



departamento de  
**EXPRESSÃO  
GRÁFICA**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA  
Prof. Paulo Henrique Siqueira e Deise Maria Bertholdi Costa  
Disciplina : Desenho Geométrico II



Atribuição-Não Comercial-Sem Derivações: CC BY-NC-ND

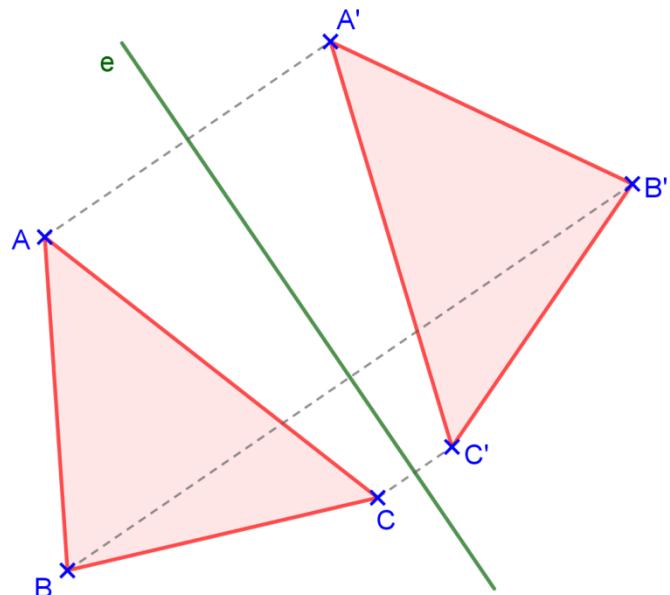
## PARTE I SIMETRIA e MÉTODOS DE TANGÊNCIA

### 1.1. Simetria Axial ou Rebatimento

Definição: Um ponto  $A'$  é simétrico de um ponto  $A$  em relação a um eixo  $e$  (eixo de simetria) quando o segmento  $AA'$ , perpendicular à reta  $e$ , é dividido ao meio pela mesma. Ou seja, a reta  $e$  é a mediatrix do segmento  $AA'$ .

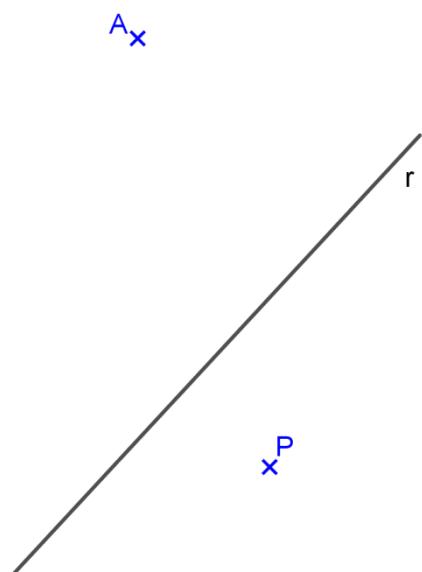
Propriedades:

1. Duas figuras simétricas em relação a um eixo são congruentes.
2. Retas simétricas em relação a um eixo formam ângulos iguais com este eixo.

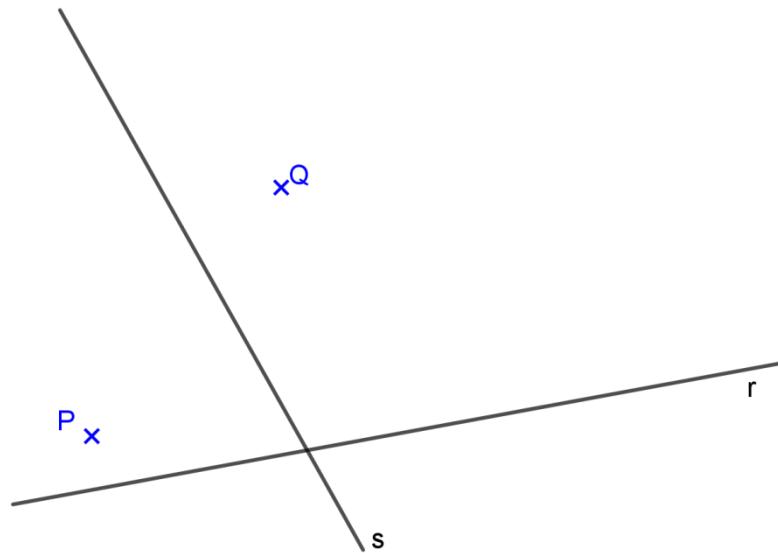


**Exercícios:**

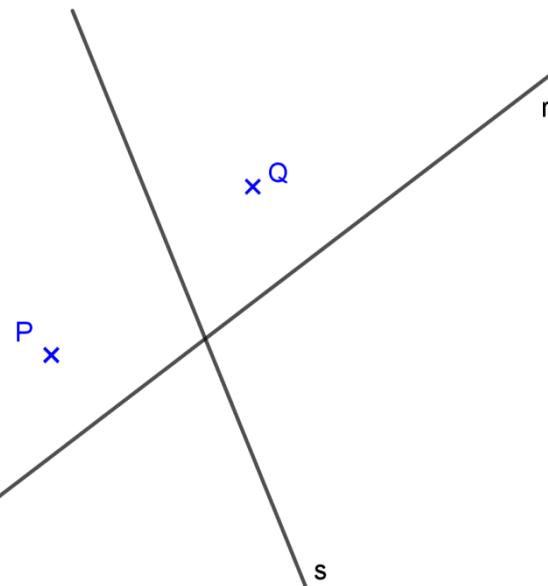
1. Construa um triângulo ABC isósceles de base BC, dados o vértice A, um ponto P do lado BC e a reta r que contém a bissetriz do ângulo B.



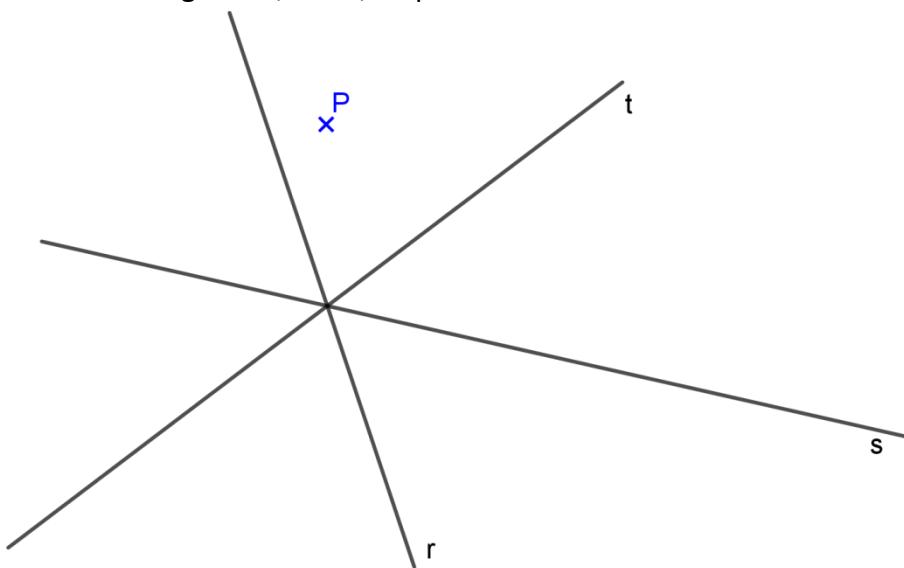
2. Construa o triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado AB, um ponto Q do lado AC, a reta r suporte do lado BC e a reta s que contém a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$ .



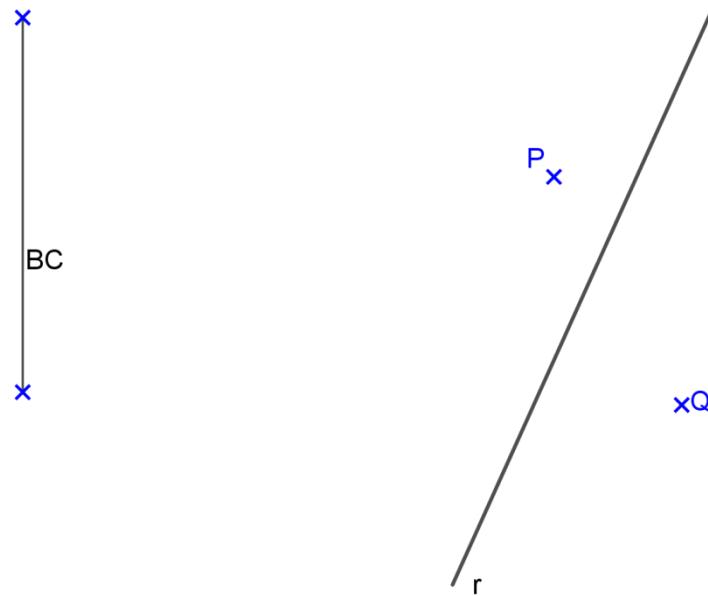
3. Construa um triângulo ABC, dados os pontos P e Q dos lados AB e AC, respectivamente, e as retas r e s que contêm as bissetrizes dos ângulos B e A, respectivamente.



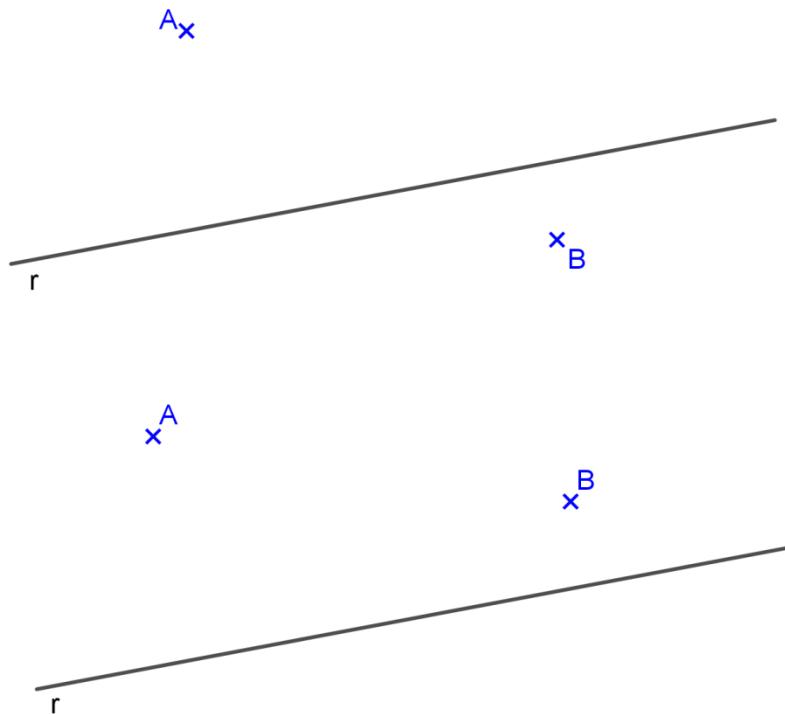
4. Construa um triângulo ABC, dados um ponto P pertencente ao lado AB e as retas r, s e t, que contém as bissetrizes internas dos ângulos A, B e C, respectivamente.



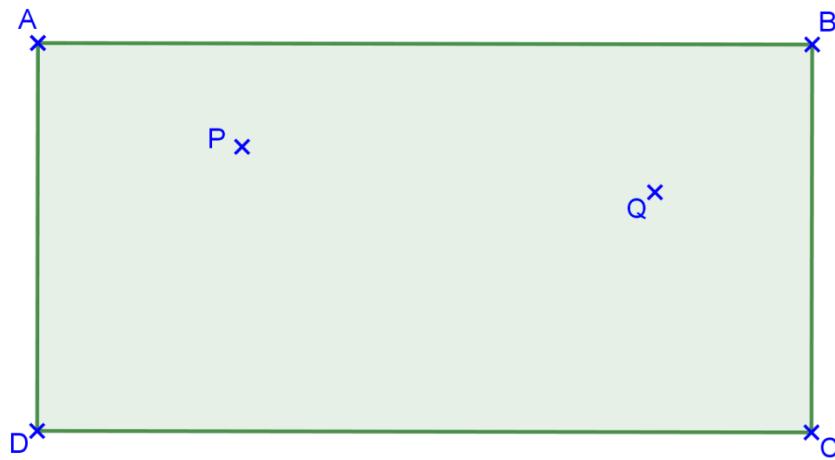
5. Construa um triângulo ABC isósceles de base BC, dados os pontos P e Q dos lados AB e AC, respectivamente, a reta r mediatriz de BC e a medida do lado BC.



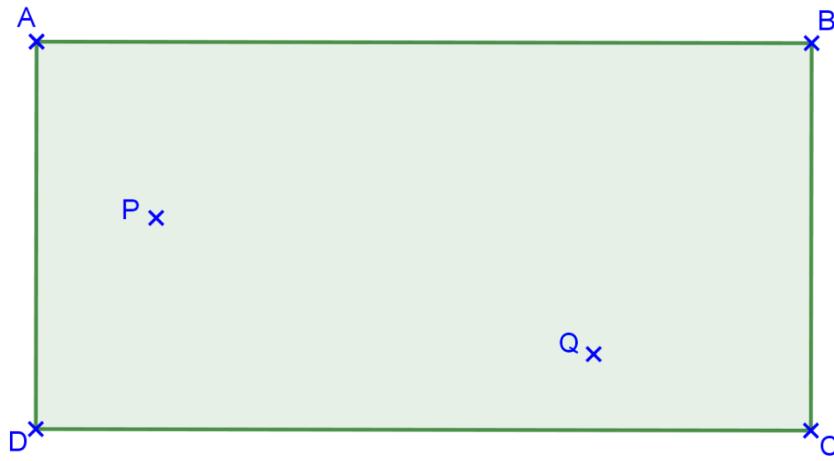
6. São dados uma reta r e dois pontos A e B. Determine um ponto X dessa reta tal que  $AX + XB$  seja mínimo.



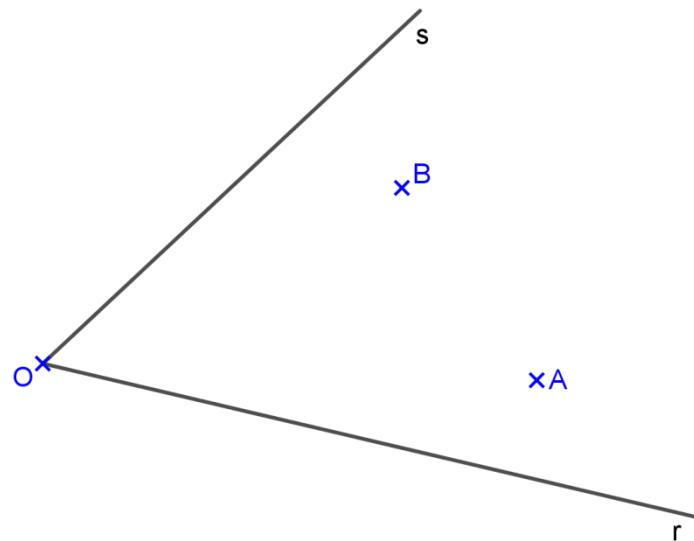
7. Numa mesa de bilhar ABCD há duas bolas, uma situada num ponto P e a outra num ponto Q. Determine a trajetória que deve seguir a bola situada em P, para que, após ter feito tabelas em AB e BC, atinja a bola situada em Q.



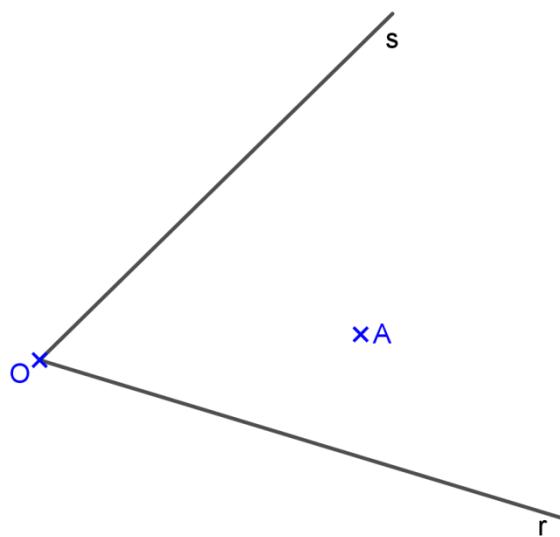
8. Idem ao exercício anterior, porém, fazendo tabelas em AB, BC e CD respectivamente.



