ist die Korrelation relativ niedrig, was darauf hindeutet, dass der Zusammenhang zwischen den beiden Variablen nicht besonders stark ist.

1.3 Visualisierung der Korrelation

Um die Korrelation zwischen den Variablen "TV_Konsum" und "TV_Vertrauen" zu visualisieren, können wir mit dem ggplot2-Paket ein Scatterplot erstellen:

```
scatterplot <- ggplot(daten_neu, aes(x = TV_Konsum, y = TV_Vertrauen)) +
  geom_point(color = "darkgreen") +
  labs(x = "TV Konsum", y = "TV Vertrauen", title = "Korrelation zwischen TV Konsum und Vert
print(scatterplot)
```



Hier können wir den oben bereits ermittelten Befund noch einmal grafisch inspizieren. Der leichte positive Zusammenhang zwischen dem Vertrauen in die Insitution Fernsehen und der täglichen Fernsehnutzung zeigt sich ganz schön.

Exkurs: Übungsaufgabe Korrelationsanalyse

Ihr könnt zur Übung noch eine Korrelationsanalyse durchführen, um den Zusammenhang zwischen der täglichen Fernsehnutzung in Minuten (umbenannt in "TV_Konsum") und der quasi-metrisch gemessenen Einschätzung, ob die Entwicklung der Kriminalität in Deutschland zu- oder abgenommen hat (`cf03`; 1=hat stark zugenommen; 5=hat stark abgenommen). Wenn wir der Kultivierungsthese folgen, vermuten wir, dass ein erhöhter Fernsehkonsum zu einer stärkeren Wahrnehmung der Kriminalität führt. Entsprechend hätten wir ins unserem Fall (wegen der gegenläufigen Kodierung der Variablen) einen negativen linearen Zusammenhang. Dazu müsst ihr zuerst wieder einen Teildatensatz mit den benötigten Variablen erzeugen, diese ggf. umbenennen und filtern. Dann ermittelt ihr die Korrelation beider Variablen.

1.4 Data Management

```
daten_neu2 <- daten %>%
  rename(TV_Konsum = lm02)%>%
  rename(Kriminalitätsprognose= cf03)%>%
  filter(between(TV_Konsum, 0, 1500))%>%
  filter(between(Kriminalitätsprognose, 1, 5))
```

Nun berechnen wir, ob eine Korrelation zwischen beiden Variablen vorliegt. Dazu nutzen wir die Funktion `cor()`. Mit dem `print`-Befehl geben wir uns den Wert aus:

1.5 Berechnung und Ausgabe des Korrelationskoeffizienten

```
korrelation <- daten_neu2 %>%
  summarize(correlation = cor(TV_Konsum, Kriminalitätsprognose, use = "complete.obs"))
print(korrelation)
```

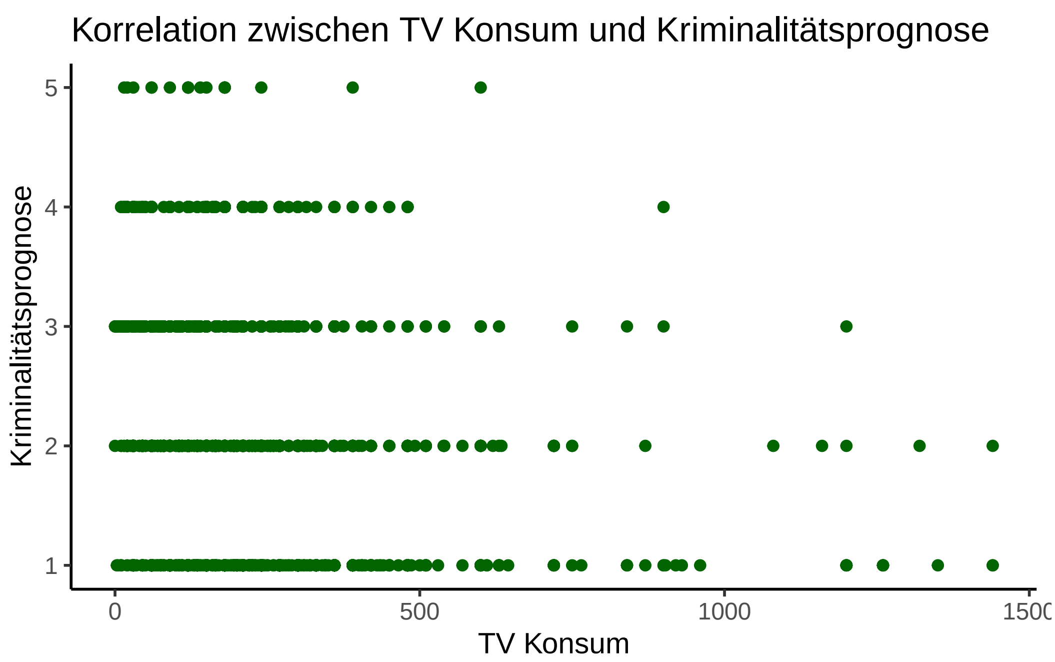
```
# A tibble: 1 x 1
  correlation
        <dbl>
1      -0.196
```

Betrachten wir den Output: Der Korrelationskoeffizient von -0,196 deutet auf einen schwachen negativen linearen Zusammenhang zwischen der "täglichen Fernsehnutzung in Minuten" und der Einschätzung zur Entwicklung der Kriminalität in Deutschland hin.

