

# Chess-Num Puzzles Solver

Diogo Samuel Gonçalves Fernandes e Paulo Jorge Salgado Marinho Ribeiro

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto,  
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465, Porto, Portugal,  
FEUP-PLOG, Turma 3MIEIC06, Grupo Chess-Num\_2  
`up201806250@fe.up.pt`  
`up201806505@fe.up.pt`

**Resumo.** Este projeto foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular *Programação em Lógica* e consiste na resolução de um problema de decisão, recorrendo ao uso de restrições em PROLOG através do uso da biblioteca CLPFD. O objetivo do nosso trabalho é resolver os puzzle de Xadrez de forma a que todas as casas numeradas com um número N no tabuleiro sejam atacadas N vezes.

**Keywords:** Programação em Lógica · Prolog · Restrições · clpfd · SIC-Stus · Problemas de Otimização · Problemas de Decisão.

## 1 Introdução

A Programação em Lógica com Restrições trata-se de uma classe de linguagens de programação, que combina a declaratividade característica da programação em lógica e a eficiência da resolução de restrições.

As suas principais aplicações baseiam-se na resolução de problemas de pesquisa ou otimização combinatória, tal como problemas de escalonamento, geração de horários, alocação de recursos, gestão de produção, entre outros.

Dada a sua distinção e eficiência, a Programação em Lógica com Restrições tem diversas aplicações industriais e comerciais na atualidade, destacando-se a sua utilização na Renault, para planeamento de produção a curto prazo, na Nokia, para configuração de software para telemóveis e na Siemens, para verificação de circuitos [1].

Neste trabalho, aplicaremos estas capacidades na resolução de puzzles Chess-Num, que consistem na colocação de uma peça de Xadrez de cada tipo [Peão, Torre, Bispo, Cavalo, Rainha, Rei] num tabuleiro com casas numeradas, de modo a que todas as casas numeradas sejam atacadas N vezes, sendo N o número apresentado em cada uma dessas casas. Alguns exemplos de puzzles deste tipo podem ser observados no site que contém as regras deste puzzle [3].

Este relatório procura explicar a nossa abordagem do problema de forma aprofundada e organizada nos seguintes tópicos:

- **Descrição do Problema:** Descrição do problema detalhadamente e restrições envolvidas.
- **Abordagem:** Implementação do problema, com enumeração das variáveis de decisão e dos seus domínios.
- **Visualização da Solução:** Exploração dos predicados que permitem a visualização do problema resolvido e respetivas imagens exemplificativas.
- **Experiências e Resultados:** Análise dimensional do problema, para distintas quantidades de células numeradas e diferentes tamanhos do tabuleiro.
- **Conclusões e Trabalho Futuro:** Conclusões que retiramos deste projeto, com base nos resultados obtidos, e possíveis formas de melhorar o trabalho desenvolvido
- **Referências:** com enumeração das várias fontes bibliográficas que utilizamos para a procura de conhecimento
- **Anexos:** que contêm imagens explicativas de alguma secção do relatório, e imagens exemplificativas do programa em execução

## 2 Descrição do Problema

O nosso tema aborda um problema de decisão, que consiste na resolução de um tipo de puzzle envolvendo peças de xadrez. No tabuleiro vão existir casas numeradas, de 1 a 6. A solução consiste em colocar uma peça de cada tipo [Peão, Cavalo, Rei, Torre, Bispo, Rainha] no tabuleiro, de modo a que cada uma destas casas seja atacada  $N$  vezes, sendo  $N$  o número presente na casa. O ataque das peças é idêntico ao do jogo Xadrez [4]:

- O peão ataca na diagonal, para cima, atacando duas casas distintas.
- O cavalo ataca em L, atacando oito casas distintas.
- O bispo ataca todas as diagonais.
- A torre ataca todas as verticais e horizontais.
- O rei ataca todas as casas à sua volta, num alcance de uma casa, atacando oito casas distintas.
- A rainha todas as diagonais, verticais e horizontais.