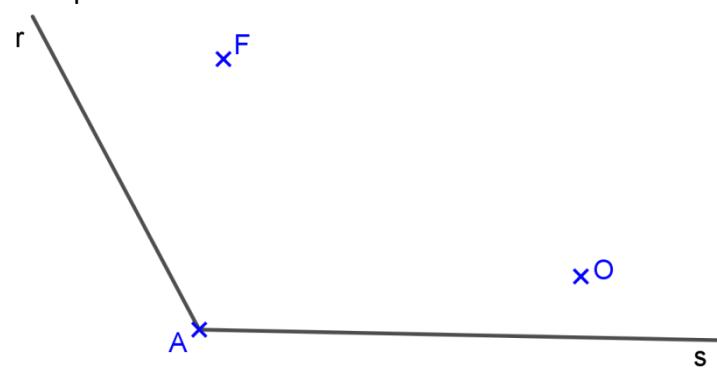
9. São dados um ângulo  $r\hat{O}s$  e dois pontos A e B no seu interior. Determine nas semi-retas Or e Os os pontos C e D, respectivamente, tal que o perímetro do quadrilátero ABCD seja mínimo.



10. São dados um ângulo  $r\hat{O}s$  e um ponto A no seu interior. Determine os pontos B e C, em cada um dos lados do ângulo, tal que o triângulo ABC tenha perímetro mínimo.



11. Na figura dada, r e s representam dois espelhos planos e F uma fonte de luz. Determine a trajetória que deve seguir um raio de luz emitido de F, de modo que ele se reflita em r, depois em s, e depois atinja objeto localizado no ponto O.

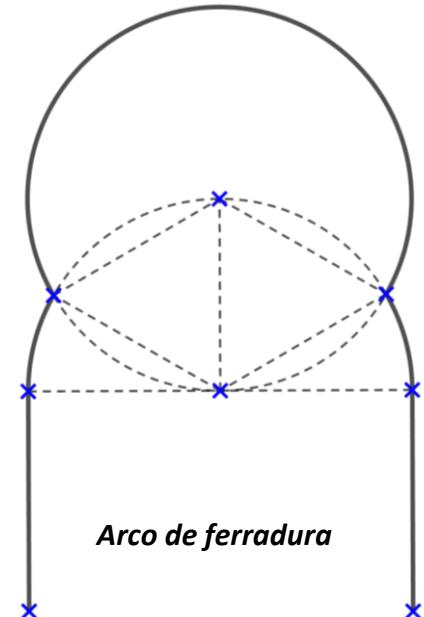


## 1.2. Aplicações de Tangência e Concordância: arcos, ovais e espirais

Definição: Denomina-se **arco** a uma curva constituída de linhas concordantes apoiadas em duas semi-retas,  $r$  e  $s$ , paralelas, nos pontos de origem  $A$  e  $B$ , respectivamente.

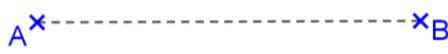
Elementos: Todo arco é formado por:

- Pontos de nascença ou de origem: são pontos que determinam as extremidades do arco.
- Vão, base do arco ou abertura: é a distância entre os pontos de origem.
- Flecha: é a distância entre o ponto mais alto do arco e a reta base do arco.
- Suportes: são as semi-retas paralelas que sustentam o arco.

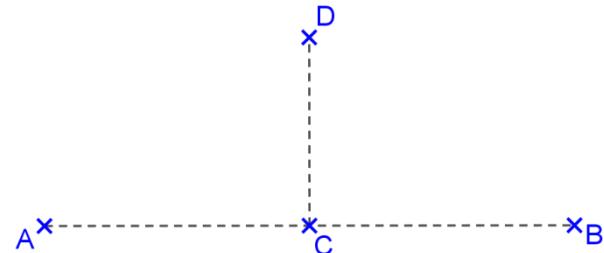


### Exercícios propostos:

1. Construa um **arco pleno** (a flecha é igual à metade do vão), dada a medida do vão  $AB$ .



2. Construa um **arco abatido** (concordância de um número ímpar de arcos de circunferência, onde a flecha é menor que a metade do vão) de 3 centros, dados o vão  $AB$  e a flecha  $CD$ .

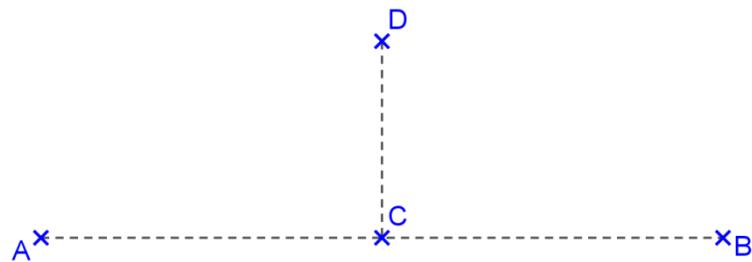


3. Construa um **arco abatido** de 3 centros com vão  $AB$  mede 7cm e a flecha  $CD$  mede 1,5cm.

4. Construa um **arco abatido**, de vão AB.



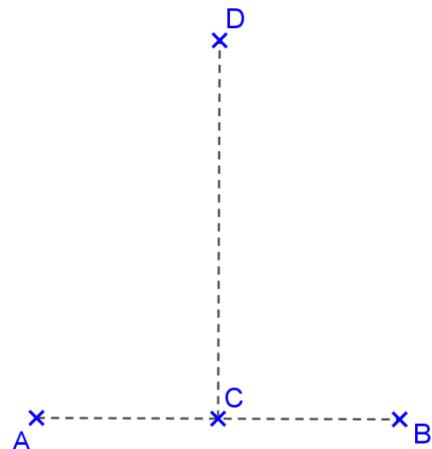
5. Construa um **arco abatido**, dados o vão AB e a flecha CD, conjugando-o em outros dois arcos abatidos menores.



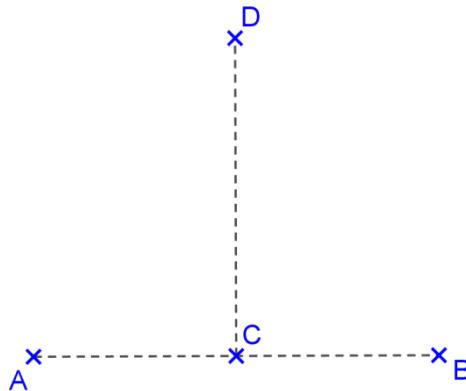
6. Construa um **arco ogival** (flecha maior que a metade do vão) com vão AB.



7. Construa um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha maior do que o vão).



8. Construa um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha menor que o vão).



9. Construa um **arco gótico** conhecendo-se o vão AB.



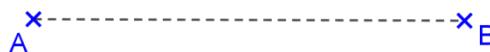
10. Construa um **arco gótico flamejante** com vão AB.



11. Construa um **arco otomano** com vão AB.



12. Construa um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de  $30^\circ$ .



13. Construa um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de  $45^\circ$ .



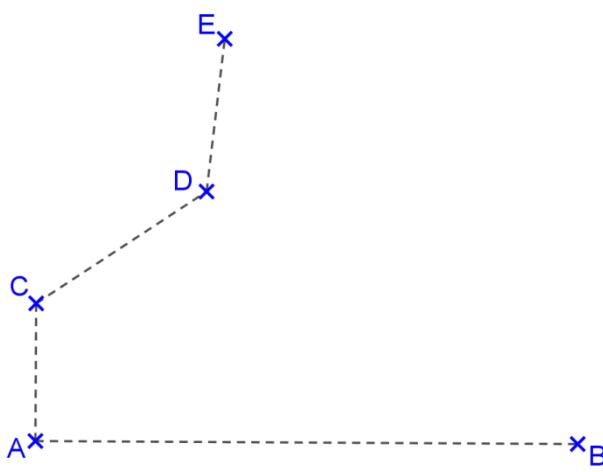
14. Construa um **arco esconso** de origens A e B.



16. Construir um **arco Tudor** com vão AB.



18. Construir um **arco geminado**, dados o vão AB e os centros dos demais arcos de circunferência C, D e E de um dos lados do arco geminado.



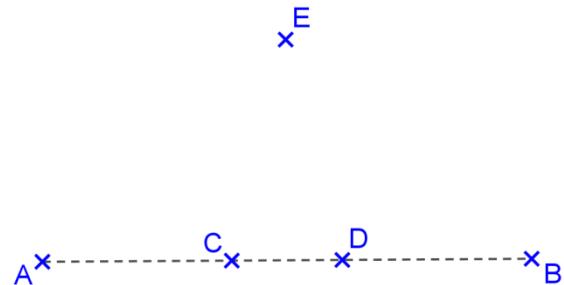
15. Construa um **arco esconso** de origens A e B, com BC menor que  $1/3$  de AC.



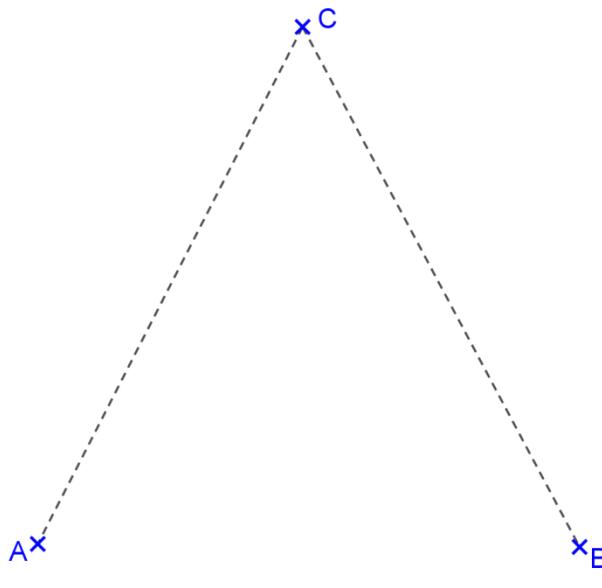
17. Construir um **arco Mourisco** com vão AB.



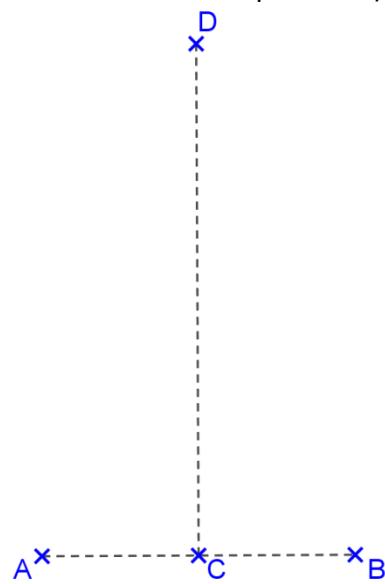
19. Construir um **arco trilobado** com arcos de circunferência de centros C e D, com arco de centro E de raio qualquer.



20. Arco parabólico, dados AB e BC.



21. Arco bulbiforme, com vão AB e flecha CD (a flecha deve ser maior do que o vão).

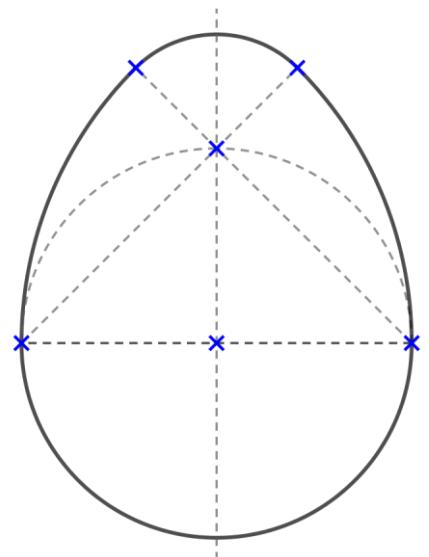


Definição: As **ovais** são curvas fechadas, constituídas por arcos de circunferências concordantes entre si, possuindo dois eixos: maior e menor.

#### Classificação das ovais:

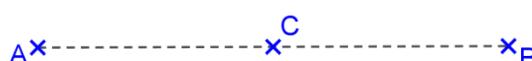
As ovais podem ser:

- regulares ou falsas elipses – formadas por arcos concordantes e simétricos dois a dois, possuem dois eixos de simetria de tamanhos diferentes;
- irregulares – formadas por arcos concordantes, possuem apenas um eixo de simetria, são chamadas de óvulos.

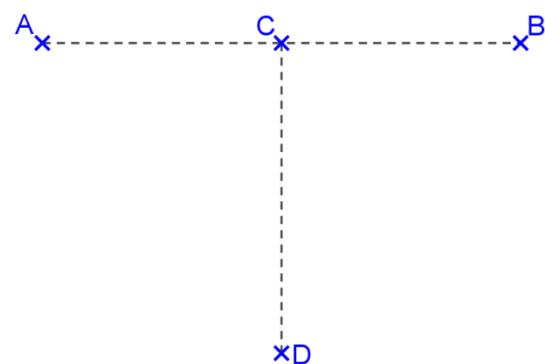


#### Exercícios propostos:

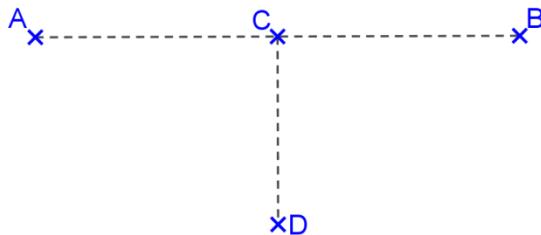
1. Construir uma **oval irregular** de 4 centros conhecendo-se o eixo menor AB.



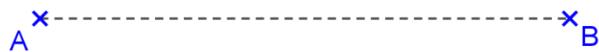
2. Construir uma **oval irregular alongada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é maior do que a metade de AB).



3. Construir uma **oval irregular encurtada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é menor do que a metade de AB).



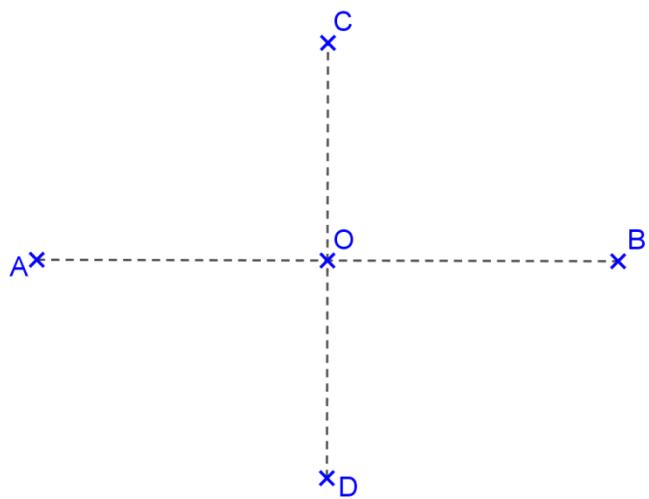
5. Construir uma **oval regular** de 4 centros conhecendo-se o eixo maior AB.



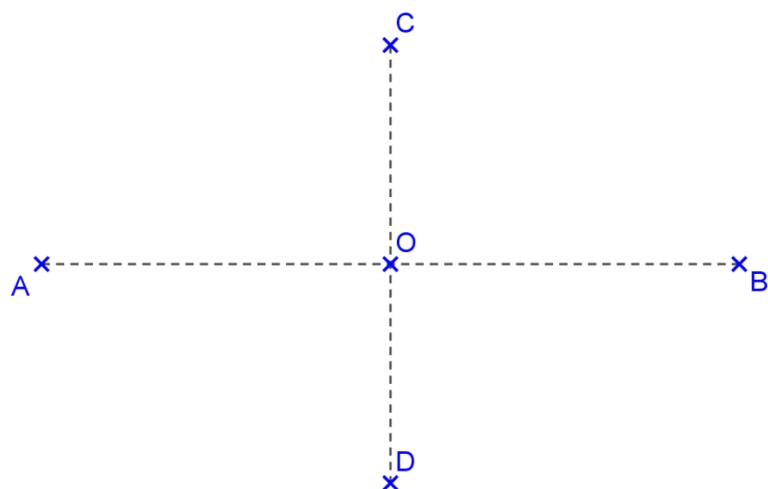
4. Construir uma **oval regular** conhecendo-se o eixo menor AB.



6. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB.



7. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB (método do retângulo).



Definição: Chama-se **espiral** a curva descrita por um ponto que se desloca com um movimento retilíneo uniforme (ou não), sobre uma reta, ao mesmo tempo em que este ponto gira em movimento circular também uniforme.

Existem dois tipos de espirais: as **verdadeiras**, que são traçadas por pontos auxiliares à mão livre (por exemplo, espiral de Arquimedes, hiperbólica e espiral logarítmica); e as **falsas**, que é o nome dado às curvas formadas por arcos concordantes que lembram o formato de uma espiral.

