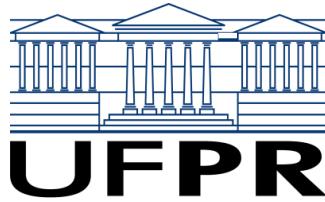




departamento de
**EXPRESSÃO
GRÁFICA**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
Prof. Paulo Henrique Siqueira e Deise Maria Bertholdi Costa
Disciplina : Desenho Geométrico I



Atribuição-Não Comercial-Sem Derivações: CC BY-NC-ND

PARTE I - INTRODUÇÃO

1.1. GEOMETRIA

A necessidade de medir terras determinou os primeiros passos da Geometria. O filósofo grego Eudemo de Rodes, séc. IV a.C., um dos primeiros historiadores das ciências, conta que os egípcios mediam suas terras para acompanhar o regime de inundações anuais do rio Nilo. O termo provém das palavras gregas *geo* (terra) e *metron* (medida).

Atualmente, define-se a Geometria como sendo a disciplina matemática que tem por objetivo o estudo do espaço e das formas nele contidas.

1.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Nas antigas culturas do Egito e da Mesopotâmia, a geometria consistia simplesmente num conjunto de regras empíricas. Os gregos, entre os quais destacou-se Euclides, séc. III a.C., sistematizaram os conhecimentos existentes sobre o tema e estabeleceram seus fundamentos num conjunto de axiomas (ou postulados ou proposições primitivas) dos quais, segundo princípios dedutivos, se obtinham os demais resultados (proposições ou teoremas).

A discussão dos princípios da geometria Euclidiana levou à construção, no séc. XIX, de novos sistemas geométricos, denominados geometrias não-Euclidianas, e desembocou na generalização de seus métodos e sua aplicação a espaços cada vez mais abstratos.

1.3. POSTULADOS DO DESENHO GEOMÉTRICO

Assim como no estudo da Geometria se aceitam, sem definir, certas noções primitivas e sem demonstrar certas proposições primitivas (ou postulados, ou axiomas), no estudo do Desenho é necessário aceitar certos postulados que tornam a matéria objetiva.

1º Postulado: Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico, além do lápis, papel, borracha e prancheta, são: a régua não graduada e o compasso.

A graduação da régua ou "escala" só pode ser usada para colocar no papel os dados de um problema ou eventualmente para medir a resposta, a fim de conferi-la.

2º Postulado: É proibido em Desenho Geométrico fazer contas com as medidas dos dados; todavia, considerações algébricas são permitidas na dedução (ou justificativa) de um problema, desde que a resposta seja depois obtida graficamente obedecendo aos outros postulados.

3º Postulado: Em Desenho Geométrico é proibido obter respostas "à mão livre", bem como "por tentativas".

Admite-se, no entanto, o traçado de uma cônica à mão livre ou com o uso de curvas francesas, desde que a resposta de um problema não seja obtida através desse traçado.

PARTE II
LUGARES GEOMÉTRICOS, ÂNGULOS E SEGMENTOS

2. O MÉTODO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS

Os problemas em Desenho Geométrico resumem-se em encontrar pontos. E para determinar um ponto basta obter o cruzamento entre duas linhas.

Definição: Um conjunto de pontos do plano constitui um lugar geométrico (LG) em relação a uma determinada propriedade P quando satisfaz às seguintes condições:

- Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;
- Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

Observação: Na resolução de problemas, procuramos **construir graficamente** uma determinada figura, mas que satisfaça as condições impostas (ou propriedades). Geralmente, estas condições impostas são lugares geométricos construtíveis com régua e compasso. O emprego de figuras que constituem lugares geométricos nas resoluções de problemas gráficos é chamado de Método dos Lugares Geométricos.

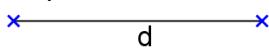
2.1. LG1: CIRCUNFERÊNCIA

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano situados a uma distância constante r de um ponto fixo O é a **circunferência** de centro O e raio r .

Notação: Circunf(O,r); $\odot(O,r)$.

Exercícios

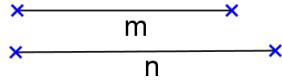
- Dados um ponto P , uma reta t e uma distância d , determine um ponto X da reta t que esteja à distância d do ponto P .



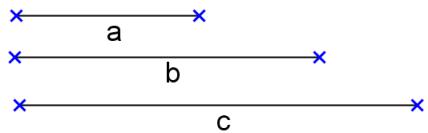
P

t

2. Dados os pontos A e B, e as distâncias m e n, obtenha um ponto X que diste m de A e n de B.



3. Construa um triângulo ABC sendo dados os três lados a, b e c.

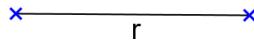


Observação: Construir um triângulo equivale a determinar 3 pontos (vértices). Devemos levar em conta:

- a posição:
- a forma
- o tamanho

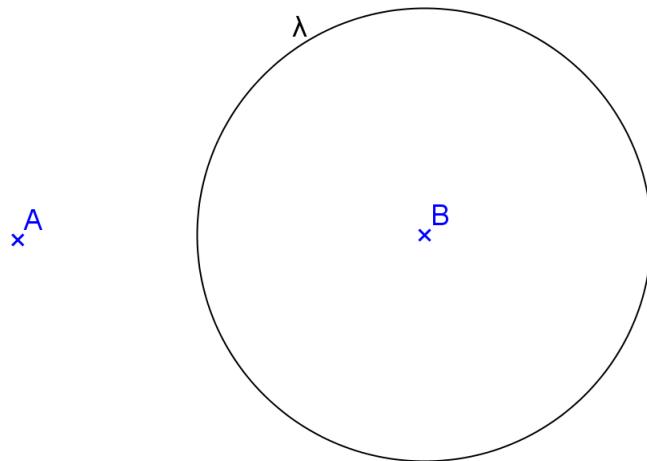
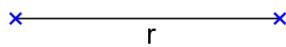
Propriedade dos triângulos: um triângulo fica determinado em forma e tamanho quando dele são conhecidos 3 elementos, sendo pelos menos um deles linear, ou seja, um lado ou uma mediana, etc.

4. Dados os pontos A e B, e uma distância r, construa uma circunferência que passa por A e B e que tem raio igual a r.

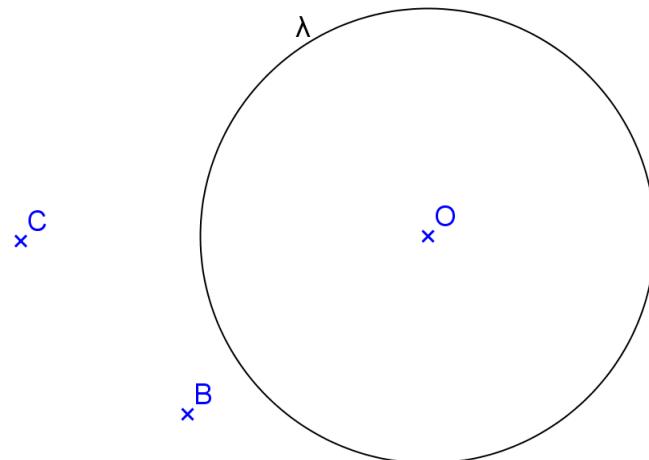
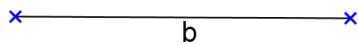


Exercícios propostos

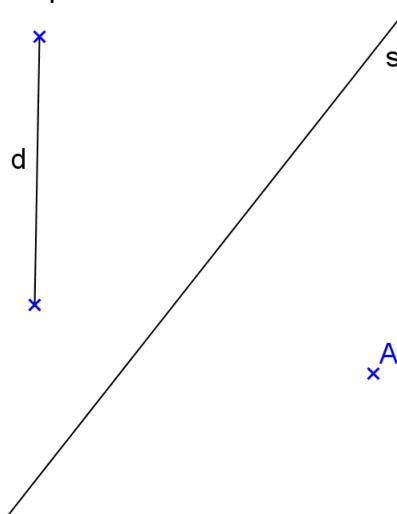
1. Dados o ponto A, a circunferência λ e a distância r, determine um ponto X de λ que diste r de A.



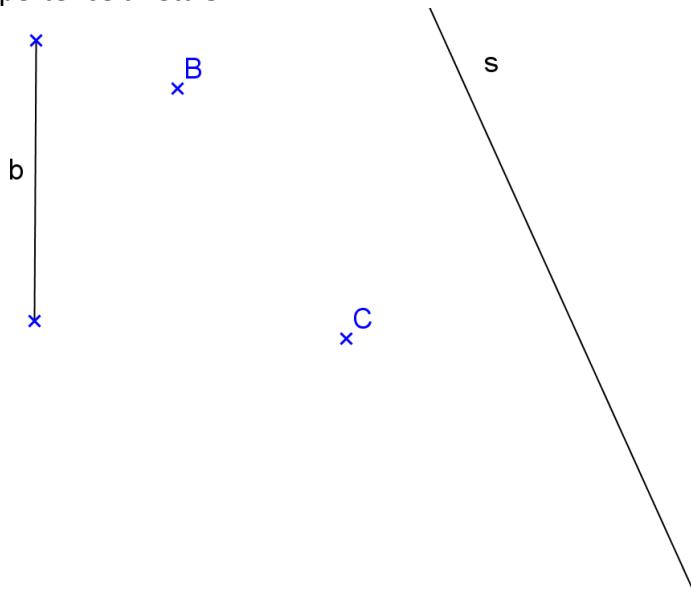
2. Dados os pontos B e C e a circunferência λ , construa um triângulo ABC, conhecendo o lado b e sabendo que o vértice A pertence à circunferência λ .



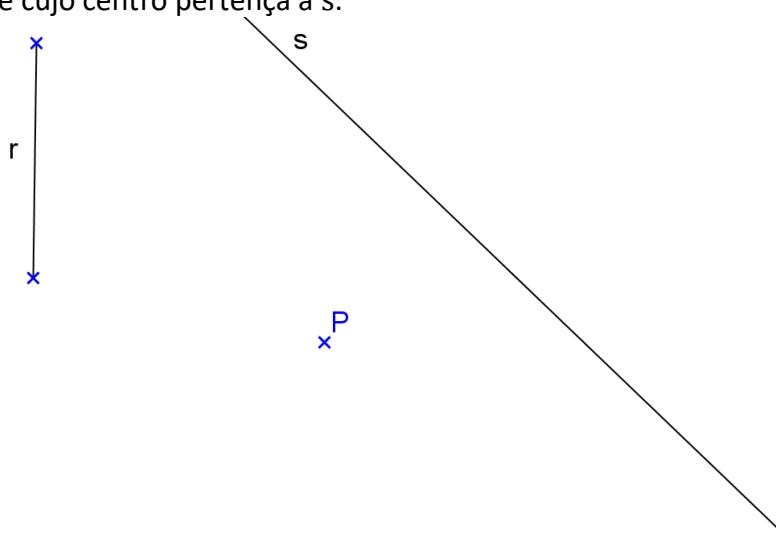
3. Dados a reta s , o ponto A e uma distância d , construa um triângulo ABC isósceles de base BC , sabendo-se que as laterais medem d e que a base BC está contida na reta s .



4. Dados os pontos B e C e uma reta s , construa um triângulo ABC , conhecendo o lado b e sabendo que A pertence à reta s .

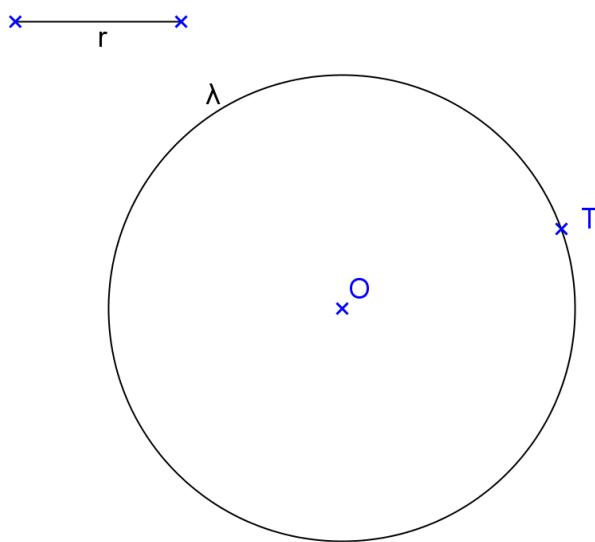


5. Dados um ponto P , uma reta s e uma distância r , construa uma circunferência que passa por P , tem raio r e cujo centro pertença a s .



6. Dados uma circunferência λ , um ponto T sobre λ e uma distância r, construa uma circunferência de raio r que seja tangente a λ no ponto T.

Dica: os centros das circunferências tangentes e o ponto de tangência são colineares.



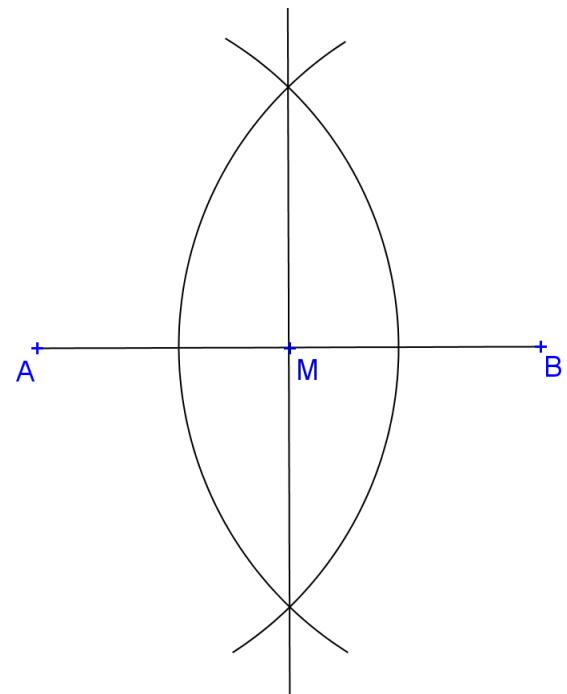
2.2. LG2: MEDIATRIZ

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB.

Definição: Uma **circunferência** é dita **circunscrita** a um triângulo quando ela passa pelos seus três vértices. O centro da circunferência circunscrita é denominado **circuncentro**.

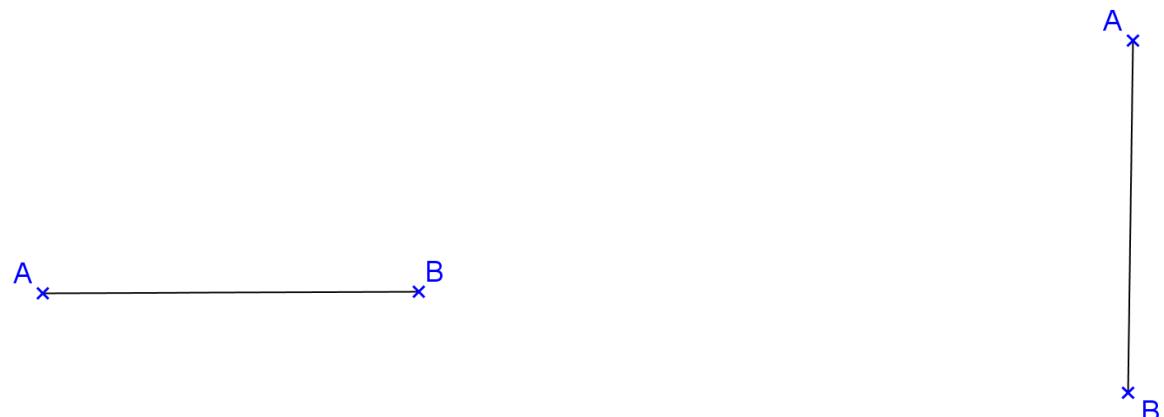
Definição: Duas retas são **perpendiculares** quando forem concorrentes e formarem ângulos de 90° entre si.

Definição: A **distância de um ponto a uma reta** é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma.



Exercícios

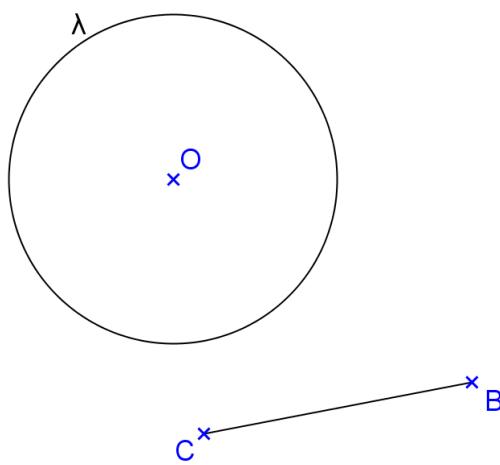
1. Construa a mediatrix do segmento AB.



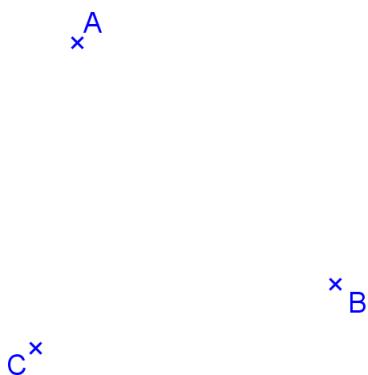
2. Determine o ponto médio do segmento AB.



3. Dados os pontos B e C e uma circunferência λ , construa um triângulo ABC isósceles, de base BC, sabendo-se que o vértice A pertence a λ .



4. Dados três pontos A, B e C, não colineares, construa a circunferência que passa por esses pontos.

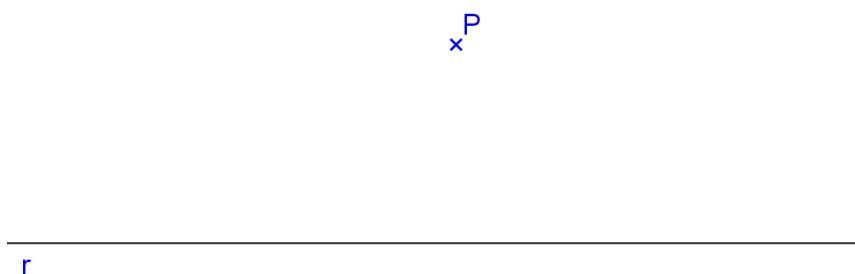


5. Trace uma reta perpendicular a uma reta dada r , que passe por um ponto P .

5.1. $P \in r$

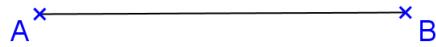


5.2. $P \notin r$

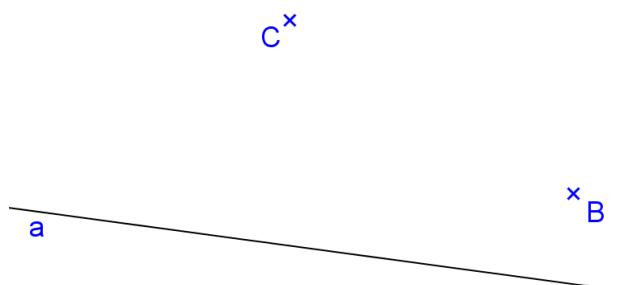


Exercícios Propostos

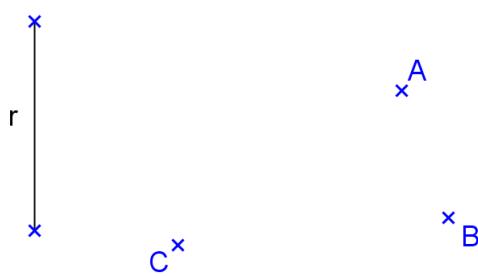
1. Divida o segmento AB em quatro partes iguais.



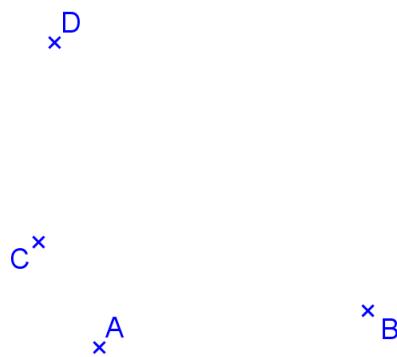
2. Dados os pontos B e C e a reta a, determine um ponto de a que seja equidistante de B e C.



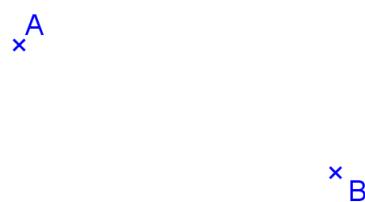
3. Dados os pontos A, B e C, e uma distância r, determine um ponto X, tal que a distância de X a B seja igual a r e X seja equidistante de A e C.



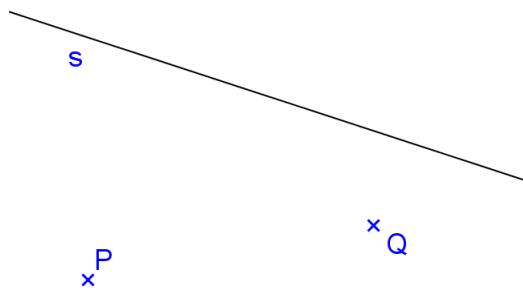
4. Dados os pontos A, B, C e D, determine um ponto X que seja equidistante de A e B, e que seja também equidistante de C e D.



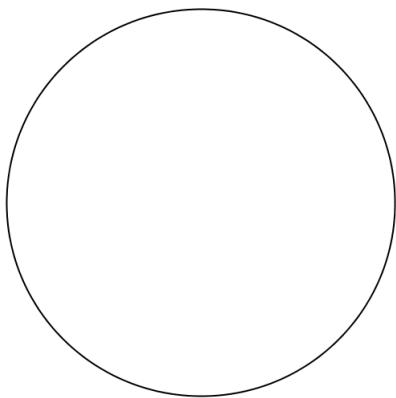
5. Construa uma circunferência de diâmetro AB.



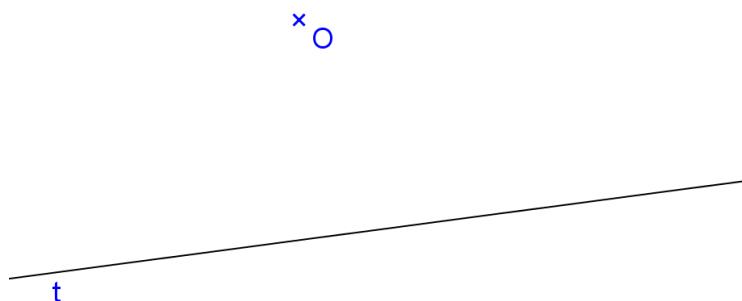
6. Dados os pontos P e Q e uma reta s, construa uma circunferência que passe por P e Q, sabendo que seu centro pertence à reta s.



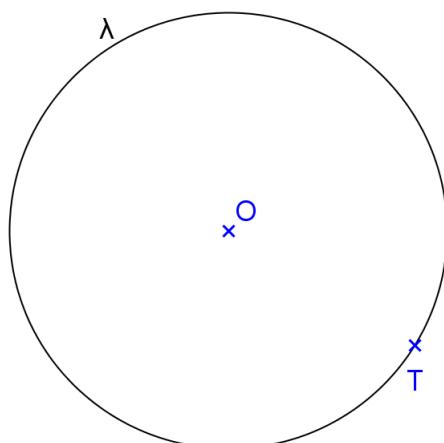
7. Dada uma circunferência de centro desconhecido, obtenha seu centro.



8. Dados um ponto O e uma reta t, construa uma circunferência que tem centro O e seja tangente à reta t.
Dica: a reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

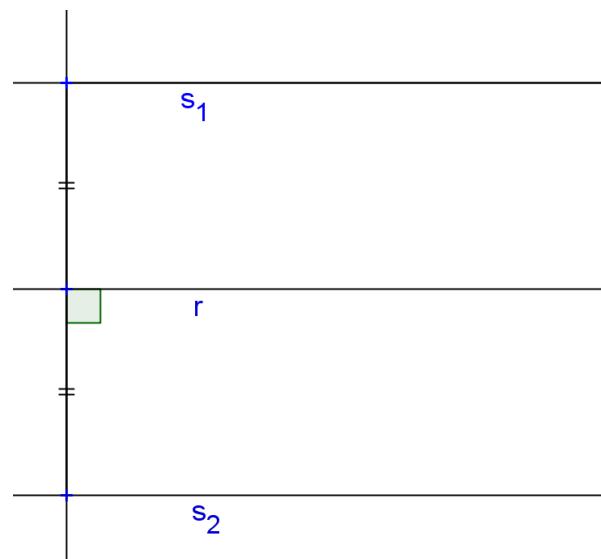


9. Dada uma circunferência λ e um ponto T pertencente a λ , trace a reta tangente à circunferência no ponto T.



2.3. LG3: RETAS PARALELAS

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância dada d de uma reta r compõe-se de duas retas s_1 e s_2 paralelas à reta r e que têm distância até ela igual à distância d.



Exercícios

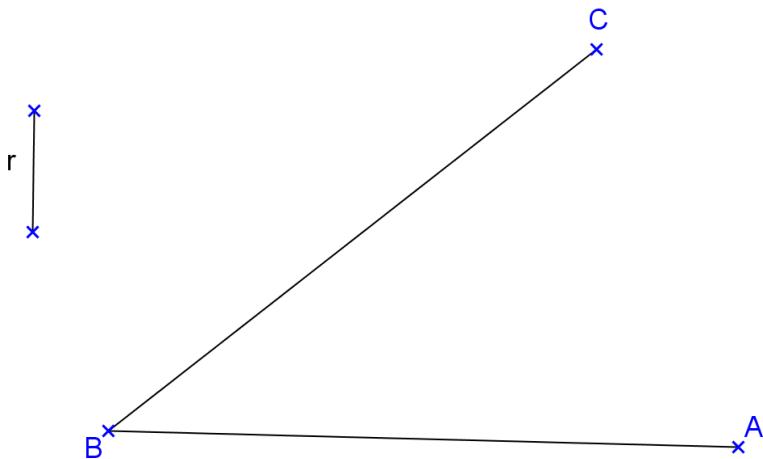
- Dados uma reta t e um ponto P, não pertencente a t, trace a reta s paralela à reta t.

 \times^P \times^P t t \times^P \times^P t t

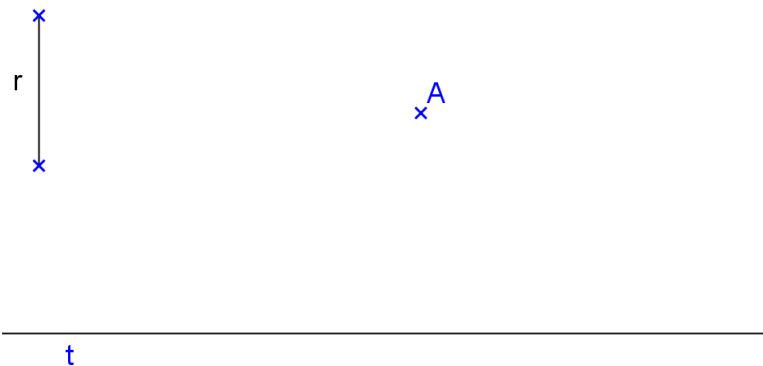
- Dada uma reta t, construa o LG dos pontos que distam 2cm de t.

 t

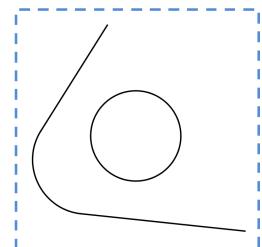
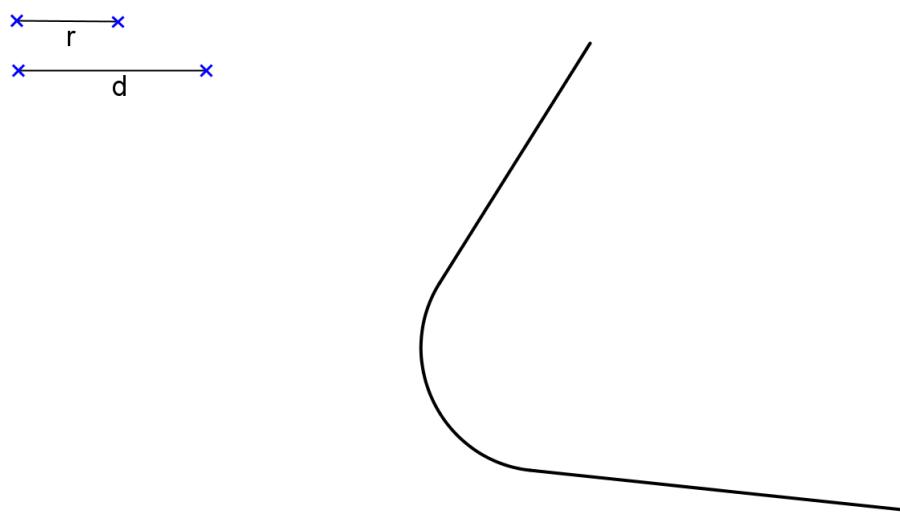
3. Dados um ângulo $A\hat{B}C$ e uma distância r , construa uma circunferência de raio r tangente aos lados do ângulo dado.



4. Dados o ponto A , a reta t e a distância r , construa uma circunferência de raio r , que passe pelo ponto A e seja tangente à reta t .