É importante referir ainda que ao contrário do jogo de xadrez, é possível colocar os peões na primeira e última linha. Não é possível colocar duas peças na mesma casa, nem numa casa que tenha numeração. Deve-se ter também em conta que tanto a torre como o bispo e a rainha não atacam uma dada casa se existir alguma peça entre eles, bloqueando o caminho.

### 3 Abordagem ao Problema

O nosso problema trata-se de um problema de satisfação de restrições (PSR), e pode ser modelizado por um conjunto de variáveis que representam diferentes aspetos do problema, os seus respetivos domínios, e restrições que limitam os valores que estas podem tomar dentro dos seus domínios. A solução consiste na atribuição de valores às variáveis de modo a que todas as restrições sejam satisfeitas. No nosso caso, a solução consiste em encontrar uma disposição de peças de tal forma a que cada casa numerada seja atacada um número de vezes igual àquele que contém.

Para a resolução deste problema utilizando a *CLPFD* em *PROLOG* foi utilizada uma lista de listas para representar a o tabuleiro de xadrez.

#### 3.1 Variáveis de Decisão

A solução ao problema encontra-se nas seguintes variáveis listadas abaixo. As variáveis *pieceX*, *pieceY* representam os possíveis valores da linha e coluna das peças de xadrez *piece*.

- PawnX, PawnY
- KnightX, KnightY
- KingX, KingY
- RookX, RookY
- BishopX, BishopY
- QueenX, QueenY

Estas variáveis de decisão são reunidas numa lista, *Positions*, que será depois utilizada ao efetuar o labeling. Cada par destas variáveis corresponde à posição de uma dada peça no tabuleiro, sendo o primeiro elemento do par a linha onde a peça se encontra, e o segundo elemento a coluna. Assim, as variáveis pertencem ao domínio  $[1, N]$  em que  $N$  é o tamanho do tabuleiro. Estes são os valores possíveis que a linha/coluna pode assumir no tabuleiro.

#### 3.2 Restrições

As restrições a definir devem garantir a solução do problema, isto é, que para cada casa numerada, esta seja atacada  $N$  vezes, sendo  $N$  o número que contém. Para isto, foi necessário definir a zona de ataque de cada tipo de peça. Na secção de código dos anexos, é possível observar estes predicados para cada tipo de peça (Peão, Cavalo, Rei, Torre, Bispo, Rainha), nos pontos 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, e 1.7, respetivamente para cada tipo de peça. Em todos usamos restrições materializadas (*reified*), para que a variável *Attack* ficasse definida com o valor 1 no caso de as restrições que verificam se a célula é atacada por uma dada peça serem cumpridas, e 0 caso contrário. Assim, após serem chamados todos os seis predicados, basta somar os seis ataques retornados nos predicados de cada peça, e o resultado será o número de vezes que a casa está atacada, que terá de ser igual

ao número que essa casa contém. Isto tudo é realizado no predicado `cell_attacks`, que verifica estas condições para uma dada casa numerada (secção do código no anexos, ponto 1.1). A verificação destas restrições para todas as casas numeradas é realizada no predicado principal, `solve`, com recurso ao predicado `maplist`, que aplica este predicado `cell_attacks` a cada uma das casas numeradas, que foram reunidas numa lista, no início do programa, numa chamada ao predicado `getCellsNumber`. É necessário ter em conta também os possíveis bloqueios de peças, nos casos da Torre, Bispo e Rainha. Para isto, criamos um predicado `nothing_between`, que verifica se não há nenhuma peça a bloquear o caminho entre a Torre/Rainha e a casa numerada, na horizontal e vertical. Da mesma forma, foi necessário criar o predicado `nothing_between_diagonal`, que verifica se não há nenhuma peça a bloquear o caminho entre Bispo/Rainha e a casa numerada, nas diagonais. Estas duas funções que analisam os bloqueios podem também ser observadas nos anexos, na secção do código, pontos 1.8 e 1.9.