ACHTUNG! Zur Interpretation müssen Sie nun aber auch berücksichtigen, wie die Werte der Variable gelabelt sind: Ein höherer Wert bedeutet, dass man eine Abnahme der Kriminalitätsentwicklung vermutet (1=hat stark zugenommen; 5=hat stark abgenommen). Der negative Korrelationskoeffizient bedeutet dann, dass höhere Werte in der "täglichen Fernsehnutzung in Minuten" tendenziell mit niedrigeren Werten in der Einschätzung zur Kriminalitätsentwicklung korrelieren. Oder anders gesagt: Personen, die mehr Fernsehen schauen, tendieren eher zur Annahme, dass die Kriminalität in Deutschland weniger zugenommen oder sogar abgenommen hat.
So oder so ist zu beachten, dass der Korrelationskoeffizient nur den linearen Zusammenhang erfasst und keine Aussagen zur Kausalitäten des Zusammenhangs macht. Korrelation ist nicht Kausalität!
Zur grafischen Illustration erstellen wir nun wieder ein Scatterplot:

1.6 Visualisierung der Korrelation mit Hilfe eines Scatterplots

```
scatterplot <- ggplot(daten_neu2, aes(x = TV_Konsum, y = Kriminalitätsprognose)) +
  geom_point(color = "darkgreen") +
  labs(x = "TV Konsum", y = "Kriminalitätsprognose", title = "Korrelation zwischen TV Konsu
print(scatterplot)
```



2 Die lineare Regressionsanalyse

Die *lineare Regression* untersucht den Zusammenhang zwischen einer *abhängigen Variable* und mindestens einer *unabhängigen Variable*. Sie versucht, eine mathematische Beziehung zwischen den Variablen zu modellieren, die durch eine Linie (in einfachen linearen Regressionen) oder eine Ebene (in multiplen linearen Regressionen) repräsentiert wird. Die dahinterliegende "mathematische Idee" der linearen Regression besteht darin, die bestmögliche Anpassung der Daten an das Modell zu erreichen, um die Vorhersage der abhängigen Variable basierend auf den unabhängigen Variablen zu ermöglichen. Dazu wird ein *Regressionskoeffizient* für jede unabhängige Variable geschätzt, um ihren Einfluss auf die abhängige Variable zu quantifizieren.

Ziel der Regressionsanalyse ist es also, die Beziehung zwischen einer *abhängigen Variable* (auch erklärte Variable, Regressand oder Prognosevariable genannt) und einer oder mehreren *unabhängigen Variablen* (oft auch erklärende Variable, Regressor oder Prädiktorvariable) zu analysieren, um Zusammenhänge quantitativ zu beschreiben und zu erklären und/oder Werte der abhängigen Variable mit Hilfe der unabhängige Variable (des Prädiktors) zu prognostizieren. Mit Hilfe der Regressionsanalyse können drei Arten von Fragestellungen untersucht werden: 1) Ursachenanalyse: Gibt es einen Zusammenhang zwischen der unabhängigen und der abhängigen Variable? Wie stark ist dieser? 2) Wirkungsanalyse: Wie verändert sich die abhängige Variable bei einer Änderung der unabhängigen Variablen? 3) Prognose: Können die Messwerte der abhängigen Variable durch die Werte der unabhängigen Variable vorhergesagt werden?

Die *einfache lineare Regression* wird angewandt, wenn geprüft werden soll, ob ein (als linear vermuteter) Zusammenhang zwischen einer abhängigen metrischen Variable und einer unabhängigen metrischen Variable besteht. Da sie zwei metrische Variablen integriert, wird sie auch als *bivariate Regression* bezeichnet. In diesem Teilkapitel lernen wir die *einfache lineare Regression* auf Grundlage der Allbus-Daten kennen. In der nächsten Sitzung gehen wir dann näher auf die notwendige Prüfung der *Voraussetzungen einer Regressionsanalyse* ein und lernen auch noch die *multiple lineare Regression* kennen.

Um die Durchführung der linearen Regression an einem Beispiel nachzuvollziehen, stellen wir zunächst eine gerichtete Hypothese auf, die den Einfluss einer unabhängigen metrischen Variable auf eine abhängige metrische Variable spezifiziert. Hierzu schauen wir uns den Zusammenhang zwischen dem Alter (`age`) sowie der täglichen Fernsehnutzung in Minuten (`lm02`) an. Dazu vermuten wir: Das Alter erklärt die Intensität der täglichen Fernsehnutzung in Minuten.

Mit Hilfe der Regression wollen wir nun die oben formulierte Annahme prüfen, dass das Alter die täglichen Fernsehnutzung in Minuten (umbenannt in TV_Konsum) erklären kann. Beides sind metrische Variablen und erfüllen damit die Voraussetzung, dass eine Regression gerechnet werden kann. (Achtung: auch kategorische Variablen können bei der Regressionsanalyse grundsätzlich eingesetzt werden, sie müssen dann aber durch *Dummy-Coding* passend gemacht werden, dazu aber später mehr).