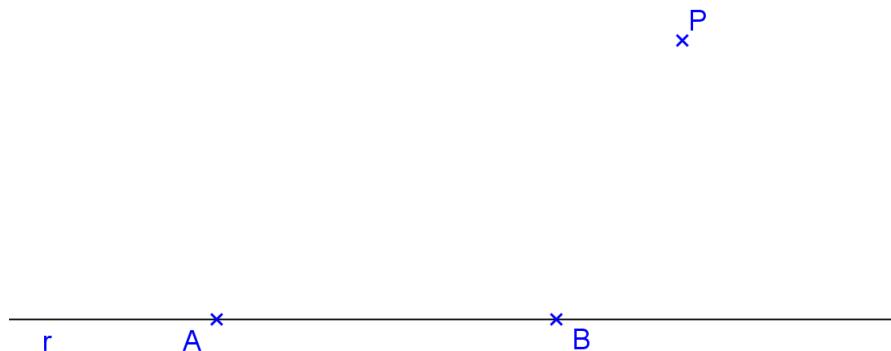


5. Construa a circunferência de raio r , sabendo-se que d é a distância do centro da circunferência aos segmentos da figura:

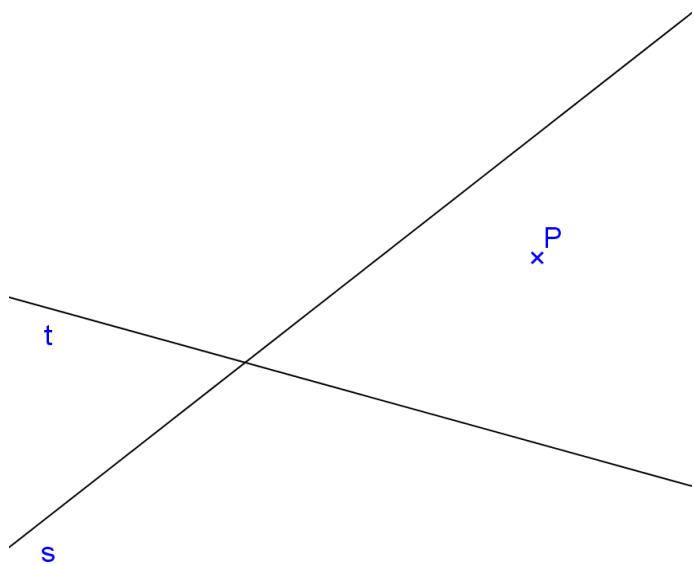


Exercícios Propostos

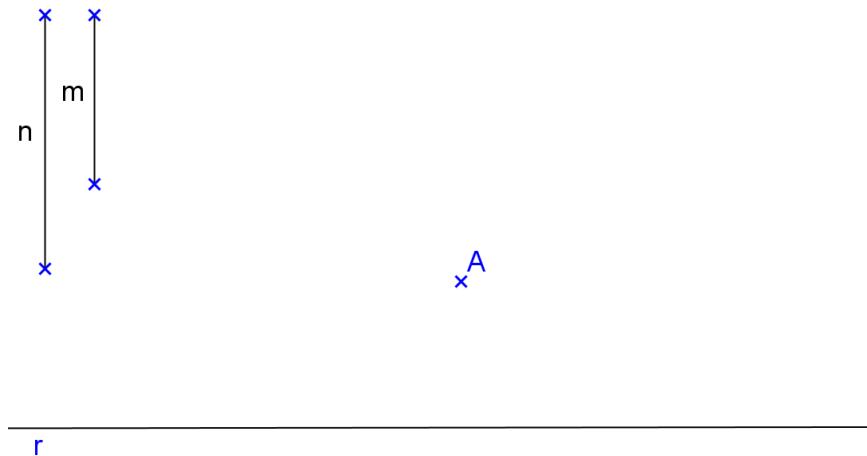
1. Dados a reta r , os pontos A e B sobre r e o ponto P fora de r , construa uma circunferência que passe por A e B , sabendo que o seu centro pertence à reta paralela a r conduzida por P .



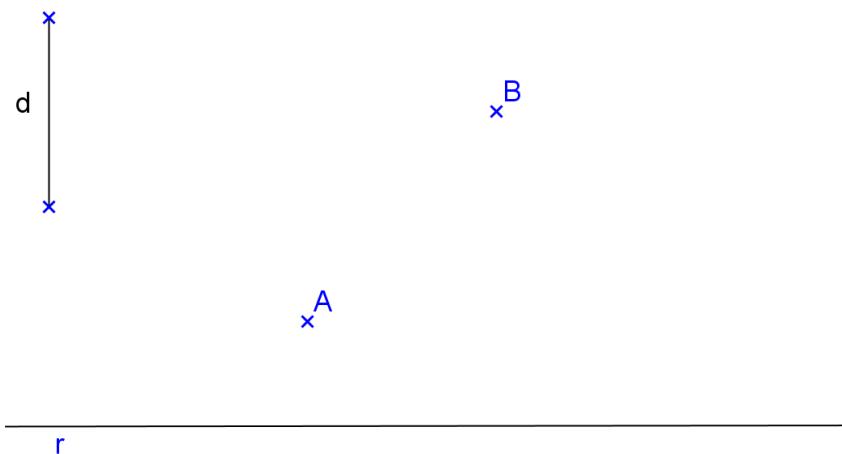
2. Dadas duas retas concorrentes s e t e um ponto P fora delas, determine a reta r que passa por P e seja paralela a t . Construa uma circunferência tangente à reta t , sabendo que o seu centro é o ponto de interseção das retas r e s .



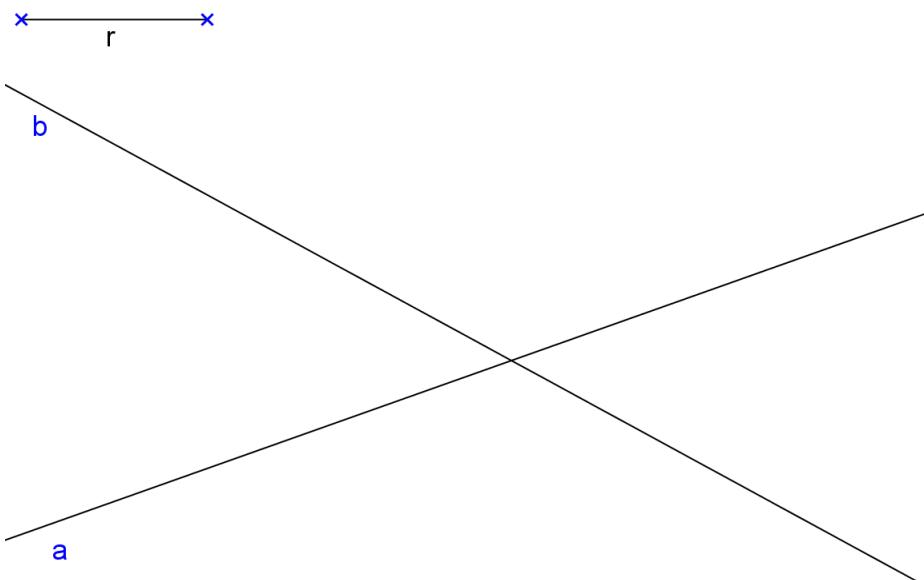
3. Dados o ponto A , a reta r e as distâncias m e n , determine um ponto X cuja distância ao ponto A é igual a m e cuja distância à reta r é igual a n .



4. Dados os pontos A e B, a reta r e a distância d, obtenha um ponto X que diste d de r e seja equidistante de A e B.

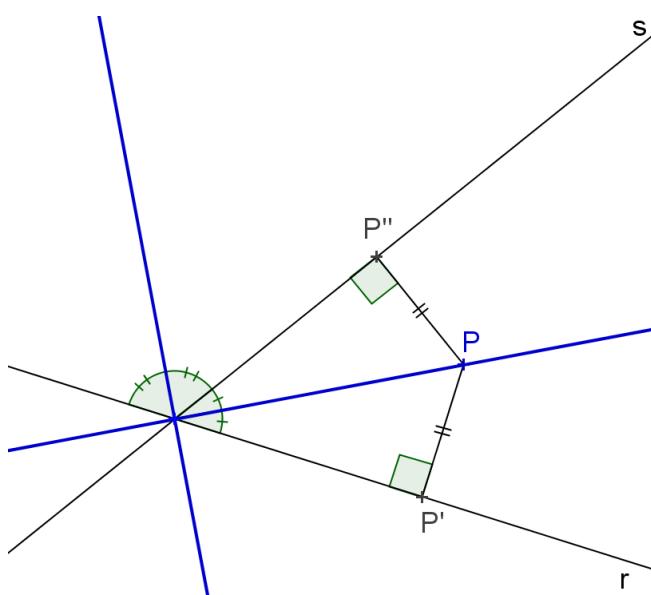


5. Dadas as retas concorrentes a e b e a distância r, construa uma circunferência de raio r, tangente à reta b, sabendo que o seu centro pertence à reta a.



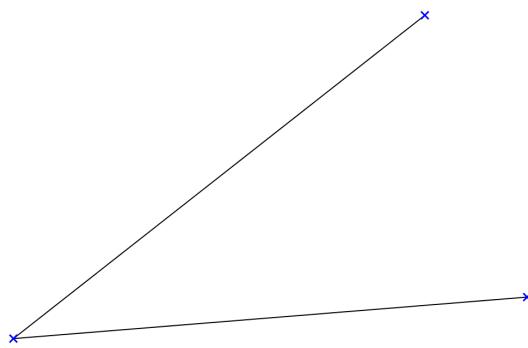
2.4. LG4: BISSETRIZ

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas concorrentes dadas compõe-se de duas outras retas, perpendiculares entre si e **bissectrizes** dos ângulos formados pelas retas dadas.

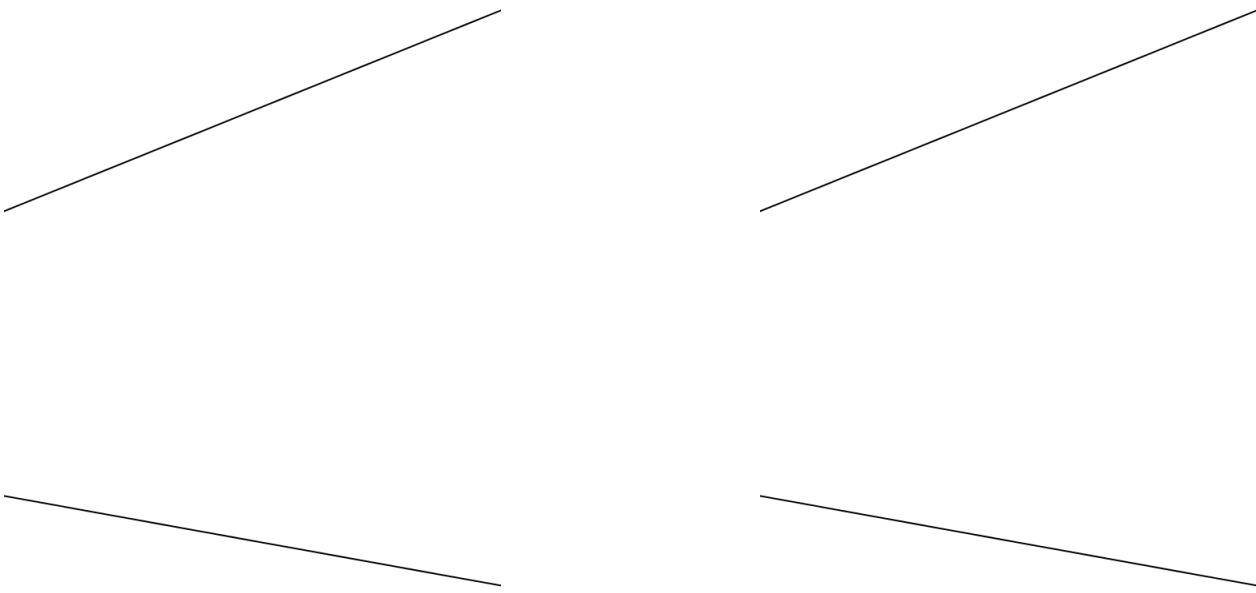


Exercícios

1. Construa a bissetriz do ângulo dado.



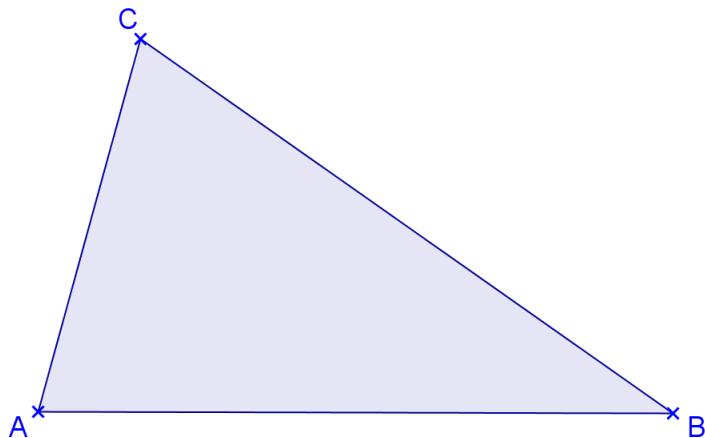
2. Construa a bissetriz do ângulo dado sem conhecer o seu vértice.



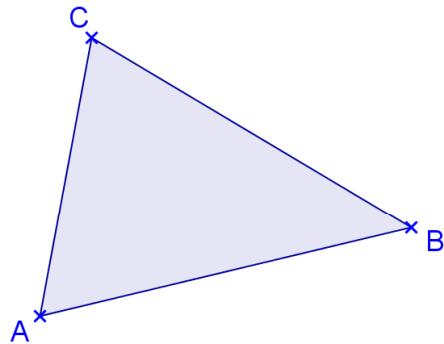
3. Construa um ângulo de 90° através de operações com ângulos.

Definição: Uma **circunferência** é dita **inscrita** a um triângulo quando ela for tangente aos lados do triângulo. O centro da circunferência inscrita é denominado **incentro**. Uma circunferência é **ex-inscrita** ao triângulo quando ela for tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois. O centro da circunferência ex-inscrita é denominado de **ex-incentro**.

5. Construa a circunferência inscrita ao triângulo ABC.



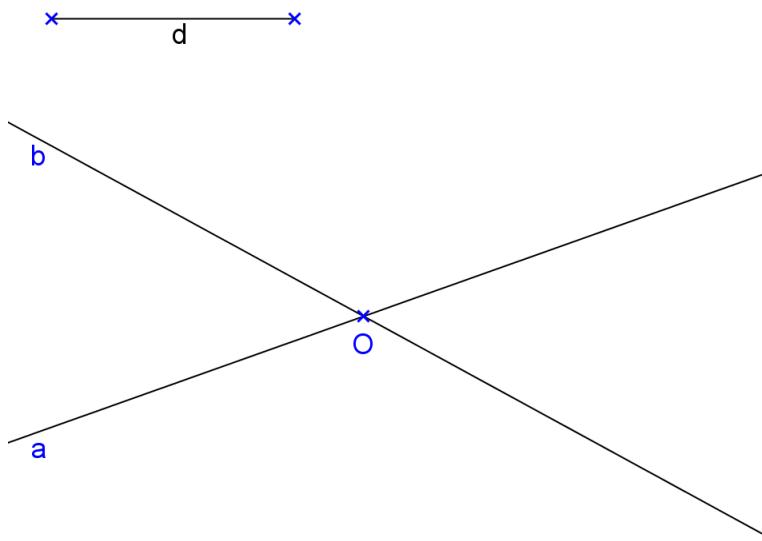
6. Construa as circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC.



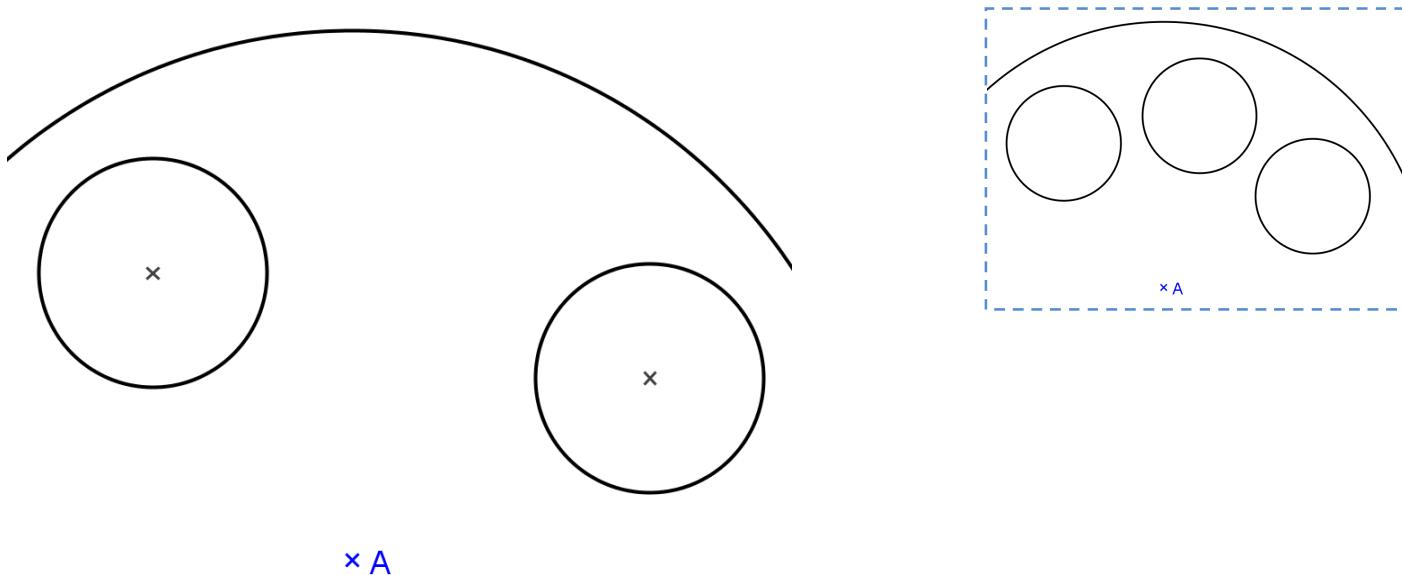
Exercícios Propostos:

1. Determine graficamente, o comprimento do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos medem 6cm e 8cm.
2. Construa a circunferência inscrita em um triângulo equilátero de lado $l = 5\text{cm}$. Quanto mede, aproximadamente, o raio dessa circunferência?

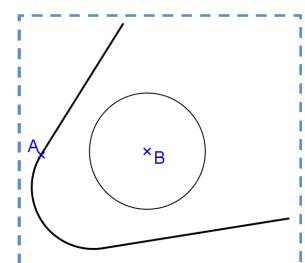
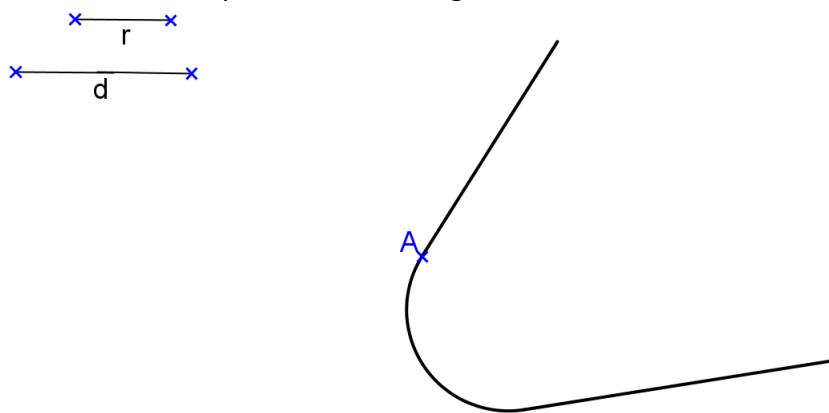
3. Dadas as retas concorrentes a e b e a distância d , sendo O o ponto de interseção de a e b , determine um ponto X que seja equidistante das retas, sabendo-se que a sua distância a O é igual a d .



4. Dada a figura abaixo, construa a terceira circunferência equidistante das duas menores, com mesmo raio e mesma distância das outras duas até o centro da circunferência maior.

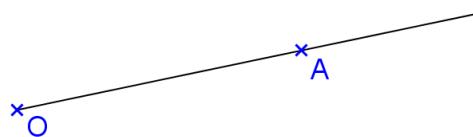
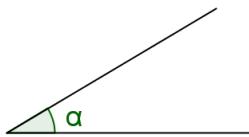


5. Construa a circunferência de centro B , dados o raio r e a distância $AB = d$. Considere o centro da circunferência equidistante dos segmentos.



2.4.1. CONSTRUÇÕES DE ÂNGULOS**Exercícios**

1. Transporte o ângulo de medida α dado, sabendo-se que O será o seu vértice e a semi-reta \overrightarrow{OA} dada um de seus lados.

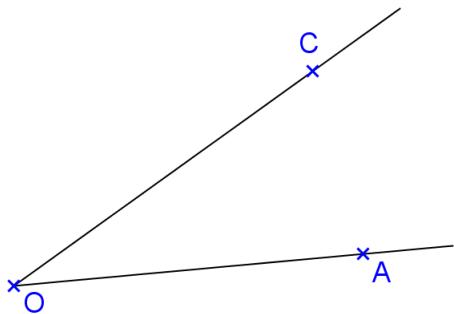


2. Construa os ângulos notáveis de 90° e 60° .

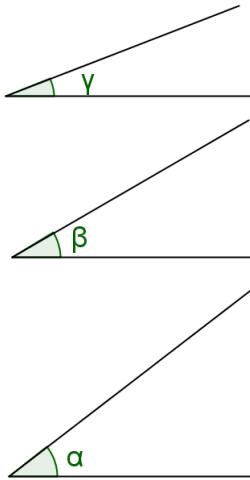
3. Construa os ângulos de 45° , $22^\circ 30'$, $11^\circ 15'$, 30° , 15° , 120° , 150° , 135° , 75° .

Exercícios Propostos

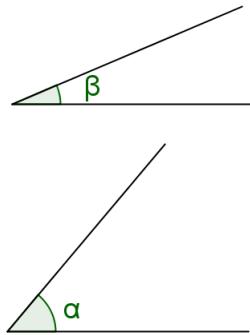
1. Dados o lado OA e a bissetriz OC de um ângulo AOB, construa o lado OB.



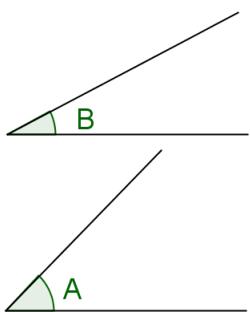
2. Dados os ângulos de medidas α , β , e γ , construa o ângulo de medida $\alpha + \beta + \gamma$.



3. Dados os ângulos de medidas α e β , construa o ângulo de medida $\alpha - \beta$.



4. Dados os ângulos \hat{A} e \hat{B} de um triângulo ABC, determine \hat{C} graficamente.

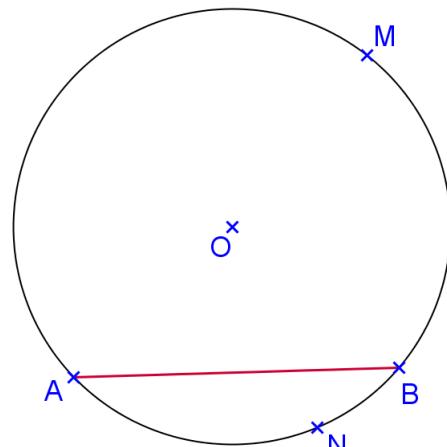


2.5. ÂNGULOS E CIRCUNFERÊNCIA

Definição 1: Seja uma circunferência de centro O e raio r.

Define-se:

- **corda** é qualquer segmento que tem as extremidades em dois pontos da circunferência;
- **diâmetro** é qualquer corda que passa pelo centro de uma circunferência;
- dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes, \widehat{AMB} e \widehat{ANB} . Cada parte denomina-se **arco circular** ou simplesmente **arco** e os pontos A e B são os extremos.

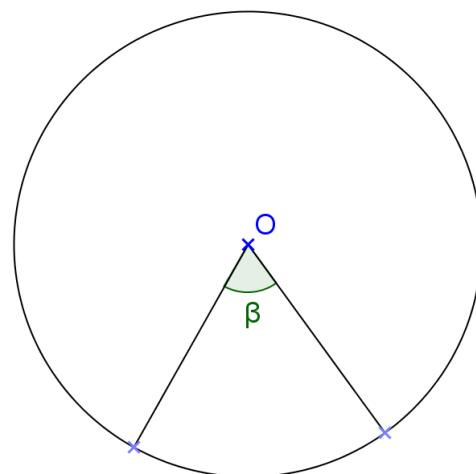


Observação: A corda que une os extremos de um arco subtende o arco.

Definição 2: **Ângulo central** é todo o ângulo que possui o vértice no centro da circunferência e cada um de seus lados contém um raio da mesma.

Observações:

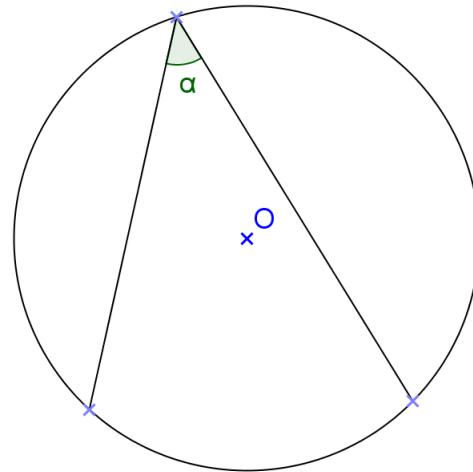
- O arco interceptado por um ângulo central é **correspondente** a esse ângulo, ou ele é chamado arco que o ângulo central enxerga.
- A **medida angular de um arco** de circunferência é a medida do ângulo central correspondente.



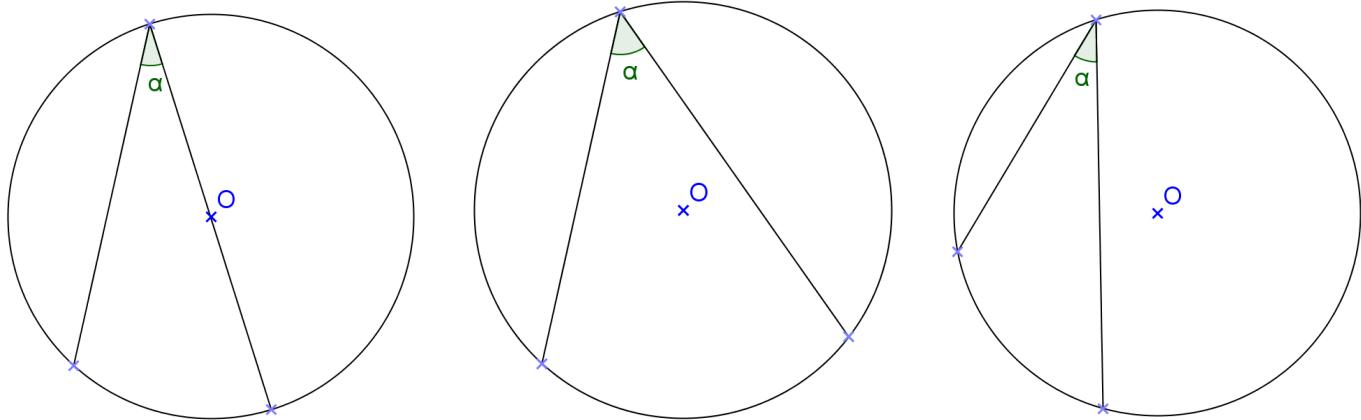
Definição 3: **Ângulo inscrito** é todo ângulo convexo que possui seu vértice sobre a circunferência e cada um de seus lados contém uma corda da mesma.

Observações:

- O arco interceptado por um ângulo inscrito é **correspondente** a esse ângulo, ou ele é chamado arco que o ângulo inscrito enxerga.
- Quando os lados de um ângulo inscrito e de um ângulo central cortam-se sobre os mesmos pontos sobre a mesma circunferência então eles são ditos **ângulos correspondentes** na circunferência.



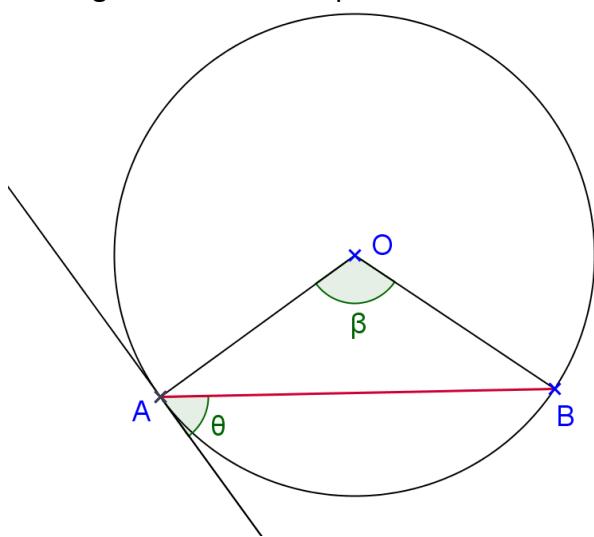
Propriedade 1: Todo ângulo inscrito em uma circunferência mede a metade do ângulo central correspondente.



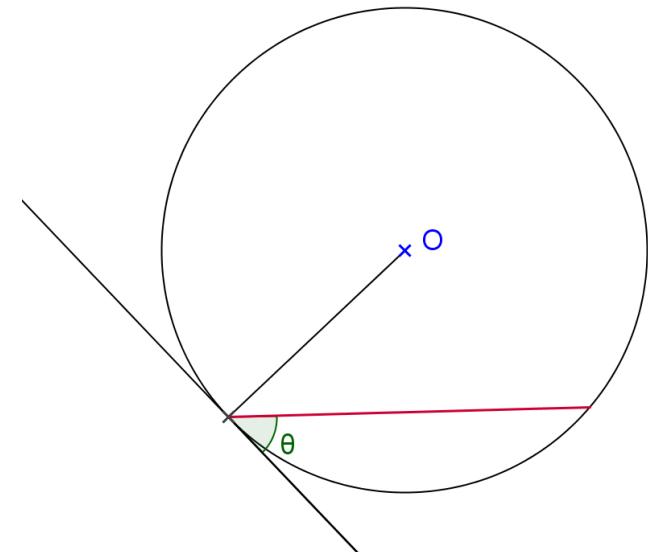
Definição 4: Ângulo de segmento (ou ângulo semi-inscrito) é o ângulo formado por uma corda e a tangente à circunferência conduzida por uma das extremidades da corda.

Observação: O arco interceptado por um ângulo de segmento também é chamado arco **correspondente** a esse ângulo.

Propriedade 2: A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

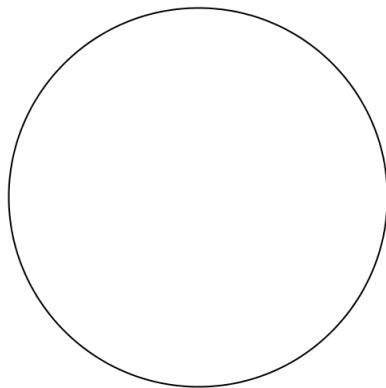


Consequência: Pode-se dizer, então, que o ângulo de segmento, assim como o ângulo inscrito, tem suas medidas iguais à metade do ângulo central correspondente.