#### Elementos de uma falsa espiral:

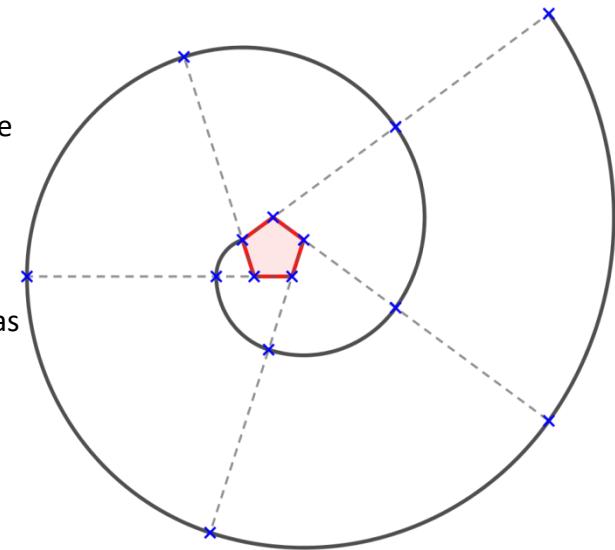
- núcleo** – é um polígono regular ou irregular, que contém os vários centros dos arcos que formam a espiral. Na espiral verdadeira, o núcleo é substituído por um ponto de centro, chamado pólo;
- centros** – são os centros dos arcos que formam a espiral;
- raios vetores** – prolongamentos dos lados do núcleo. Na espiral verdadeira são linhas que saem do pólo a um ponto qualquer da curva;
- espira** – cada evolução completa da espiral;
- passo** – distância entre duas espiras.

Observação: O desenvolvimento de uma espiral pode ser no sentido horário ou anti-horário.

#### **Exercícios:**

1. Construa uma **falsa espiral de 2 centros** (bicêntrica), no sentido horário, sabendo que seus centros distam 0,5cm.

2. Construa uma **falsa espiral de 3 centros regular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C, dados, onde  $AB = BC = AC = 1\text{cm}$ .



3. Construa uma **falsa espiral de 3 centros irregular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C: AB = 0,5cm, BC = 1cm e AC = 0,7cm.

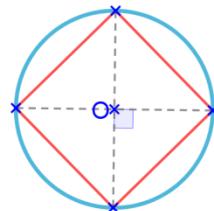
4. Construa uma **falsa espiral de 4 centros** (quadricêntrica), no sentido anti-horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do quadrado ABCD de lado 0,5cm.

5. Construa uma **falsa espiral ovalada** de 4 centros, no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do retângulo ABCD de lados iguais a 0,5cm e 1,1cm.

6. Construa um retângulo áureo de lado maior 10cm e a **espiral de Fibonacci ou de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).

7. Construa um triângulo áureo de lado maior 12cm e a **espiral de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).

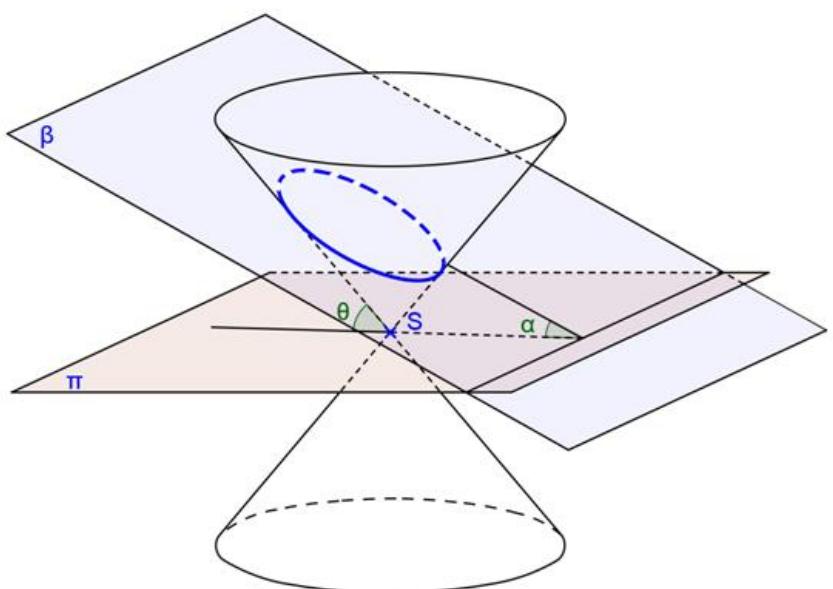
8. Construa uma **Voluta Jônica** a partir do quadrado inscrito na circunferência dada.



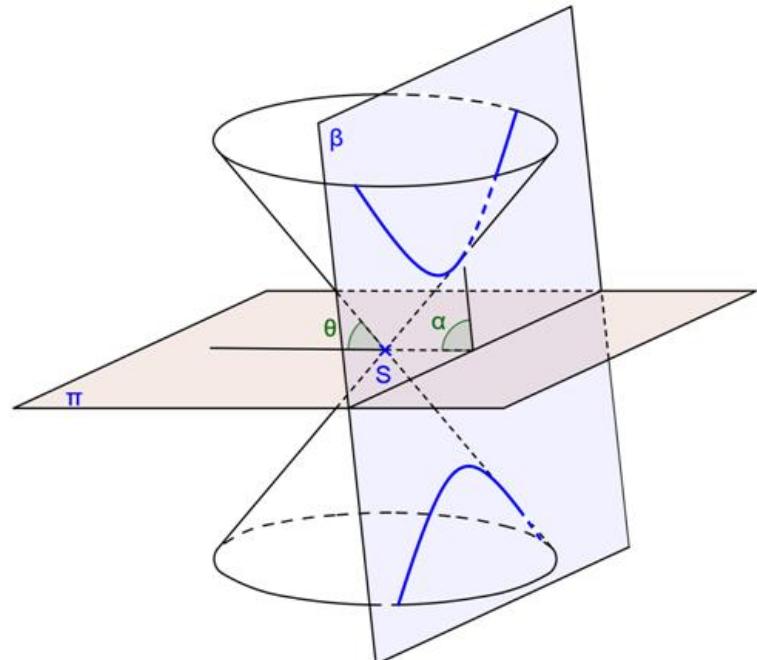
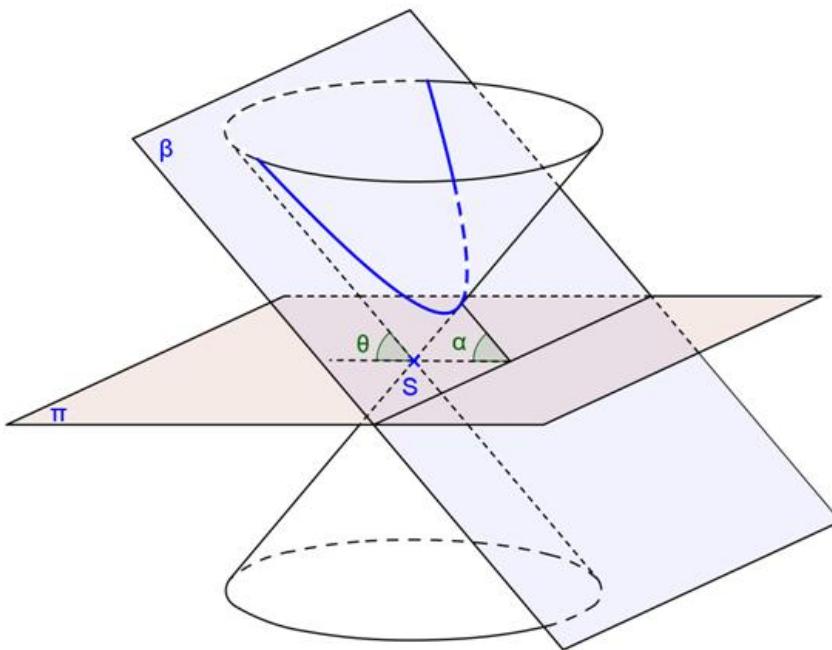
## PARTE II - CÔNICAS

A interseção de um plano com um cone determina três figuras, cujos contornos são chamados elipse, hipérbole ou parábola. Por esta razão, a elipse, a hipérbole e a parábola são denominadas seções cônicas, ou, simplesmente, cônicas. Considere o plano  $\pi$ , perpendicular ao eixo da superfície cônica e que contém o vértice  $S$ . Além disso, considere os seguintes ângulos:  $\theta$  formado entre as geratrizes do cone e o plano  $\pi$ ; e  $\alpha$  formado entre o plano  $\pi$  e o plano de seção  $\beta$ .

Quando  $\alpha < \theta$ , temos a interseção do plano  $\beta$  em apenas uma das folhas da superfície cônica, determinando a curva fechada chamada **elipse**.



Quando  $\alpha > \theta$ , as duas folhas da superfície cônica são intersectadas pelo plano  $\beta$ , determinando a curva aberta chamada **hipérbole**.



No caso em que  $\alpha = \theta$ , o plano  $\beta$  fica paralelo a uma geratriz do cone e intersecta uma das folhas da superfície, determinando a curva aberta chamada **parábola**.

A demonstração do teorema de Apollonius fornece a relação entre os pontos das cônicas.

**Teorema de Apollonius:** A seção feita em um cone por um plano qualquer é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo superior, igual ou inferior ao semi-ângulo no vértice do cone.

Este ângulo é o complementar do ângulo  $\theta$  mostrado anteriormente. A demonstração do teorema de Apollonius foi feita pelos matemáticos Dandelin e Quetelet e está baseada nas esferas inscritas na superfície cônica.

## 2.1. Elipse

Considere um plano  $\delta$  perpendicular ao plano secante  $\beta$  que passa pelo eixo do cone, intersectando a superfície cônica segundo as geratrizes  $SE$  e  $SE'$ . O plano da figura e o plano secante  $\beta$  cortam-se segundo a reta  $A_1A_2$ . Traçando-se as circunferências inscrita e ex-inscrita ao triângulo  $A_1SA_2$  entre as geratrizes do cone, estas tocam  $A_1A_2$  nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ . As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano secante nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ .

O contato da esfera de centro  $O$  com o cone é o círculo que tem diâmetro  $DD'$ . A esfera de centro  $O'$  tangencia o cone segundo um círculo de diâmetro  $EE'$ .

Escolhendo-se um ponto  $P$  qualquer sobre a curva de seção, podemos construir os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$  e a geratriz  $SP$  que corta em  $L$  e  $L'$  os segmentos paralelos  $DD'$  e  $EE'$ . A medida do segmento  $PF_1$  é igual à medida de  $PL'$ , pois são tangentes a uma esfera traçadas do mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos que  $PF_2 = PL$ .

Como a curva de seção está entre os planos  $DLD'$  e  $EL'E'$ , deixando  $P$  entre  $L$  e  $L'$ , podemos concluir que  $LL' = L'P + PL = PF_1 + PF_2$ . Como as duas geratrizes estão entre os planos perpendiculares ao eixo, temos que  $LL' = DE$ .

$$PF_1 + PF_2 = DE. \quad (1)$$

O perímetro do triângulo  $SA_1A_2$  mede  $2p = SD' + SD + DA_2 + A_2F_2 + A_1F_2 + D'A_1$ . Porém, temos que  $SD = SD'$ , pois são tangentes a uma esfera traçadas por um mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos que  $DA_2 = A_2F_2$  e  $A_1F_2 = D'A_1$ . Logo,

$$2p = 2SD + 2A_2F_2 + 2A_1F_2 \Rightarrow p = SD + A_2F_2 + A_1F_2 \Rightarrow A_2F_2 + A_1F_2 = p - SD. \quad (2)$$

Considerando o mesmo triângulo e o ponto de tangência da circunferência ex-inscrita, temos que  $2p = SA_2 + A_2F_1 + A_1F_1 + A_1S$ . Como temos retas tangentes traçadas do mesmo ponto à superfície da esfera de centro  $O'$ , ou seja,  $A_2F_1 = A_2E$  e  $A_1F_1 = A_1E'$ .

Substituindo  $A_2F_1$  e  $A_1F_1$ , temos que  $2p = SA_2 + A_2E + A_1S + A_1E'$  ou  $2p = SE + SE'$ . Como  $SE = SE'$ , obtemos  $2p = 2SE$  ou  $p = SE$ . Substituindo na relação (2)  $p$  pelo seu valor  $SE$ , obtemos que  $A_1A_2 = SE - SD$ , ou seja,  $SE - SD = ED$ . Logo, temos que  $A_1A_2 = DE$ , e substituindo-se na relação (1), obtemos a relação entre as distâncias de um ponto qualquer  $P$  da elipse e os pontos  $F_1$  e  $F_2$ :

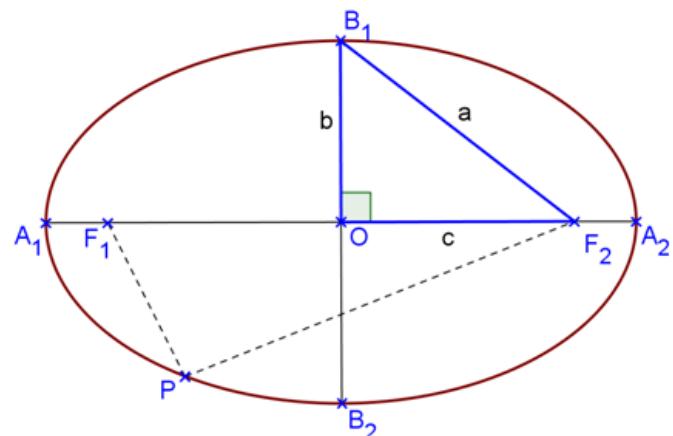
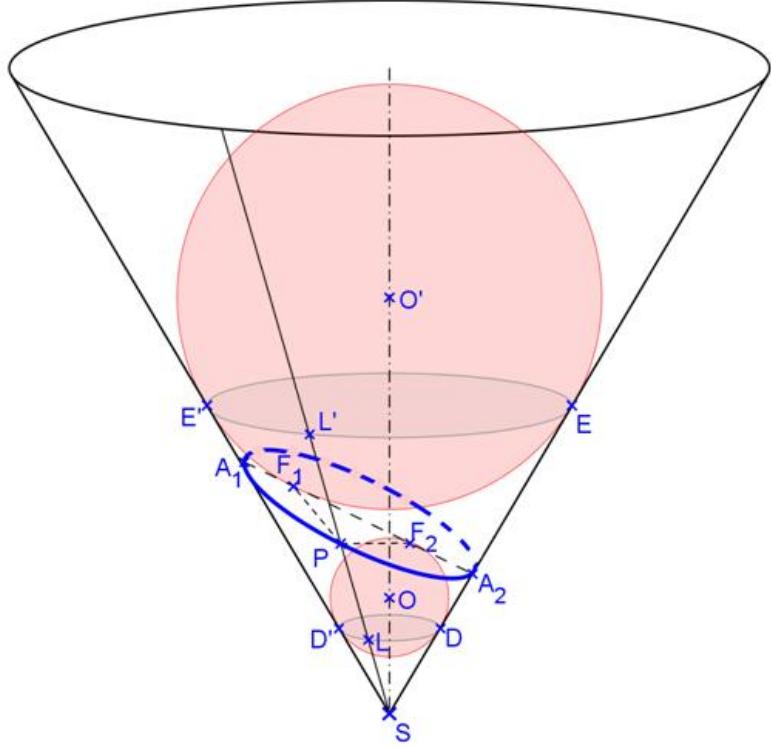
$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2.$$

Definição: Considere os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , tais que  $F_1F_2 = 2c$ , e uma distância  $2a$ , de modo que  $2a > 2c$ .

Chama-se **elipse** o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é constante e igual a  $2a$ . Se  $P$  é um ponto da elipse, então temos que  $PF_1 + PF_2 = 2a$ .

#### Elementos da elipse:

- focos** – são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .
- distância focal** –  $F_1F_2 = 2c$ .
- vértices** –  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ ; onde  $A_1$  e  $A_2$  são os pontos de interseção da reta  $F_1F_2$  com a elipse; e  $B_1$  e  $B_2$  são os pontos onde a mediatrix de  $F_1F_2$  intersecta a elipse.
- diâmetro maior** – é o segmento  $A_1A_2$ .
- diâmetro menor** – é o segmento  $B_1B_2$ .
- centro** – é o ponto  $O$ , médio de  $F_1F_2$ ; é um centro de simetria da curva.
- eixos de simetria** – são as retas  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$ .