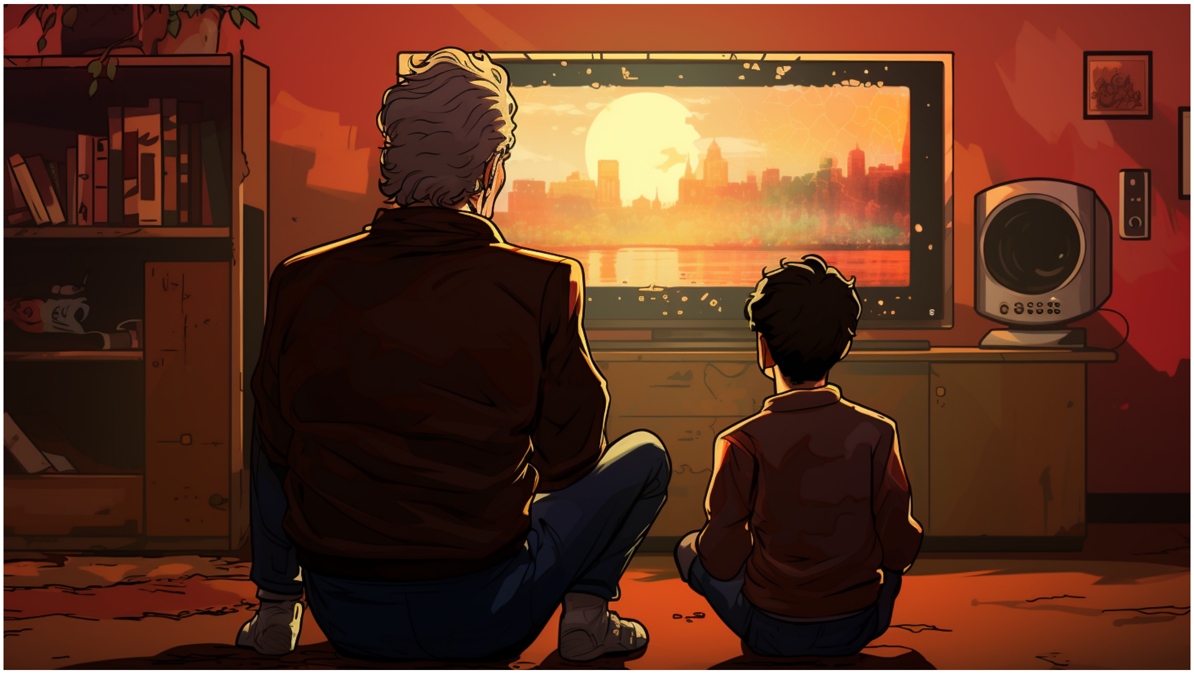


Figure 2: Grafik: Kann das Alter die Fernsehnutzung erklären? (Picture generated by midjourney)

2.1 Data Management

Wie immer besteht der erste Schritt nun darin, die benötigten Pakete sowie den Datensatz zu laden. Für die lineare Regression kommen zwei neue Pakete hinzu: Wir laden das Paket `broom`, um die normale Ausgabe der Funktion `lm` (für die Berechnung linearer Modelle) in ein etwas anschaulicheres Format umwandeln zu können sowie das Paket `performance`, dass uns später zusätzlich einige Indikatoren ausgibt. Das Paket `see` kommt außerdem dazu, weil es uns eine toolbox für die Visualisierung der Zusammenhänge bereitstellt.

```
if(!require("pacman")) {install.packages("pacman");library(pacman)}
p_load(tidyverse, haven, dplyr, broom, lm.beta, performance, see)

theme_set(theme_minimal())                                          ①
options(scipen = 999)                                               ②
```

① Visualisierungshintergrund der Grafiken in ggplot festlegen
② Anzeige der p-Werte als Zahlen mit Nachkommastellen einstellen

Anschließend laden wir unseren Datensatz.

```
daten = haven::read_dta("Datensatz/Allbus_2021.dta")
```

Für den Teildatensatz bennenen wir die Variablen `lm02` und `age` um und filtern die missings heraus (z.B. -9=Keine Angabe):

```
daten <- daten %>%
  rename(Alter = age)%>%
  rename(TV_Konsum = lm02)%>%
  filter(between(Alter, 18, 100))%>%
  filter(between(TV_Konsum, 0, 1500))
```

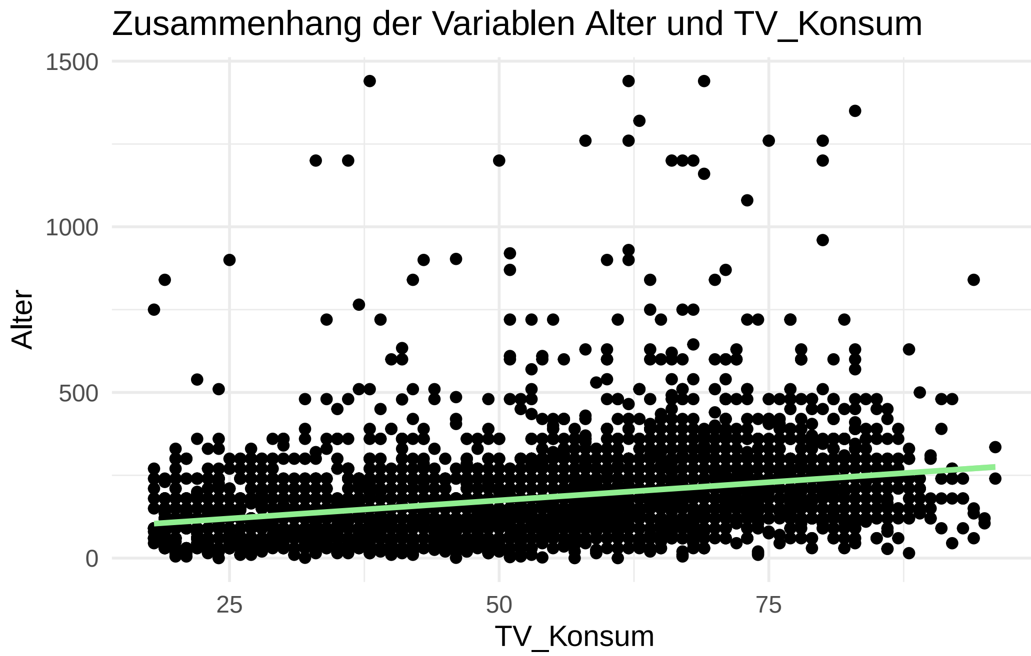
2.2 Grafische Prüfung der Voraussetzungen