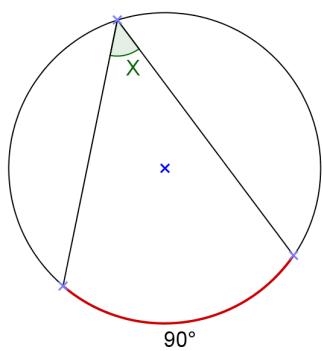
Exercícios Propostos:

1. Encontre o raio de uma circunferência dada, sem utilizar o seu centro.

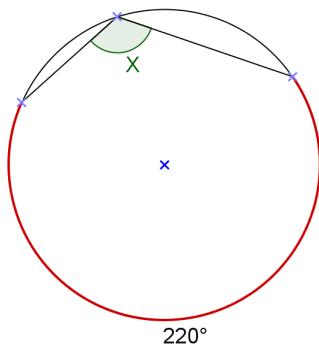


2. Calcule o valor de x.

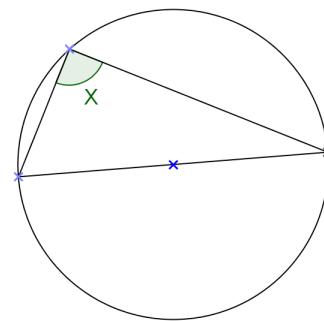
a.



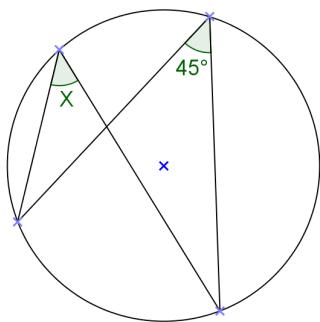
b.



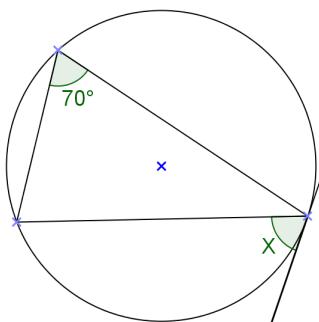
c.



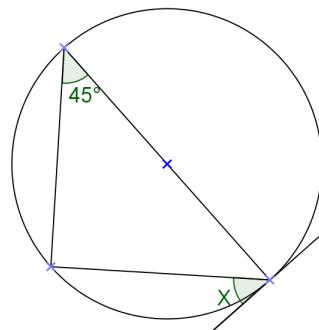
d.



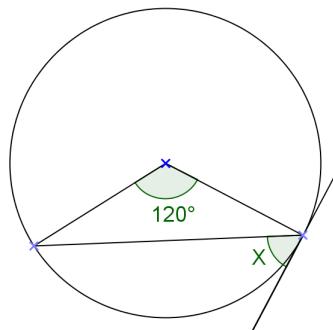
e.



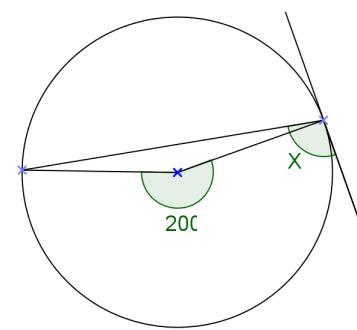
f.



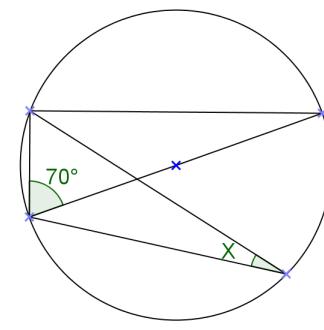
g.



h.

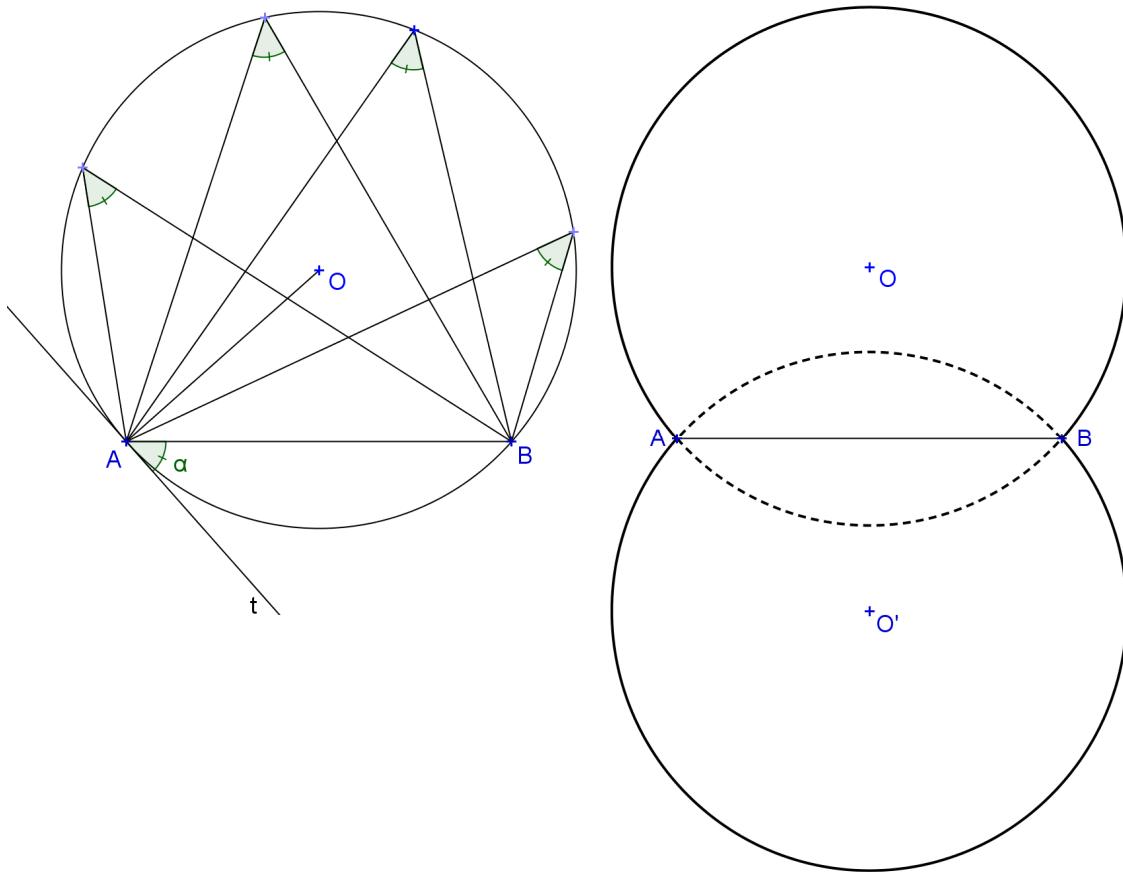


i.



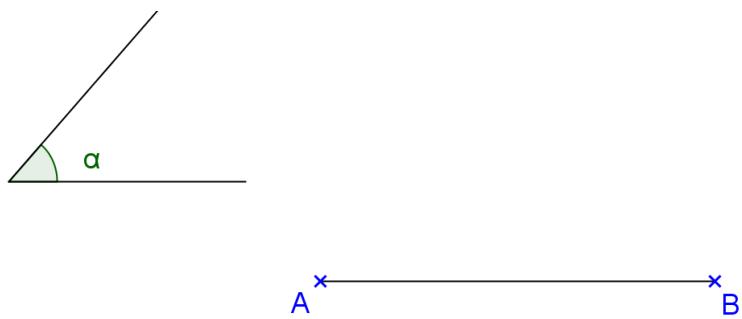
2.6. LG5: ARCO CAPAZ

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de **arcos capazes** do ângulo α descrito sobre AB.



Exercícios

1. Construa o par de arcos capazes de um segmento AB dado segundo um ângulo dado α .
 - a.

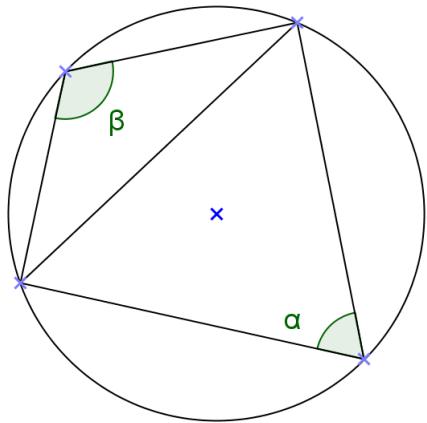


b. $\alpha = 60^\circ$

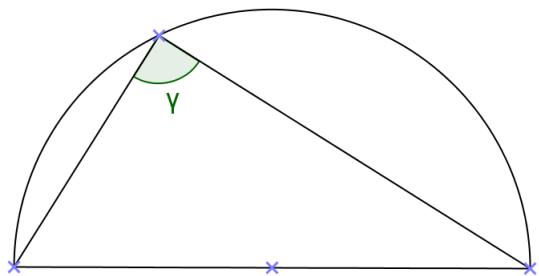
c. $\alpha = 120^\circ$



2. Quanto vale α em função de β ?



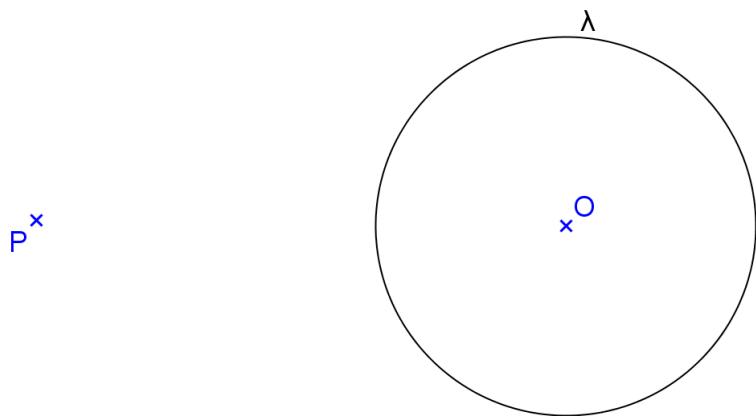
3. Quanto vale o ângulo inscrito numa semicircunferência?



4. Trace uma reta p perpendicular a uma reta r dada e que passa por um ponto P dado usando o conceito de arco capaz.

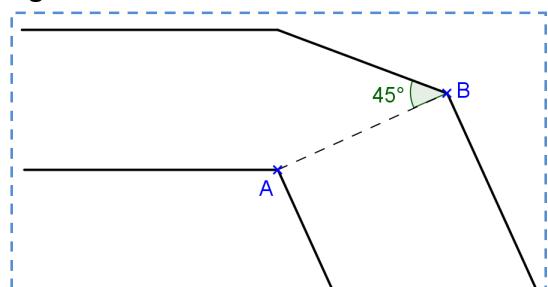


5. Dados a circunferência λ de centro O e um ponto P exterior, trace por P retas tangentes a λ .

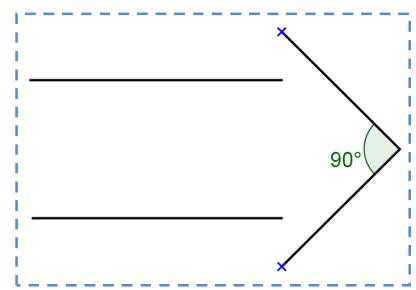
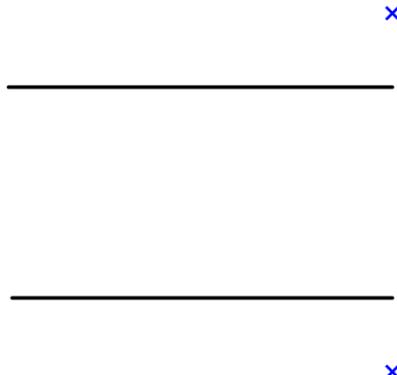


Exercícios Propostos

1. Construa a peça abaixo, com as medidas indicadas de AB e do ângulo de 45° .

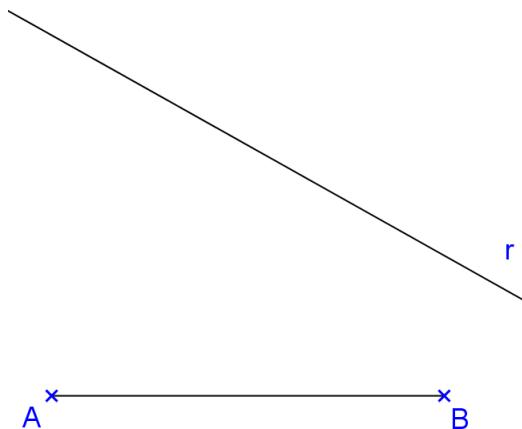


2. Construa a seta abaixo, com as medidas indicadas.

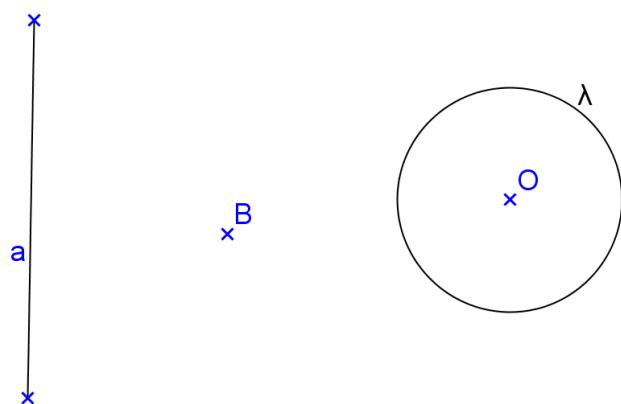


3. Construa os arcos capazes do segmento AB = 4cm segundo ângulos de 30° , 45° , 135° e 150° .

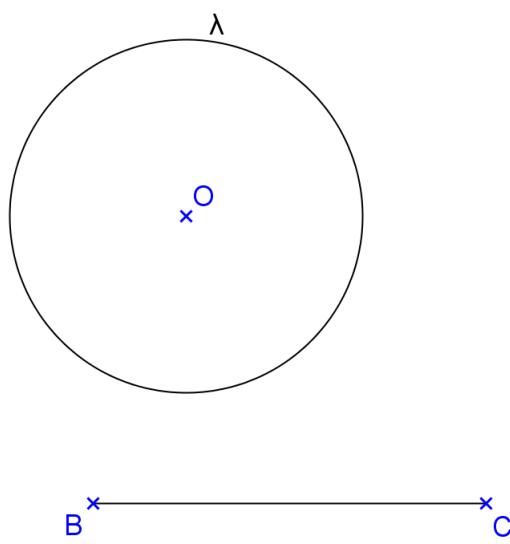
4. Construa um triângulo ABC sendo dados os vértices A e B, sabendo-se que o vértice C pertence à reta r e que $\hat{C} = 60^\circ$.



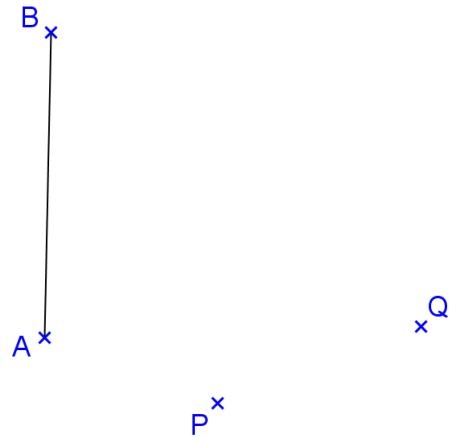
5. Construa um triângulo ABC, dados o vértice B, a circunferência inscrita e o lado a.



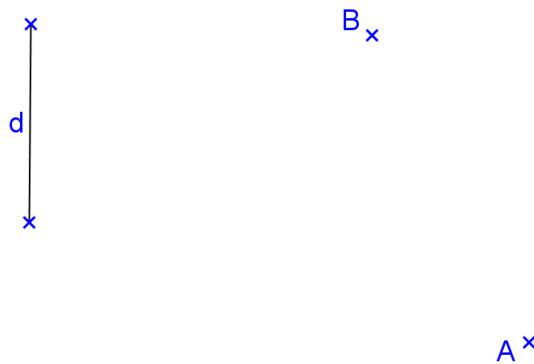
6. Dados os pontos B e C e uma circunferência λ , construa um triângulo ABC, sabendo-se que A pertence a λ e $\hat{A} = 60^\circ$.



7. Dados os pontos P e Q e um segmento AB, determine um ponto X que seja equidistante de P e Q, sabendo-se que X enxerga AB segundo um ângulo de 30° .

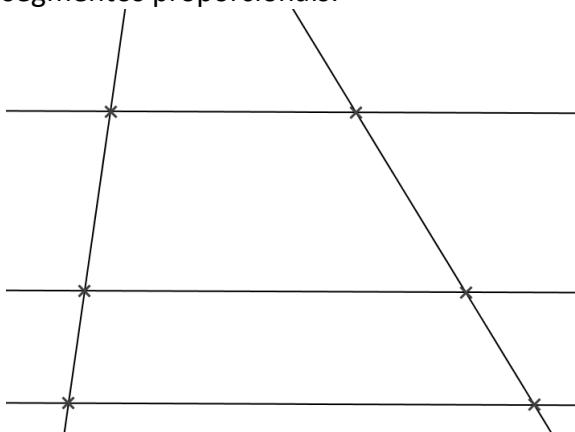


8. Dados os pontos A e B e uma distância d, determine um ponto P distante d de A tal que $\widehat{APB} = 60^\circ$.



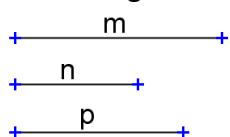
3. OPERAÇÕES COM SEGMENTOS**3.1. DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES PROPORCIONAIS**

Teorema de Tales: um feixe de retas concorrentes intercepta um outro feixe de retas paralelas segundo segmentos proporcionais.

**Exercícios**

1. Divilde o segmento AB = 11cm em n = 7 partes iguais.

2. Divilde o segmento AB = 12cm em partes proporcionais a segmentos dados.



3. Divilde o segmento $AB = 13\text{cm}$ em partes proporcionais a números dados: $m = 2$, $n = 4,2$ e $p = 5,3$.

4. Dados os segmentos $p = 15\text{cm}$, $q = 5\text{cm}$, $r = 3,5\text{cm}$ e $s = 4\text{cm}$, construa um triângulo ABC de perímetro igual a p , sabendo-se que os lados a , b e c são proporcionais a q , r e s , respectivamente.

5. Divilde os segmentos $a = 3\text{cm}$, $b = 4,5\text{cm}$, $c = 5,3\text{cm}$, $d = 6,4\text{cm}$, $e = 7\text{cm}$ e $f = 8,5\text{cm}$ em 5 partes iguais.

Exercícios Propostos

1. Construa um triângulo ABC, sendo dados $a + b = 9\text{cm}$ e o ângulo $\hat{C} = 60^\circ$, sabendo-se que a e b são proporcionais a 2 e 3, respectivamente.

2. Dado um segmento $m = 3,2\text{cm}$, obtenha um segmento x , tal que $x = \frac{2m}{5}$.

3.2. DIVISÃO HARMÔNICA

Definição: Dado um segmento AB e dois segmentos (ou números) p e q , os pontos M e N determinam uma **divisão harmônica de A e B segundo a razão $\frac{p}{q}$** se $\frac{AM}{BM} = -\frac{p}{q}$ e $\frac{AN}{BN} = +\frac{p}{q}$.

O ponto M divide internamente o segmento AB e N o divide externamente.

Dizemos que M e N são os conjugados harmônicos de A e B segundo a razão $\frac{p}{q}$.

Exercícios

1. Divida um segmento $AB = 7\text{cm}$ harmonicamente na razão dada k .

a. $k = \frac{7}{2}$

b. $k = \frac{2}{5}$

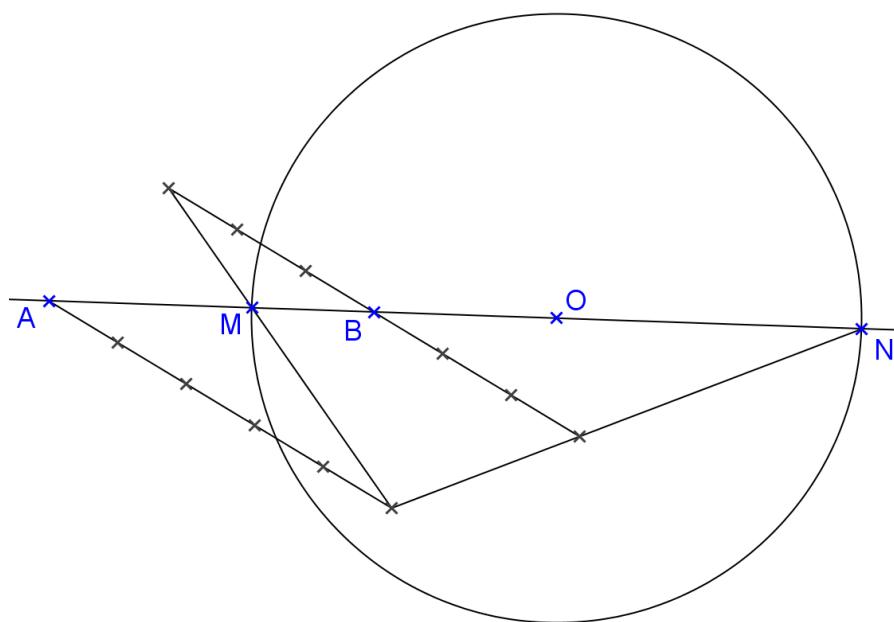
c. Obtenha os conjugados harmônicos do segmento dado AB na razão dada $k = \frac{3}{5}$. (terceiro e quarto harmônicos).

d. Considere M e N os conjugados harmônicos de A e B. Dados A, M e B, determine o ponto N.



3.3. LG6: CIRCUNFERÊNCIA DE APOLÔNIO

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante compõe-se de uma circunferência. O diâmetro da circunferência é formado pelos conjugados harmônicos dos pontos fixos. O centro da circunferência é o ponto médio dos conjugados harmônicos.



Exercícios

1. Construa o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão das distâncias aos pontos dados A e B seja:

a. $\frac{5}{2}$

b. $\frac{1}{4}$



2. Construa um triângulo ABC dados o lado $a = 5,4\text{cm}$, $h_a = 4\text{cm}$ e $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$.

3. Obtenha o ponto do qual possamos ver um segmento dado $AB = 3,5\text{cm}$ segundo um ângulo $\alpha = 45^\circ$, tal que a razão das distâncias do mesmo às extremidades de AB seja $\lambda = \frac{2}{5}$.

Exercícios propostos

1. Dados os pontos A e B, construa o lugar geométrico dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$.



2. Construa um triângulo ABC dados o lado $a = 3,5\text{cm}$, $\widehat{B} = 105^\circ$, e $\frac{b}{c} = \frac{7}{4}$.

3. Construa um triângulo ABC do qual conhecemos a base $a = 9\text{cm}$, a altura relativa à esta base $h_a = 2,7\text{cm}$ e a razão $\lambda = \frac{1}{3}$ dos outros dois lados.

3.4. QUARTA PROPORCIONAL

Definição: Dados três segmentos (ou números) a , b e c , a **quarta proporcional** aos três segmentos é um segmento (ou número) x , tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Exercício

Dados os segmentos $a = 2\text{cm}$, $b = 3,2\text{cm}$ e $c = 2,8\text{cm}$, obtenha a quarta proporcional nesta ordem.

Exercício Proposto

São dados os segmentos $a = 3\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$ e $d = 2,5\text{cm}$. Determine graficamente a quarta proporcional entre:

1. a, b, c

2. d, a, c

3. c, a, b

3.5. TERCEIRA PROPORCIONAL

Definição: Dados dois segmentos (ou números) a e b , a **terceira proporcional** aos dois segmentos é um segmento x , tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Exercício

Obtenha a terceira proporcional aos segmentos $a = 3\text{cm}$ e $b = 2,5\text{cm}$, nessa ordem.

Exercícios Propostos

1. São dados os segmentos $a = 3,5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ e $c = 2,5\text{cm}$. Determine graficamente a terceira proporcional entre:

1.1. a e b

1.2. c e a

1.3. b e c

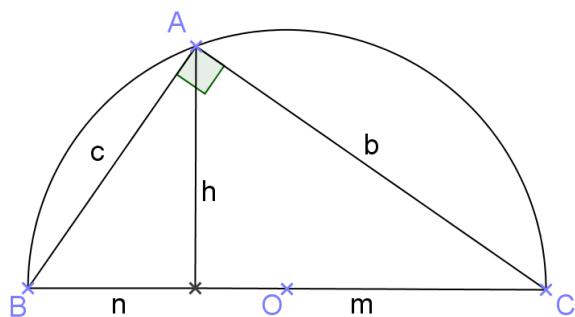
2. Dados $AB = 7,3\text{cm}$, $a = 0,3\text{cm}$ e $b = 0,6\text{cm}$ divida AB em partes inversamente proporcionais aos segmentos a e b .
3. Dados os segmentos $l = 3\text{cm}$, $m = 3,5\text{cm}$ e $n = 4\text{cm}$, construa um triângulo ABC , sabendo-se que $\widehat{A} = 60^\circ$,
 $a = \frac{m \cdot n}{l}$ e $b = \frac{l^2}{n}$.

3.6. MÉDIA GEOMÉTRICA (ou MÉDIA PROPORCIONAL)

Exercícios

- Construa um triângulo retângulo, sendo dadas as projeções $m = 3\text{cm}$ e $n = 4,3\text{cm}$ dos catetos b e c , respectivamente.
- Construa um triângulo retângulo, sendo dados a hipotenusa $a = 6,7\text{cm}$ e a projeção $m = 2,5\text{cm}$ do cateto b sobre a hipotenusa.

Propriedade: Sejam m e n as projeções ortogonais dos catetos b e c , respectivamente, sobre a hipotenusa a de um triângulo retângulo ABC. Tem-se então que: $b^2 = a.m$, $c^2 = a.n$ e $h^2 = m.n$, sendo h a altura relativa ao ângulo reto.



Definição: Dados dois segmentos p e q , a **média geométrica** (ou média proporcional) entre eles, é um segmento x , tal que:

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{q} \quad \text{ou} \quad x^2 = p \cdot q \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{p \cdot q}$$

Exercícios

1. Obtenha a média geométrica entre os segmentos p e q :

1.1. $p = 2,1\text{cm}$, $q = 5,2\text{cm}$

1.2. $p = 6,4\text{cm}$, $q = 7,4\text{cm}$

2. Dado o segmento $p = 2\text{cm}$, construa:

2.1. $x = p\sqrt{2}$

2.2. $y = p\sqrt{3}$

2.3. $z = p\sqrt{5}$

2.4. $t = p\sqrt{10}$

3. Dado o segmento $p = 8,5\text{cm}$, obtenha t , x , y , z tal que $\frac{t}{\sqrt{1}} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z}{\sqrt{4}} = \frac{p}{\sqrt{5}}$.

Exercícios propostos

1. Obtenha graficamente o valor aproximado de $(5,3 \times 3,8)^{1/2}$.

2. Dados $a = 1,2\text{cm}$, $b = 4,5\text{cm}$ e $c = 2,8\text{cm}$, obtenha o segmento x tal que $x^2 = (a + b).c$.

3. Dados $a = 2,5\text{cm}$, $b = 3,5\text{cm}$ e $c = 4\text{cm}$. Obtenha um segmento x tal que $x^2 = \frac{a^3b}{c^2}$.

4. Dado o segmento $p = 9\text{cm}$, obtenha y tal que $\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{p}{\sqrt{7}}$.

3.7. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$.

Exercícios

Dados $p = 4,5\text{cm}$, $q = 3\text{cm}$ e $r = 2,4\text{cm}$ obtenha x, tal que:

$$1. x^2 = p^2 + q^2$$

$$2. x^2 = p^2 - q^2$$

$$3. x^2 = p^2 + q^2 - r^2$$

$$4. x^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

Exercícios propostos

1. Obtenha graficamente o valor aproximado de $(7,2^2 + 3^2)^{1/2}$.

2. Dado $p = 2\text{cm}$, construa o segmento x tal que:

2.1. $x = p\sqrt{2}$

2.4. $x = p\sqrt{15}$

2.2. $x = p\sqrt{3}$

2.5. $x = p\sqrt{11}$

2.3. $x = p\sqrt{5}$

2.6. $x = p\sqrt{17}$

3. Construa a espiral pitagórica.

3.8. SEGMENTO ÁUREO (DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO)

Definição: Dado um segmento AB diz-se que se efetua uma **divisão áurea de AB por meio de um ponto P** quando este ponto divide o segmento em duas partes desiguais, tal que a maior (esta é o segmento áureo) é média geométrica entre a menor e o segmento todo.

Assim, o segmento AP é áureo do segmento dado AB quando $AP^2 = PB \cdot AB$ ou, é o mesmo que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP}$$



Exercícios

1. Dado o segmento AB obter o seu segmento áureo AP.

Consideração:

Seja o segmento AB de medida a. Como queremos encontrar a medida do segmento áureo de AB, considere $AP = x$, onde x é a medida que será determinada. Logo, $PB = (a - x)$.

Como AP deve ser áureo de AB então deve satisfazer a seguinte relação:

$$AP^2 = PB \cdot AB, \text{ ou seja, } x^2 = (a - x) \cdot a$$

$$\therefore x^2 = a^2 - ax$$

$$\therefore x^2 + ax - a^2 = 0$$

Portanto, a solução desta equação é:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} \\ x'' = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} \end{cases}$$

Considere destas duas raízes apenas x' (por ter medida menor que $a = AB$). Para determinarmos a medida do segmento áureo devemos obter um segmento com a medida x , ou seja, obter os segmentos de medidas $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{a}{2}$. Basta observar que estas medidas são hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo de catetos a e $\frac{a}{2}$.

Construção:



2. Dado o segmento AP obter AB, do qual AP seja áureo.

Consideração:

Conhecemos agora a medida do segmento áureo AP, fazendo $AP = a$ e $AB = x$ (pois devemos achar sua medida) então $PB = (x - a)$.

Como AP deve ser áureo de AB então pela definição devemos ter:

$$AP^2 = AB \cdot PB, \text{ ou seja, } a^2 = x \cdot (x - a)$$

$$\therefore a^2 = x^2 - ax$$

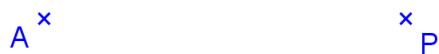
$$\therefore x^2 - ax - a^2 = 0$$

Portanto, a solução desta equação é:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} \\ x'' = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} = -\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Considere apenas a primeira raiz x' . Assim, para obter a medida de AB basta construir um triângulo retângulo, onde a e $\frac{a}{2}$ são catetos e $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ será a hipotenusa.