Propriedades:

1.  $A_1F_1 = F_2A_2$ .
2. A distância dos vértices  $B_1$  e  $B_2$  até cada um dos focos é a medida  $a$ .
3. Por convenção adota-se  $B_1B_2 = 2b$ . Logo, temos que,  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**Exercícios:**

1. Determine os vértices e os focos de uma elipse, dados  $F_1$ ,  $A_1$  e  $O$ . Construa a elipse por pontos.



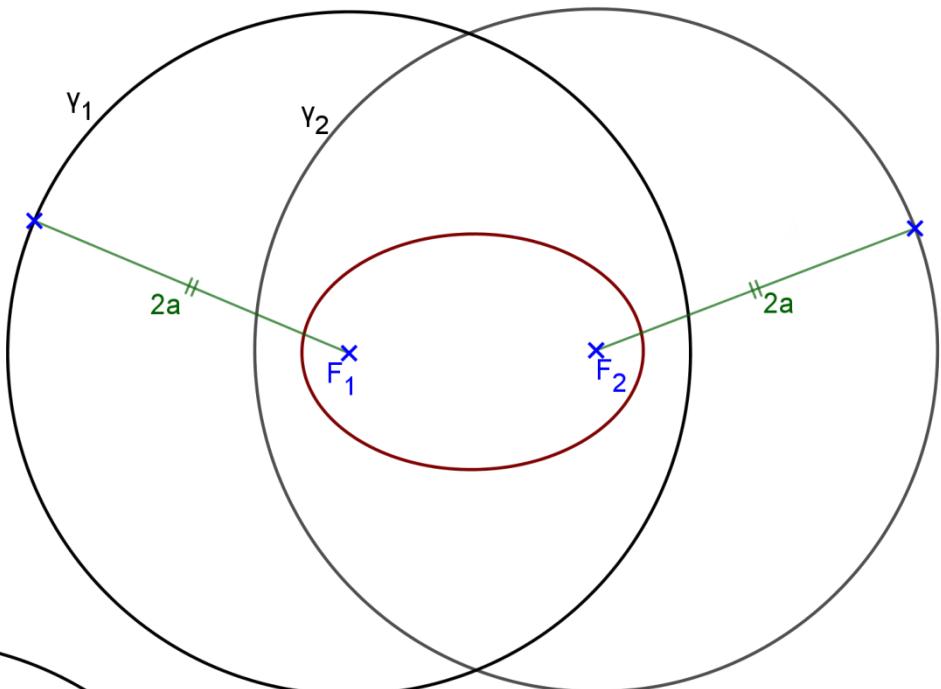
2. Determine os vértices de uma elipse, dados os focos e um ponto  $P$  da mesma.



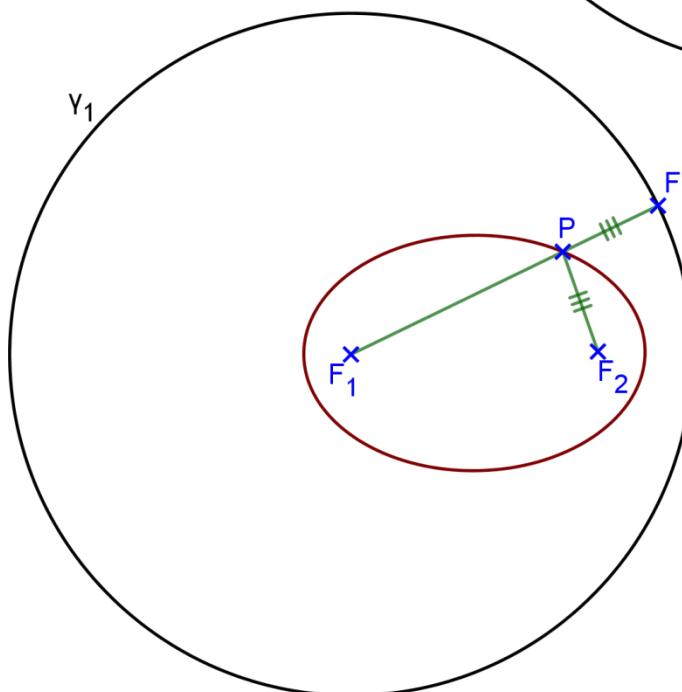
3. Construa os diâmetros da elipse, dados o foco  $F_1$  e os pontos,  $P_1$  e  $P_2$  simétricos em relação ao centro.



Definição: As circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a  $2a$  são chamadas de circunferências diretrizes da elipse. A circunferência diretriz  $\gamma_1$  de centro  $F_1$  é relativa ao foco  $F_1$ , e a outra  $\gamma_2$  relativa ao foco  $F_2$ .



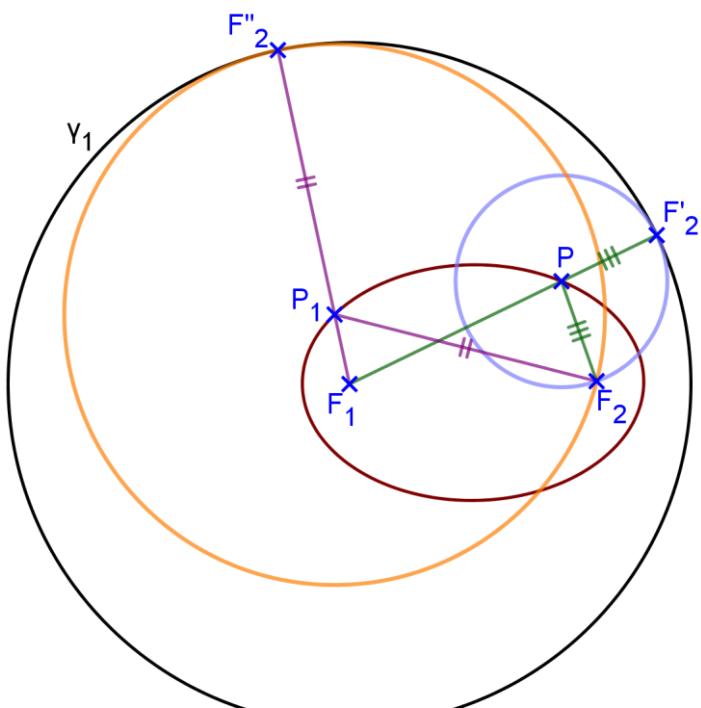
Propriedade:  $PF_2 = PF'_2$



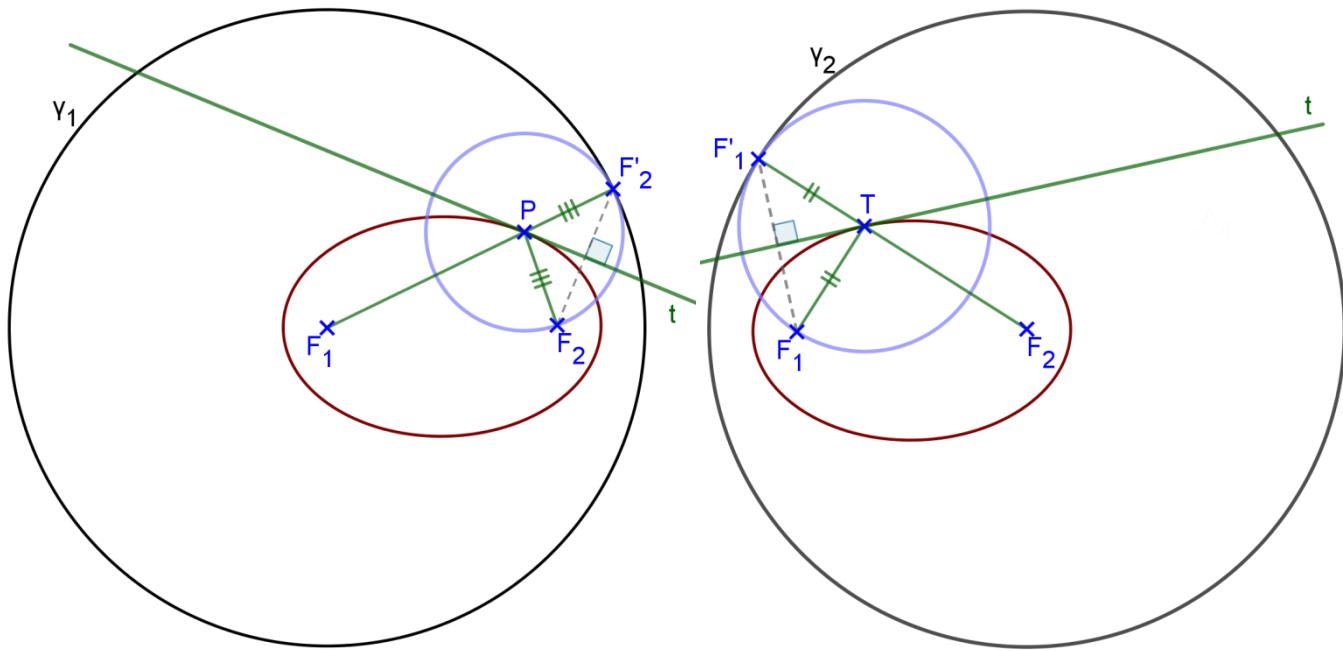
Note que é o mesmo que: toda circunferência que tem o centro em um ponto qualquer de uma elipse e passa por um foco da mesma é tangente internamente à circunferência diretriz do outro foco. Logo, temos uma nova definição para a elipse.

Definição: Dados uma circunferência  $\gamma_1$  de centro  $F_1$  e um ponto  $F_2$  no seu interior. Chama-se **elipse** o lugar geométrico dos centros  $P$  das circunferências que passam por  $F_2$  e tangenciam  $\gamma_1$ .

O mesmo raciocínio vale para a circunferência  $\gamma_2$ : a elipse é o lugar geométrico dos centros  $P$  das circunferências que passam por  $F_1$  e tangenciam  $\gamma_2$ .



Propriedade: uma reta e uma elipse são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos da elipse em relação à reta pertence à circunferência diretriz relativa ao outro foco.



#### Observações (1ª figura)

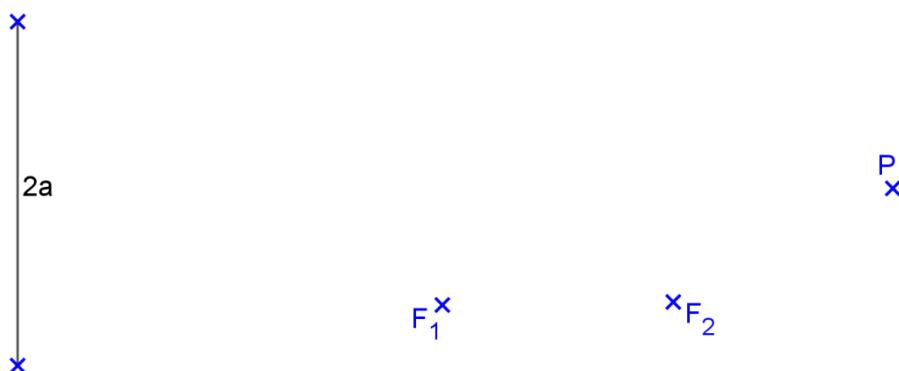
- a reta tangente  $t$  é a mediatrix de  $F_2F'_2$ , onde  $F'_2$  é o simétrico de  $F_2$  em relação a reta  $t$ ;
- $F_1, T$  e  $F'_2$  estão alinhados.

#### Observações (2ª figura)

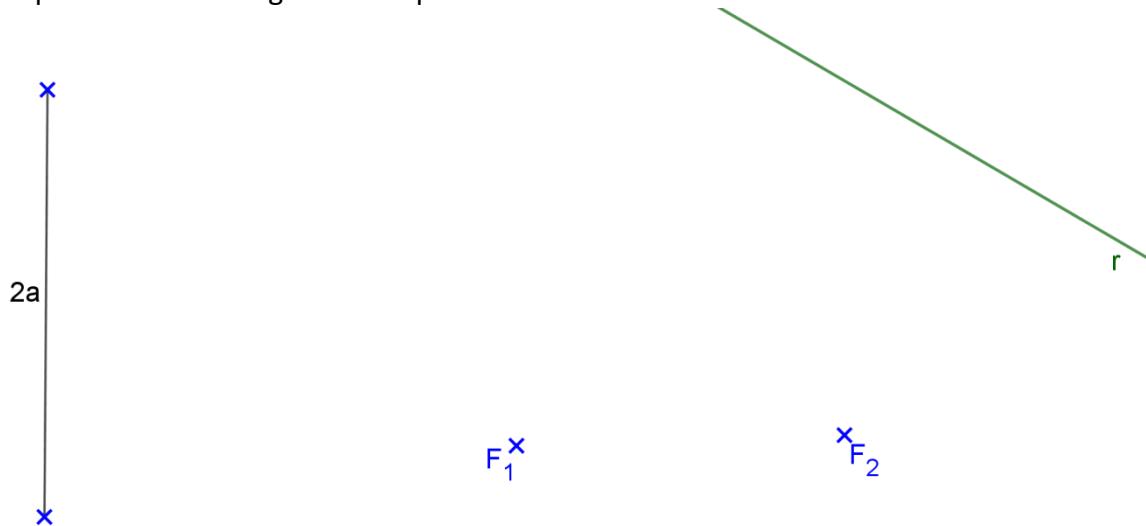
- a reta tangente  $t$  é a mediatrix de  $F_1F'_1$ , onde  $F'_1$  é o simétrico de  $F_1$  em relação a reta  $t$ ;
- $F_2, T$  e  $F'_1$  estão alinhados.

#### **Exercícios:**

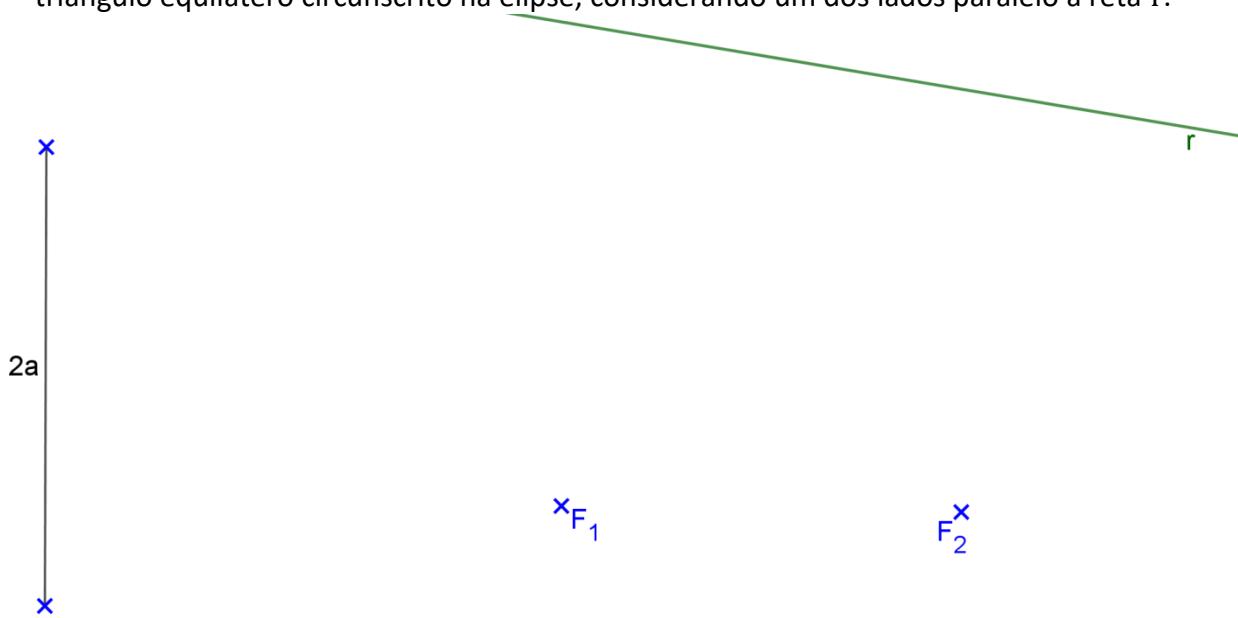
1. Dados os focos e o comprimento  $2a$  do diâmetro maior de uma elipse e um ponto  $P$  externo a ela, construa pelo ponto  $P$  as retas tangentes à elipse e determine os respectivos pontos de tangência.



2. Dados os focos e o comprimento  $2a$  do diâmetro maior de uma elipse e uma reta  $r$ , construa as retas paralelas a  $r$  e tangentes à elipse.



3. Dados os focos e o comprimento  $2a$  do diâmetro maior de uma elipse e uma reta  $r$ , construa o triângulo equilátero circunscrito na elipse, considerando um dos lados paralelo à reta  $r$ .