## 4 Visualização da Solução

Para uma melhor compreensão das soluções encontradas, decidimos implementar duas formas de apresentação das soluções:

- **Forma Escrita:** Apresenta-se no ecrã as posições de cada uma das seis peças, no formato [Linha, Coluna]. Isto é efetuado pelo predicado `show_results`, que recebe a lista das posições das peças e o número da peça a que a próxima posição corresponde. Trata-se de um ciclo simples, e recorre ao predicado `piece`, que recebe o número da peça e retorna o respetivo nome. Tanto a implementação deste predicado como o seu funcionamento com o programa em execução podem ser visualizados nos anexos, na figura 4 e na secção de código, ponto 1.10.
- **Tabuleiro:** É apresentado um tabuleiro com as células numeradas e com as seis peças já colocadas conforme a solução encontrada, com uma respetiva legenda. Isto é efetuado pelo predicado `display_solution`, que chama o predicado `add_pieces`, responsável por substituir os valores das células dos tabuleiros contidos em `Positions`, pela peça de Xadrez correspondente. De seguida, é chamado o predicado `display_board`, que representa visualmente o tabuleiro já preenchido. Um exemplo deste tipo de visualização pode ser observado na figura 3. Da mesma forma, é apresentado o tabuleiro do problema (apenas com as células numeradas) antes de se iniciar a procura da solução.

## 5 Experiências e Resultados

### 5.1 Análise Dimensional

Para o estudo do comportamento do programa face à dimensão do problema, consideramos dois tipos de testes:

- Variação da dimensão do tabuleiro
- Variação do número de células numeradas.

É possível verificar os resultados para os testes do primeiro tipo na figura 1 dos anexos, sendo que testamos, para um mesmo número de casas numeradas, distintos tamanhos para os tabuleiros. Conclui-se que o tempo de execução aumenta com a dimensão do tabuleiro, o que seria de esperar, uma vez que aumenta também o domínio das variáveis de decisão (é de 1 a N, sendo N o tamanho do tabuleiro, que é o valor mínimo e máximo que a Linha/Coluna da peça pode tomar, respetivamente), e portanto aumenta o número de testes efetuados pelas restrições.

Quando à variação do número de células numeradas, testamos para um mesmo tabuleiro (8x8), diferentes valores, o que pode ser verificado na figura 2 dos anexos. Como seria também de esperar, o tempo de execução aumenta com o número de casas numeradas, uma vez que aumenta também o número de restrições a ter em consideração, e, conseqüentemente, o número de tentativas a serem efetuadas pelo programa.

### 5.2 Estratégias de Pesquisa

De modo a detetar possíveis melhorias no tempo de resolução dos problemas, foram testadas diversas combinações para as opções de pesquisa do labeling.

Após realizar estes testes, chegamos à conclusão que no nosso caso a melhor combinação de opções do labeling seriam a `anti_first_fail` e a `bisect`. A opção escolhida para a ordenação de variáveis (`anti_first_fail`) define que a próxima variável a ser escolhida na colocação das restrições é a variável mais à esquerda das que têm o maior domínio. A complementá-la, a opção escolhida para a seleção de valores define que os valores de uma variável são decididos através de uma escolha binária entre  $X \# \leq M$  e  $X \# > M$ , onde M é o ponto médio do domínio de X (média entre valores mínimo e máximo do domínio de X, com arredondamento para baixo).

## 6 Conclusões e Trabalho Futuro

A realização deste trabalho permitiu a resolução de um problema através da utilização de restrições lógicas na linguagem PROLOG, através da utilização do módulo CLPFD. Durante a realização do mesmo foram encontradas diversas dificuldades, nomeadamente na elaboração dos ataques para a torre e para o bispo e rainha, devido aos possíveis bloqueios de peças que se encontrem entre estas peças e as casas numeradas. Com o tempo, descobrimos solução para esta dificuldade, recorrendo a restrições materializadas.