Construção:



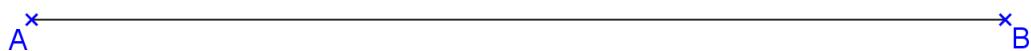
Observações:

- Segundo Euclides é dividir um segmento em média e extrema razão.
- A existência de duas raízes indica que existem dois pontos P e P_2 que dividem o segmento AB em duas partes desiguais, tal que a maior seja média geométrica entre a menor e o segmento todo. Mas somente o segmento AP é dito segmento áureo de AB.
- $\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0,618a$, $\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) \cong 1,618a$ e $\Phi \cong 1,618$.

Exercícios propostos

1. Construa o segmento áureo de um segmento AB de 5cm de medida. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento?

2. Construa um retângulo áureo, dado um de seus lados de medida AB. Construa uma espiral áurea.



3. Construa o segmento áureo AP de $AB = 7\text{cm}$. Depois, construa o segmento áureo AR de AP (áureo do áureo de AB), e sucessivamente até encontrar mais 4 segmentos áureos “em cascata”. Construa as circunferências áureas (concêntricas, com raios AB, AP, AR...).

3.9. POTÊNCIA DE PONTO

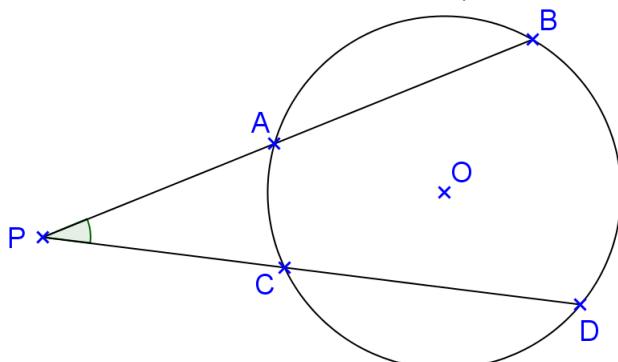
Propriedade: Considere uma circunferência qualquer de centro O e raio r, e um ponto P. Por P podemos traçar infinitas retas cortando a circunferência nos pontos A e B, C e D, E e F,... Denomina-se **potência de ponto com relação a uma circunferência**, a relação:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = \dots = k,$$

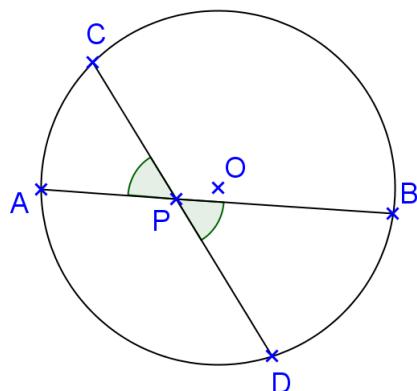
Para cada posição para P existe uma constante k, chamada potência do ponto P em relação à Circunf(O,r).

Justificativa:

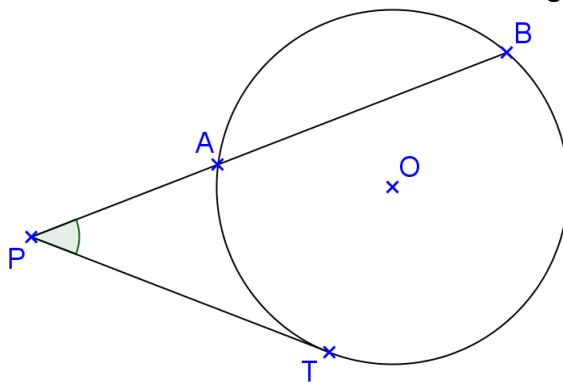
1º caso: P é externo à circunferência;



2º caso: P é interno à circunferência;



3º caso: P é externo e uma das retas é tangente à circunferência em um ponto T ($PT^2 = PA \cdot PB$).



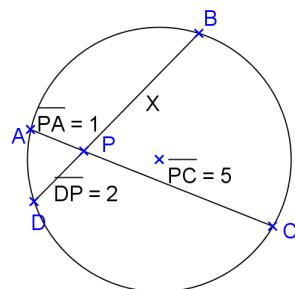
Observações:

- a) Se P é externo à circunferência a potência k é positiva;
- b) Se P é interno à circunferência a potência k é negativa;
- c) Se P é ponto da circunferência então a potência k é nula;
- d) Para cada posição do ponto P a potência possui um valor distinto k.

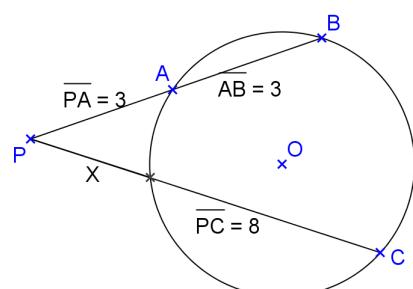
Exercícios

1. Calcule o valor de x.

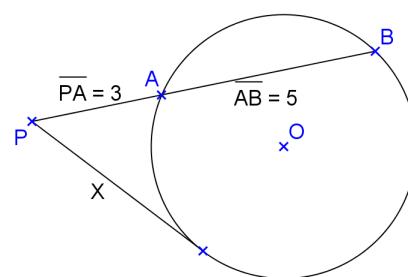
a)



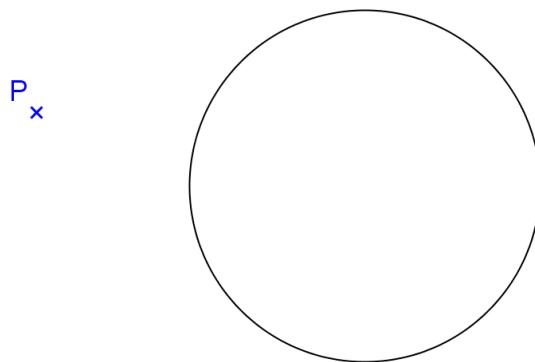
b)



c)



2. Trace as retas tangentes à circunferência, que passam pelo ponto P, sem usar o centro da mesma.



PARTE III

TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

3.1. CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Definição: O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é único e chama-se **circuncentro**.

Propriedade: O circuncentro é o centro da **circunferência circunscrita** ao triângulo.

Observação: O circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um dos lados, sendo, neste caso o seu ponto médio (no triângulo retângulo).

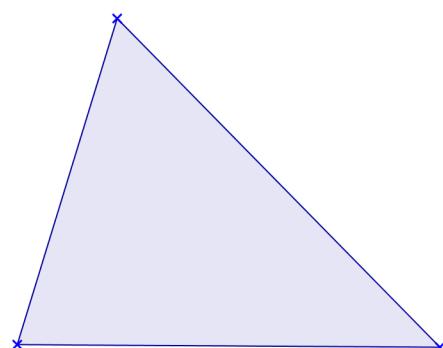
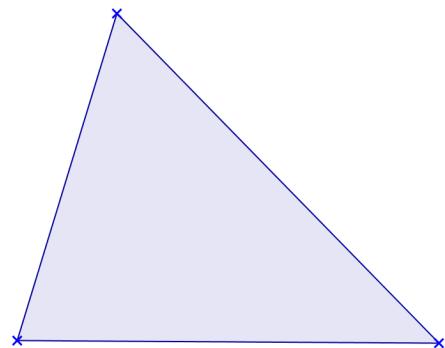
Definição: **Ceviana** é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Definição: **Mediana** é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado. O ponto de encontro das medianas é único e chama-se **baricentro**.

Propriedade: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida do terceiro lado.

Propriedade: O **baricentro** de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.

Observação: O baricentro é sempre interno ao triângulo.

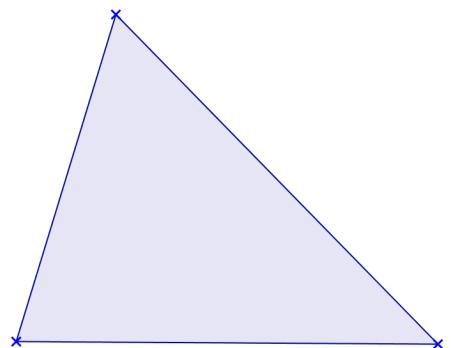


Definição: **Bissetriz interna** é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes. O ponto de encontro das bissetrizes internas é único e chama-se **incentro**.

Propriedade: O **incentro** é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Observação: O incentro é sempre interno ao triângulo.

Definição: **Altura** é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é único e chama-se **ortocentro**.



Observação: O **ortocentro** pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidir com um dos vértices, no caso, o do ângulo reto (no triângulo retângulo).

Definição: O triângulo $H_aH_bH_c$ é denominado **triângulo órtico** ou **pedal**.

Propriedade: As alturas de um triângulo acutângulo são as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico.

Propriedade: O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um mesmo triângulo pertencem a uma mesma reta, denominada **reta de Euler**.

3.2. CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Construir um triângulo significa determinar a posição dos seus vértices. Devem ser fornecidos sempre 3 elementos, um deles necessariamente linear, isto é, ou um lado ou uma altura ou uma mediana, etc.

Na discussão da quantidade de soluções pode-se analisar a posição na qual o triângulo foi desenhado e o tamanho obtido.

Normas gerais para a construção de triângulos:

- 1º Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura rascunho onde aparecem, além do contorno do triângulo, todos os elementos dados.
- 2º Estuda-se a figura rascunho em busca de propriedades que permitam obter os vértices.
- 3º Determinadas as propriedades, passa-se à construção.

Exercícios propostos

Construa o triângulo ABC, dados:

1. os três lados: $a = 7\text{cm}$, $b = 8\text{cm}$, $c = 5\text{cm}$.

2. dois lados e um ângulo adjacente: $a = 8\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $\widehat{B} = 30^\circ$.

3. um lado e dois ângulos adjacentes:
 $a = 7,5\text{cm}$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 75^\circ$.

4. um lado, ângulo oposto e ângulo adjacente:
 $a = 7\text{cm}$, $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 22,5^\circ$.

5. dois lados e o ângulo oposto ao terceiro lado: $a = 7\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $\hat{C} = 60^\circ$.

Construa o triângulo ABC, retângulo em A, dados:

6. um cateto e o ângulo oposto: $b = 4,5\text{cm}$,
 $\hat{B} = 30^\circ$.

7. a hipotenusa e um ângulo adjacente: $a = 8,5\text{cm}$,
 $\hat{B} = 60^\circ$.

8. a hipotenusa e um cateto: $a = 9\text{cm}$,
 $c = 4\text{cm}$.

9. os catetos: $b = 7,5\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$.

10. as projeções dos catetos sobre a hipotenusa: $m = 2\text{cm}$, $n = 5,5\text{cm}$

11. um cateto e a sua projeção sobre a hipotenusa: $c = 5,5\text{cm}$, $n = 3,5\text{cm}$.

12. um cateto e a projeção do outro sobre a hipotenusa: $c = 5,5\text{cm}$, $m = 1,5\text{cm}$

Construa o triângulo ABC, dados dois ângulos $\widehat{B} = 60^\circ$ e $\widehat{C} = 45^\circ$, e

13. uma altura: $h_a = 5\text{cm}$.

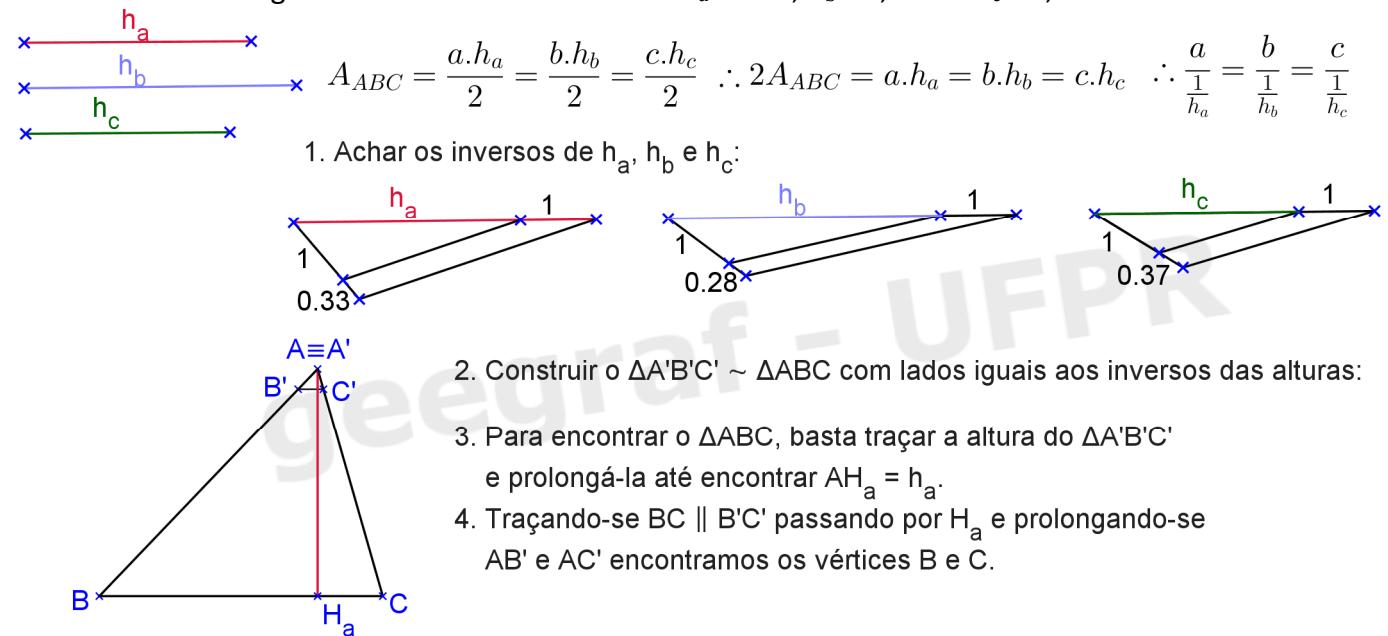
14. uma mediana: $m_a = 4,5\text{cm}$.

15. uma bissetriz: $b_b = 5\text{cm}$.

16. o raio da circunferência circunscrita: $R = 3\text{cm}$.

17. o raio da circunferência inscrita: $r = 2\text{cm}$.

18. Construir o triângulo ABC dadas as três alturas: $h_a = 3\text{cm}$, $h_b = 3,6\text{cm}$ e $h_c = 2,7\text{cm}$.



Construir o triângulo ABC, dados

19. dois lados e a altura relativa a um deles:
 $a = 7\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$, $h_a = 3,5\text{cm}$.

20. um lado, altura relativa ao mesmo e um ângulo adjacente: $a = 6\text{cm}$, $h_a = 4,5\text{cm}$, $\widehat{B} = 30^\circ$.

21. um lado, um ângulo adjacente e a mediana relativa ao mesmo: $a = 6\text{cm}$, $\hat{B} = 45^\circ$, $m_a = 5,5\text{cm}$.

23. um lado, ângulo oposto e a altura relativa ao mesmo lado: $a = 6\text{cm}$, $h_a = 3,5\text{cm}$, $\hat{A} = 45^\circ$.

25. um lado e as alturas relativas aos outros lados: $a = 7\text{cm}$, $h_b = 4\text{cm}$, $h_c = 6,5\text{cm}$.

27. um lado, mediana relativa ao mesmo e a altura relativa ao outro lado: $a = 6,5\text{cm}$, $m_a = 6\text{cm}$, $h_b = 3,5\text{cm}$.

22. dois lados e a altura relativa ao terceiro lado: $b = 5\text{cm}$, $c = 7\text{cm}$, $h_a = 4,5\text{cm}$.

24. um lado, altura relativa ao mesmo lado e altura relativa a outro lado: $a = 6,5\text{cm}$, $h_a = 4\text{cm}$, $h_b = 6\text{cm}$.

26. dois lados e a mediana relativa a um deles: $a = 7,5\text{cm}$, $c = 4,5\text{cm}$, $m_c = 7\text{cm}$.

28. dois lados e a mediana relativa ao terceiro: $a = 7\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$, $m_b = 4,7\text{cm}$.

29. as medianas: $m_a = 4,5\text{cm}$, $m_b = 6\text{cm}$, $m_c = 5,5\text{cm}$.

30. um ângulo, mediana relativa ao lado oposto e outra mediana: $\hat{A} = 60^\circ$, $m_a = 4,5\text{cm}$, $m_c = 5,5\text{cm}$.

31. uma altura e uma mediana relativas ao mesmo lado e o raio da circunferência circunscrita: $h_a = 4,5\text{cm}$, $m_a = 4,8\text{cm}$, $R = 3,2\text{cm}$

32. um lado, um ângulo e o raio da circunferência inscrita: $b = 4,5\text{cm}$, $r = 1,5\text{cm}$, $\hat{A} = 90^\circ$.

33. os pontos médios dos lados em posição.

$M_c \times$ $\times M_b$

$\times M_a$

34. um lado, a soma dos outros dois e a altura relativa a um destes: $a = 7\text{cm}$, $b + c = 12\text{cm}$ e $h_b = 4,5\text{cm}$.

35. um lado, a soma dos outros dois e o ângulo oposto a um destes: $a+b = 13\text{cm}$, $c = 7,5\text{cm}$ e $\widehat{B} = 60^\circ$.

36. um lado, a diferença dos outros dois e o ângulo oposto ao maior destes: $b = 9\text{cm}$, $a - c = 3\text{cm}$ e $\widehat{A} = 75^\circ$.

37. um lado, a diferença dos outros dois e o ângulo oposto ao menor destes: $a = 5\text{cm}$, $b - c = 2\text{cm}$ e $\hat{C} = 45^\circ$.

38. dois ângulos e o perímetro. $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ e $2p = 14\text{cm}$.

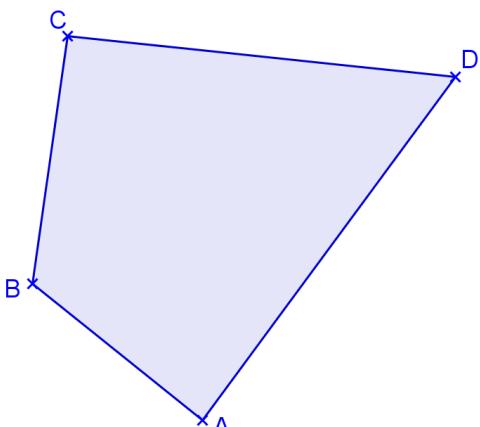
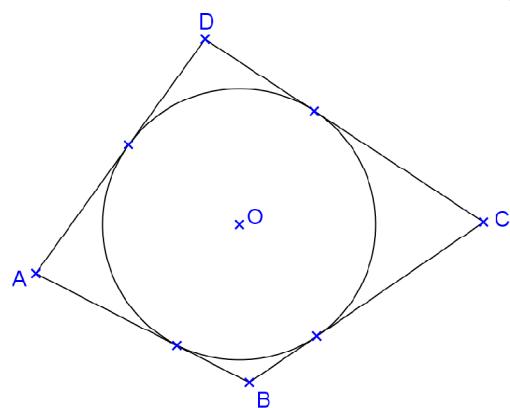
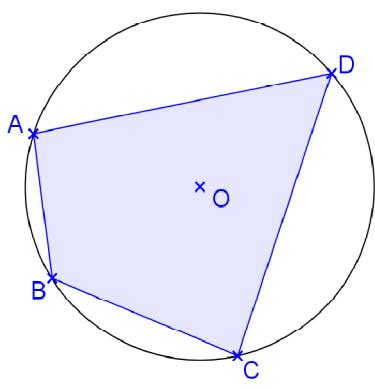
3.3. QUADRILÁTEROS

Propriedades:

Em um quadrilátero qualquer ABCD a soma dos ângulos internos é _____.

Um quadrilátero ABCD é inscritível quando

Um quadrilátero ABCD é circunscrevível quando



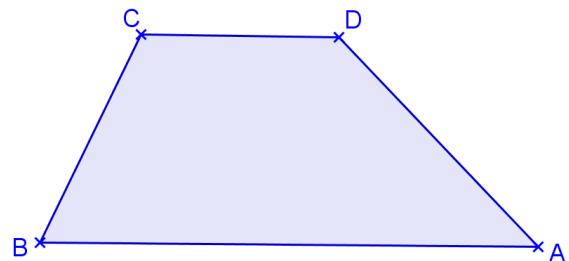
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

TRAPÉZIO

Definição: Trapézio é o quadrilátero que possui um par, e somente um par, de lados opostos paralelos.

Bases: _____

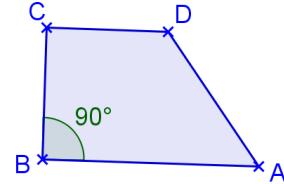
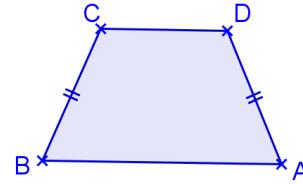
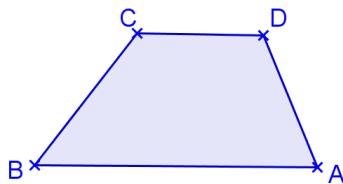
Lados não-paralelos: _____



A distância entre as bases é chamada de **altura do trapézio**.

Os trapézios se **classificam** em:

- **Escaleno:** quando os lados não-paralelos não são congruentes
- **Isósceles:** quando os lados não-paralelos são congruentes
- **Retângulo:** quando um dos os lados não-paralelos é perpendicular às bases



Propriedade: Em um **trapézio isósceles** os ângulos de uma mesma base são _____ e as diagonais são _____.

PARALELOGRAMO

Definição: Paralelogramo é o quadrilátero que possui os pares de lados opostos respectivamente paralelos.



Propriedades:

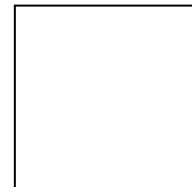
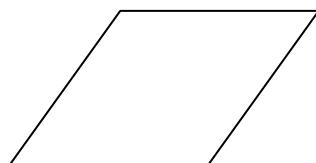
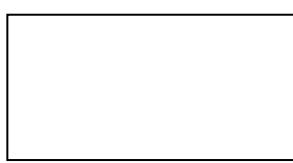
- Os ângulos opostos são _____.
- Quaisquer dois ângulos internos consecutivos são _____.
- Os lados opostos são _____.
- As diagonais interceptam-se em seus _____.

Propriedades Recíprocas:

- Se num quadrilátero os pares de lados opostos são respectivamente congruentes, então o quadrilátero é um _____.
- Se num quadrilátero um par de lados opostos são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um _____.
- Se num quadrilátero as diagonais interceptam-se em seus pontos médios, então o quadrilátero é um _____.

Os paralelogramos se **classificam** em:

- **Paralelogramos**
- **Retângulo:** quando possui ângulos retos.
- **Losango:** quando possui os quatro lados congruentes.
- **Quadrado:** quando possui os ângulos retos e os quatro lados congruentes.



O retângulo, o quadrado e o losango possuem todas as propriedades dos paralelogramos. E, além disso, possuem as seguintes **propriedades**:

- Em todo retângulo as diagonais são _____.
- Em todo losango as diagonais são _____ e _____ dos ângulos internos.
- Como todo quadrado é um retângulo, então suas diagonais são _____, e como ele também é losango, suas diagonais são _____ e _____ dos ângulos internos.

3.4. CONSTRUÇÃO DE QUADRILÁTEROS

Um quadrilátero pode ser entendido como uma composição de dois triângulos. Para construí-lo, é necessário conhecer 5 elementos, sendo necessariamente um deles linear. Com três deles, pode-se construir um dos triângulos em que o quadrilátero fica dividido por uma de suas diagonais, e com os outros dois determina-se o quarto vértice.

Quando se trata de um quadrilátero notável, há dados que já estão implícitos.

As técnicas de construções de quadriláteros são as mesmas utilizadas para os triângulos.

Exercícios

Construa um quadrado dado:

1. o lado: $AB = 4,2\text{cm}$.

2. a diagonal: $BD = 5,5\text{cm}$.

3. o raio da circunferência inscrita: $r = 2,5\text{cm}$.

4. o raio da circunferência circunscrita: $R = 3\text{cm}$.

5. o segmento áureo do lado: $x = 3,5\text{cm}$.

Construa um retângulo dados:

6. os lados: $AB = 7\text{cm}$, $BC = 4,5\text{cm}$.

7. diagonal e o lado: $AB = 4\text{cm}$, $d = 9,2\text{cm}$.

8. diagonal e o ângulo formado pelas mesmas: $d = 7,5\text{cm}$, $\alpha = 120^\circ$.

9. diagonal e semiperímetro: $d = 6,5\text{cm}$, $p = 9\text{cm}$.

10. raio da circunferência circunscrita e o perímetro: $R = 3\text{cm}$, $2p = 17$.

11. o semi-perímetro e a média proporcional de dois lados: $p = 8,5\text{cm}$, $m = 3,8\text{cm}$.

Construa um losango dados:12. as diagonais: $AC = 7,5\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$.13. o lado e uma diagonal: $AB = 4,5\text{cm}$, $AC = 5,2\text{cm}$.14. o lado e um ângulo: $AB = 4,7\text{cm}$, $\hat{C} = 45^\circ$.15. o lado e a soma das diagonais: $AB = 5,2\text{cm}$, $s=14\text{cm}$.**Construa um paralelogramo ABCD dados:**16. os lados e um ângulo: $AB = 6\text{cm}$,
 $BC = 3,5\text{cm}$, $\hat{B} = 45^\circ$.17. os lados e uma diagonal: $AB = 5,5\text{cm}$, $BC = 4,2\text{cm}$,
 $AC = 8,3\text{cm}$.18. as diagonais e um lado: $AC = 8,4\text{cm}$,
 $BD = 5\text{cm}$, $BC = 4,2\text{cm}$.19. as diagonais e o ângulo formado entre elas:
 $BD = 8\text{cm}$, $AC = 4,5\text{cm}$, $\alpha = 120^\circ$.

20. uma diagonal, um ângulo e o semi-perímetro: $BD = 5\text{cm}$, $\hat{C} = 60^\circ$, $p = 8,5\text{cm}$.

21. os lados e a altura: $BC = 4,5\text{cm}$, $AB = 6,5\text{cm}$, $h_{BC} = 4\text{cm}$.

Construa um trapézio ABCD dados:

22. os lados: $AB = 7,5\text{cm}$, $BC = 5,5\text{cm}$, $CD = 2,6\text{cm}$, $AD = 4,3\text{cm}$.

23. as bases e as diagonais: $AB = 6,5\text{cm}$, $CD = 2,8\text{cm}$, $BD = 6,2\text{cm}$, $AC = 5,5\text{cm}$.

24. uma base, dois lados e o ângulo formado por um dos lados com a base dada: $AB = 8\text{cm}$, $AD = 4,3\text{cm}$, $BC = 3,8\text{cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$.

25. as bases, uma diagonal e o ângulo formado pelas diagonais: $AB = 6,5\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $DC = 2,5$, $A\hat{E}B = 120^\circ$ (E é o ponto de interseção das diagonais).

Construa um trapézio isósceles dados:

26. as bases e altura: $AB = 6,5\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, $h = 4,3\text{cm}$.

27. as bases e uma diagonal: $AB = 7\text{cm}$, $CD = 2,7\text{cm}$, $AC = 6,5\text{cm}$.

28. as bases e o raio da circunferência circunscrita: $AB = 5,5\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, $R = 3\text{cm}$.

Construa um trapézio retângulo em A dados

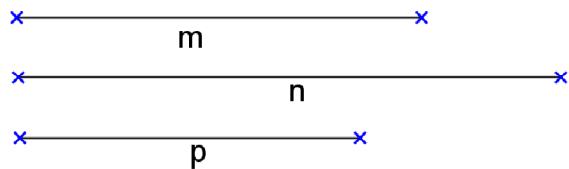
29. as bases e a altura: $AB = 6,5\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, $h = 4\text{cm}$.

30. uma base, um lado e a altura: $AB = 7,5\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $h = 3,5\text{cm}$.

31. uma base, a soma da outra base com um lado e a altura: $AB = 4,5\text{cm}$, $s = 12\text{cm}$, $h = 4,2\text{cm}$.

Exercícios propostos

Considere os segmentos de medidas m, n e p para resolver os problemas de triângulos e quadriláteros a seguir.



1. Construa o triângulo ABC, dados o lado $a = m\sqrt{2}$, a altura $h_a = \frac{n}{2}$ e a mediana $m_a = p$.
 2. Construa o triângulo ABC, dados o lado $a = p\sqrt{3}$, a altura $h_b = p$ e o ângulo $\widehat{B} = 105^\circ$.
 3. Construa o triângulo equilátero com lado $a = \sqrt{n \cdot p}$.
 4. Construa o trapézio ABCD dados os lados $AB = n$, $CD = p$, BC = segmento áureo de m , e o ângulo $\widehat{A} = 75^\circ$.
 5. Construa o paralelogramo ABCD dados os lados $AB = \frac{3m}{2}$, $BC = \frac{m}{2}$ e a diagonal $AC = n$.
 6. Construa o retângulo ABCD dados o lado $AB = n$ e a razão $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{2}$.

PARTE IV

TANGÊNCIA E CONCORDÂNCIA

4.1. PROPRIEDADES DE TANGÊNCIA

Definição: A **tangente a uma curva** é uma reta que tem um só ponto em comum com esta curva.

Propriedade: Toda reta tangente a uma circunferência é **perpendicular ao raio** no ponto de tangência.

Definição: **Duas curvas são tangentes** num ponto dado T, quando as tangentes a essas curvas nesse ponto são coincidentes.

Propriedade: Se duas circunferências são tangentes então o ponto de tangência e os centros estão alinhados.

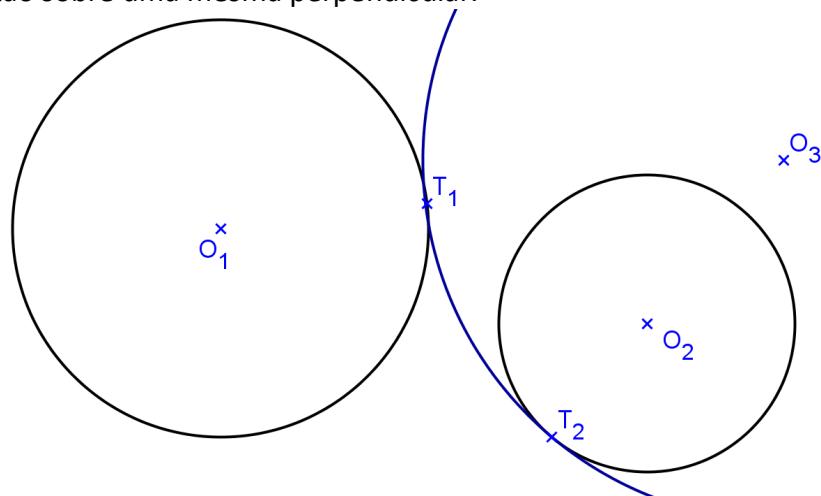
Observação: Duas circunferências podem se tangenciar interna ou externamente.