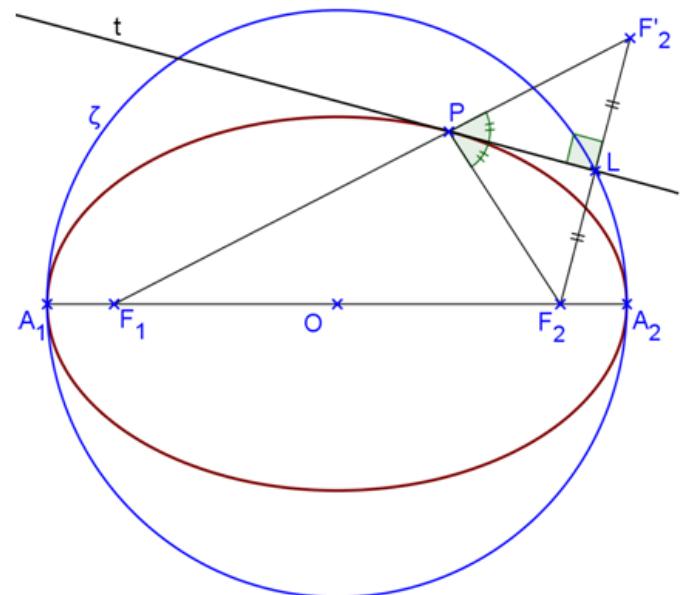


Definição: A circunferência principal de uma elipse tem centro em O e raio a.

Propriedade: A circunferência principal de uma elipse contém os pés das retas perpendiculares às tangentes à elipse que passam pelos focos.

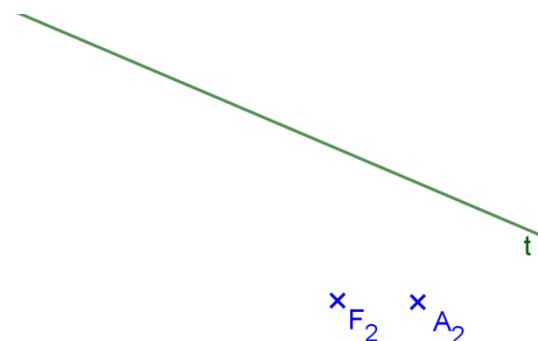
Para provar que o ponto L pertence à circunferência principal, basta utilizar a relação entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes  $\Delta F_1 F_2 F'_2$  e  $\Delta O F_2 L$ :

$$\frac{F_1 F'_2}{O L} = \frac{F_1 F_2}{O F_2} \rightarrow \frac{2a}{O L} = \frac{2c}{c} \rightarrow O L = a.$$

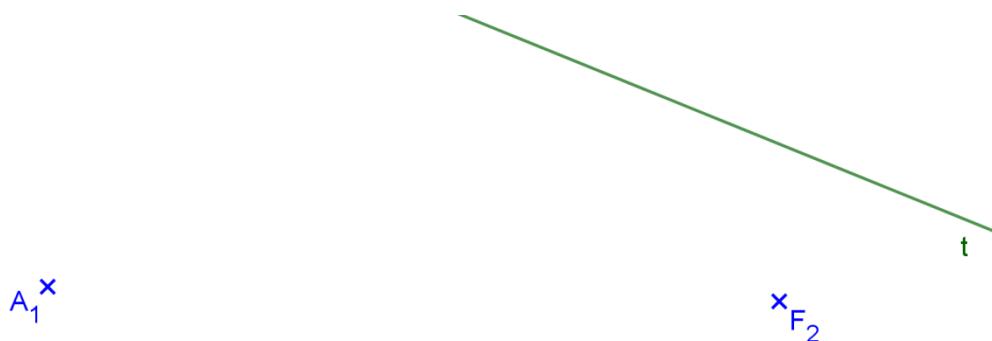


### Exercícios:

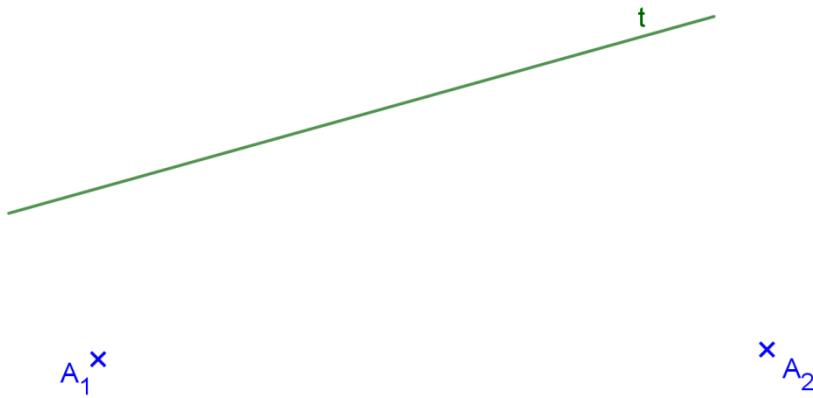
1. Determine os elementos principais da elipse, dados o vértice  $A_2$ , o foco  $F_2$  e a reta tangente  $t$ .



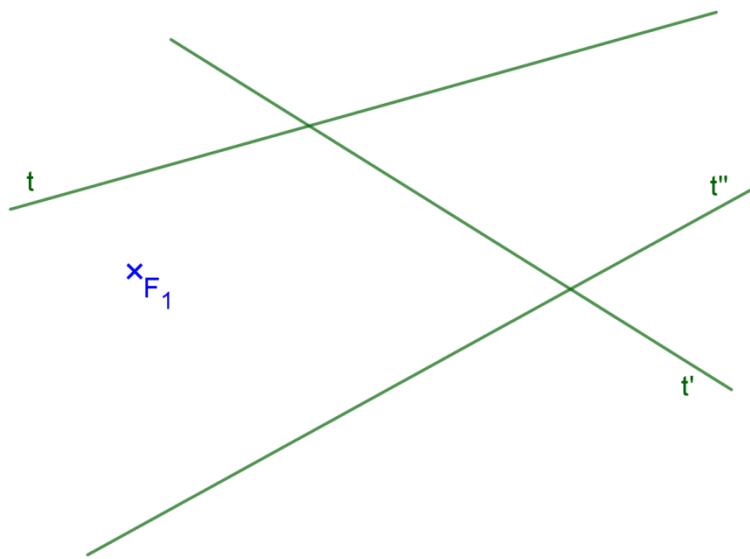
2. Determine os elementos principais da elipse, dados o vértice  $A_1$ , o foco  $F_2$  e a reta tangente  $t$ .



3. Determine os elementos principais da elipse, dados os vértices  $A_1$  e  $A_2$  e a reta tangente  $t$ .



4. Determine os elementos principais da elipse, dados o foco  $F_1$  e as retas tangentes  $t$ ,  $t'$  e  $t''$ .



Considere um ponto  $P$  da elipse de diâmetros  $2a$  e  $2b$  com o centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Por definição, temos que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad (1)$$

Calculando as distâncias  $PF_1$  e  $PF_2$ , obtemos:

$$PF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado, temos que:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando-se a última igualdade, temos:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \Rightarrow \\ a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros, temos:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2.$$

Simplificando a última igualdade, temos:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2.$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como na elipse temos  $a^2 = b^2 + c^2$ , podemos substituir na última igualdade  $a^2 - c^2$  por  $b^2$ :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da última igualdade por  $a^2b^2$ , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Propriedade: Os pontos da circunferência principal e da elipse se correspondem segundo uma afinidade homológica de razão  $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$ .

Nos triângulos  $\Delta OCE$  e  $\Delta ODF$  temos que:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{a} = \frac{y'}{b} \Rightarrow y = a \cdot \sin(\theta) \text{ e } y' = b \cdot \sin(\theta).$$

Como  $\Delta OCE \sim \Delta ODF$ , temos que:

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{b}$$

ou seja,

$$y = y' \cdot \frac{a}{b} \quad (1)$$

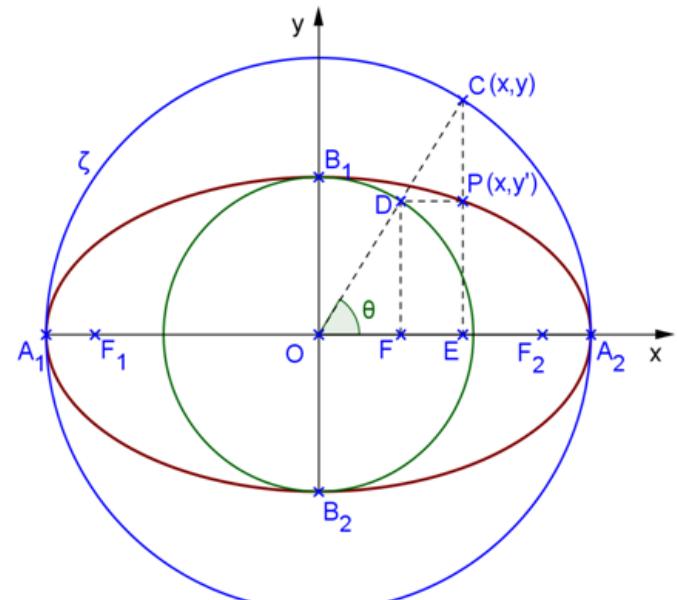
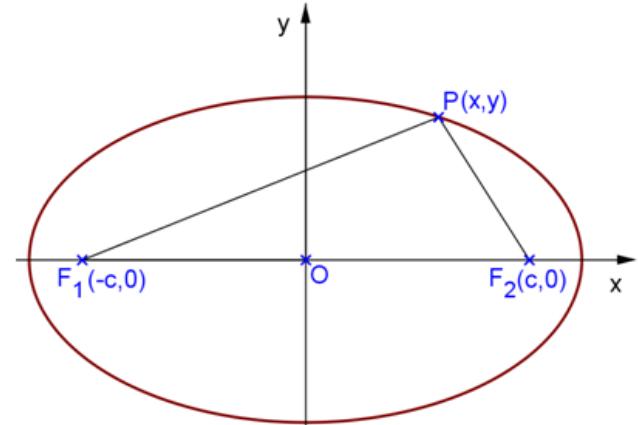
Como C pertence à circunferência principal da elipse, temos:

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$x^2 + \left(y' \cdot \frac{a}{b}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Portanto, P pertence à elipse.



A excentricidade de uma elipse ou hipérbole é a razão  $e = \frac{c}{a}$ . No caso da elipse, temos que  $c < a$ , ou seja,  $e < 1$ .

**Exercícios:**

1. Determine os elementos principais da elipse, dados os vértices  $A_1$  e  $A_2$  e o ponto  $P$ .

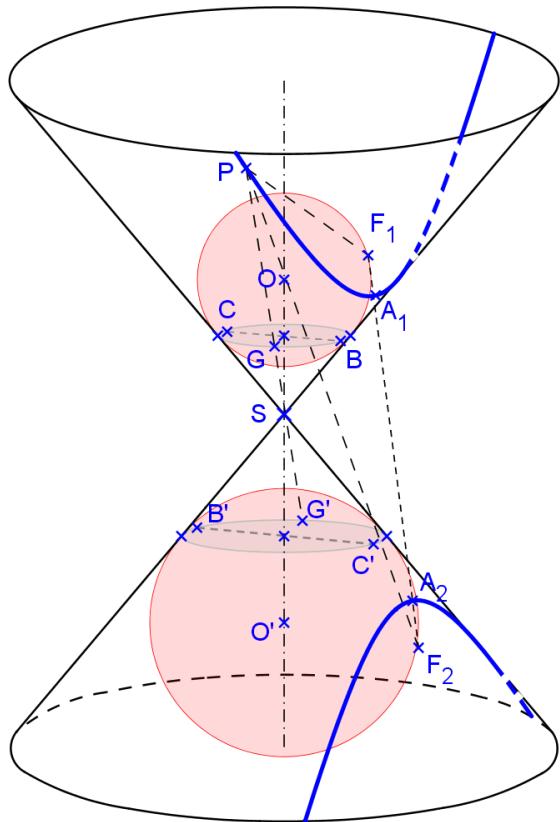


2. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade  $e = \frac{2}{3}$  e o diâmetro  $2c = 7,5\text{cm}$ .

3. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade  $e = \frac{1}{3}$  e o diâmetro  $2b = 5,3\text{cm}$ .
4. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade  $e = \frac{4}{5}$  e o diâmetro  $2a = 9,1\text{cm}$ .

## 2.2. Hipérbole

Voltando à demonstração do teorema de Apollonius, vamos considerar que o plano secante corta as geratrizess das duas folhas da superfície cônica. A curva obtida pela seção do plano secante é chamada de **hipérbole**. Temos que os segmentos  $PF_2 - PF_1 = PG' - PG = GG' = BB'$  têm uma medida constante, pois são tangentes a mesmas esferas por um mesmo ponto.



Sabemos que  $BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1$ , pois  $A_1B = A_1F_1$  e  $A_1B' = A_1F_2$  e são tangentes a uma esfera por um mesmo ponto. Além disso,  $BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2$ , pois  $A_2C = A_2F_1$  e  $A_2C' = A_2F_2$ .

Logo, temos que:

$$BB' = CC' = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Além disso, temos que:

$$BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Desta identidade, podemos concluir que:

$$A_1F_1 = A_2F_2 \text{ e } A_1F_2 = A_2F_1,$$

por serem segmentos iguais de sinais contrários.

Finalmente, temos que:

$$A_2F_1 - A_1F_2 = A_1F_2 - A_2F_2 = BB' = A_1A_2.$$

Portanto,

$$PF_2 - PF_1 = BB' = A_1A_2.$$

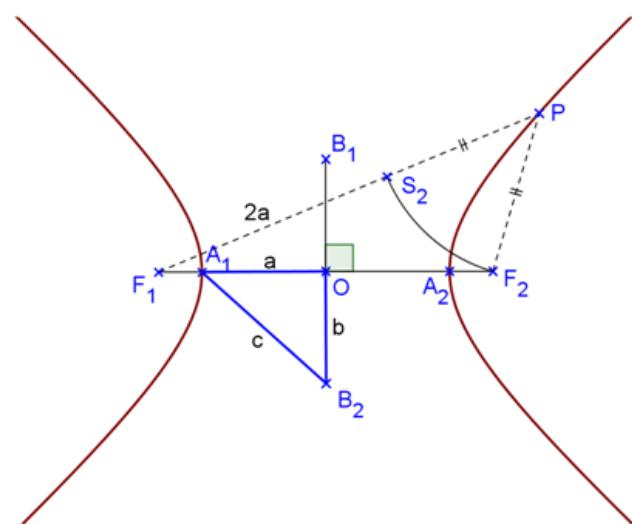
As interseções dos planos dos paralelos  $BC$  e  $B'C'$  com o plano secante são as retas diretrizes da hipérbole.

Definição: Considere dois pontos  $F_1$  e  $F_2$ , tais que  $F_1F_2 = 2c$ , e uma distância  $2a$ , de modo que  $2a < 2c$ .

Chama-se **hipérbole** o lugar geométrico dos pontos cujas diferenças das distâncias a  $F_1$  e a  $F_2$  são constantes e iguais a  $2a$ . Se  $P$  é um ponto da hipérbole, então  $|PF_1 - PF_2| = 2a$ , ou seja,  $PF_1 > PF_2$  ou  $PF_1 < PF_2$ . Uma hipérbole é uma curva formada por dois ramos.

Elementos da hipérbole:

- focos** – são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .
- distância focal** –  $F_1F_2 = 2c$ .
- eixo real ou transverso** – é a reta  $F_1F_2$ ; é um eixo de simetria da curva.
- eixo imaginário ou não-transverso** – é a mediatrix de  $F_1F_2$ ; é um eixo de simetria da curva.
- vértices** –  $A_1, A_2$ ; onde  $A_1$  e  $A_2$  são os pontos de interseção da reta  $F_1F_2$  (do eixo real) com a hipérbole.
- diâmetro real, principal ou transverso** – é o segmento  $A_1A_2$ .
- centro** – é o ponto  $O$ , médio de  $F_1F_2$ . O centro  $O$  é



um centro de simetria da curva.

- h) **diâmetro imaginário, secundário ou não-transverso** – no eixo imaginário existem dois pontos,  $B_1$  e  $B_2$ , cujas distâncias aos vértices são iguais a  $c$ . O segmento  $B_1B_2$  é o diâmetro imaginário.