Bevor wir die Regressionsanalyse durchführen, verschaffen wir uns zunächst einmal einen Überblick über die Daten - dazu visualisieren wir den Zusammenhang zwischen dem Alter sowie der täglichen Fernsehnutzung. Mit Hilfe der Grafik können wir auch die erste Voraussetzung prüfen, nämlich dass es einen *linearen Zusammenhang* zwischen beiden Variablen gibt.

ACHTUNG! Für die Regressionsanalyse müssen noch weitere Voraussetzungen geprüft werden (insb. Homoskedastizität der Residuen; Unabhängigkeit der Residuen; Normalverteilung der Residuen; keine Ausreißer in den Daten). An dieser Stelle klammern wir die anderen Voraussetzungsprüfungen aber vorerst aus, und kommen in der nächsten Sitzung darauf zurück (das ist sonst zu viel auf einmal).

Zur visuellen Inspektion, ob der Zusammenhang zwischen unseren beiden Variablen linear ist, erstellen wir nun mit dem Befehl `geom_point` ein Punktdiagramm mit den Variablen Alter und TV_Konsum. Praktischerweise ist die Regressionsformel schon in ggplot integriert: Der Befehl `geom_smooth` erzeugt eine Trendlinie nach dem linear model (method = lm), die die Beziehung von y (=Alter) und x (=TV_Konsum) abbildet. Das Ergebnis ist eine Linie nach einer linearen Gleichung, die den Daten so eng wie möglich folgt. Mit dem Befehl `ggtitle` legen wir dann noch in den Klammern den Titel der Grafik fest, und mit `xlab` und `ylab` ergänzen wir die Achsenbeschriftung.

```
ggplot(daten, aes(Alter, TV_Konsum)) +
  geom_point() +
  geom_smooth(method = lm, formula = "y ~ x", color = "lightgreen") +
  ggtitle("Zusammenhang der Variablen Alter und TV_Konsum") +
  xlab("TV_Konsum") + ylab("Alter")
```



Die grafische Darstellung legt uns einen positiven und linearen Zusammenhang zwischen Alter und Fernsehnutzung nahe: mit zunehmendem Alter steigt die Nutzungsdauer. Damit scheint eine wichtige Voraussetzung der Regressionsanalyse, dass der Zusammenhang an sich linear ist, erfüllt.

2.3 Durchführung der einfachen linearen Regression

Ob diese Beobachtung auch statistisch belastbar ist, wollen wir jetzt mit der *einfachen linearen Regression* prüfen. Dazu nutzen wir die Funktion `lm()`. Die Funktion lm steht für "linear model". In den Klammern benennen wir zunächst die abhängige Variable (hier: `TV_Konsum`), dann kommt eine Tilde (d.h. "wird definiert durch") und der Bezug auf unsere unabhängige Variable (hier: `Alter`). Die Schreibweise y ~ x ist die Formel-Schreibweise in R; in diesem Fall besagt sie, dass y (`TV_Konsum`) abhängig von x (`Alter`) ist. Nach dem Komma folgt dann die Benennung des Datensatzes auf den die lm-Funktion angewendet werden soll. Zum Schluss lassen wir uns das Modell ausgeben.

Der Modelloutput von `lm` ähnelt dem der schon behandelten Hypothesentests; enthält aber noch weitere Eckdaten wie die Effektstärke, das Signifikanzniveau oder die Erklärungsstärke des Modells.

```
model <- lm(TV_Konsum ~ Alter, data = daten)
print(model)
```

```
Call:
lm(formula = TV_Konsum ~ Alter, data = daten)

Coefficients:
(Intercept)        Alter
     64.644        2.193
```

Da dieser Output sehr, sehr sparsam und für uns noch wenig aussagekräftig ist, ergänzen wir ihn nun mit dem bekannten `summary`-Befehl, den wir auf unser Modell anwenden. Die dann erscheinende Ausgabe ist das "Herzstück" unserer Regressionsanalyse (insbesondere, wenn sie um die standardisierten B-Koeffizienten erweitert wird - dazu kommen wir aber unten noch). Jetzt nutzen wir erst einmal die `summary`-Funktion, und wir erhalten im Output einen guten Überblick über unser Regressionsmodell:

```
summary(model)
```

```
Call:
lm(formula = TV_Konsum ~ Alter, data = daten)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-242.61  -67.44  -22.09   35.02 1292.03

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value            Pr(>|t|)
(Intercept)  64.6438     5.6890   11.36 <0.0000000000000002 ***
Alter         2.1928     0.1007   21.77 <0.0000000000000002 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 122.5 on 4927 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.08778,   Adjusted R-squared:  0.0876
F-statistic: 474.1 on 1 and 4927 DF,  p-value: < 0.00000000000000022
```

2.4 Interpretation der Ergebnisse

Unter *Call* wird zunächst noch einmal das Regresssionsmodell beschrieben, das wir hier berechnet haben. In diesem versuchen wir auf Basis des Datensatzes "daten" die abhängige Variable "TV_Konsum" durch die unabhängige Variable "Alter" zu erklären.