4.2. PROPRIEDADES DE CONCORDÂNCIA

Definição: **Concordar** duas linhas é reuni-las de forma tal que nos pontos de contato se possa passar de uma para a outra sem reversão ou ângulo. **Ponto de concordância** é o ponto de contato das linhas concordantes (o ponto de concordância entre duas linhas concordantes corresponde ao ponto de tangência entre duas linhas tangentes). **Centro de concordância** é cada um dos centros das curvas concordantes.

Propriedades de concordância:

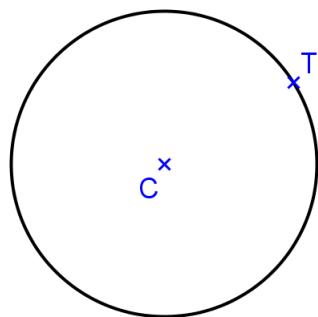
- Dois arcos de circunferência estão em concordância num ponto quando admitem nesse ponto uma tangente comum.
- Um arco e uma reta estão em concordância num ponto quando a reta é tangente ao arco nesse ponto.
- Na concordância de reta com arco de circunferência, o ponto de concordância e o centro de concordância estão sobre uma mesma perpendicular.



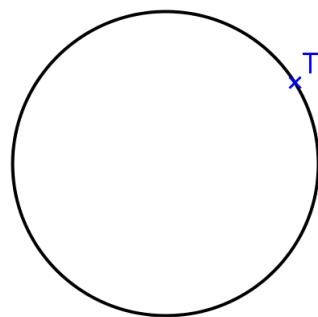
4.3. PROBLEMAS DE TANGÊNCIA

1. Traçar reta tangente a uma circunferência (C, m) dada, por um ponto da mesma.

1.1. utilizando o centro da mesma

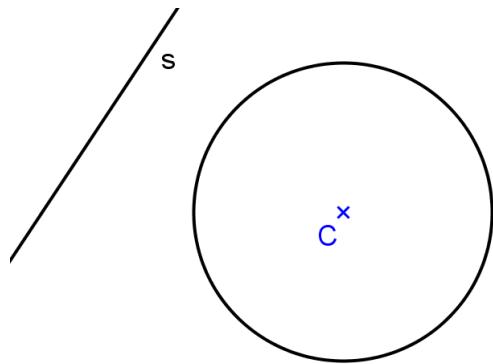


1.2. sem utilizar o centro da mesma

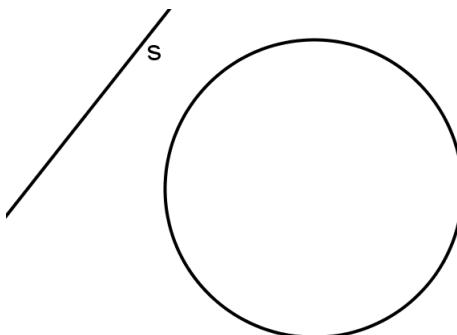


2. Traçar retas tangentes a uma circunferência (C, m) paralelas a uma reta s .

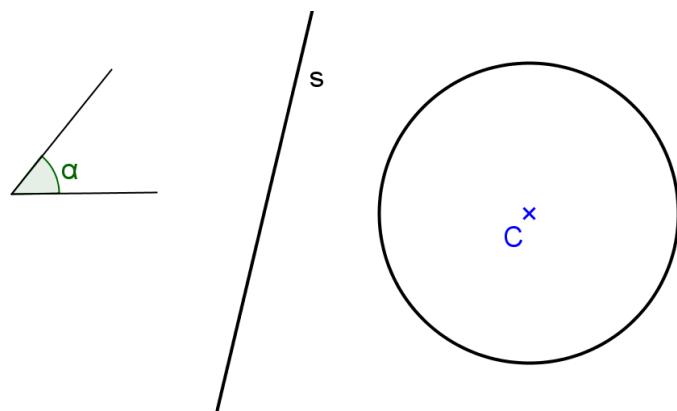
2.1. utilizando o centro da mesma



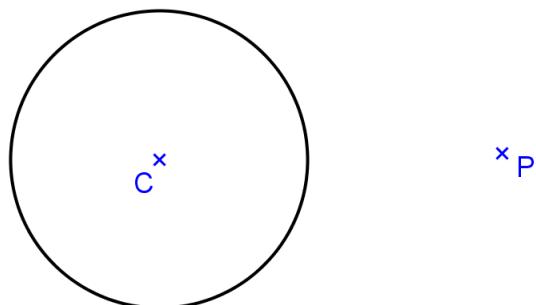
2.1. sem utilizar o centro da mesma



3. Traçar tangentes à circunferência (C, m) que formem ângulo dado α com uma reta s .

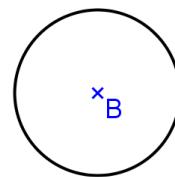
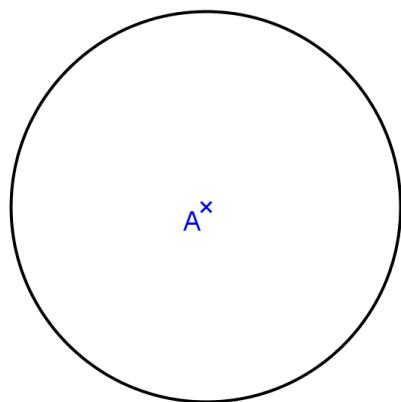


4. Traçar tangentes a uma circunferência (C, m) que passem pelo ponto P .

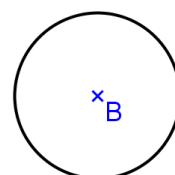
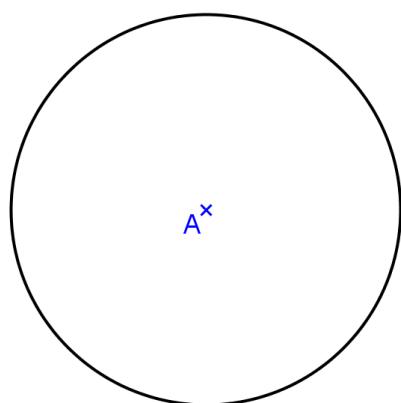


5. Traçar retas tangentes comuns a duas circunferências $\alpha(A, a)$ e $\beta(B, b)$: **método da dilatação e contração**.

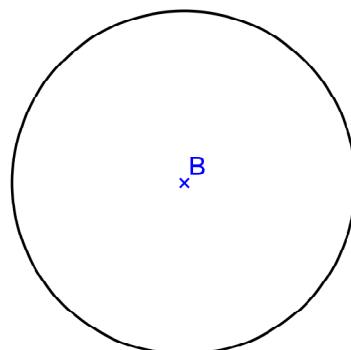
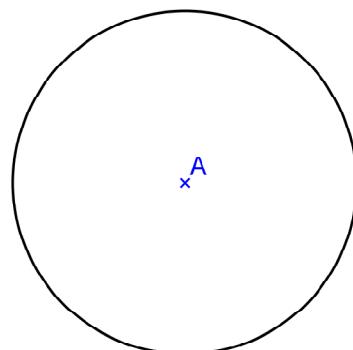
5.1. Tangentes exteriores



5.2. Tangentes interiores

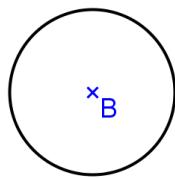
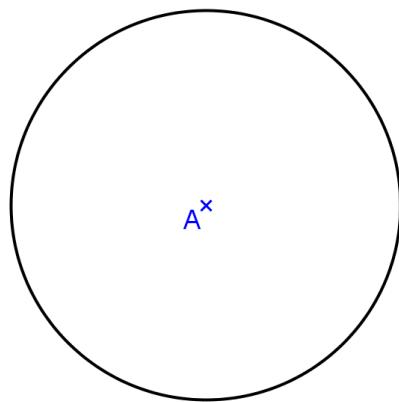


5.3. Se $a = b$

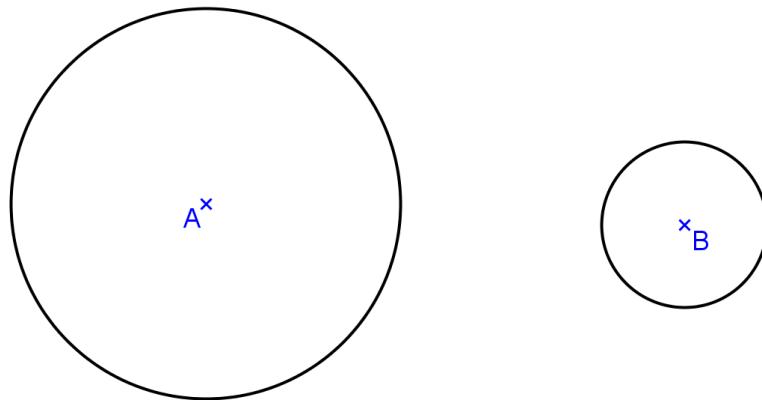


6. Traçar retas tangentes comuns a duas circunferências $\alpha(A, a)$ e $\beta(B, b)$: **método da homotetia**.

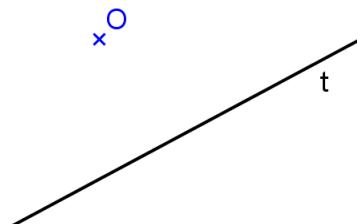
6.1. Tangentes exteriores



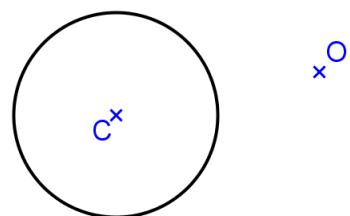
6.2. Tangentes interiores



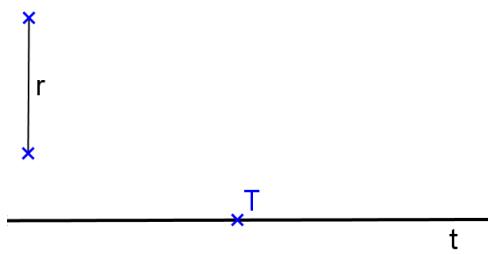
7. Traçar circunferência de centro O, tangente à reta t.



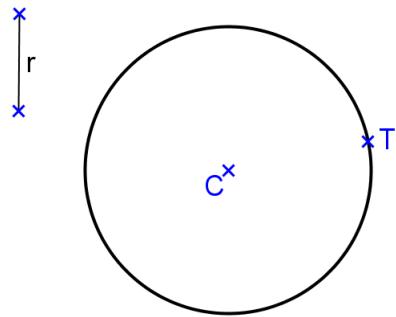
8. Traçar circunferências de centro O, tangentes à circunferência (C, m).



9. Traçar circunferências de raio r, tangentes à reta t num ponto T da mesma.

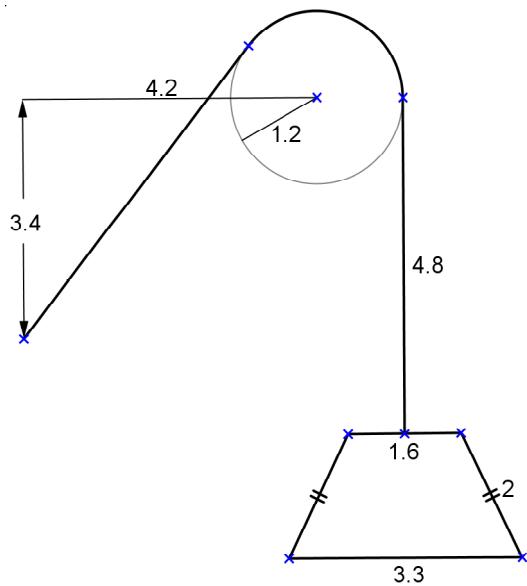


10. Construir as circunferências de raio r , tangentes à circunferência (C, m) em um ponto T da mesma.

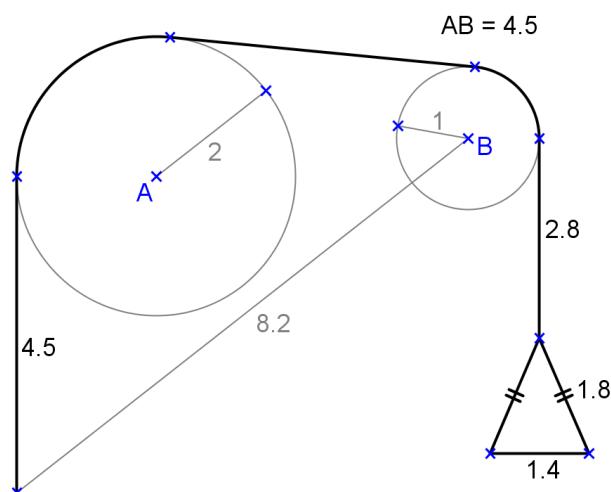


11. Construir as peças abaixo usando tangência e concordância:

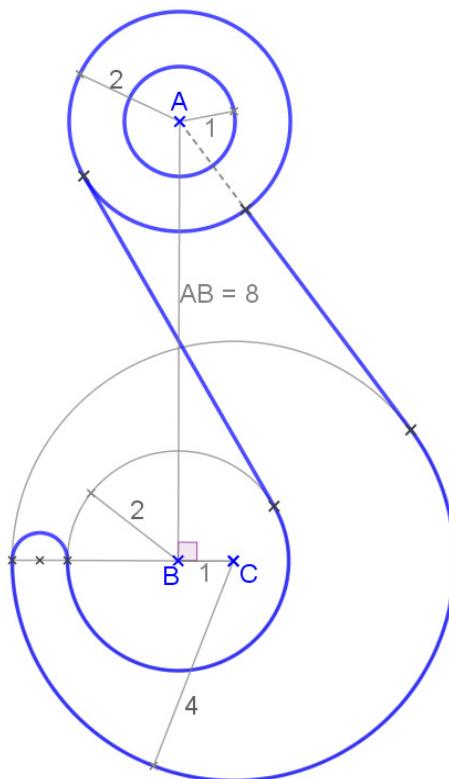
11.1.



11.2.

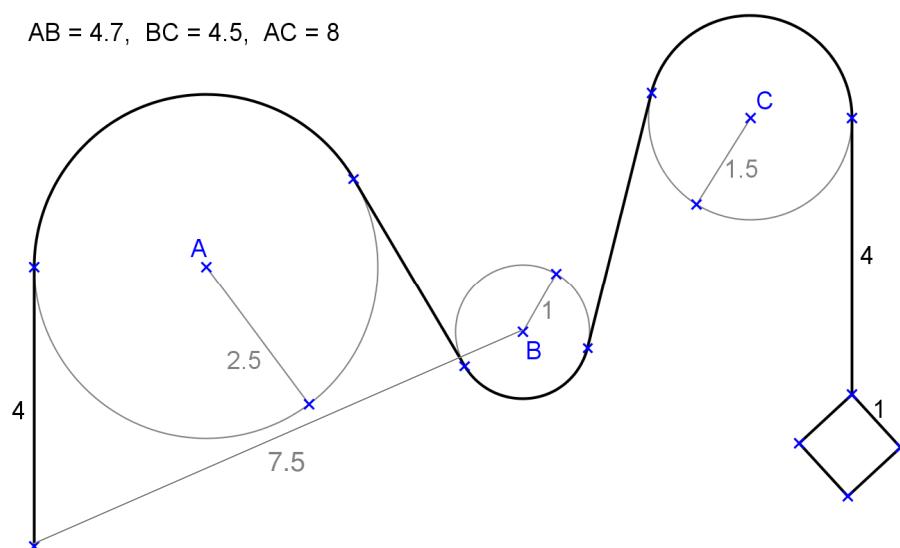


11.3.

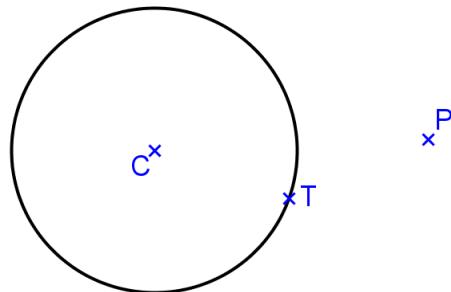


11.4.

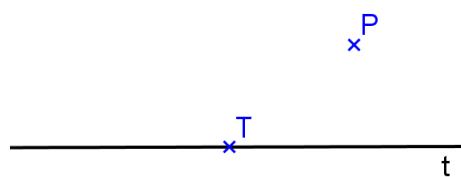
$$AB = 4.7, BC = 4.5, AC = 8$$



12. Traçar circunferência que passa por um ponto P e é tangente a circunferência (C, m) em T.



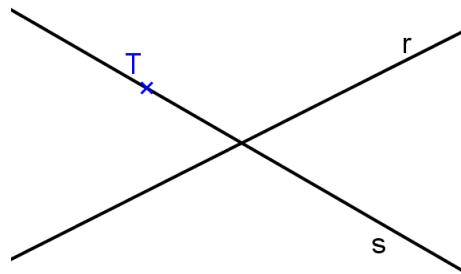
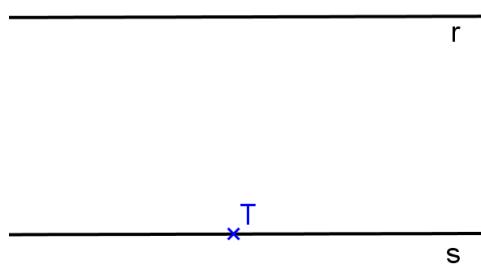
13. Traçar circunferência que passa pelo ponto P e é tangente à reta t em T.



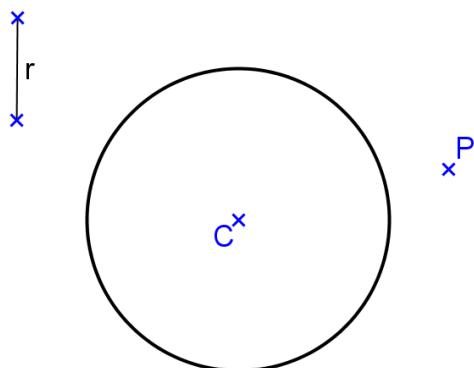
14. Traçar circunferências tangentes às retas r e s, dado o ponto de tangência T sobre uma delas.

14.1. r e s são paralelas

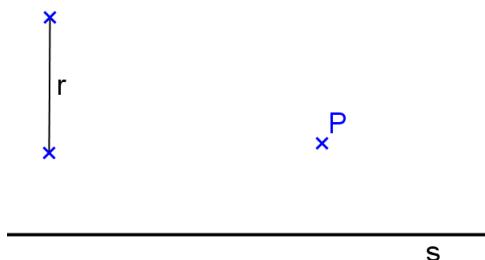
14.2. r e s são concorrentes



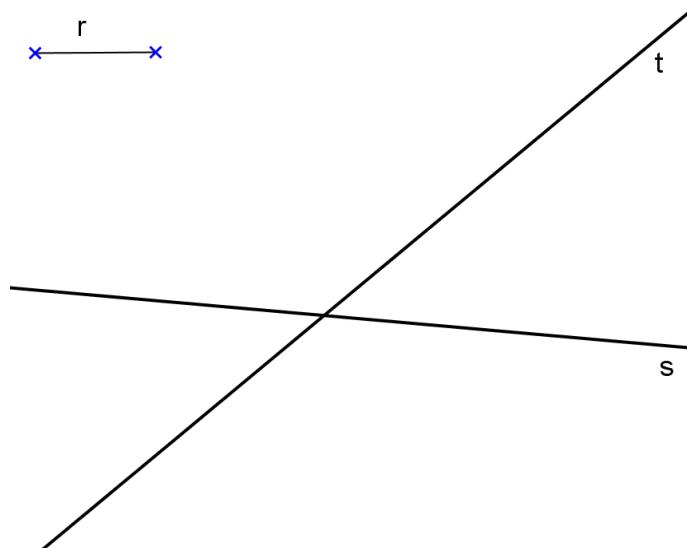
15. Traçar circunferências de raio r , que passam pelo ponto P e que sejam tangentes à circunferência (C, m) .



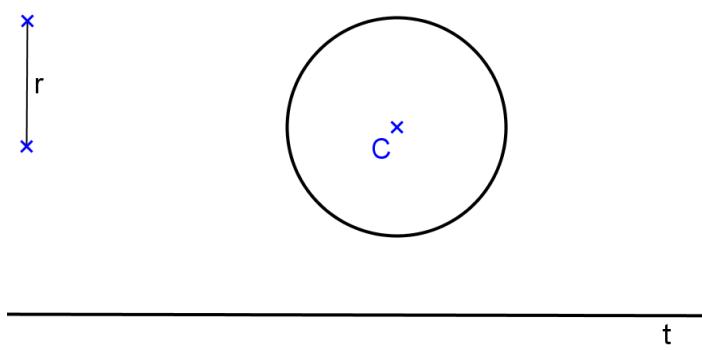
16. Traçar circunferências de raio r , que passem pelo ponto P e que sejam tangentes à reta s .



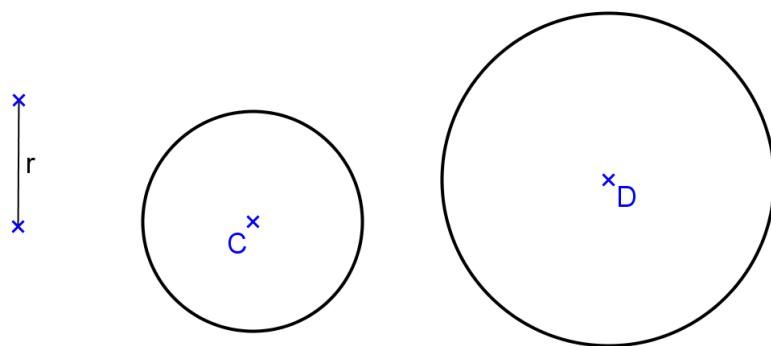
17. Traçar circunferências de raio r , tangentes às retas s e t .



18. Traçar circunferências de raio r , tangentes à reta t e a circunferência (C, m) .

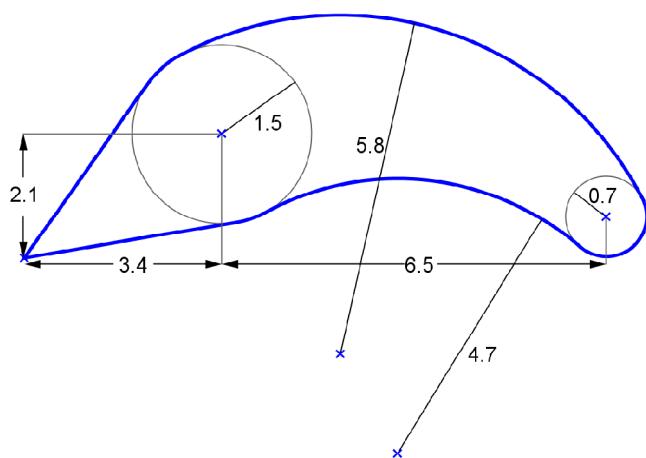


19. Traçar circunferências de raio r , tangentes às circunferências (C, m) e (D, n) .

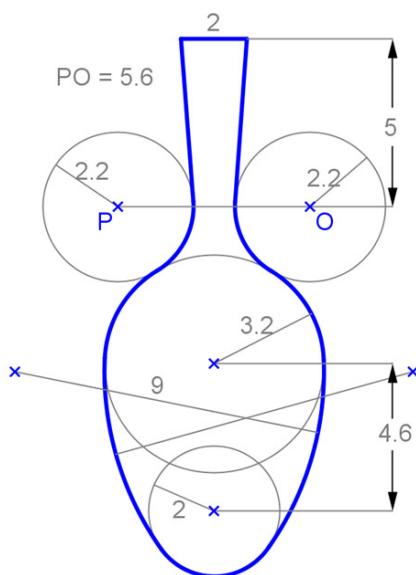


20. Construir as peças dadas pelos esboços abaixo usando tangência e concordância.

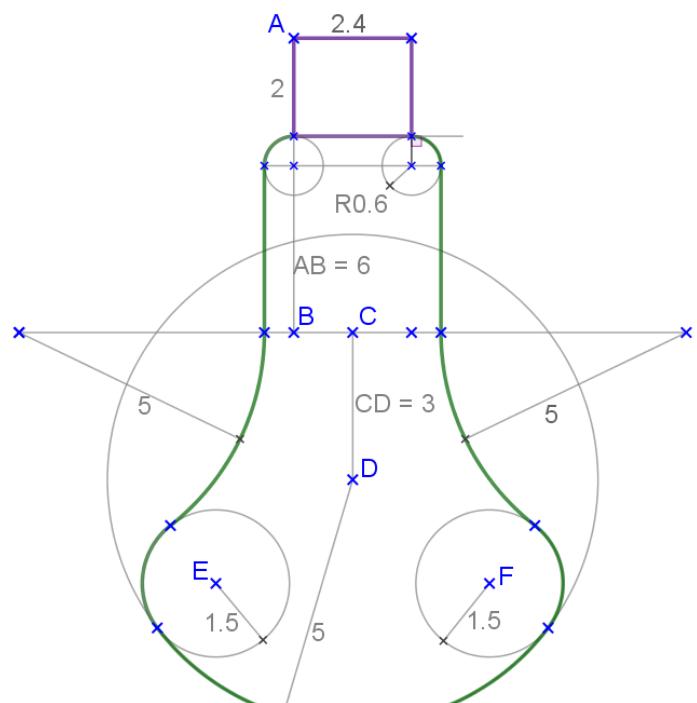
20.1.



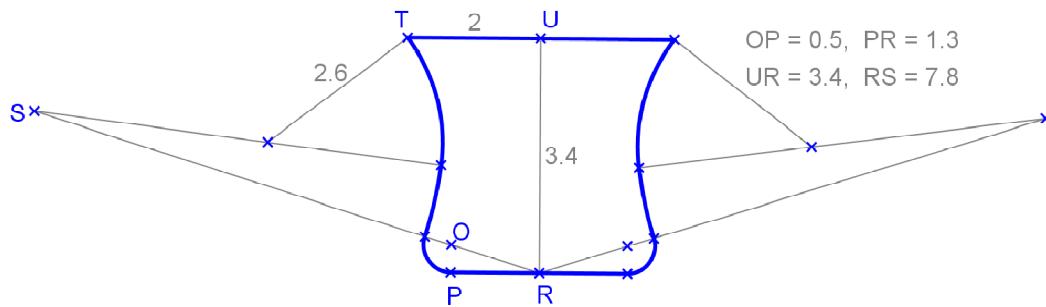
20.2.



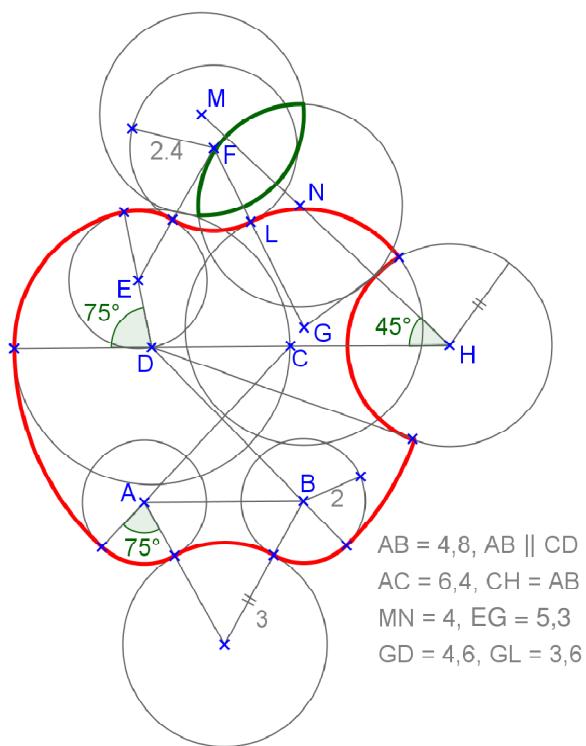
20.3



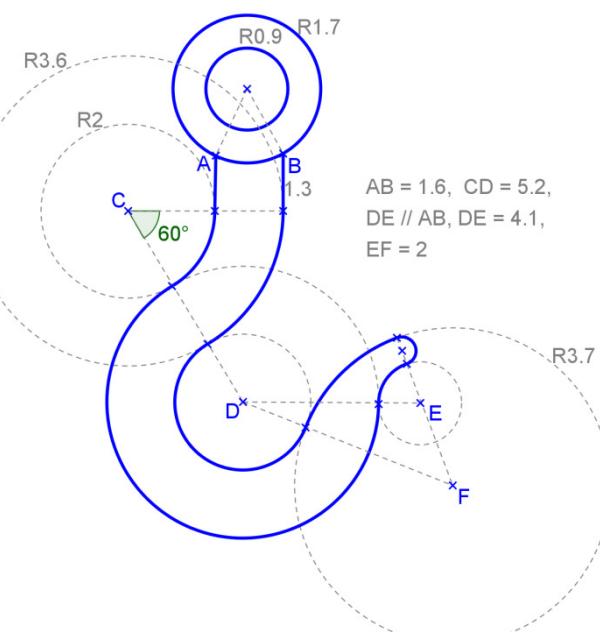
20.4.



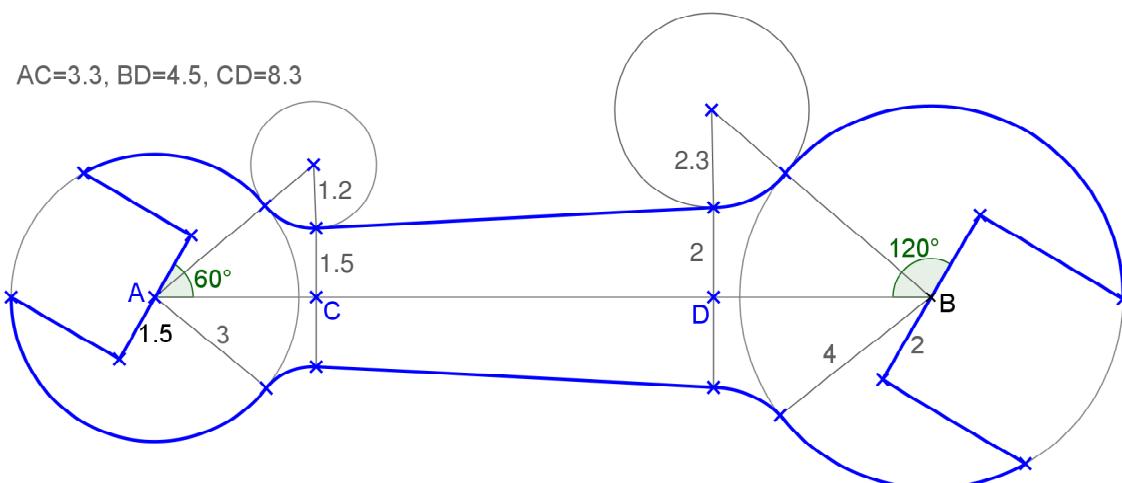
20.5.