Propriedades:

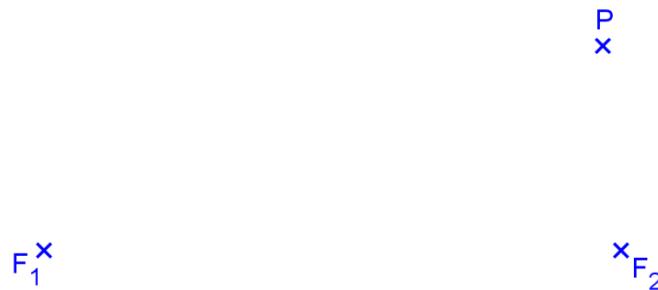
1.  $F_1A_1 = A_2F_2$ .
2. Por convenção adota-se a medida do diâmetro imaginário  $B_1B_2 = 2b$ . Assim,  $c^2 = a^2 + b^2$ .

**Exercícios:**

1. Construa os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, dados  $F_1$ ,  $A_1$  e  $O$ . Construa a hipérbole por pontos.



2. Construa os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, dados  $F_1$ ,  $F_2$  e um ponto  $P$  da curva.



3. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade  $e = \frac{3}{2}$  e o diâmetro  $2b = 5,3\text{cm}$ .

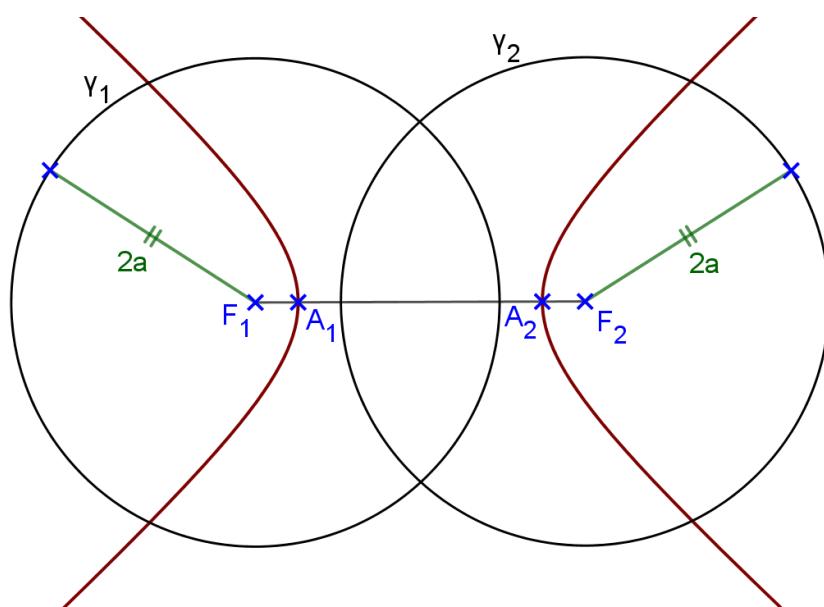
4. Dados o foco  $F_1$  e os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , simétricos em relação ao eixo imaginário, construa os diâmetros real e imaginário da hipérbole.



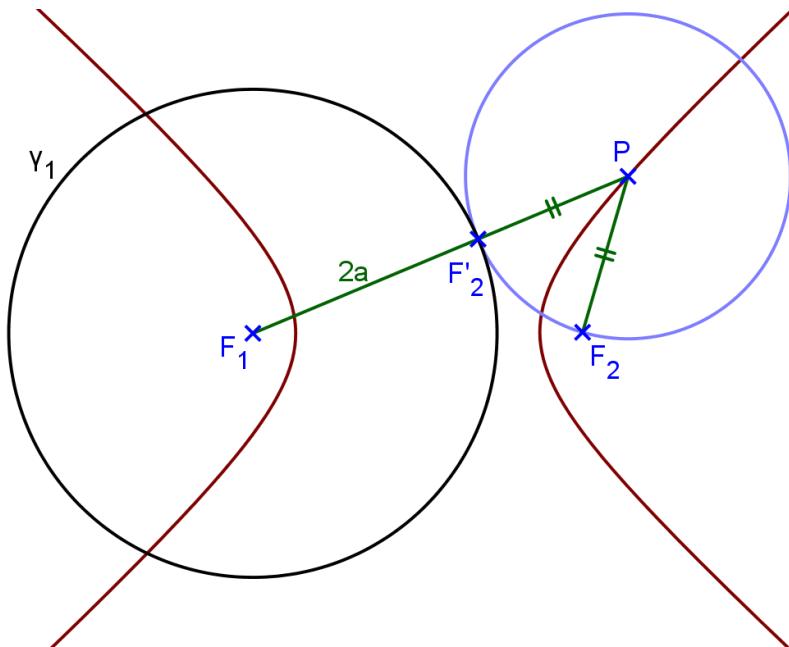
5. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade  $e = \frac{5}{2}$  e  $2a = 4,5\text{cm}$ .

6. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade  $e = \frac{6}{5}$  e  $2c = 6,3\text{cm}$ .

Definição: As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a  $2a$  são chamadas de **circunferências diretrizes** da hipérbole. A circunferência diretriz  $\gamma_1$  de centro  $F_1$  é relativa ao foco  $F_1$ , e a outra  $\gamma_2$  relativa ao foco  $F_2$ .

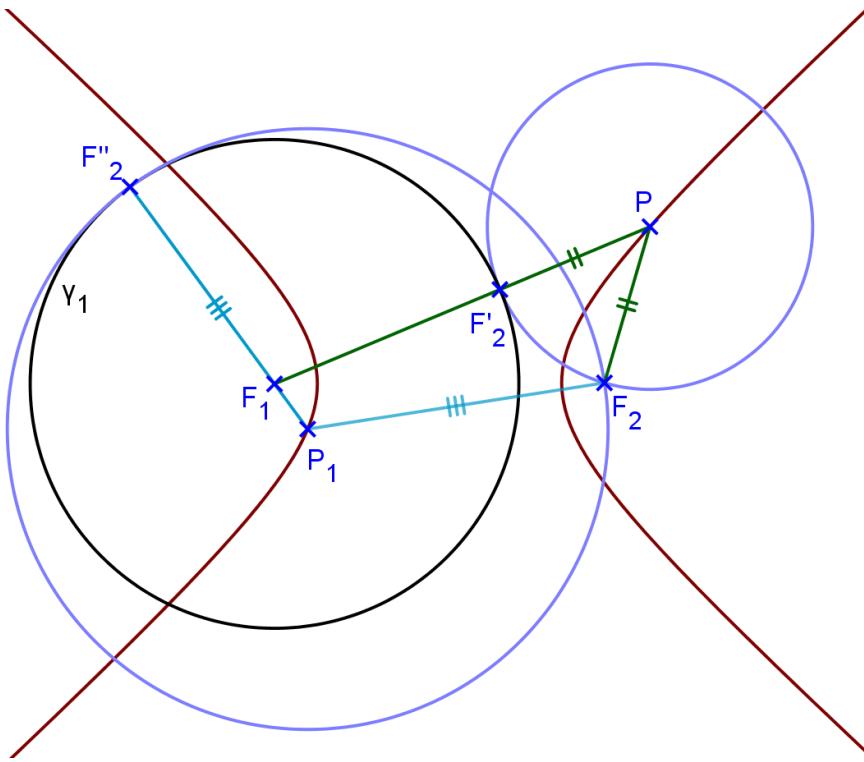


Propriedade:  $PF_2 = PF'_2$



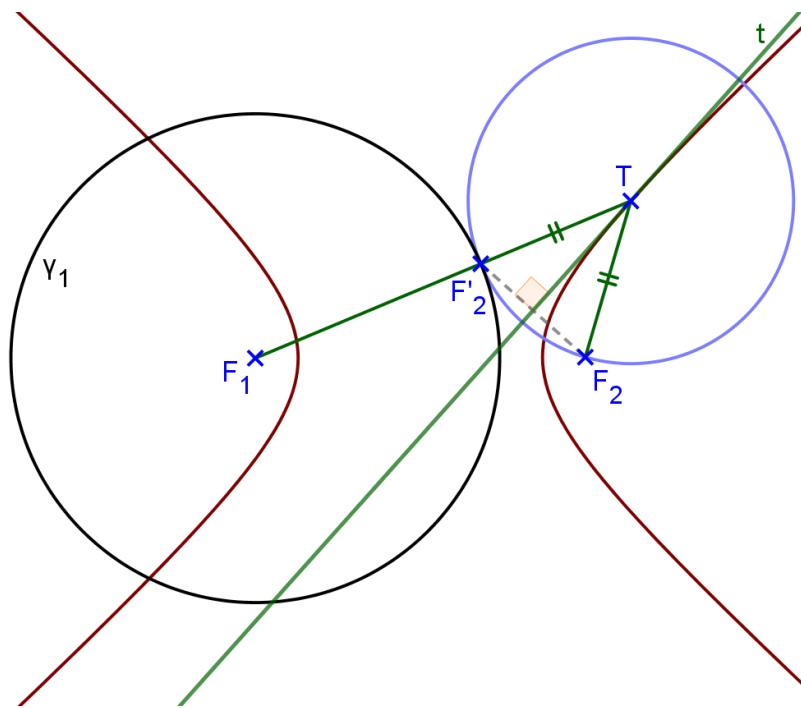
Note que é o mesmo que: toda circunferência que tem o centro num ponto qualquer de uma hipérbole e passa por um foco da mesma é tangente internamente à circunferência diretriz do outro foco. Logo, temos uma nova definição para a hipérbole.

Definição: Dados uma circunferência  $\gamma_1$  de centro  $F_1$  e um ponto  $F_2$  no seu exterior, denomina-se **hipérbole** o lugar geométrico dos centros  $P$  das circunferências que passam por  $F_2$  e tangenciam  $\gamma_1$ .

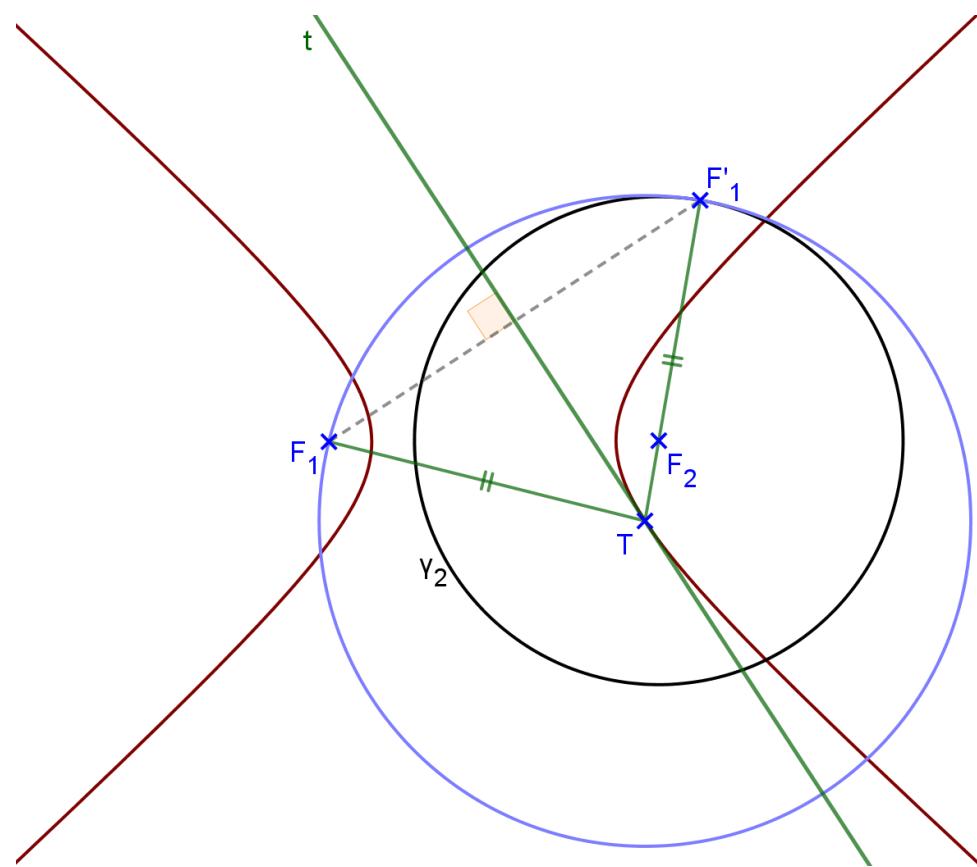


O mesmo raciocínio vale para a circunferência  $\gamma_2$ : a **hipérbole** é o lugar geométrico dos centros  $P$  das circunferências que passam por  $F_1$  e tangenciam  $\gamma_2$ .

Propriedade: uma reta e uma hipérbole são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos da hipérbole em relação à reta pertence à circunferência diretriz relativa ao outro foco.

Observações

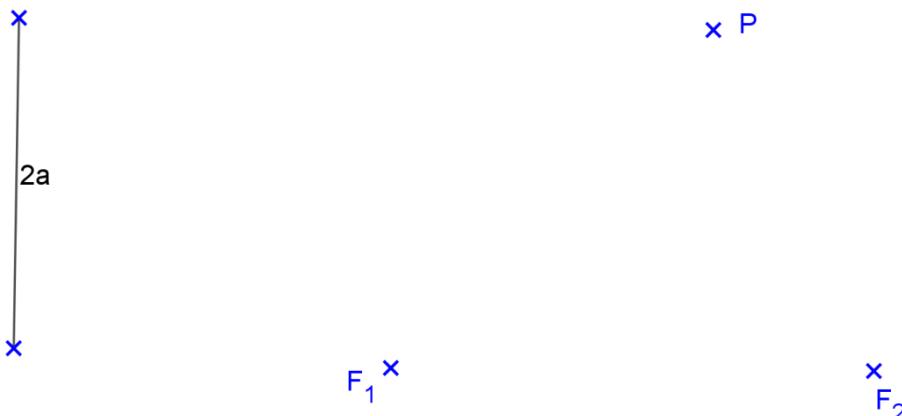
- a reta tangente  $t$  é a mediatrix de  $F_2F'_2$ , onde  $F'_2$  é o simétrico de  $F_2$  em relação a reta  $t$ ;
- $F_1, T$  e  $F'_2$  estão alinhados.

Observações

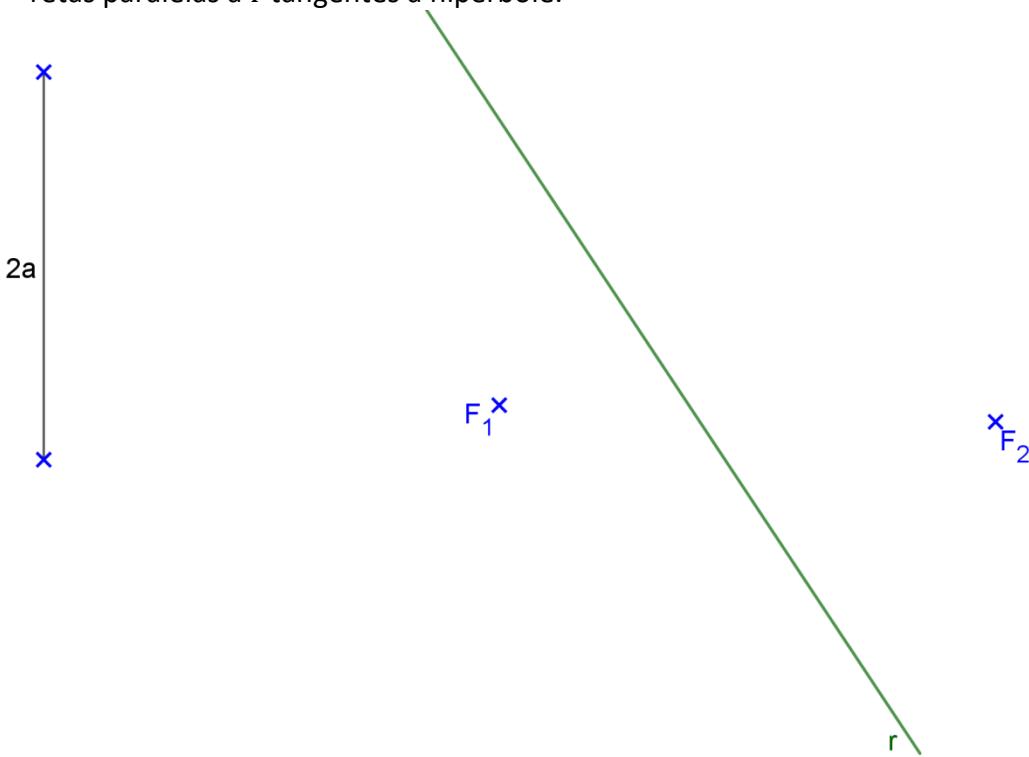
- a reta tangente  $t$  é a mediatrix de  $F_1F'_1$ , onde  $F'_1$  é o simétrico de  $F_1$  em relação a reta  $t$ ;
- $F_2, T$  e  $F'_1$  estão alinhados.