Apesar de cumprir todos os requisitos pedidos no enunciado, há certos aspetos que poderiam ser melhorados futuramente, nomeadamente a questão da eficiência do programa, tendo em conta que o tempo de execução do programa é elevado no caso de tabuleiros com um elevado número de casas numeradas.

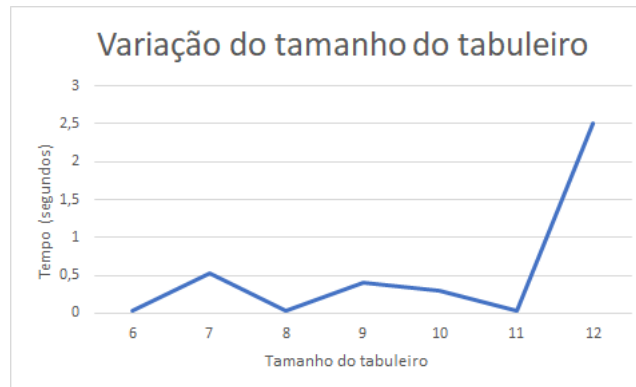
Em suma, o projeto foi concluído com sucesso, tendo em conta que implementamos todos os requisitos do enunciado, e conseguimos ultrapassar todas as dificuldades que enfrentamos durante o seu desenvolvimento. Implementamos também certas funcionalidades extra e interessantes, como a geração aleatória de tabuleiros, de diferentes dimensões, e com números distintos de casas numeradas. Para além disto, tornamos a interface de interação com o utilizador bastante simples e fácil de compreender, com representação gráfica dos tabuleiros antes e após as soluções. Este projeto permitiu-nos aplicar o conhecimento obtido nas aulas teóricas e práticas da unidade curricular, e consolidá-lo para que possamos aplicá-lo em situações futuras.

## Referências

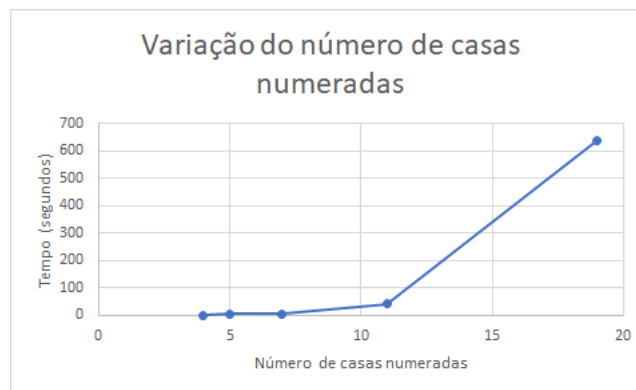
1. Daniel Castro Silva, Programação em Lógica com Restrições [PowerPoint Slides], <https://moodle.up.pt/>
2. Daniel Castro Silva, Programação em Lógica com Restrições no SICStus Prolog [PowerPoint Slides], <https://moodle.up.pt/>
3. Chess-Num Puzzles, <https://erich-friedman.github.io/puzzle/chessnum/>. Último acesso a 3 Jan 2021
4. Chess Pieces and How they move, <https://www.wholesalechess.com/pages/new-to-chess/pieces.html>. Último acesso a 3 Jan 2021

## 7 Anexos

### 7.1 Gráficos



**Fig. 1.** Gráfico do tempo conforme o tamanho do tabuleiro



**Fig. 2.** Gráfico do tempo conforme o número de casas numeradas



	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2			4					
3		P			N			
4			R				4	
5						B		
6	0							
7								
8		K	4				Q	

P - Pawn, N - Knight, K - King, R - Rook, B - Bishop, Q - Queen

**Fig. 3.** Visualização gráfica

```

Pawn is at cell [3, 2]
Knight is at cell [3, 5]
King is at cell [8, 2]
Rook is at cell [4, 3]
Bishop is at cell [5, 6]
Queen is at cell [8, 7]