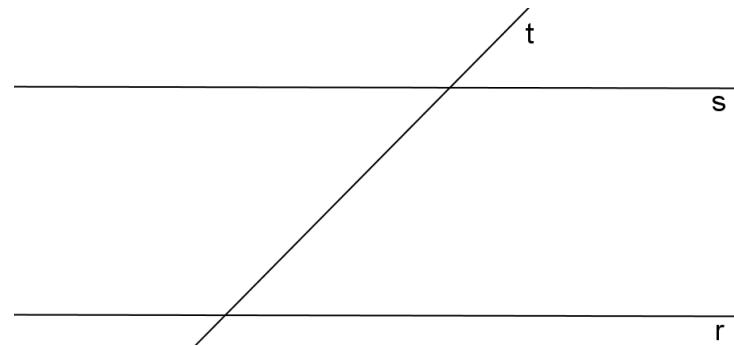
20.6



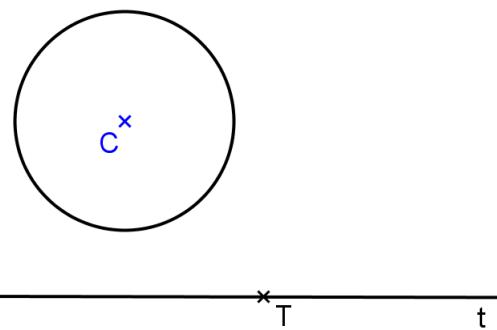
20.7.



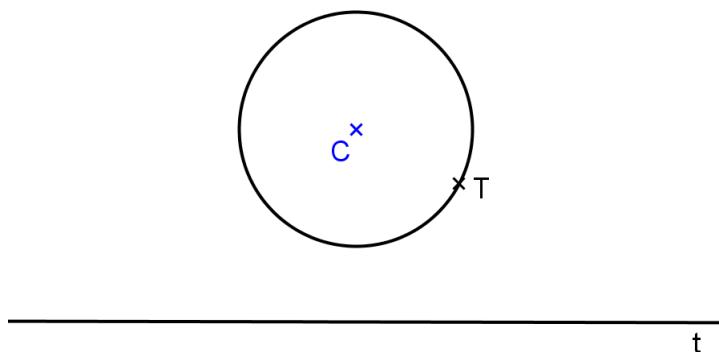
21. Traçar circunferências tangentes às retas r , s e t , sendo r e s paralelas.



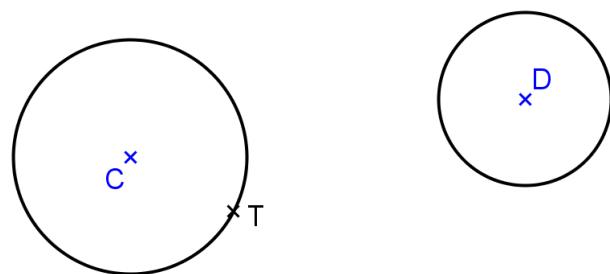
22. Traçar circunferências tangentes à reta t em T e à circunferência (C, m) .



23. Traçar circunferências tangentes à reta t e à circunferência (C, m) em T .

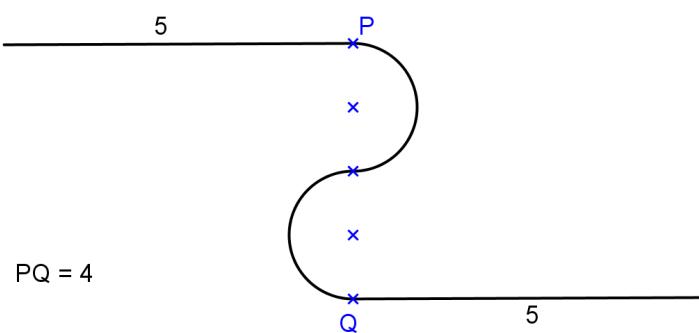


24. Traçar circunferências tangentes às circunferências (C, m) em T e (D, n).

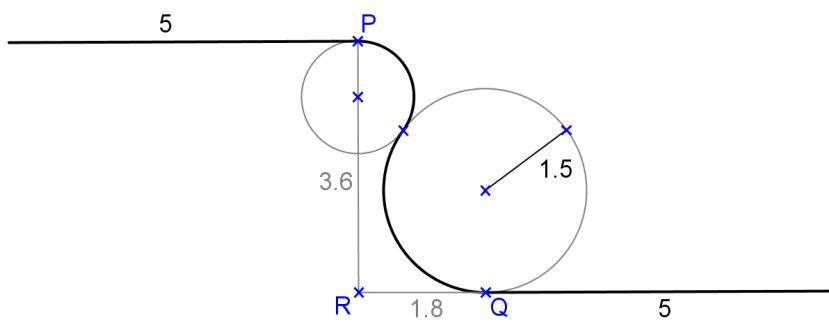


25. Concordar os segmentos dados por meio de dois arcos de circunferências nas condições abaixo:

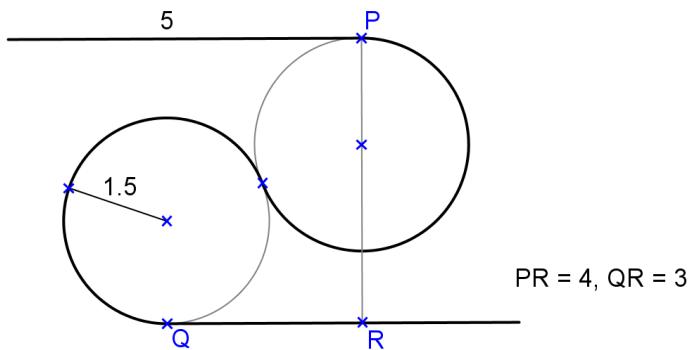
25.1.



25.2.



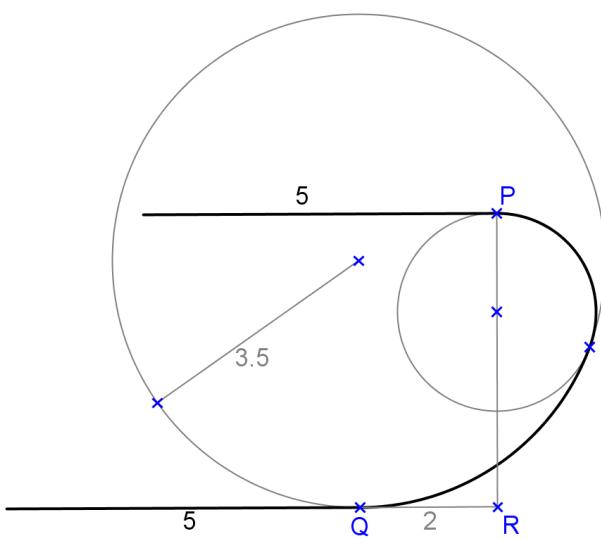
25.3.



$$PR = 4, QR = 3$$

25.4.

$$PR=4$$



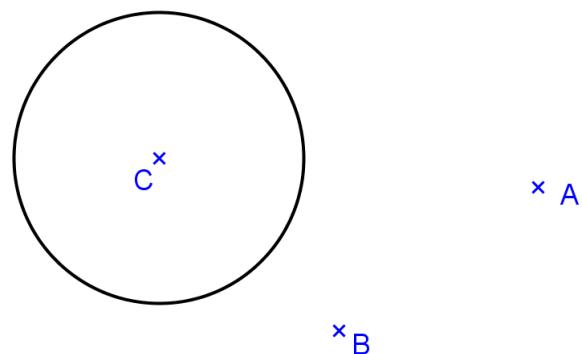
26. Construir circunferências que passam pelos pontos A e B e são tangentes à reta t.

\times
B

\times
A

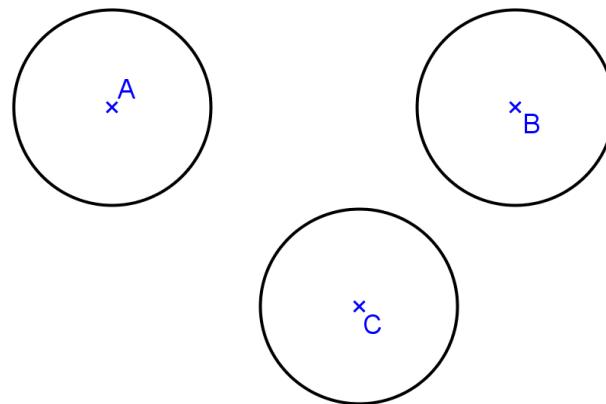
t

27. Traçar circunferências tangentes à circunferência (C, m) e que passam pelos pontos A e B.

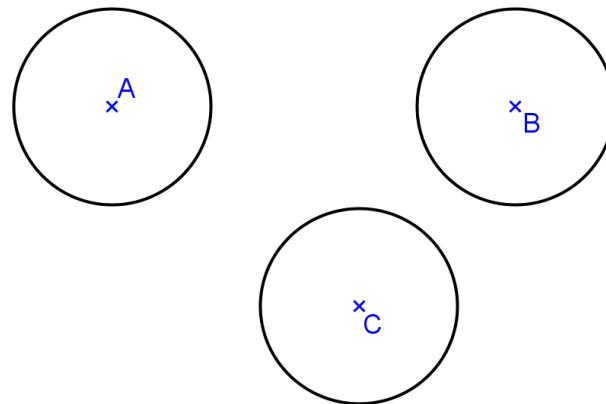


28. Traçar circunferências que sejam tangentes às três circunferências de raios iguais e centros A, B e C.

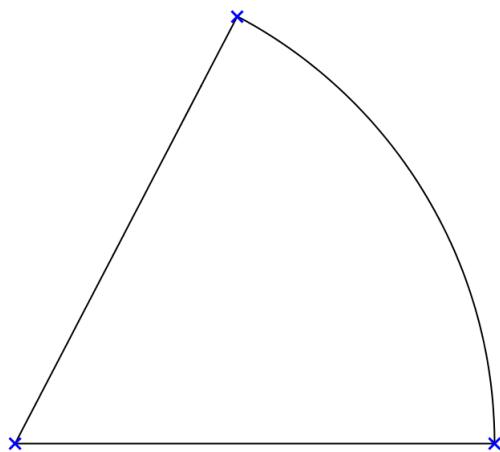
1º caso: contração das três circunferências



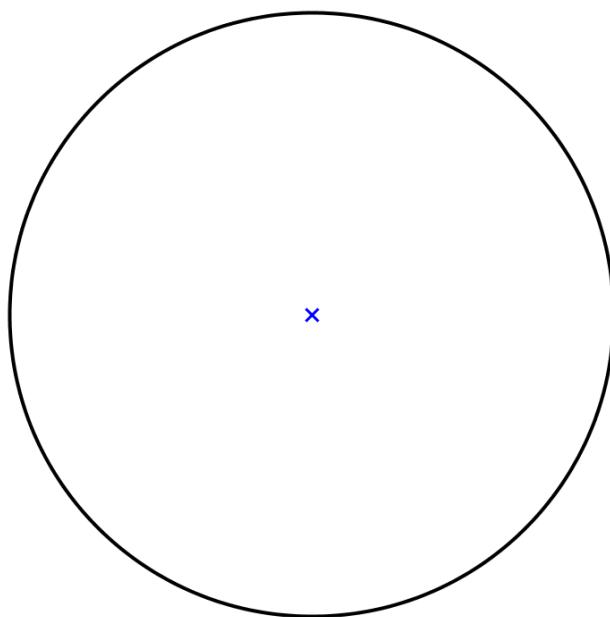
2º caso: contração de duas circunferências e dilatação da terceira



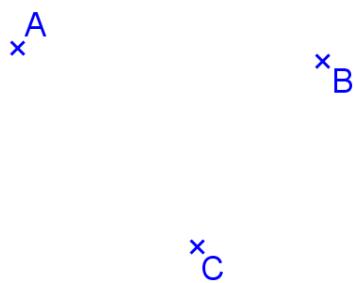
29. Inscrever uma circunferência em um setor circular.



30. Traçar três circunferências de raios iguais, tangentes entre si e tangentes interiores a uma circunferência dada.



31. Traçar circunferências tangentes entre si de centros A, B e C.



PARTE V
DIVISÃO, RETIFICAÇÃO e DESRETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS REGULARES

5.1. DIVISÃO DA CIRCUNFERÊNCIA EM PARTES IGUAIS

Dividir a circunferência em partes (ou arcos) iguais é o mesmo que construir **polígonos regulares**. Isso porque os pontos que dividem uma circunferência num número $n > 2$ qualquer de partes iguais são sempre vértices de um polígono regular inscrito na mesma.

Se dividirmos uma circunferência em n partes iguais, teremos também a divisão da mesma em $2n$ partes, bastando para isso traçar bissetrizes.

Existem processos exatos e aproximados para a divisão da circunferência. Se existe um processo exato para divisão da circunferência este deve ser utilizado (e não um aproximado).

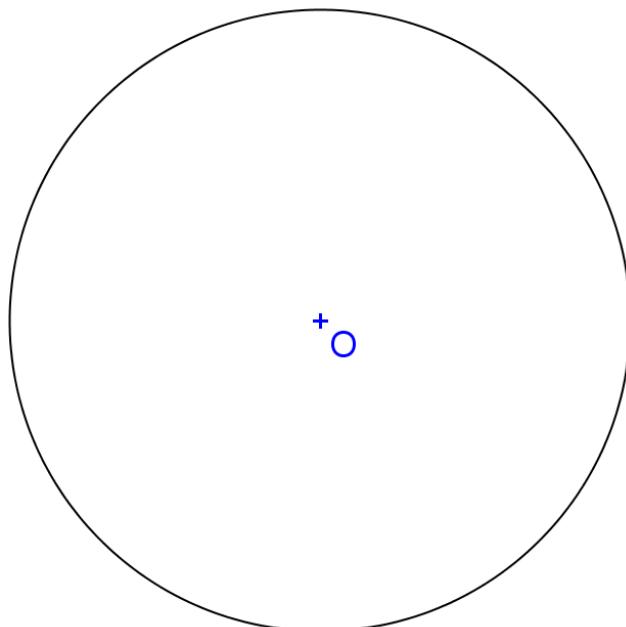
PROCESSOS EXATOS

Dividindo a circunferência em n partes iguais, estamos dividindo o ângulo central de 360° em n partes iguais. Logo, o ângulo central (vértice no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) correspondente à divisão da circunferência em n partes iguais medirá $\frac{360^\circ}{n}$.

O lado de um polígono regular de n lados é denotado por l_n .

Observação: $\frac{l_n}{2} \neq l_{2n}$

1. Dividir uma circunferência em $n = 2, 4, 8, 16, \dots = 2 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$

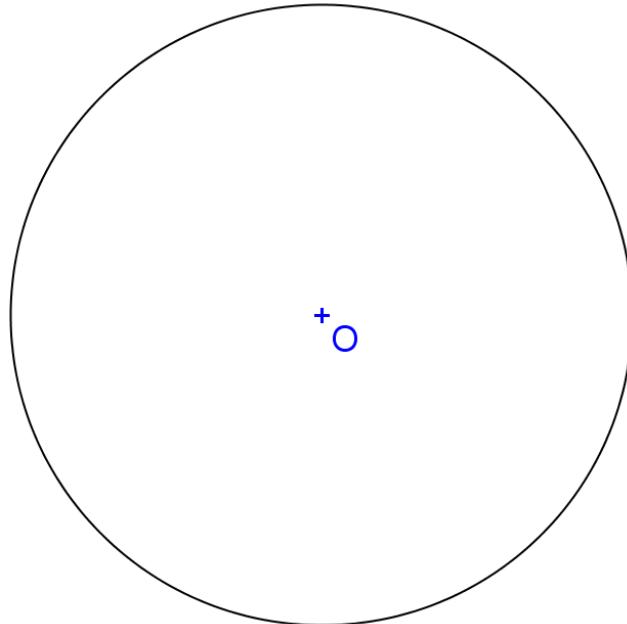


n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
2	180°	2 arcos capazes de 90°
4	90°	Quadrado
8	45°	Octógono
16	$22,5^\circ$	Hexadecágono
32	$11,25^\circ$	Triacontadígonio

Medida do l_4 em uma circunferência de raio r :

$$l_4 = r\sqrt{2}.$$

2. Dividir uma circunferência em $n = 3, 6, 12, \dots = 3 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
3	120°	Triângulo equilátero
6	60°	Hexágono
12	30°	Dodecágono
24	15°	Icositetrágonos
48	$7,5^\circ$	Tetracontoctógono

Medida do l_6 em uma circunferência de raio r:

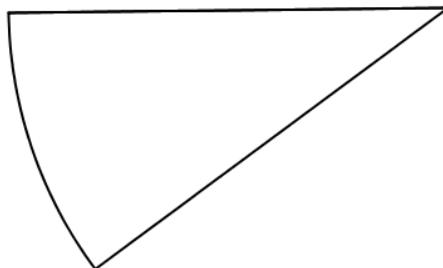
$$l_6 = r.$$

Medida do l_3 em uma circunferência de raio r:

$$l_3 = r\sqrt{3}.$$

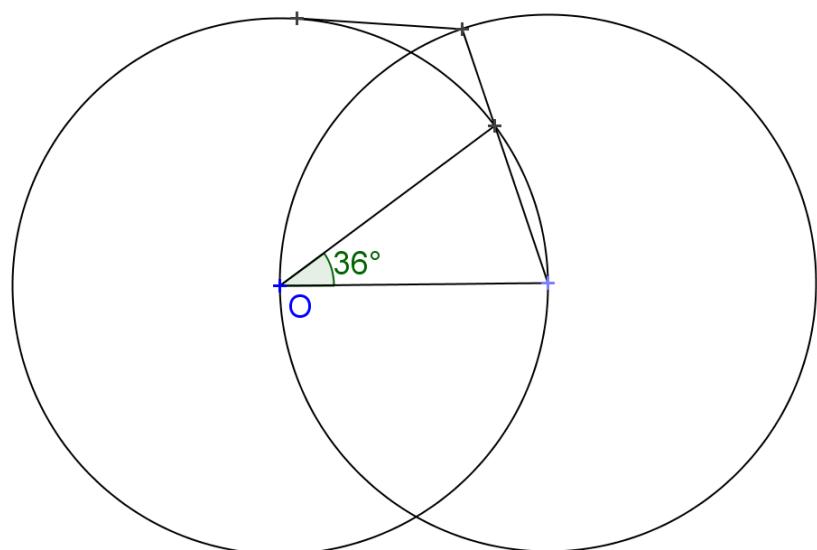
3. Dividir uma circunferência em $n = 5, 10, 20, \dots = 5 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$

Propriedade 1: O lado do decágono regular inscrito numa circunferência é o segmento áureo do raio, ou seja, $l_{10}^2 = r \cdot (r - l_{10})$.



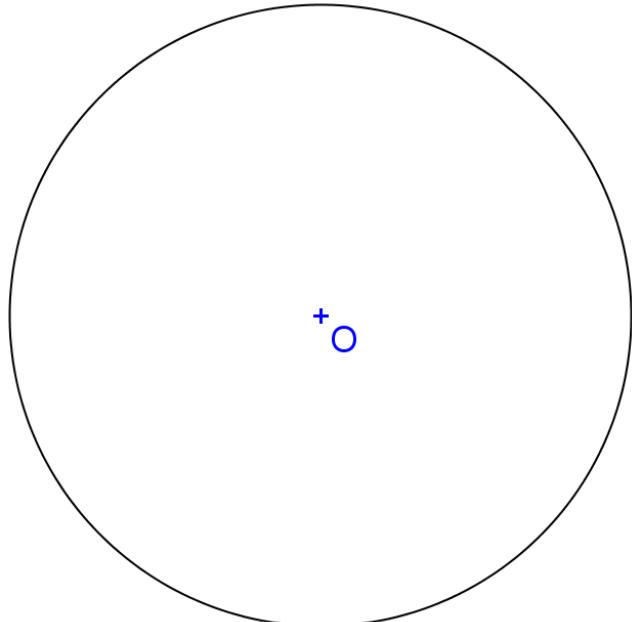
$$\text{Medida do } l_{10} \text{ em uma circunferência de raio r: } l_{10} = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Propriedade 2: Para uma mesma circunferência, o l_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são l_6 e l_{10} .



Medida do l_5 em uma circunferência de

$$\text{raio r: } l_5 = r \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

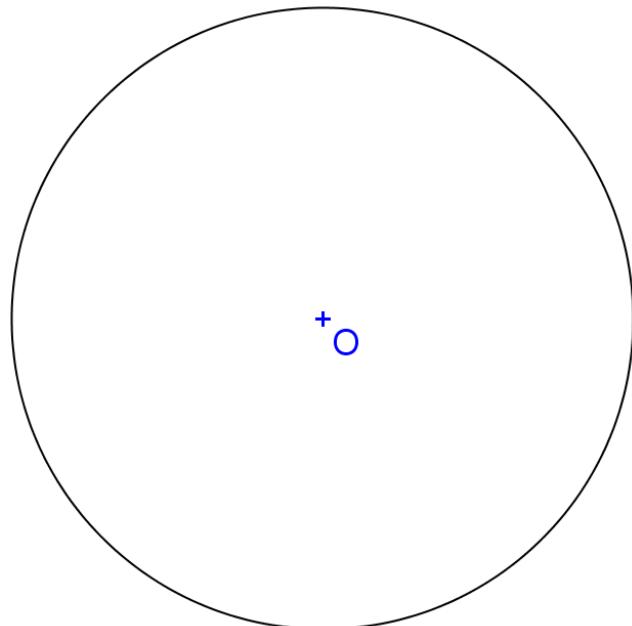


n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
5	72°	Pentágono
10	36°	Decágono
20	18°	Icoságono
40	9°	Tetracontágono

Propriedade 3: as diagonais do pentágono têm mesma medida.

Propriedade 4: o lado de um pentágono regular é o segmento áureo de sua diagonal.

4. Dividir uma circunferência em $n = 15, 30, 60, \dots = 15 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
15	24°	Pentadecágono
30	12°	Triacontágono
60	6°	Hexacontágono

Exercícios

- Construa os polígonos regulares de n lados sendo dada a medida do lado $l_n = 3\text{cm}$:
 - $n = 6$

b. $n = 8$

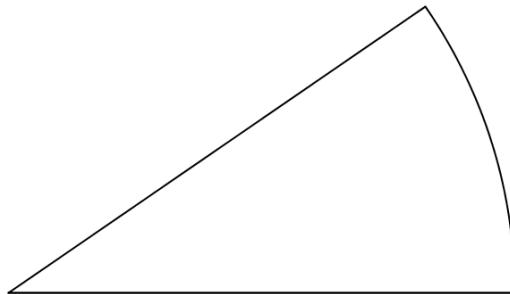
c. $n = 10$

2. Construa um pentágono regular dado o lado de 4,5cm.

PROCESSOS APROXIMADOS

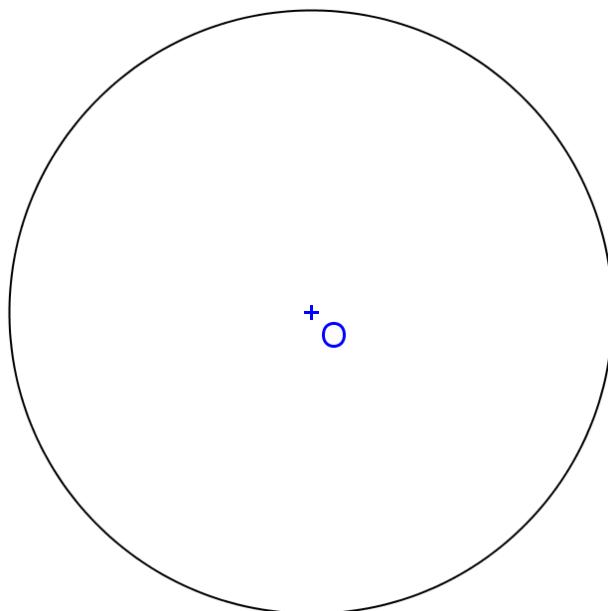
Foram vistos processos para a divisão da circunferência em n partes iguais com processos exatos: $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 20, \dots$. É possível dividir uma circunferência em 7, 9, 11, 13, 14, 19, ... partes iguais, completando a primeira sequência, porém estas divisões são aproximadas.

Para determinar o erro teórico que se comete nas construções aproximadas determina-se o lado de um polígono regular de n lados em função do ângulo central correspondente, ou seja, l_n vale:



$$l_n = 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

1. Dividir uma circunferência em $n = 7, 14, 28, \dots = 7 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



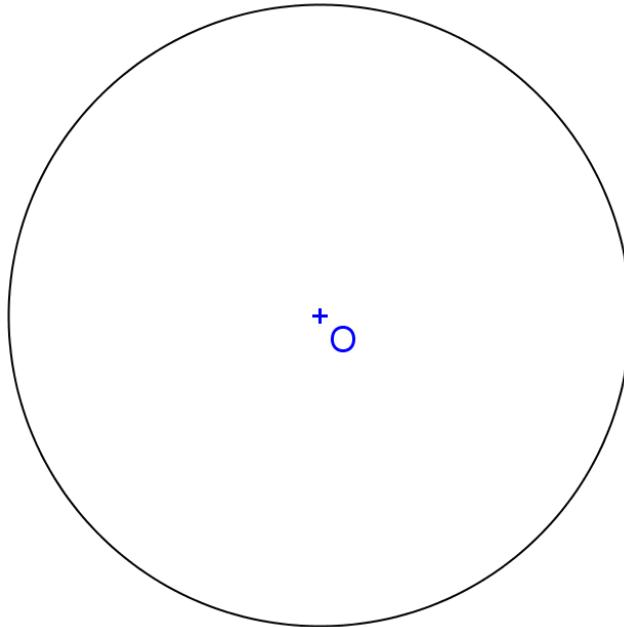
n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
7	$51,4^\circ$	Heptágono
14	$25,7^\circ$	Tetradecágono
28	$12,9^\circ$	Icosioctógono

Medida do l_7' em uma circunferência de raio r : $l_7' = \frac{l_3}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602 \cdot r$

Medida do l_7 em uma circunferência de raio r : $l_7 = 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \cong 0,86776 \cdot r$

Erro teórico cometido: $\varepsilon_t = l_7' - l_7 = -0,00174 \cdot r$
ou seja, o erro é por falta e da ordem de dois milésimos.

2. Dividir uma circunferência em $n = 9, 18, 36, \dots = 9 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
9	40°	Eneágono
18	20°	Octadecágono
36	10°	Triacontahexágono

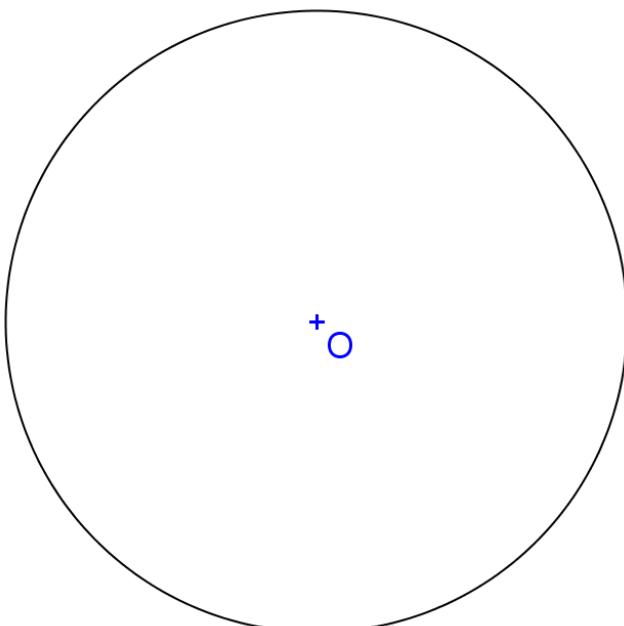
Medida do l_9' em uma circunferência de raio r: $l_9' = r - (r\sqrt{3} - r\sqrt{2}) \cong 0,68216 \cdot r$

Medida do l_9 em uma circunferência de raio r: $l_9 = 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{9}\right) \cong 0,68404 \cdot r$

Erro teórico cometido: $\varepsilon_t = l_9' - l_9 = -0,00188 \cdot r$

Ou seja, o erro é por falta e da ordem de dois milésimos.

3. Dividir uma circunferência em $n = 11, 22, 44, \dots = 11 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
11	$32,7^\circ$	Undecágono
22	$16,3^\circ$	Icosidígonos
44	$8,2^\circ$	Tetracontatetrágono

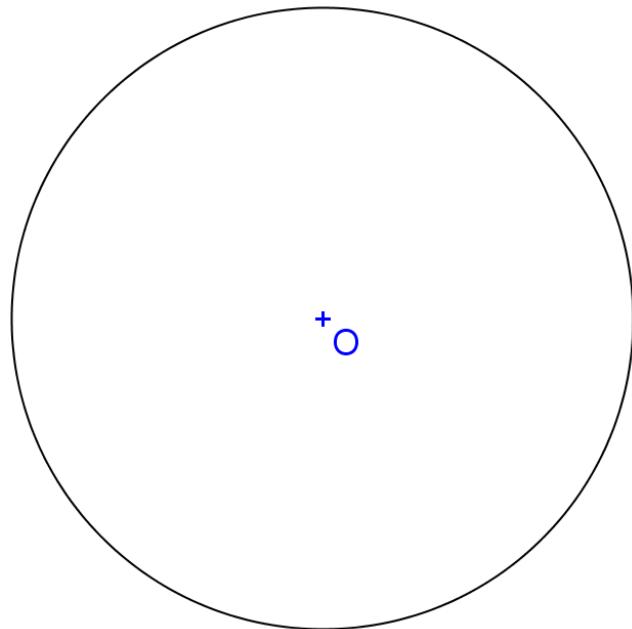
Medida do l_{11}' em uma circunferência de raio r: $l_{11}' = \frac{r\sqrt{5}}{4} \cong 0,55901 \cdot r$

Medida do l_{11} em uma circunferência de raio r: $l_{11} = 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{11}\right) \cong 0,56346 \cdot r$

Erro teórico cometido: $\varepsilon_t = l_{11}' - l_{11} = -0,00445 \cdot r$

Ou seja, o erro é por falta e da ordem de cinco milésimos.