Unter *Resdiuen* erhalten wir Informationen zur Verteilung der Residuen. Diese geben die Abweichung der beobachteten Werte von den durch das Regressionsmodell erwarteten Werten an.

Das *Intercept* definiert den Schnittpunkt der Regressionsgeraden mit der y-Achse (theoretischer Wert für y, wenn x den Wert 0 annimmt).

Die *Estimates* sind die unstandardisierte b-Werte. Das sind die Werte, die zur Vorhersage in die Regressionsgleichung eingetragen werden (könnten).

Mit *St.error* wird der Standard-Fehler der unstandardisierten b-Werte ausgegeben.

Der *t-value* gibt den t-Wert des Modells an (Koeffizient / Standardfehler)

Der *p-value* ist für uns von besonderem Interesse - das ist der Signfikanzwert des Modells (unten mit Signfikanzsschwellen) bzw. des statistischen Zusammenhangs

Auch beide *R-Werte* (*R2*, *Adjusted R2*) sind von zentraler Bedeutung für die Interpretation: *R2* gibt uns die erklärte Gesamtvarianz des Modells der abhängigen Variable an, also die "Erklärungskraft" der unabhängigen Variable Alter auf die abhängige Internetnutzung. Zur Interpretation bietet es sich an, R2 als Prozentwert mit 100 zu multiplizieren. Wir können hier dann daraus lesen, dass das Alter (8,8) Prozent der Varianz der TV-Nutzung erklärt. Das ist nicht super viel, aber auch nicht nichts. Wir können daraus aber auch ableiten, dass - neben dem Alter - noch andere Einflussfaktoren die Intensität der Fernsehnutzung mitbestimmen müssen. Übrigens: Das R2 könnte theoretisch maximal den Wert 1 annehmen, dann hätten wir eine 100% Erklärung der abhängigen Variable durch die unabhängige Variable (das kommt in der Realität aber fast nicht vor).

Wie der Name schon sagt bezeichnet *Adjusted R2* die Anpassung des Modells, wobei für die Anzahl der aufgenommenen Variablen korrigiert wird ("Strafterm für viele aufgenommene Variablen"). Das Adjusted R2 ist daher immer schlechter als R2.

Auch die *F-Statistik* ist wichtig: Sie gibt uns nämlich die Signfikanz des Gesamtmodells an (nicht einzelner Variablen wie bei R2!)

2.5 Inhaltliche Interpretation des Outputs: Was bedeutet das jetzt also alles?

Der Output zeigt uns: Das Alter hat einen positiven Einfluss auf die tägliche Fernsehnutzung in Minuten. Je älter ein Nutzer ist, desto mehr nutzt er das Fernsehen. Die Regressionsanalyse lässt dabei auch eine Quantifizierung dieses Zusammenhangs zu: Mit jeder Einheit, in der die unabhängige Variable Alter steigt (hier: mit jedem Jahr Alter), nimmt die unabhängige Variable TV-Konsum um 2,19 Messeinheiten (hier: Minuten) zu. Dieser Zusammenhang ist mit $p > .05$ statistisch signifikant.

Wie gebe ich die Ergebnisse korrekt an?

Die Ergebnisse von Regressionsanalysen werden meistens in einer Tabelle dargestellt. Für die Angabe im Text wird folgendes gebraucht:
den R^2-Wert (das Bestimmungskoeffizient)
den F-Wert (auch als F-Statistik bezeichnet)
die Freiheitsgrade in Klammern
den p-Wert
Das Format ist normalerweise:

> ***Beispiel:*** Das Alter beeinflusst die Dauer der Fernsehnutzung, $R^2 = .08$, $F(1, 4927) = 474.1$, $p = .000$.

2.6 Vorhersage von Werten auf Basis des Modells

Da bei der Regression eine lineare Funktion geschätzt wird, können wir anhand der b-Werte und des Intercepts auch Vorhersagen für bestimmte Fälle treffen. Das ist eine der *coolen Superkräfte* der Regressionsanalyse :) (Das gilt aber streng genommen nur, wenn das zu Grunde liegende Sample repräsentativ ist und das Modell sowie die Parameter signifikant sind).

Zur Prognose von erwarteten Werten der abhängigen Variable (TV_Konsum) auf Basis von gegebenen Werten der unabhänigen Variable (Alter) kann man die `predict.lm()`-Funktion nutzen:

Wir lassen uns mit Hilfe unseres Modells zunächst die tägliche Internetnutzung in Minuten bei einem Alter von 25 und 75 vorhersagen.

```
predict.lm(model, data.frame(Alter = 25))
```

```
       1
119.4635
```

```
predict.lm(model, data.frame(Alter = 75))
```

```
       1
229.1028
```

Eine Person mit einem Alter von 25 Jahren weist laut Modell eine prognostizierte Internetnutzung von 119 Minuten auf. Eine Person mit einem Alter von 75 Jahren weist laut Modell eine prognostizierte Internetnutzung von 229 Minuten auf.