```

**Fig. 4.** Visualização em texto

## 7.2 Código

**Listing 1.1.** Cell Attacks

---

```

cell_attacks([PawnX, PawnY, KnightX, KnightY, KingX, KingY, RookX,
             RookY, BishopX, BishopY, QueenX, QueenY], Number-Row-Column) :-
    pawn([PawnX, PawnY], [Row, Column], PawnAttack),
    PawnAttack #=< Number,
    knight([KnightX, KnightY], [Row, Column], KnightAttack),
    PawnAttack + KnightAttack #=< Number,
    king([KingX, KingY], [Row, Column], KingAttack),
    PawnAttack + KnightAttack + KingAttack #=< Number,
    rook([RookX, RookY], [Row, Column], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY,
    KingX, KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY, QueenX, QueenY],
    RookAttack),
    PawnAttack + KnightAttack + KingAttack + RookAttack #=< Number,
    bishop([BishopX, BishopY], [Row, Column], [PawnX, PawnY, KnightX,
    KnightY, KingX, KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY, QueenX,
    QueenY], BishopAttack),
    PawnAttack + KnightAttack + KingAttack + RookAttack + BishopAttack
    #=< Number,
    queen([QueenX, QueenY], [Row, Column], [PawnX, PawnY, KnightX,
    KnightY, KingX, KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY, QueenX,
    QueenY], QueenAttack),
    PawnAttack + KnightAttack + KingAttack + RookAttack + BishopAttack +
    QueenAttack #= Number.

```

---

**Listing 1.2.** Pawn Attack

---

```

pawn([X, Y], [X1, Y1], Attack) :-
    (X1 #= X - 1 #/\ (Y1 #= Y + 1 #/\ Y1 #= Y - 1)) #<=> Attack.

```

---

**Listing 1.3.** Knight Attack

---

```

knight([X, Y], [X1, Y1], Attack) :-
    ((X1 #= X + 2 #/\ Y1 #= Y + 1) #\/
    (X1 #= X + 2 #/\ Y1 #= Y - 1) #\/
    (X1 #= X - 2 #/\ Y1 #= Y + 1) #\/
    (X1 #= X - 2 #/\ Y1 #= Y - 1) #\/
    (X1 #= X + 1 #/\ Y1 #= Y + 2) #\/
    (X1 #= X + 1 #/\ Y1 #= Y - 2) #\/
    (X1 #= X - 1 #/\ Y1 #= Y + 2) #\/
    (X1 #= X - 1 #/\ Y1 #= Y - 2)) #<=> Attack.

```

---

**Listing 1.4. King Attack**


---

```
king([X, Y], [X1, Y1], Attack) :-
  ((X1 == X - 1 #\ X1 == X + 1) #\ ((Y1 == Y + 1) #\ (Y1 == Y) #\
    (Y1 == Y - 1))) #\
  ((X1 == X) #\ ((Y1 == Y + 1) #\ (Y1 == Y - 1))) #<=> Attack.
```

---

**Listing 1.5. Rook Attack**


---

```
rook([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY, KingX,
  KingY, _, _, BishopX, BishopY, QueenX, QueenY], Attack) :-
  nothing_between([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY,
    KingX, KingY, BishopX, BishopY, QueenX, QueenY], [M1, M2, M3,
    M4, M5]),
  (((X1 == X) #\ (Y1 == Y)) #\ M1 #\ M2 #\ M3 #\ M4 #\ M5) #<=>
  Attack.
```

---

**Listing 1.6. Bishop Attack**


---

```
bishop([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY, KingX,
  KingY, RookX, RookY, _, _, QueenX, QueenY], Attack) :-
  nothing_between_diagonal([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX,
    KnightY, KingX, KingY, RookX, RookY, QueenX, QueenY], [B1, B2,
    B3, B4, B5]),
  ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #\ B1 #\ B2 #\ B3 #\ B4 #\ B5)
  #<=> Attack.
```