4. Dividir uma circunferência em $n = 13, 26, 52, \dots = 13 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
13	$27,69^\circ$	Tridecágono
26	$13,84^\circ$	Icosihexágono
52	$6,92^\circ$	Pentacontadígonos

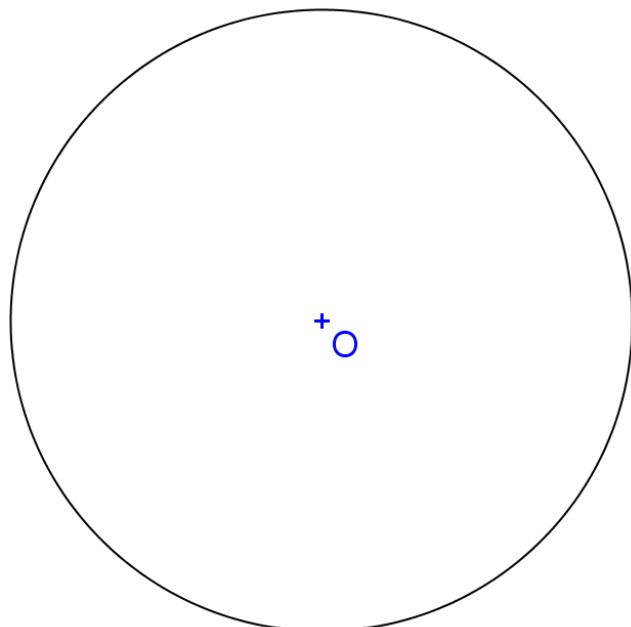
Medida do l_{13}' em uma circunferência de raio r : $l_{13}' = \frac{2r\sqrt{17}}{17} \cong 0,48507 \cdot r$

Medida do l_{13} em uma circunferência de raio r : $l_{13} = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{13}\right) \cong 0,47863 \cdot r$

Erro teórico cometido: $\varepsilon_t = l_{13}' - l_{13} = -0,00644 \cdot r$

Ou seja, o erro é por falta e da ordem de sete milésimos.

5. Dividir uma circunferência em $n = 15, 30, 60, \dots = 15 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



Medida do l_{15}' em uma circunferência de raio r :

$$l_{15}' = r\sqrt{2} - r \cong 0,41421 \cdot r$$

Medida do l_{15} em uma circunferência de raio r :

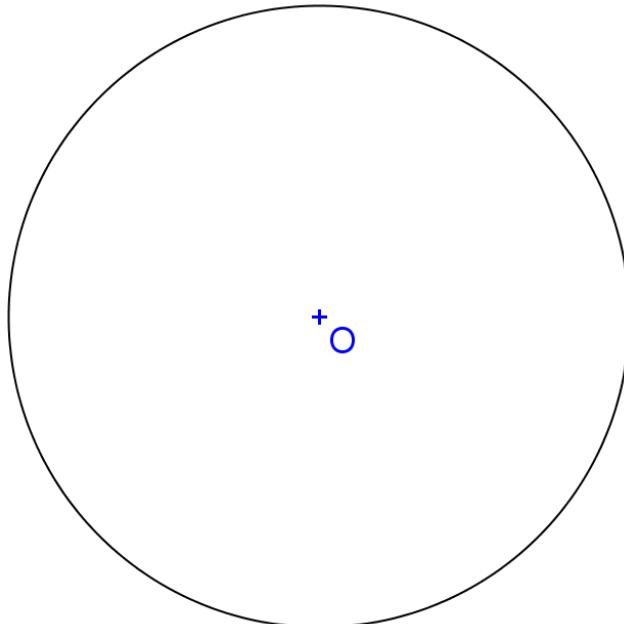
$$l_{15} = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{15}\right) \cong 0,41582 \cdot r$$

Erro teórico cometido: $\varepsilon_t = l_{15}' - l_{15} = -0,00161 \cdot r$

Ou seja, o erro é por falta e da ordem de dois milésimos.

Observação: Apesar de existir um processo exato que forneça o l_{15} , nota-se que este implica em muitos erros gráficos. O processo aproximado para a obtenção do l_{15} , a construção do l_{15}' dada anteriormente, tem melhores resultados graficamente.

6. Dividir uma circunferência em $n = 19, 38, 76, \dots = 19 \cdot 2^m$ partes; $m \in \mathbb{N}$



n	ÂNGULO CENTRAL	POLÍGONO REGULAR
19	$18,94^\circ$	Eneadecágono
38	$9,47^\circ$	Triacontaoctógono
76	$4,74^\circ$	Heptacontahexágono

Medida do l_{19}' em uma circunferência de raio r:

$$l_{19}' = \frac{2r\sqrt{37}}{37} \cong 0,328798 \cdot r$$

Medida do l_{19} em uma circunferência de raio r:

$$l_{19} = 2r \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{19}\right) \cong 0,32919 \cdot r$$

$$\text{Erro teórico cometido: } \varepsilon_t = l_{19}' - l_{19} = -0,00392 \cdot r$$

Ou seja, o erro é por falta e da ordem de quatro milésimos.

Exercícios propostos

1. Construir os polígonos regulares de n lados sendo dada a medida do lado 2,5 cm:

a. $n = 7$

b. $n = 9$

c. $n = 11$

d. $n = 13$

2. Construir o hexágono regular de diagonal menor $d = 5$ cm.

3. Construir o heptágono regular de diagonal menor $d = 4,5$ cm.

4. Construir o eneágono regular de apótema $a = 4,5$ cm.

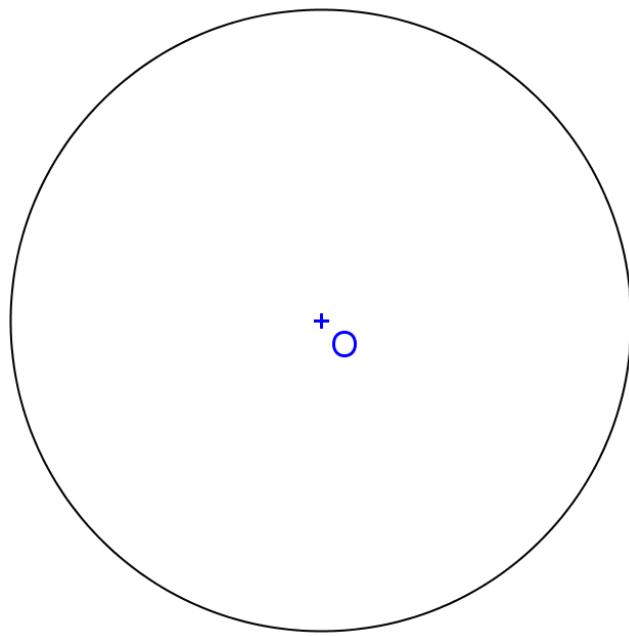
5. Construir o undecágono regular de apótema $a = 4\text{ cm}$.

PROCESSOS GERAIS

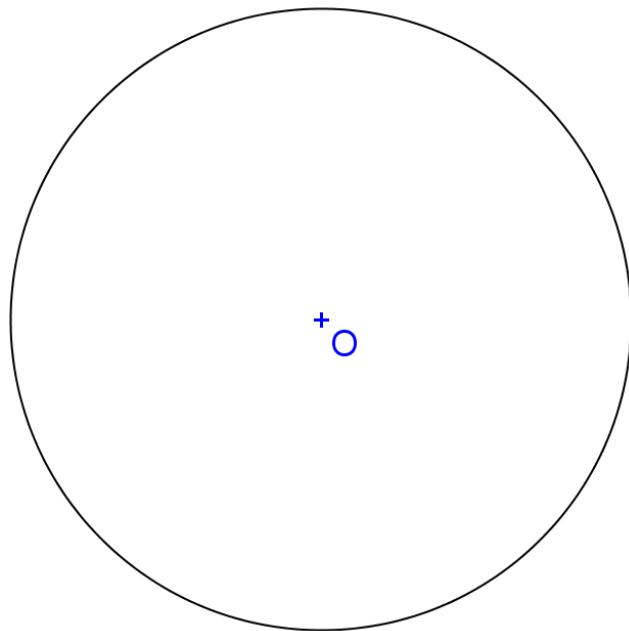
Quando se propõe uma divisão da circunferência em n partes iguais, se existir um processo exato, este deverá sempre ser utilizado. Nos casos em que não exista tal processo pode-se utilizar os anteriores ou os gerais, isto é, para qualquer número de partes aplica-se um mesmo procedimento.

Processo de Rinaldini (1668)

Exemplo: dividir a circunferência dada em 7 partes iguais



Exemplo: dividir a circunferência dada em 9 partes iguais



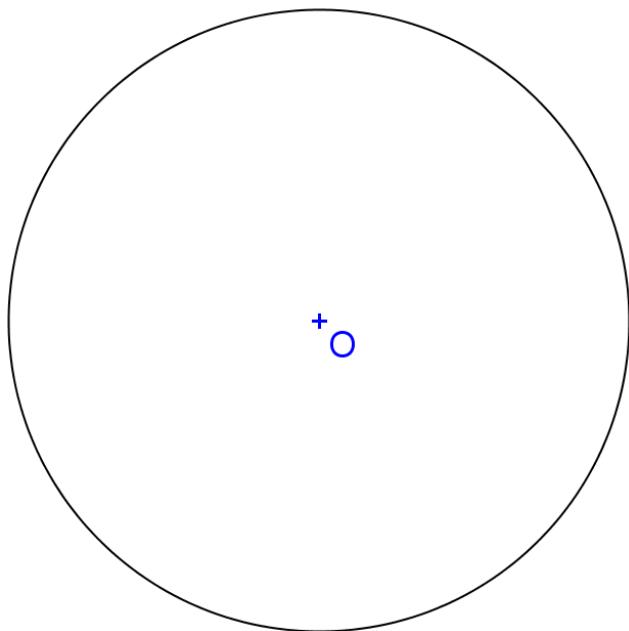
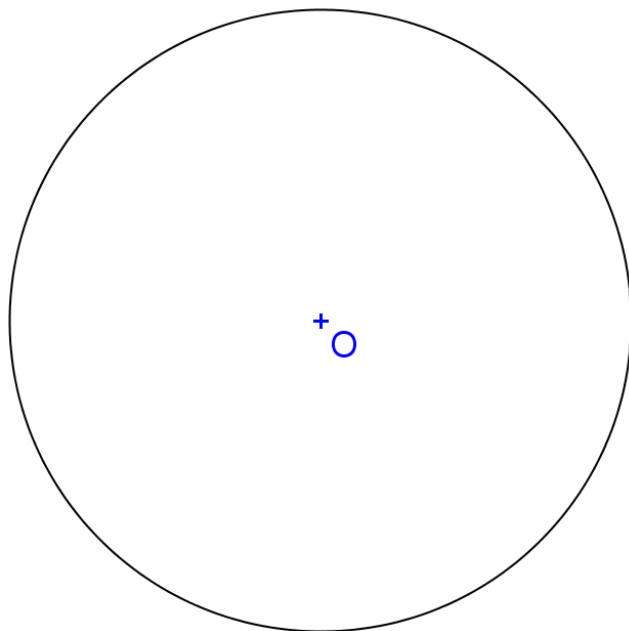
POLÍGONOS ESTRELADOS

Definição: **Polígono estrelado** é um polígono cujos ângulos são alternadamente salientes e reentrantes, e cujos lados pertencem a uma linha poligonal fechada que é percorrida sempre no mesmo sentido.

Polígono regular estrelado é aquele que se forma de cordas iguais, lados e ângulos iguais.

Processo Geral de Construção: Para obter um polígono regular estrelado de n vértices, deve-se dividir a circunferência em n partes iguais, e unir os pontos de divisão de p em p, sendo que: $p < \frac{n}{2}$, $p \neq 1$ e p e n são primos entre si.

Exemplo: Encontrar os polígonos regulares estrelados de 7 e 5 vértices inscritos nas circunferências:



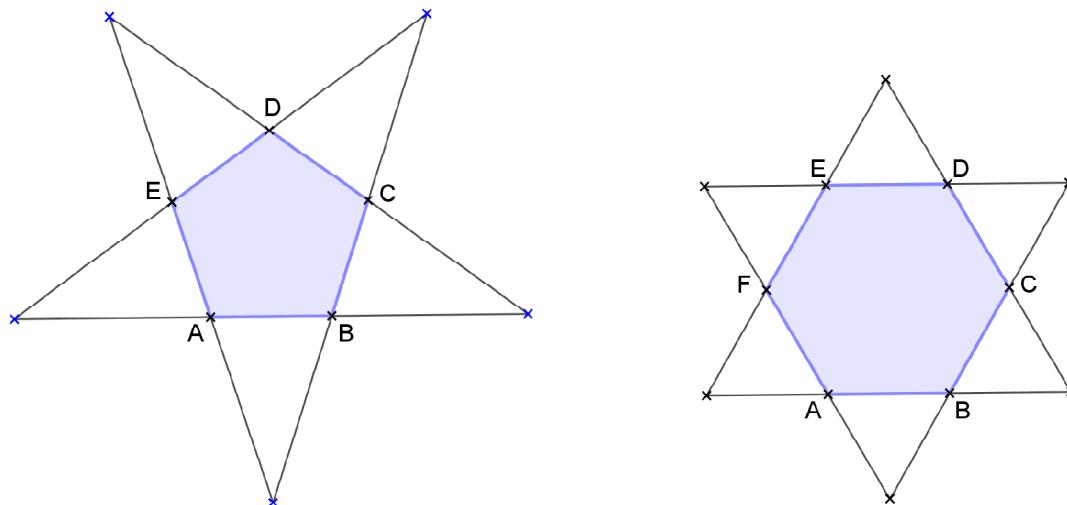
Exercícios propostos

1. Construa polígonos regulares estrelados de n lados em uma circunferência de raio $r = 5\text{cm}$.
 - a. $n = 7$
 - b. $n = 8$
 - c. $n = 15$

2. Dada uma circunferência de centro O e raio $r = 4,5\text{cm}$, construa os seguintes polígonos regulares estrelados:
 - a. Pentadecágono: $n = 15, p = 4$
 - b. Tridecágono: $n = 13, p = 5$
 - c. Decágono: $n = 10, p = 3$

ESTRELAS

Definição: A **estrelação** de um polígono é o processo de estender elementos deste polígono até que eles se encontrem, formando uma estrela. Diferente do polígono estrelado, a estrelação sempre começa de um polígono regular, prolongando lados ou diagonais, até formar uma estrela. As estrelações mais simples são feitas com pentágonos e hexágonos regulares, formando o **pentagrama** e o **hexagrama**.



A partir de 7 lados, podemos definir estrelações compostas, ou seja, a partir de um **polígono regular**, temos uma **estrelação**; depois, prolongando-se os lados da **estrelação**, definimos uma segunda **estrelação**; e assim sucessivamente.

Definimos o número p da seguinte forma: se $p = 1$, temos o polígono regular; se $p = 2$, temos estrelação obtida por meio dos prolongamentos dos lados do polígono regular; se $p = 3$, temos a estrelação definida pelos prolongamentos dos lados da primeira estrelação; e assim por diante.

Vamos construir estrelações compostas na próxima lista de exercícios.

Exercícios propostos

Construa as estrelações dos polígonos regulares de n lados, inscritos em uma circunferência de raio r .

1. $n = 7, p = 2, r = 2\text{cm}$
2. $n = 7, p = 3, r = 2\text{cm}$
3. $n = 8, p = 2, r = 2,5\text{cm}$

4. $n = 8, p = 3, r = 2,5\text{cm}$
5. $n = 9, p = 2, r = 3\text{cm}$
6. $n = 9, p = 3, r = 3\text{cm}$

RETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Retificar uma circunferência consiste em obter o seu perímetro. Ou seja, em obter o comprimento C tal que $C = 2\pi r$.

Considere o seguinte problema:

Obter o lado l de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo de raio r conhecido, utilizando apenas régua e compasso. (Problema da quadratura do círculo).

Como as áreas devem ser iguais então devemos ter $l^2 = \pi r^2 = \pi r \cdot r$, logo, l é média geométrica entre πr e r .

Em 1882, Lindemann demonstrou que a quadratura do círculo é impossível utilizando apenas régua e compasso, ou seja, que é impossível obter graficamente o valor πr .

Assim, foram desenvolvidos vários **processos que dão valores bastante aproximados** para a construção do segmento de medida πr .

PROCESSO DE ARQUIMEDES

Arquimedes provou em 250 a.C. a seguinte relação: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Se utilizarmos o valor $3\frac{10}{71}$ para aproximar π , o erro teórico será menor. Porém o erro de construção será maior, pois o segmento $\frac{10}{71}$ é mais trabalhoso de ser construído.

Logo, utiliza-se o valor aproximado para π : $\pi' = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,1428571 \dots \cong \pi = 3,141592 \dots$

Logo, o valor aproximado para o perímetro de uma circunferência de raio r é:

$$C' = 2\pi'r = \pi'd = 3\frac{1}{7}d = 3d + \frac{1}{7}d.$$

Exercício: Retificar uma circunferência de raio 2cm utilizando o processo de Arquimedes.

Cálculo do erro cometido:

Como $\varepsilon_t = \pi' - \pi = \frac{22}{7} - 3,141592 \dots \cong +0,001$, temos que este valor aproxima-se de π , por excesso, na ordem de 0,001. Ou seja, ele é exato até a segunda casa decimal.

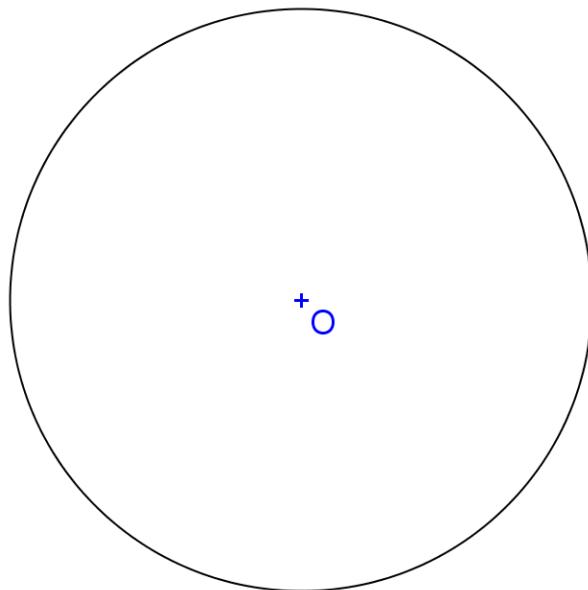
Só para fazer uma ideia, para uma circunferência de 1m de diâmetro, o valor $\frac{22}{7}$ para π acarreta um erro por excesso (sobra) em torno de 1mm.

Problema de desretificação da circunferência:

Dada a medida $AB = 10$ cm, construir a circunferência com este perímetro.

PROCESSO DE MASCHERONI

Este procedimento fornece o a metade do semi-perímetro de uma circunferência. Foi desenvolvido por Lorenzo Mascheroni.

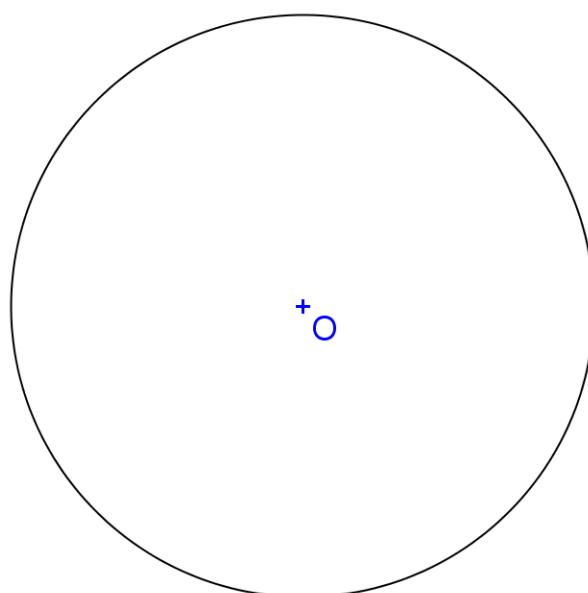


Cálculo do erro cometido:

$$AF = \frac{r}{2} (\sqrt{\sqrt{6} + 1} + \sqrt{9 - 3\sqrt{6}}) = 1,57119958.r \Rightarrow \pi' = 3,14239916...$$
$$\varepsilon_t = \pi' - \pi = 3,14239916 \dots - 3,141592 \dots \cong -0,0008065, \text{ ou seja, o erro é por excesso e da ordem de 8 décimos de milésimos.}$$

PROCESSO DE KOCHANSKY ou da TANGENTE DE 30°

Este procedimento fornece o semi-perímetro de uma circunferência. Foi desenvolvido por Kochansky em 1685.



Cálculo do erro cometido:

$$(\pi'r)^2 = (2r)^2 + (3r - r \cdot \tan(30^\circ))^2 \Rightarrow \pi'^2 r^2 = 4r^2 + r^2 \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow \pi'^2 = 4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

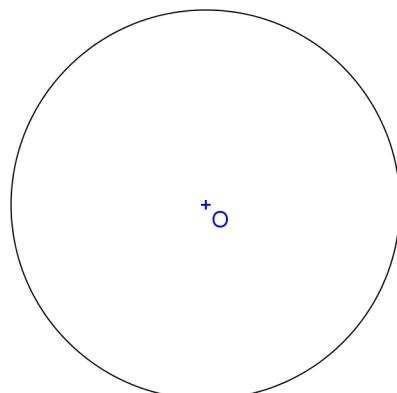
$$\Rightarrow \pi' = 3,1415333 \dots$$

$\varepsilon_t = \pi' - \pi = 3,1415333 \dots - 3,141592 \dots \cong -0,000006$, ou seja, o erro é por falta e da ordem de 6 centésimos de milésimos.

Se pudéssemos aplicar o processo de Kochansky para retificar uma circunferência de 10m de diâmetro, teríamos um erro por falta da ordem de seis centésimos de milímetros.

PROCESSO DE SPECHT

Este procedimento fornece o perímetro de uma circunferência. Foi desenvolvido por Wilhelm Specht em 1974.

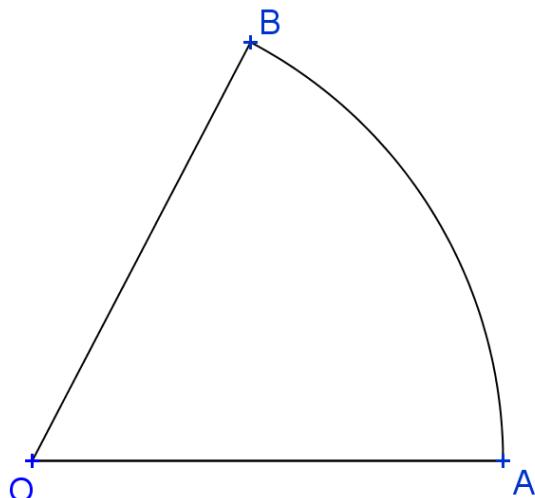
Cálculo do erro cometido:

$$AG = \frac{13r\sqrt{146}}{25} = 6,28318391.r \Rightarrow \pi' = 3,14159195\dots$$

$\varepsilon_t = \pi' - \pi = 3,14159195 \dots - 3,141592 \dots \cong -0,00000070045$, ou seja, o erro é por falta e da ordem de 7 décimos de milionésimos.

RETIFICAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA**PROCESSO DE ARQUIMEDES**

Este processo funciona apenas para Arcos de Medida Inferior a 90° .



Cálculo do erro cometido:

Considerando o ângulo central $A\hat{O}B = \theta$ em radianos, tem-se que:

$l = \theta \cdot r$ é o comprimento do arco AB e

$l' = \frac{11r \cdot \sin(\theta)}{7+4 \cdot \cos(\theta)}$ seu comprimento aproximado.

Comparando os valores, tem-se que:

θ	l'	l	$\varepsilon_t = l' - l$
$\frac{\pi}{9}$ (20°)	0,34968r	0,34906r	0,00062r
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	0,52560r	0,52359r	0,00201r
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	0,79139r	0,78539r	0,00600r
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	1,05847r	1,04719r	0,01128r
$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	1,32231r	1,30899r	0,01332r
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1,57142r	1,57079r	0,00063r

A tabela mostra que para arcos de até 45° o erro é mínimo. Por exemplo, para 30° o erro é da ordem de 2 milésimos por excesso. Se $r = 1\text{cm}$ então $\varepsilon_t = 0,002\text{cm} = 0,02\text{mm}$.

Entre 45° e 75° o erro teórico aumenta, mas ainda assim pode-se desprezá-lo. Por exemplo, para 75° o erro é da ordem de 1 centésimo.

Por fim, à medida que o arco se aproxima de 90° , o ε_t diminui novamente. Para 90° ele é da ordem de 6 décimos de milésimos.

Problema: Como retificar um arco com amplitude $90^\circ < \theta < 180^\circ$?

Problema: Como retificar um arco com amplitude $180^\circ < \theta < 360^\circ$?

Exercícios propostos

1. Desretificar um arco de comprimento $l = 7,5\text{cm}$ de uma circunferência de raio $r = 6,5\text{cm}$.

2. Dividir o arco AB, de raio r e amplitude θ , em três partes iguais.

a) $r = 6\text{cm}$ e $\theta = 75^\circ$;

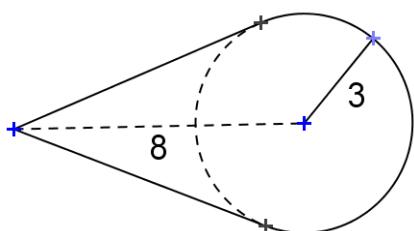
b) $r = 5,5\text{cm}$ e $\theta = 120^\circ$.

3. Dividir o arco AB, de raio r e amplitude θ em partes proporcionais a 2, 3 e 1.

a) $r = 7\text{cm}$ e $\theta = 75^\circ$;

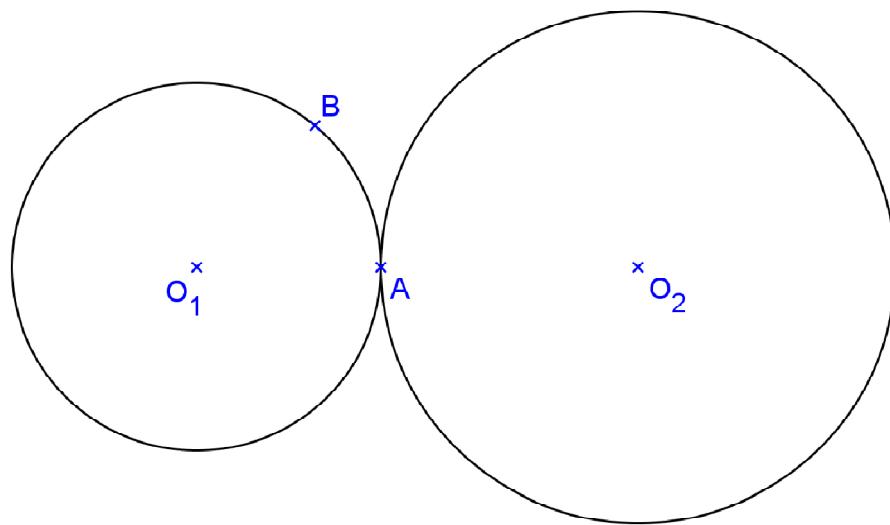
b) $r = 5,5\text{cm}$ e $\theta = 120^\circ$.

4. Uma chapa de metal tem a forma indicada a seguir. Faça um desenho em escala com as medidas dadas, e obtenha graficamente o perímetro da chapa.



Unidade: cm

5. Sejam duas circunferências de centros O_1 e O_2 tangentes em um ponto A. Considere um ponto B sobre uma delas. Suponha que a circunferência que contém o arco AB role sem escorregar sobre a outra circunferência, com o seu centro seguindo o sentido horário. Determine graficamente o ponto em que B toca pela primeira vez a circunferência fixa.



6. No projeto de uma máquina duas polias de raios iguais a 15cm e 30cm tem seus centros distantes 60cm. Determine graficamente o comprimento aproximado de uma correia acoplada a essas polias.
7. Um sistema de polias é composto de três polias de raios iguais a 20cm que tem seus centros nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a 50cm. Determine graficamente o comprimento aproximado de uma correia acoplada a este sistema.

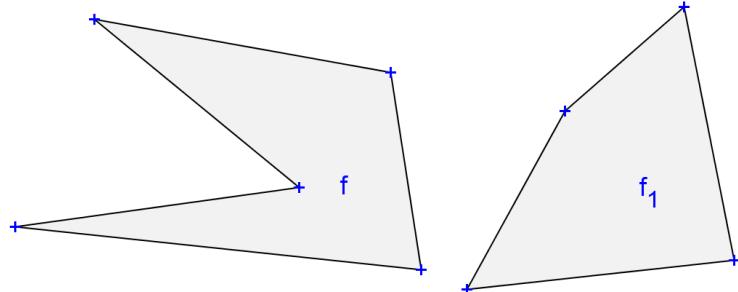
Observação: Caso a medida do arco desretificado seja maior que 90° , deve-se dividi-lo em duas partes e desretificá-lo novamente.

PARTE VI

EQUIVALÊNCIA E DIVISÃO DE ÁREAS

6.1. EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Definição: Duas figuras são equivalentes quando possuem área iguais.



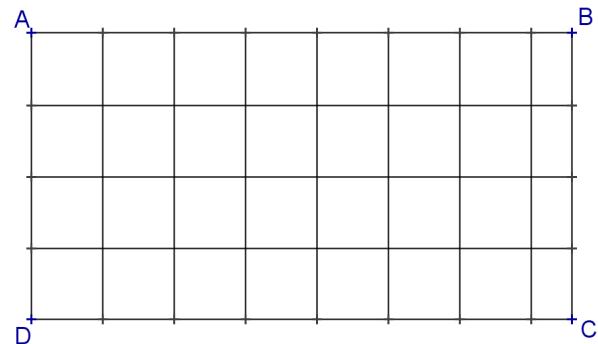
Se $A_f = A_{f_1}$ então f e f_1 são equivalentes
Notação: $f \approx f_1$

ÁREA DO RETÂNGULO

Escolhendo-se uma unidade u , podemos decompor os lados do retângulo em m unidades por n unidades.