Das geht natürlich auch kombiniert in einem Befehl, dann müssen wir aber mit `c()` einen combine-Befehl einfügen:

```
predict.lm(model, data.frame(Alter = c(25, 75)))
```

```
       1        2 
119.4635 229.1028 
```

In unserem zweiten Beispiel betrachten wir andere Altersgruppen. Wir lassen uns hier mit Hilfe unseres Modells die tägliche Internetnutzung in Minuten bei einem Alter von 20, 30, 40, 50, 60 und 70 vorhersagen.

```
predict.lm(model, data.frame(Alter = c(20, 30, 40, 50, 60, 70)))
```

```
       1        2        3        4        5        6 
108.4996 130.4274 152.3553 174.2832 196.2110 218.1389 
```

Die Prognose-Leistung unseres Regressionsmodels können wir auch auf den gesamten Datensatz anwenden - dann bekommen wir für jeden Fall im Datensatz den prognostizierten Wert der abhängigen Variable TV-Konsum ausgegeben. Dazu können wir den Befehl `fitted` nutzen. Der Fall Nummer 3 hat also laut Modell (!) einen TV-Konsum von (X) Minuten.

Weil wir im Datensatz aber n=4929 Fälle haben (und die Ausgabe sonst zu unübersichtlich wird), begrenzen ich die Ausgabe auf die ersten 100 Zeilen (Fälle) des Datensatzes, indem ich zusätzlich die Funktion `head()` verwende, und die Anzahl der gewünschten Fälle in der Klammer mit 100 festlege:

```
head(fitted(model), 100)
```

```
       1        2        3        4        5        6        7        8 
183.0543 180.8615 259.8019 237.8740 200.5966 115.0779 132.6202 213.7533 
       9       10       11       12       13       14       15       16 
176.4760 189.6327 251.0307 121.6563 147.9697 183.0543 163.3192 172.0904 
      17       18       19       20       21       22       23       24 
121.6563 246.6451 169.8976 169.8976 224.7173 200.5966 119.4635 183.0543 
      25       26       27       28       29       30       31       32 
183.0543 176.4760 196.2110 172.0904 189.6327 191.8255 191.8255 150.1625 
      33       34       35       36       37       38       39       40 
244.4523 233.4884 237.8740 112.8851 233.4884 183.0543 174.2832 119.4635 
      41       42       43       44       45       46       47       48 
207.1750 187.4399 222.5245 178.6687 213.7533 185.2471 132.6202 237.8740 
```

```
      49       50       51       52       53       54       55       56
211.5605 209.3678 115.0779 246.6451 154.5481 189.6327 112.8851 147.9697
      57       58       59       60       61       62       63       64
215.9461 200.5966 169.8976 204.9822 121.6563 224.7173 172.0904 147.9697
      65       66       67       68       69       70       71       72
152.3553 174.2832 189.6327 156.7409 185.2471 132.6202 185.2471 213.7533
      73       74       75       76       77       78       79       80
264.1874 202.7894 187.4399 233.4884 187.4399 191.8255 196.2110 194.0183
      81       82       83       84       85       86       87       88
176.4760 200.5966 194.0183 207.1750 174.2832 143.5842 119.4635 161.1265
      89       90       91       92       93       94       95       96
165.5120 161.1265 174.2832 150.1625 172.0904 110.6924 196.2110 233.4884
      97       98       99      100
110.6924 196.2110 185.2471 178.6687
```

2.7 Interpretation der Ergebnisse

In der Ausgabe kann ich nun die laut Modell prognostizierte Fernsehnutzung für meine Befragten entsprechend ihres Alters sehen - Befragte(r) 10 hat so z.B. eine prognostizierte Fernsehnutzung von 189 Minuten.

Nun haben wir im Rahmen unserer Befragung die TV-Nutzung der Befragten aber ja schon erhoben. Wozu dient diese Prognose dann? Ganz einfach: Über die Ausgabe der prognostizierten Werte und der Residuen können wir sehen, wie hoch die *Abweichung der Modellprognose* ist, d.h. wie sehr die empirisch beobachteten Werte unserer Fälle im Datensatz von den laut Modell erwarteten Werten abweichen. Um die Abweichung zu quantifizieren, nutzen wir die `residuals.lm`-Funktion:

```r
head(residuals(model), 100)
```

```
<labelled<double>[100]>: FERNSEHGESAMTDAUER PRO TAG IN MINUTEN
           1            2            3            4            5            6
  26.9456805  -90.8615329 -124.8018509 -177.8739847  -20.5966124  -70.0779345
           7            8            9           10           11           12
-102.6202274  -33.7533320    3.5240404  -69.6326793  198.9692956 -111.6562944
          13           14           15           16           17           18
 -27.9697337   56.9456805   46.6807600  -82.0903864  -31.6562944 -126.6451312
          19           20           21           22           23           24
 -79.8975998  -19.8975998   75.2827349 1059.4033876    0.5364922   56.9456805
          25           26           27           28           29           30
  -3.0543195  -26.4759596  -76.2110391    7.9096136  -39.6326793  108.1745341
          31           32           33           34           35           36
```

```
  -71.8254659  -90.1625203 -124.4523446    6.5115885 -117.8739847  426.1148521 
           37           38           39           40           41           42 
  -83.4884115  146.9456805  125.7168270  -29.4635078  -17.1749722   82.5601073 
           43           44           45           46           47           48 
  -12.5244785  -28.6687462 -138.7533320  -65.2471061  -12.6202274  -27.8739847 
           49           50           51           52           53           54 
    8.4394546  150.6322412   94.9220655  -66.6451312  -34.5480935  -39.6326793 
           55           56           57           58           59           60 
  -52.8851479 -132.9697337  -65.9461186  -20.5966124  -49.8975998  -24.9821856 
           61           62           63           64           65           66 
  -31.6562944  -14.7172651    7.9096136    2.0302663  -92.3553069    5.7168270 
           67           68           69           70           71           72 
  -69.6326793  -36.7408801   -5.2471061  -72.6202274   84.7528939  -93.7533320 
           73           74           75           76           77           78 
 -174.1874241  -82.7893990  126.5601073    6.5115885   52.5601073  -71.8254659 
           79           80           81           82           83           84 
   13.7889609  -44.0182525  -26.4759596  -20.5966124   75.9817475  -87.1749722 
           85           86           87           88           89           90 
    5.7168270    6.4158395  -89.4635078   18.8735466  -45.5120266    3.8735466 
           91           92           93           94           95           96 
    5.7168270  149.8374797  -67.0903864  -80.6923613   68.7889609  246.5115885 
           97           98           99          100 
  -80.6923613  -16.2110391  -35.2471061  -58.6687462 

Labels:
 value            label
   -32 NICHT GENERIERBAR
   -10      TNZ: FILTER
    -9     KEINE ANGABE
```