**Exercícios:**

1. São dados os focos, o comprimento do diâmetro real de uma hipérbole  $2a$  e um ponto  $P$  externo à curva. Construa pelo ponto  $P$  as retas tangentes à hipérbole e determine os pontos de tangência.



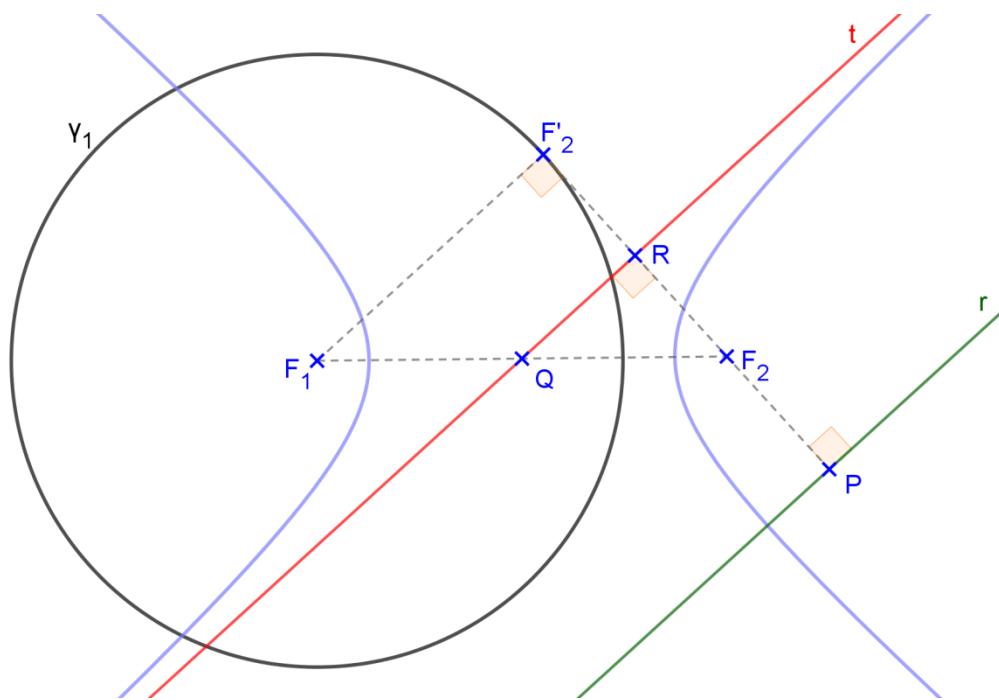
2. São dados os focos, o comprimento do diâmetro real de uma hipérbole  $2a$  e uma reta  $r$ . Construa as retas paralelas a  $r$  tangentes à hipérbole.



A reta  $PF_2$ , perpendicular à reta  $r$  pode ser secante à circunferência diretriz  $\gamma_1$  (admitindo duas soluções), exterior (não admitindo solução) ou tangente a  $\gamma_1$ .

Quando  $PF_2$  for tangente a  $\gamma_1$ , a reta tangente à hipérbole será a mediatrix de  $F_2F'_2$ . Porém, temos que  $PF_2 \perp F_1F'_2$  (pois  $PF_2$  é tangente a  $\gamma_1$ ), ou seja, a solução  $t // F_1F'_2$ . Como  $F_1F'_2$  deve intersecular  $t$  no ponto de tangência, neste caso, não existe ponto de tangência (ou dizemos que é um

ponto impróprio, que tem a direção da reta  $t$ ). Assim, a reta  $t$  tem a propriedade fundamental da tangência, isto é, o simétrico de qualquer foco em relação a  $t$  pertence a circunferência diretriz relativa ao outro foco, mas o ponto de tangência não existe (ou seja, é impróprio).

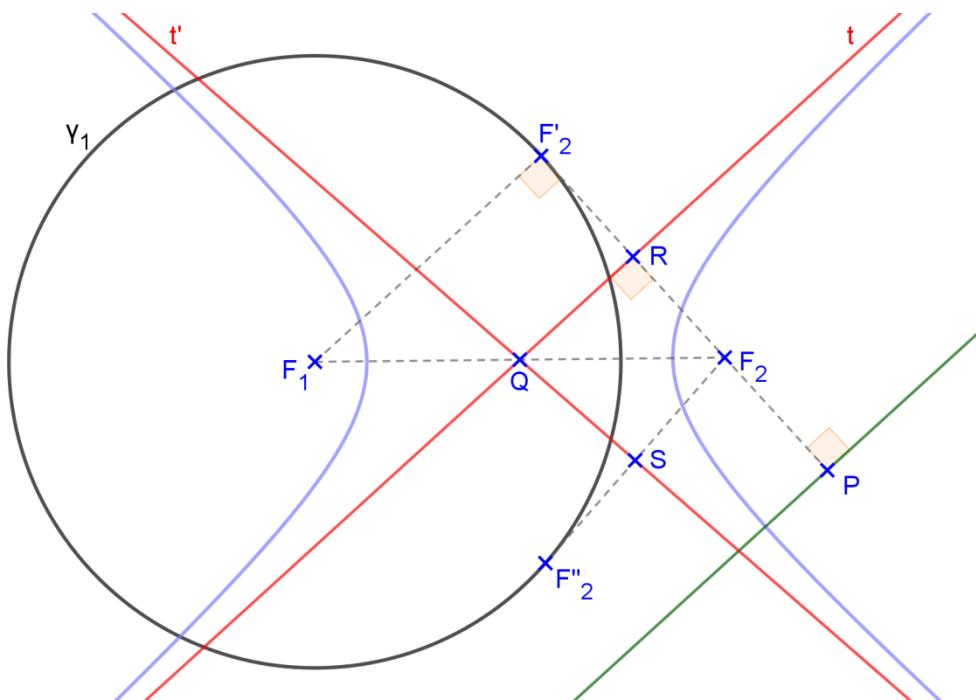


Definição: Suponha que um ponto  $M$  percorra a hipérbole, afastando-se indefinidamente sobre ela num determinado sentido, então a distância de  $M$  à reta  $t$  tende a zero, e a reta  $t$  denomina-se **assíntota** da hipérbole.

Propriedade: As assíntotas de uma hipérbole passam pelo centro da mesma.

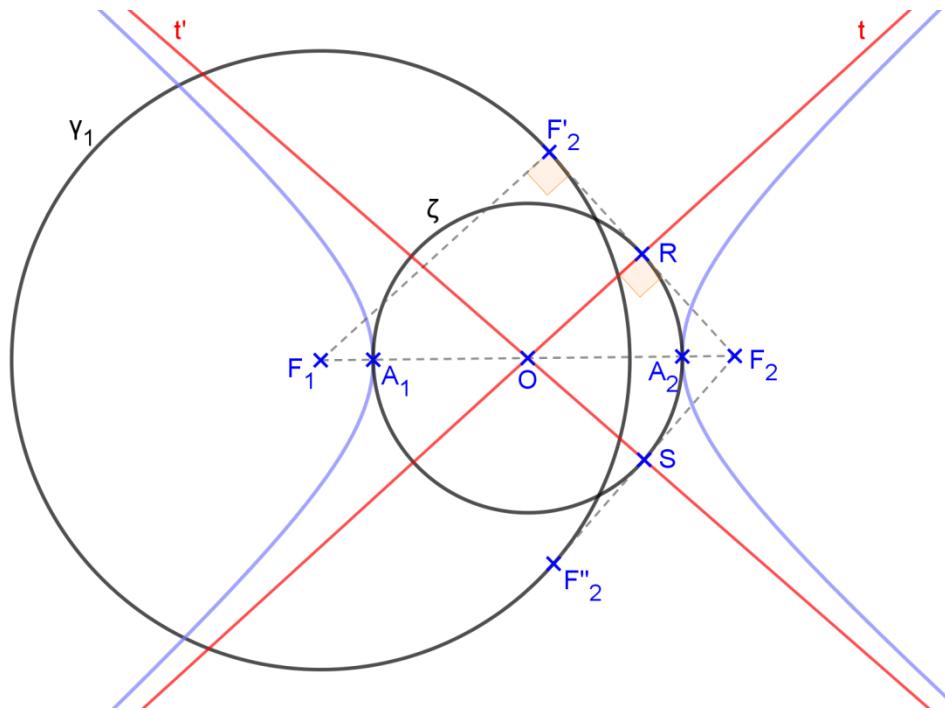
Como os triângulos  $\Delta F_1F_2F'_2$  e  $\Delta QF_2R$  são semelhantes, temos que  $QF_2 = QF_1$ , pois  $RF_2 = RF'_2$ . Logo, o ponto  $Q$  será o centro da hipérbole. Podemos concluir também que  $QR = \frac{F_1F'_2}{2} = a$ .

A hipérbole admite uma segunda assíntota, pois de  $F_2$  é possível traçar outra reta tangente a  $\gamma_1$ , determinando o ponto  $F''_2$ . A mediatrix de  $F_2F''_2$  é também uma assíntota.



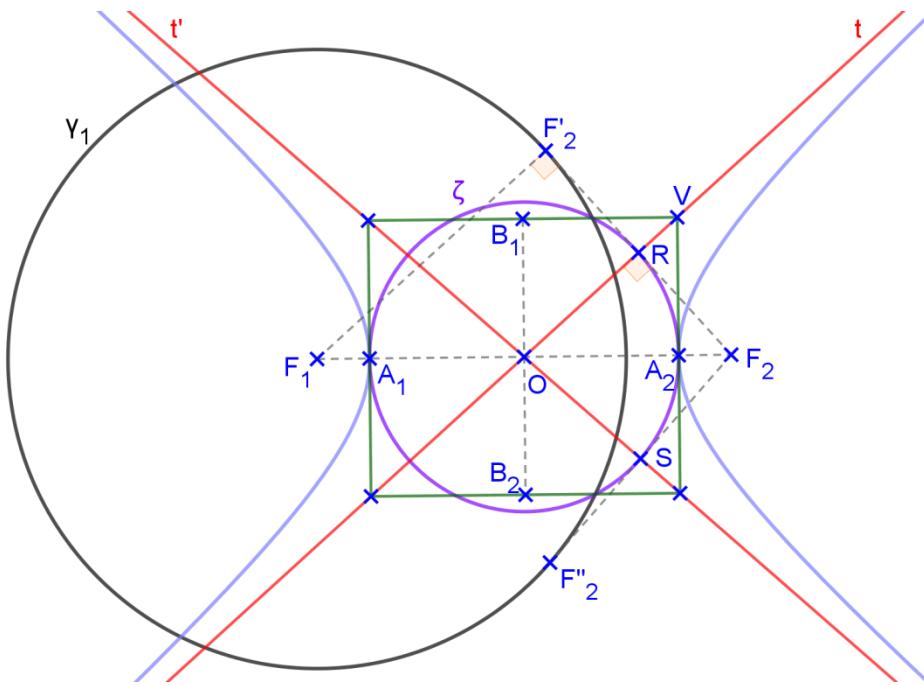
Definição: A circunferência principal de uma hipérbole tem centro em O e raio a.

De acordo com as propriedades que vimos sobre as retas assíntotas, podemos concluir que os pés das perpendiculares aos segmentos  $F_2F'_2$  e  $F_2F''_2$  pertencem à circunferência principal da hipérbole.



Propriedade: Sejam  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, respectivamente.

Considere o retângulo que se obtém traçando-se por  $A_1$  e  $A_2$  as paralelas a  $B_1B_2$  e, por  $B_1$  e  $B_2$  as paralelas a  $A_1A_2$ . Então, as assíntotas da hipérbole contêm as diagonais do retângulo considerado.



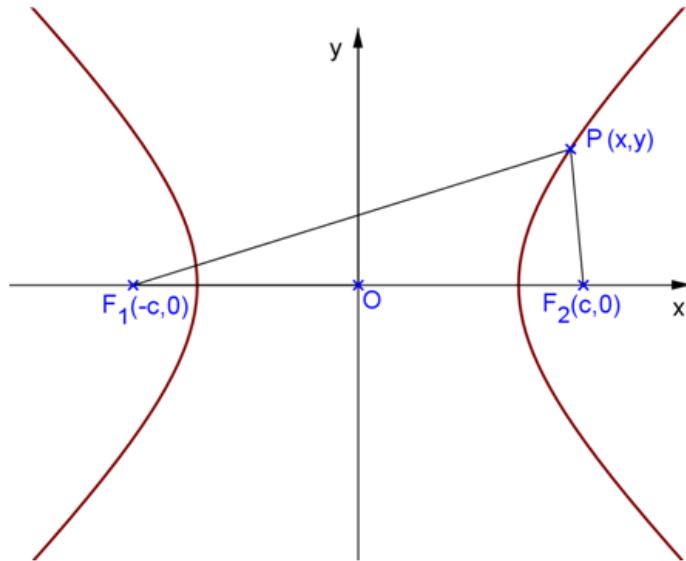
Da congruência dos triângulos  $\Delta VB_1O$  e  $\Delta ROF_2$ , podemos concluir que  $RF_2 = b$  e  $OV = c$ . Logo, o vértice V pertence à assíntota t. O mesmo vale para os outros vértices do retângulo.

Seja um ponto P sobre a hipérbole de diâmetros  $2a$  e  $2b$ , com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Vamos determinar a equação desta hipérbole. Por definição, se P pertence à hipérbole, então:

$$PF_1 - PF_2 = 2a. \quad (1)$$

Mas as distâncias entre P e os focos  $F_1$  e  $F_2$  são:

$$PF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (2)$$



Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (3)$$

Elevando-se ambos os membros de (3) ao quadrado, obtemos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando-se a última igualdade, temos que:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4xc - 4a^2 \Rightarrow a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = xc - a^2. \quad (4)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros de (4), obtemos:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4. \quad (5)$$

Simplificando-se (5), obtemos:

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (6)$$

Como na hipérbole vale a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ , podemos substituir em (6)  $c^2 - a^2$  por  $b^2$ :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (7)$$

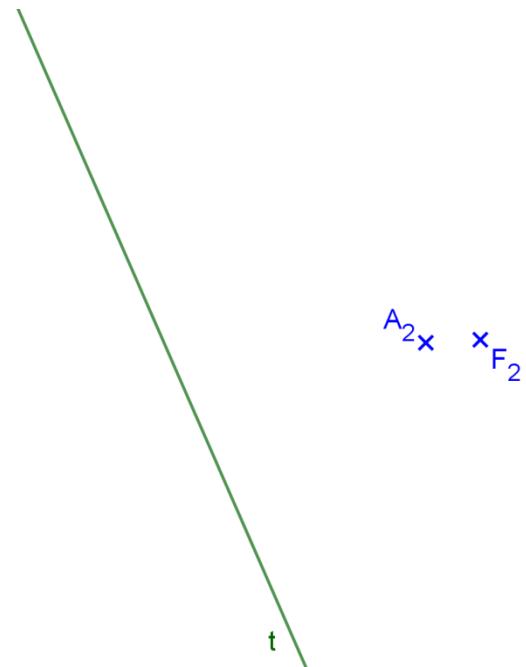
Dividindo ambos os membros de (7) por  $a^2b^2$ , obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

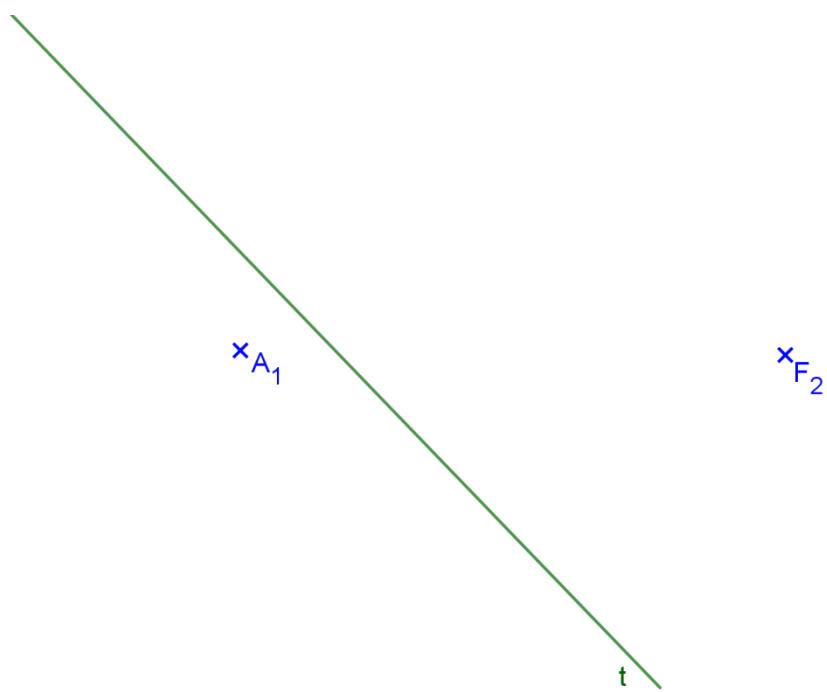
que é a equação da hipérbole de semi-diâmetros  $a$  e  $b$ , com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

**Exercícios:**

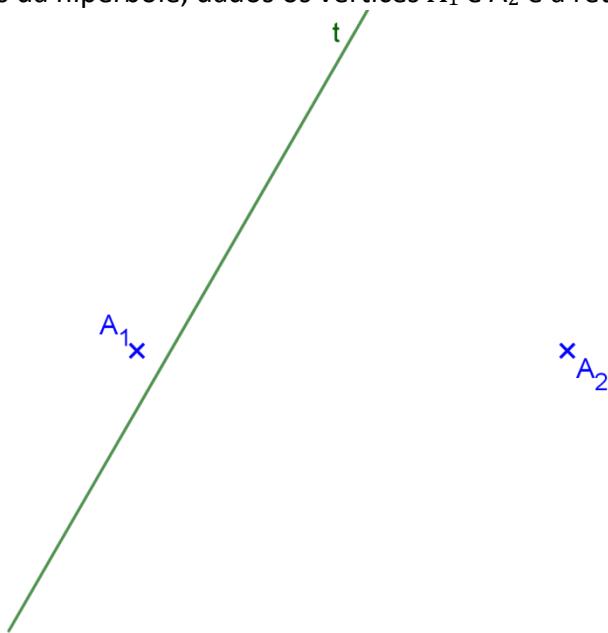
1. Determine os elementos principais da hipérbole, dados o vértice  $A_2$ , o foco  $F_2$  e a reta tangente t.