---

**Listing 1.7. Queen Attack**


---

```
queen([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY, KingX,
  KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY, _, _], Attack) :-
  nothing_between([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX, KnightY,
    KingX, KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY], [Q1, Q2, Q3, Q4,
    Q5]),
  nothing_between_diagonal([X, Y], [X1, Y1], [PawnX, PawnY, KnightX,
    KnightY, KingX, KingY, RookX, RookY, BishopX, BishopY], [QD1,
    QD2, QD3, QD4, QD5]),
  (((((X1 == X) #\ (Y1 == Y)) #\ Q1 #\ Q2 #\ Q3 #\ Q4 #\ Q5) #\
    (((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #\ QD1 #\ QD2 #\ QD3 #\ QD4
    #\ QD5))) #<=> Attack.
```

---

**Listing 1.8.** Nothing Between horizontal and vertical

---

```

nothing_between(_, _, [], []).
nothing_between([X, Y], [X1, Y1], [PX, PY|Positions], [M|Ms]) :-
    (
        ((X == X1) #/\ (PX #\= X1)) #\ / % Piece not in horizontal
        ((X == X1) #/\ (PX == X1) #/\ (Y1 #> Y) #/\ ((PY #< Y) #\ / (PY #>
            Y1))) #\ / % Check Horizontal Right
        ((X == X1) #/\ (PX == X1) #/\ (Y1 #< Y) #/\ ((PY #< Y1) #\ / (PY
            #> Y))) #\ / % Check Horizontal Left
        ((Y == Y1) #/\ (PY #\= Y1)) #\ / % Piece not in vertical
        ((Y == Y1) #/\ (PY == Y1) #/\ (X1 #> X) #/\ ((PX #< X) #\ / (PX #>
            X1))) #\ / % Check Vertical Down
        ((Y == Y1) #/\ (PY == Y1) #/\ (X1 #< X) #/\ ((PX #< X1) #\ / (PX
            #> X))) % Check Horizontal Up
    )
    #<=> M,
    nothing_between([X, Y], [X1, Y1], Positions, Ms).

```

---

**Listing 1.9.** Nothing Between horizontal and vertical

---

```

nothing_between_diagonal(_, _, [], []).
nothing_between_diagonal([X, Y], [X1, Y1], [PX, PY|Positions],
    [M|Ms]) :-
    (
        ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #/\ (abs(X1 - PX) #\= abs(Y1 -
            PY))) #\ / % Piece not in diagonal
        ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #/\ ((X1 #< X) #/\ (Y1 #> Y))
            #/\ ((X1 #> PX) #\ / (Y1 #< PY) #\ / (PX #> X) #\ / (PY #<
            Y))) #\ / % Check Diagonal Top Right
        ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #/\ ((X1 #< X) #/\ (Y1 #< Y))
            #/\ ((X1 #> PX) #\ / (Y1 #> PY) #\ / (PX #> X) #\ / (PY #>
            Y))) #\ / % Check Diagonal Top Left
        ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #/\ ((X1 #> X) #/\ (Y1 #> Y))
            #/\ ((X1 #< PX) #\ / (Y1 #< PY) #\ / (PX #< X) #\ / (PY #<
            Y))) #\ / % Check Diagonal Bottom Right
        ((abs(X1 - X) == abs(Y1 - Y)) #/\ ((X1 #> X) #/\ (Y1 #< Y))
            #/\ ((X1 #< PX) #\ / (Y1 #> PY) #\ / (PX #< X) #\ / (PY #>
            Y))) % Check Diagonal Bottom Left
    )
    #<=> M,
    nothing_between_diagonal([X, Y], [X1, Y1], Positions, Ms).

```

---

**Listing 1.10.** Nothing Between horizontal and vertical

---

```
show_results([], _).
show_results([X, Y|Positions], N) :-
    piece(N, Piece),
    write(Piece), write(' is at cell '), write(X), write(', '),
    write(Y), write(']'), nl,
    N1 is N + 1,
    show_results(Positions, N1).
```

---