Für unseren Fall Nummer 65 beträgt die Abweichung der Prognose von der Beobachtung -92 Minuten. Das diese Abweichung sehr groß ist, wundert uns aber nicht, denn wir wissen ja schon, dass wir eine große Spannweite haben und unser R2 mit 8 Prozent nicht besonders groß ist.

2.8 Vorhersage und Residuen grafisch darstellen

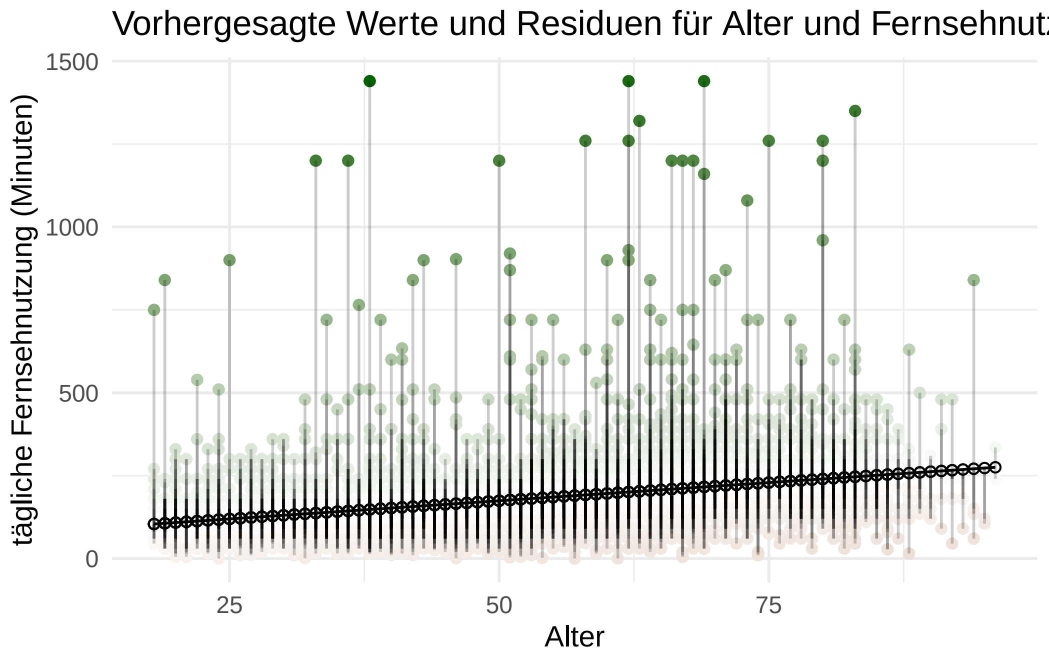
Um das grafisch gegenüberzustellen, speichern wir die obenen ausgegeben Daten zur Vorhersage (aus der predict-Funktion) und die Daten zu den Abweichungen von der Vorhersage (residuals-Funktion) jeweils als neue Variablen "vorhersage" und "residuen" ab.

```
daten$vorhersage <- predict(model)
daten$residuen <- as.numeric(residuals(model))
```

Und dann machen wir eine fancy Grafik, die uns die Abweichung der prognostizierten Werte nach oben und nach unten visuell nachvollziehen lässt:

```
ggplot(daten, aes(Alter, TV_Konsum)) +
  geom_point(aes(color = residuen)) +                                           ①
  scale_color_gradient2(low = "tan4", mid = "white", high = "darkgreen") +      ②
  guides(color = "none") +                                                      ③
  geom_point(aes(y = vorhersage), shape = 1) +                                  ④
  geom_smooth(method = "lm", formula = "y ~ x", se = FALSE, linewidth = 0.5, color = "black")
  geom_segment(aes(xend = Alter, yend = vorhersage), alpha = .2) +              ⑥
  ggtitle("Vorhergesagte Werte und Residuen für Alter und Fernsehnutzung") +    ⑦
  xlab("Alter") + ylab("tägliche Fernsehnutzung (Minuten)")                     ⑧
```

① Festlegung der Farbmarkierung für die Residuen (Punkte sind tatsächliche Werte, Linien die Residuen, Farbe gibt Größe der Abweichung an)
② Festlegung der Farbe für die Residuen
③ Unterdrückt eine Legende an der Seite (ist obligatorisch)
④ gibt die vorhergesagten Punkte auf der Regressionsgeraden aus
⑤ gibt die Regressionsgerade als Linie aus
⑥ zeichnet die Linie vom Punkt zur Regressionsgeraden transparent ein
⑦ Titel
⑧ Achsen-Beschriftung



2.9 Standardisierung der B-Koeffizienten ("beta-Koeffizienten")

Neben den normalen Regressionskoeffizienten b kann man auch die *standardisierten Koeffizienten beta* berechnen. Die standardisierten beta-Koeffizienten sind nützlich, weil sie die Skalierung der einzelnen Messwerte "herausrechnet", wodurch unterschiedlich skalierte Variablen vergleichbar werden.