Para calcular a área do retângulo, basta contar quantos quadrados de medida u cabem no retângulo, ou seja:

$$A = m \cdot n$$



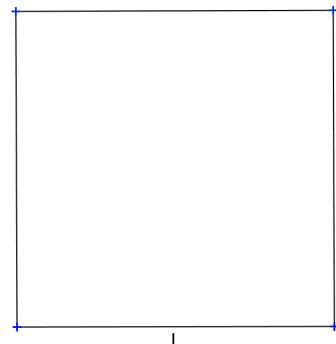
ÁREA DO QUADRADO

Como o quadrado é um retângulo com lados iguais, segue que:

$$A = l^2$$

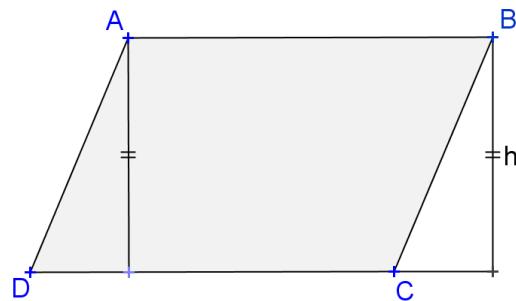
Agora podemos transformar um retângulo num quadrado equivalente. A transformação de figuras em quadrados chama-se quadratura.

Exemplo: Faça a quadratura do retângulo de lados $AB = 5,5\text{cm}$ e $BC = 2,5\text{cm}$.



ÁREA DO PARALELOGRAMO

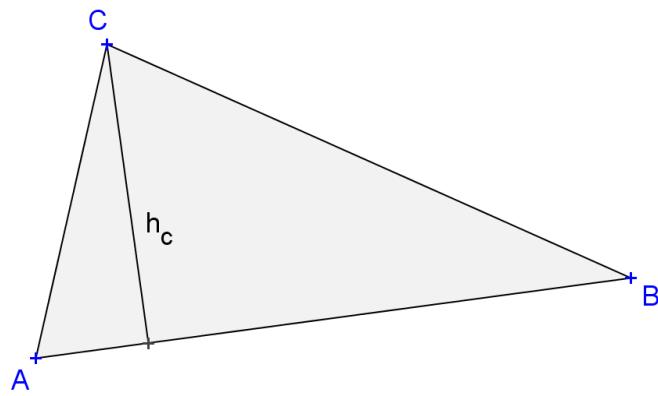
Para calcular a área do paralelogramo, vamos traçar a altura relativa a um lado:



$$A = \text{lado} \times \text{altura} = AB \cdot h$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

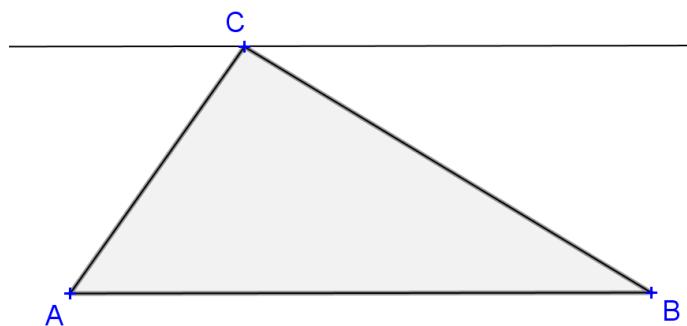
Para calcular a área de um triângulo, vamos traçar paralelas a 2 lados por seus vértices opostos:



$$A_{\Delta} = \left(\frac{\text{lado} \times \text{altura}}{2} \right) = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Fixando-se um dos lados de um triângulo e traçando-se a paralela a este lado que passa pelo vértice oposto a este lado, obteremos infinitos triângulos equivalentes com os vértices do lado fixado, e o terceiro vértice pertencente à paralela construída.

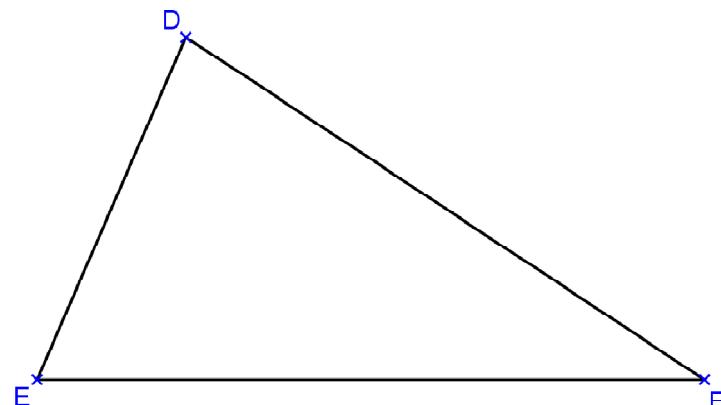


$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABC'} = A_{\Delta ABC''} = \dots$$

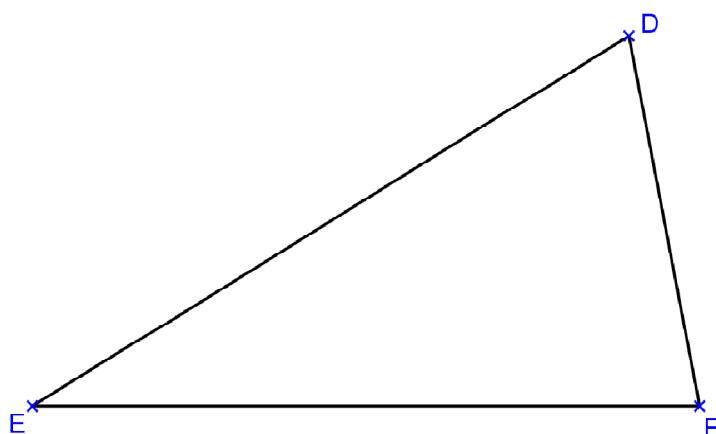
Mesma base e mesma altura

Exercícios

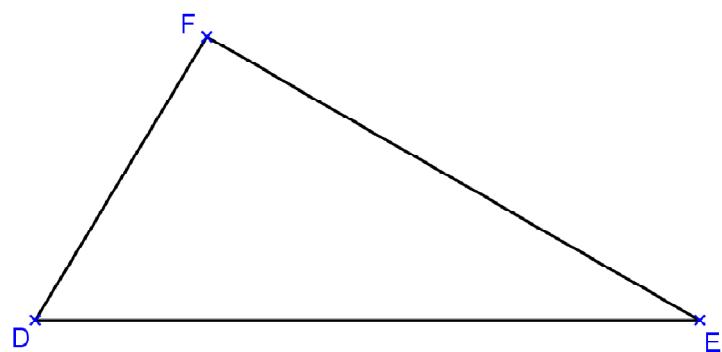
1. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde BC = EF, e AB = 5,5cm.



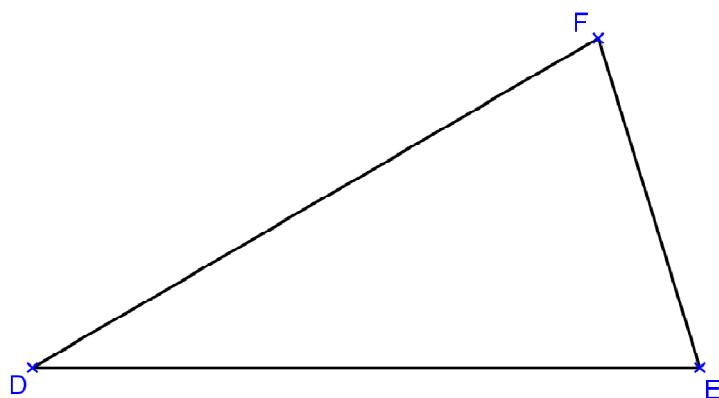
2. Construa o triângulo ABC, isósceles de base AB, equivalente ao triângulo DEF, onde AB = DF.



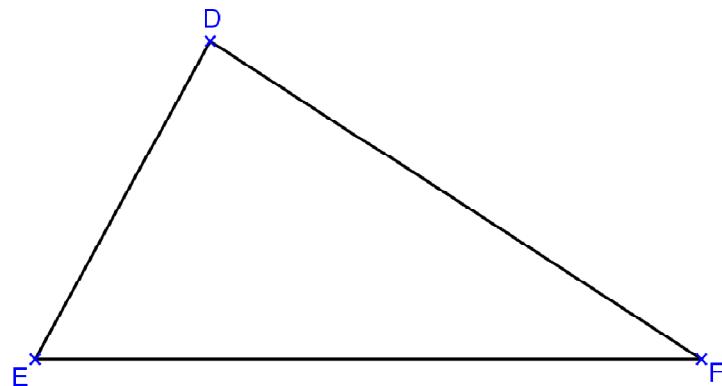
3. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde AB = DE, e $m_c = 6\text{cm}$.



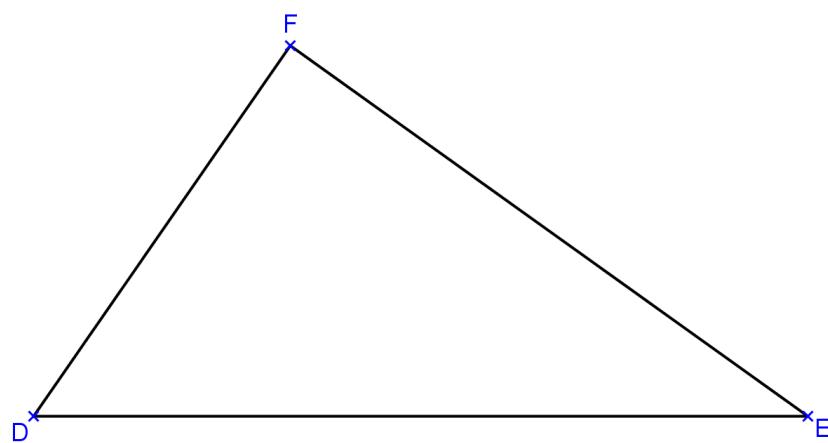
4. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde AB = DE, e $h_b = 8\text{cm}$.



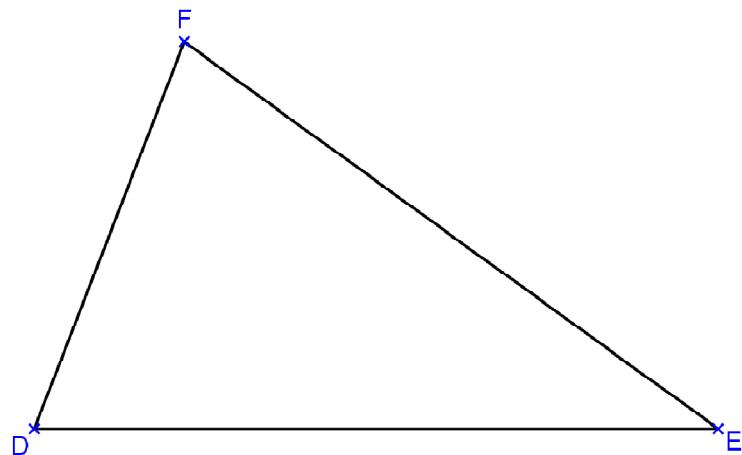
5. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde $BC = 11\text{cm}$, e $\hat{C} = 60^\circ$.



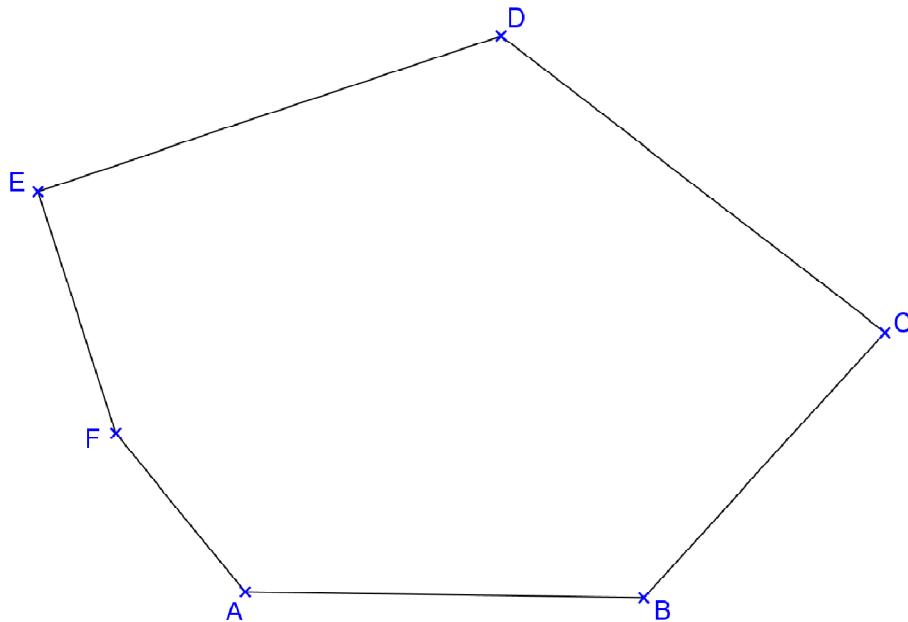
6. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde $AB = 7,5\text{cm}$, e $m_c = 8\text{cm}$.



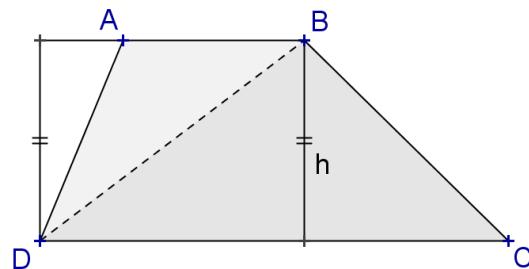
7. Construa o triângulo ABC equivalente ao triângulo DEF, onde $AB = 12\text{cm}$, e $\hat{C} = 90^\circ$.



8. Construa um triângulo equivalente ao polígono dado.



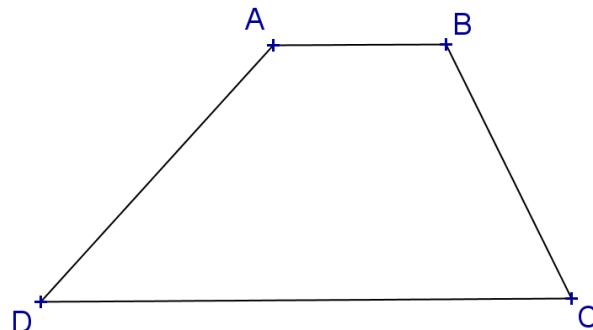
ÁREA DO TRAPÉZIO



$$A = A_{\Delta ABD} + A_{\Delta BDC} = \frac{AB.h}{2} + \frac{CD.h}{2} = \left(\frac{AB+CD}{2} \right).h$$

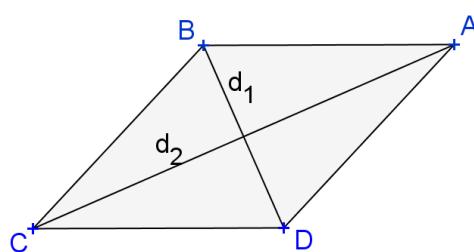
Exemplo

Construa trapézios equivalentes ao trapézio ABCD, mantendo-se as medidas das bases.



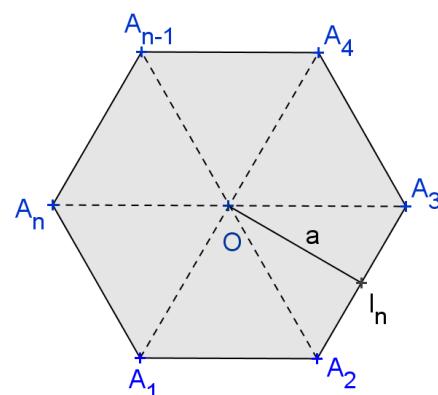
LOSANGO

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$



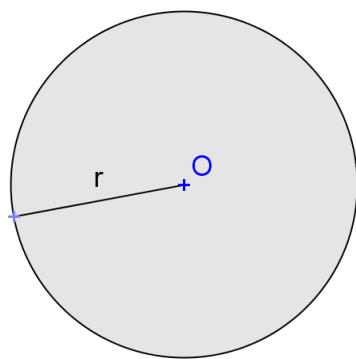
POLÍGONO REGULAR

$$A = \frac{n \cdot l_n \cdot a}{2} = p \cdot a$$

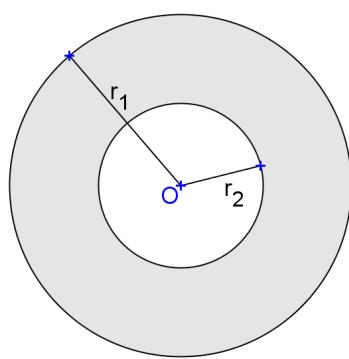


CÍRCULO

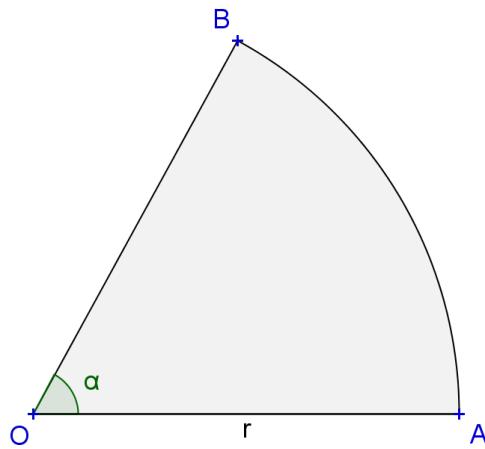
$$A = \pi \cdot r^2$$

**COROA CIRCULAR**

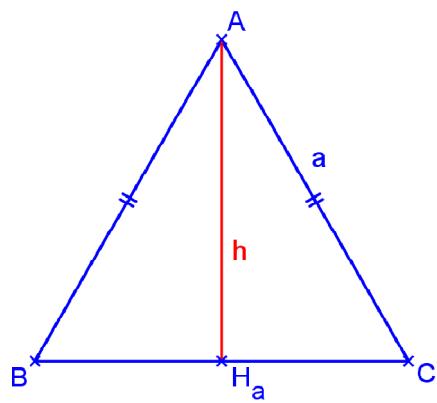
$$A = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)$$

**SETOR CIRCULAR**

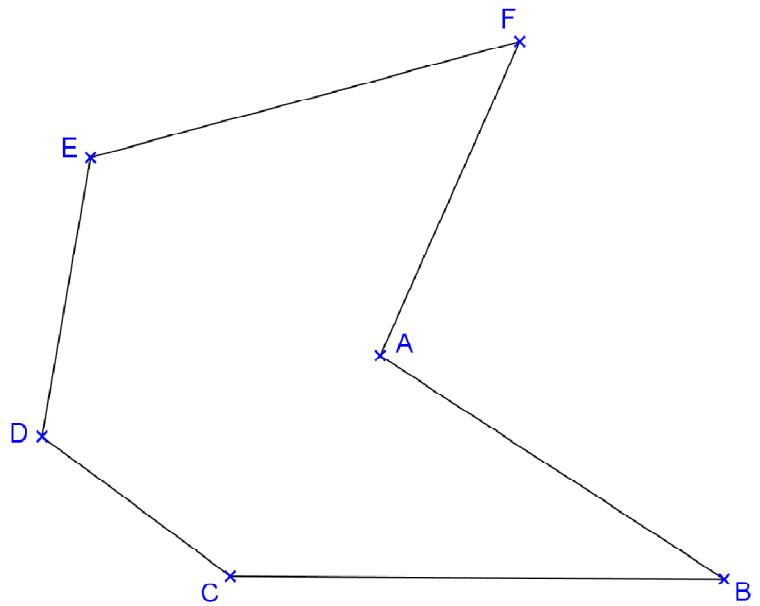
$$A = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$

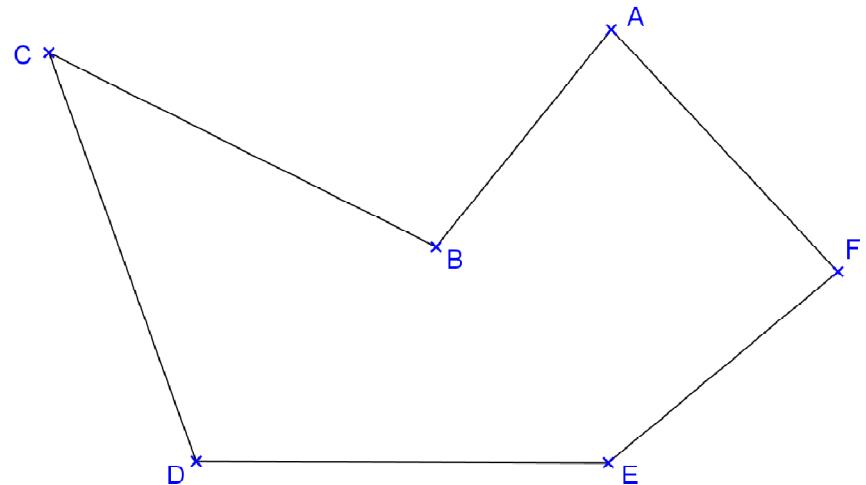
**TRIÂNGULO EQUILÁTERO**

$$A_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

**Exercícios propostos**

1. Construa triângulos equivalentes aos polígonos dados:

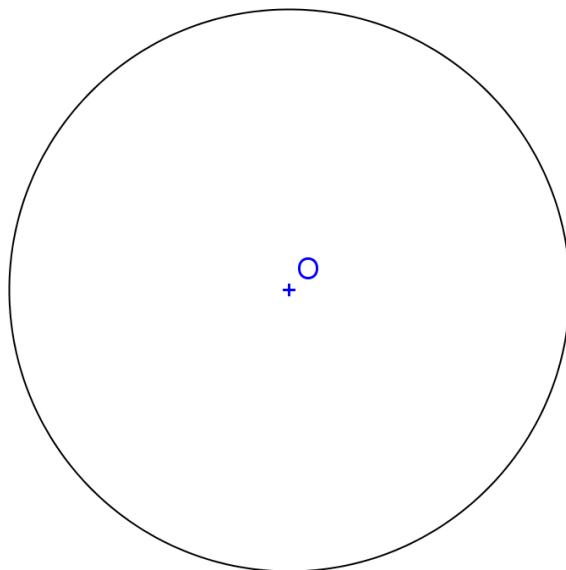




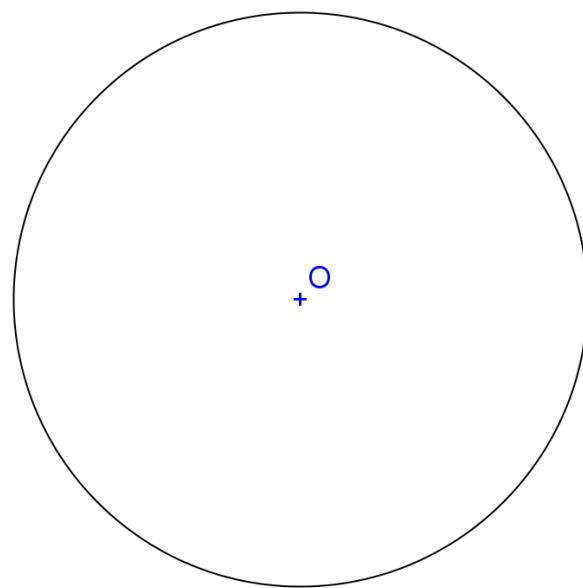
2. Construa o quadrado equivalente à soma das áreas dos quadrados de lados $l_1 = 2\text{cm}$ e $l_2 = 3,5\text{cm}$.
3. Construa o círculo equivalente à soma das áreas dos círculos de raios $r_1 = 1\text{cm}$, $r_2 = 1,5\text{cm}$ e $r_3 = 2,5\text{cm}$.
4. Faça a quadratura do pentágono regular, de lado $l = 3,5\text{cm}$.
5. Construa o círculo equivalente à coroa circular de raios $r_1 = 5\text{cm}$ e $r_2 = 1,5\text{cm}$.
6. Construa um quadrado equivalente ao círculo de raio $r = 3\text{cm}$.
7. Construa o quadrado equivalente a uma coroa circular de raios $r_1 = 4\text{cm}$ e $r_2 = 1,5\text{cm}$.
8. Construa o triângulo equilátero ABC equivalente ao quadrado de lado $l = 4,5\text{cm}$.
9. Construa o retângulo equivalente ao círculo de raio $r = 4\text{cm}$, sabendo-se que um dos lados do retângulo mede 7cm .
10. Construa um círculo equivalente a um setor circular de raio $r = 4\text{cm}$ e amplitude 60° .
11. Construa um quadrado equivalente a um setor circular de raio $r = 5,5\text{cm}$ e amplitude 45° .

6.2. DIVISÃO DE ÁREAS

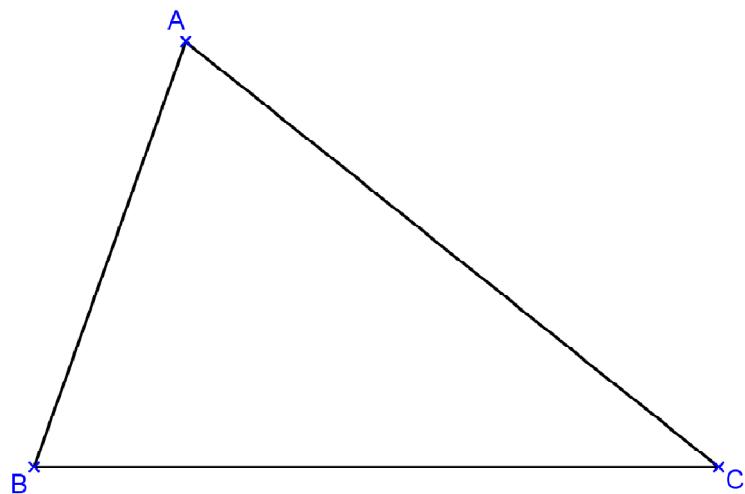
1. Divila a área da circunferência dada em 3 partes equivalentes através de circunferências concêntricas.



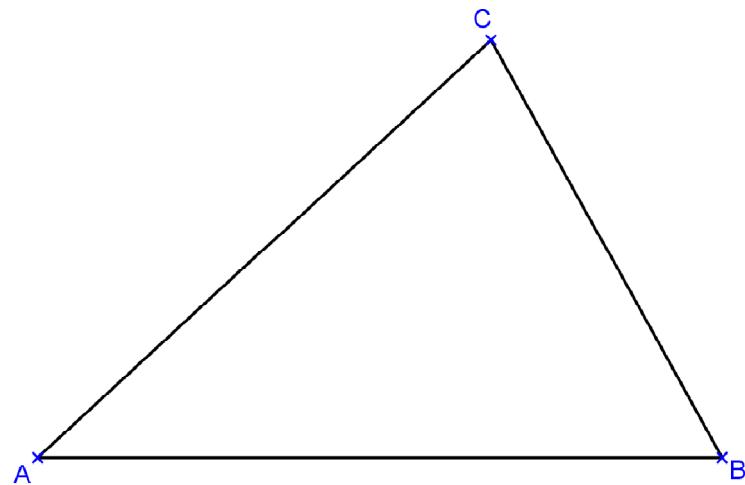
2. Divila a área da circunferência dada em 4 partes proporcionais aos números 2, 4, 1 e 3, respectivamente, através de circunferências concêntricas.



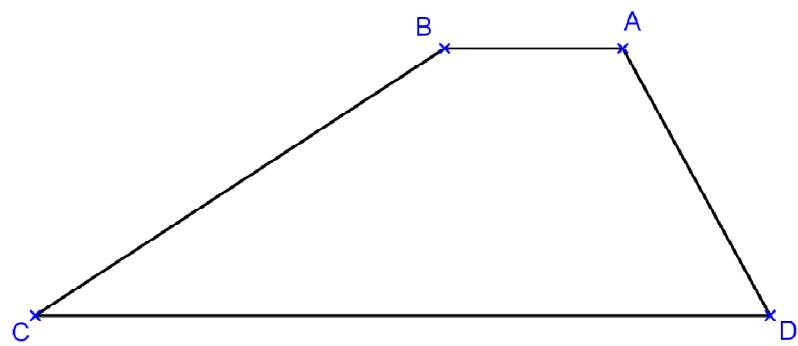
3. Divida a área do triângulo ABC em 3 partes equivalentes através de paralelas ao lado BC.



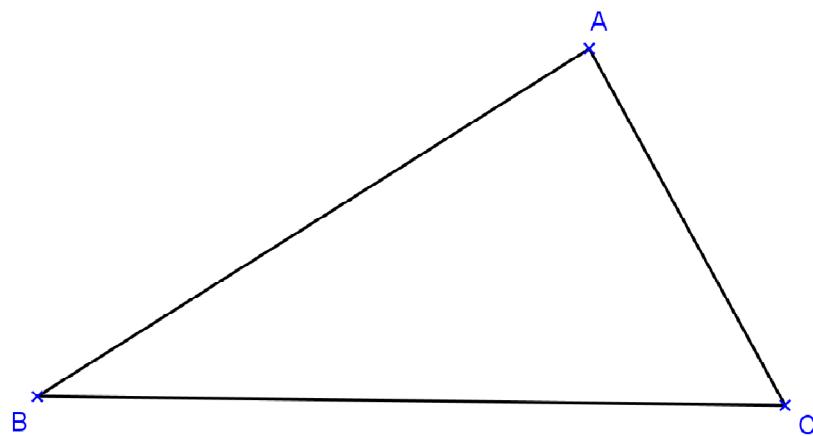
4. Divida a área do triângulo ABC em 3 partes proporcionais aos números 2, 3 e 4, respectivamente, através de paralelas ao lado AB.



5. Divida a área do trapézio ABCD em 3 partes equivalentes através de paralelas ao lado CD.



6. Divida a área do triângulo ABC em 4 partes triangulares equivalentes, mantendo-se o lado BC comum a estas partes.



7. Dividir a área do triângulo ABC em 3 partes triangulares equivalentes mantendo-se os lados de ABC comuns a estas partes.