Um uns die standardisierten beta-Koeffizienten ausgeben zu lassen, können wir auf das Paket `lm.beta` mit der gleichnamigen Funktion zurückgreifen, die auf ein mit `lm()` erzeugtes Modell angewendet werden kann. Der nun folgende Befehl ist im Prinzip wie oben, nur in den Klammern ergänzt um die Funktion `lm.beta()`, die dafür sorgt, dass wir im Output unten eine zusätzliche Spalte erhalten, in der die *standardisierten B-Koeffizienten* angezeigt werden. Diese sind als standardisierte "Regressionsgewichte" zu interpretieren - je höher der Wert, desto stärker der erklärende Beitrag der Variable.

Das ist natürlich vor allem dann spannend, wenn ich den Einfluss mehrerer Variablen vergleichen will. Dabei haben die standardisierten beta-Werte einen wichtigen Vorteil: Sollte man mehrere Prädiktoren in einem Modell haben, die aber auf unterschiedlichen Skalen gemessen wurden (z.B. 1x 5er und 1x 7er Skala), kann man ihren relativen Erklärungsbeitrag untereinander vergleichen.

```
summary(lm.beta(model))
```

```
Call:
lm(formula = TV_Konsum ~ Alter, data = daten)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-242.61  -67.44  -22.09   35.02 1292.03 

Coefficients:
            Estimate Standardized Std. Error t value            Pr(>|t|)    
(Intercept)  64.6438           NA     5.6890   11.36 <0.0000000000000002 ***
Alter         2.1928       0.2963     0.1007   21.77 <0.0000000000000002 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 122.5 on 4927 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.08778,	Adjusted R-squared:  0.0876 
F-statistic: 474.1 on 1 and 4927 DF,  p-value: < 0.00000000000000022
```

Exkurs: Zusatzfunktionen zur schöneren Ergebnisdarstellung

Funktion zur Modellzusammenfassung als data frame

```
tidy(lm.beta(model))
```

```
# A tibble: 2 x 6
  term        estimate std_estimate std.error statistic   p.value
  <chr>          <dbl>        <dbl>     <dbl>     <dbl>     <dbl>
1 (Intercept)    64.6        NA         5.69       11.4 1.49e- 29
2 Alter           2.19        0.296     0.101      21.8 1.93e-100
```

Funktion, um weitere Modellstatistiken in einem Befehl zu berechnen

```
glance(model)
```

```
# A tibble: 1 x 12
  r.squared adj.r.squared sigma statistic   p.value    df  logLik    AIC    BIC
      <dbl>         <dbl> <dbl>     <dbl>     <dbl> <dbl>   <dbl>  <dbl>  <dbl>
1    0.0878        0.0876  123.      474. 1.93e-100     1 -30693. 61393. 61412.
# i 3 more variables: deviance <dbl>, df.residual <int>, nobs <int>
```

Funktion, um Rohdaten um Modellvorhersagen zu erweitern

```
augment(model)
```

```
# A tibble: 4,929 x 8
   TV_Konsum Alter     .fitted  .resid     .hat .sigma      .cooksd .std.resid
   <dbl+lbl> <dbl+lbl>   <dbl>   <dbl>    <dbl>  <dbl>        <dbl>      <dbl>
 1 210       54           183.   26.9  0.000203   123. 0.00000491       0.220
 2  90       53           181.  -90.9  0.000203   123. 0.0000559       -0.742
 3 135       89           260. -125.   0.00104    123. 0.000541        -1.02
 4  60       79           238. -178.   0.000633   123. 0.000668        -1.45
 5 180       62           201.  -20.6  0.000249   123. 0.00000351      -0.168
 6  45       23           115.  -70.1  0.000842   123. 0.000138        -0.572
 7  30       31           133. -103.   0.000553   123. 0.000194        -0.838
 8 180       68           214.  -33.8  0.000340   123. 0.0000129       -0.276
 9 180       51           176.    3.52 0.000208   123. 0.0000000861     0.0288
10 120       57           190.  -69.6  0.000210   123. 0.0000339       -0.568
# i 4,919 more rows
```

Literatur und Beispiele aus der Praxis

Wir empfehlen euch folgende Lehrbücher, falls ihr weiterführende Informationen braucht.

> Field, Z., Miles, J., & Field, A. (2012). Discovering statistics using R. Discovering statistics using r, 1-992. Link

> Döring, N., & Bortz, J. (2016). Forschungsmethoden und evaluation. Wiesbaden: Springerverlag. Link

Hier findet ihr ein Beispiel aus der Forschungspraxis:

> Weeks, B. E., & Holbert, R. L. (2013). Predicting dissemination of news content in social media: A focus on reception, friending, and partisanship. Journalism & Mass Communication Quarterly, 90(2), 212-232. Link