2. Determine os elementos principais da hipérbole, dados o vértice  $A_1$ , o foco  $F_2$  e a reta tangente t.

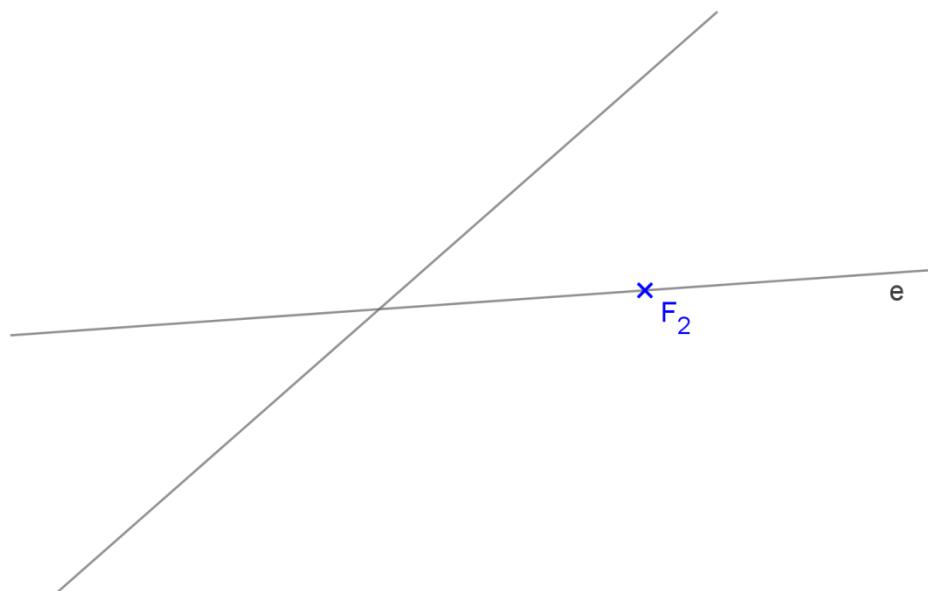


3. Determine os elementos principais da hipérbole, dados os vértices  $A_1$  e  $A_2$  e a reta tangente  $t$ .



4. Construa os elementos principais e as assíntotas da hipérbole com diâmetros  $2a = 5,3\text{cm}$  e  $2b = 4\text{cm}$ .

5. Construa os elementos principais de uma hipérbole, dados um foco, o eixo real e uma assíntota.



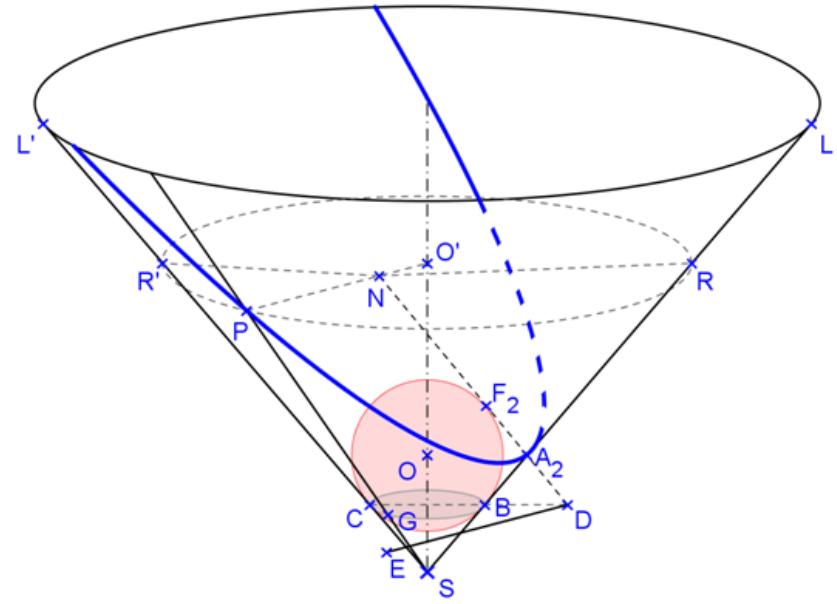
### 2.3. Parábola

Voltando à demonstração do teorema de Apollonius, vamos considerar que o plano secante seja paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica. A curva obtida pela seção do plano secante é chamada de **parábola**.

Construindo o plano  $L'S'L'$  perpendicular ao plano secante,  $S'L'$  será a geratriz paralela a este plano. O traço do plano secante no plano  $L'S'L'$  será  $A_2F_2$ .

Construindo no plano  $L'S'L'$  a circunferência de centro  $O$ , tangente às geratrizes principais em  $B$  e  $C$  e à reta  $A_2F_2$  no ponto  $F_2$  e girando-se a figura em torno do eixo  $OS$ , a esfera descrita pela circunferência de centro  $O$  será tangente ao cone segundo o paralelo  $BC$  e toca em  $F_2$  o plano secante.

Considere um ponto qualquer  $P$  sobre a curva de seção. Construa a reta  $PF_2$  e a geratriz  $SP$  que corta em  $G$  o paralelo  $BC$  da superfície do cone. Construa o paralelo  $RR'$  do cone que passa por  $P$  e intersecta o plano secante em  $PN$ , onde  $N$  pertence à reta  $A_2F_2$ .



Temos sempre que  $PF_2 = PG$ , pois são tangentes a uma esfera pelo mesmo ponto  $P$ . Podemos verificar por uma rotação em torno do eixo do cone que  $PG = BR$ . A interseção do plano secante e do paralelo  $BC$  é uma reta  $DE$  perpendicular ao plano  $L'S'L'$  e  $ND$  é a distância do ponto  $P$  à reta  $DE$ .

Como os triângulos  $A_2NR$  e  $A_2BD$  são isósceles e ambos semelhantes ao triângulo  $SLL'$ , podemos concluir que  $ND = BR$ , ou seja,  $PF_2 = ND$  e consequentemente,

$$PF_2 = PE.$$

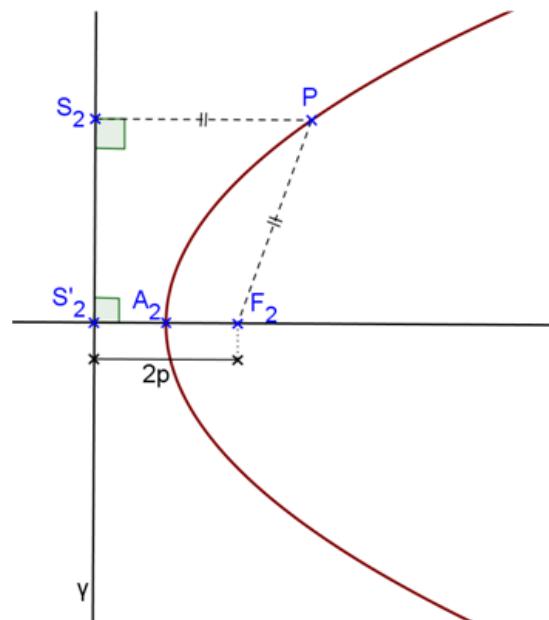
Esta é a relação que determina a parábola que tem diretriz  $DE$ , foco  $F_2$  e vértice  $A_2$ .

**Definição:** Considere uma reta  $\gamma$  e um ponto  $F_2$  não pertencente a  $\gamma$ . Denomina-se **parábola** o lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $F_2$  e de  $\gamma$ . Se  $P$  é um ponto da parábola então  $d(P, \delta) = PF_2$ .

Elementos da parábola:

- foco** – é o ponto  $F_2$ .
- diretriz** – é a reta  $\gamma$ .
- eixo** – é a reta conduzida pelo foco  $F_2$  perpendicularmente à diretriz  $\gamma$ ; é um eixo de simetria.
- vértice** –  $A_2$  é o ponto de interseção do eixo com a parábola.
- parâmetro** –  $2p$  é a distância do foco à diretriz.

Propriedade:  $A_2$  é o ponto médio de  $F_2S'_2$ .



**Exercícios:**

1. Construa os elementos principais da parábola com foco  $F_2$  e o vértice  $A_2$ . Construa pontos da curva.

$A_2$   $F_2$

2. Construa os elementos principais da parábola com diretriz  $\gamma$  os pontos  $P$  e  $P'$  simétricos em relação ao eixo  $e$ .

$P$    
 $P'$



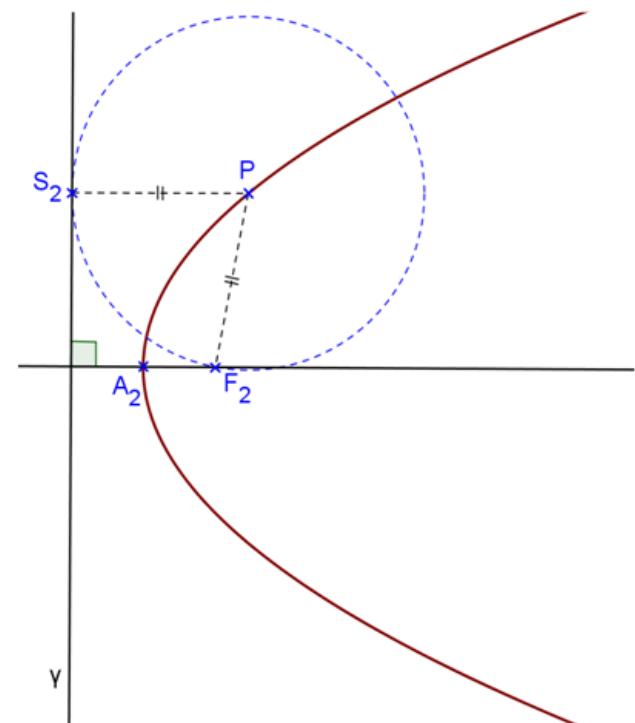
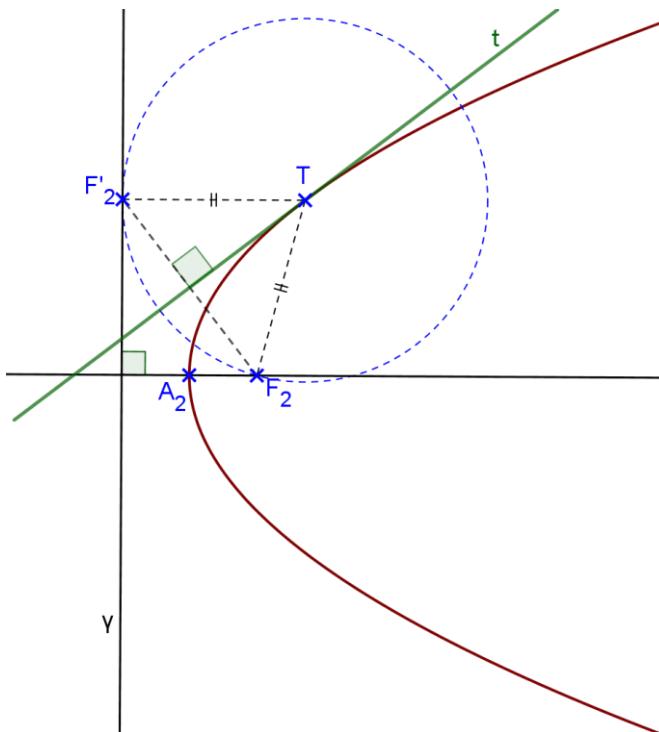
3. Construa os elementos principais da parábola com foco  $F_2$ , ponto  $P$  e a direção  $r$  da diretriz.

$P$

$F_2$

$r$

Definição: Assim como ocorre com a elipse e a hipérbole, podemos definir a **parábola** como o lugar geométrico dos centros de circunferências que passam pelo foco  $F_2$  e são tangentes à diretriz  $\gamma$ .



Propriedade: Uma reta  $t$  e uma parábola são tangentes quando, e somente quando, o simétrico do foco em relação à reta  $t$  pertence à diretriz.

#### Observações:

- a reta tangente  $t$  é a mediatrix de  $F_2F'_2$ , onde  $F'_2$  é o simétrico de  $F_2$  em relação à reta  $t$ ;
- $F'_2T \perp \gamma$ .

Considere um ponto  $P$  sobre a parábola de foco  $F_2$  e diretriz  $\gamma$ , com o vértice  $A_2$  na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo coincidente com o eixo  $x$ . Por definição, se  $P$  pertence à parábola, então:

$$PF_2 = \text{dist}(P, \gamma) = PS_2. \quad (1)$$

Mas as distâncias entre  $P$  e  $F_2$  e entre  $P$  e  $\gamma$  são:

$$PF_2 = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \text{ e } \text{dist}(P, \gamma) = x + p \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$x + p = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}. \quad (3)$$

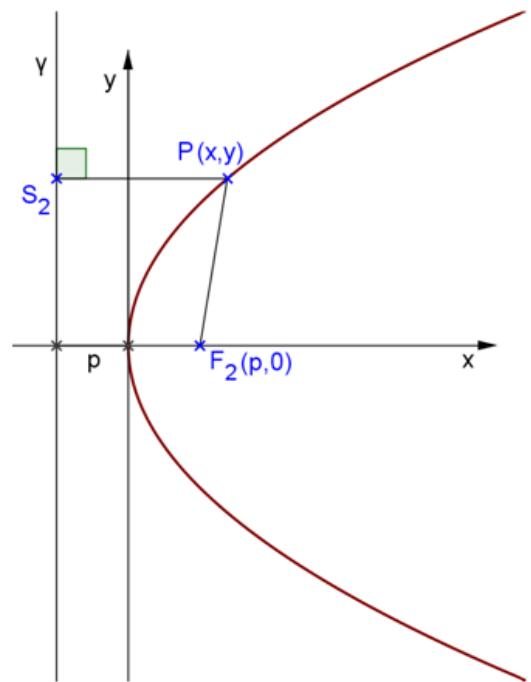
Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (3) obtemos:

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2.$$

Simplificando a equação obtida, temos que:

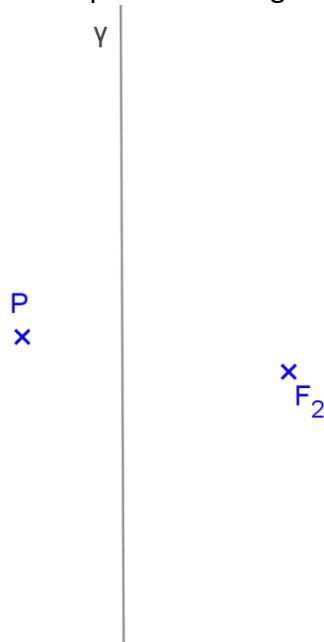
$$2xp = -2xp + y^2 \Rightarrow y^2 = 4xp,$$

que é a equação da parábola com o vértice na origem e o eixo coincidente com o eixo  $x$ .

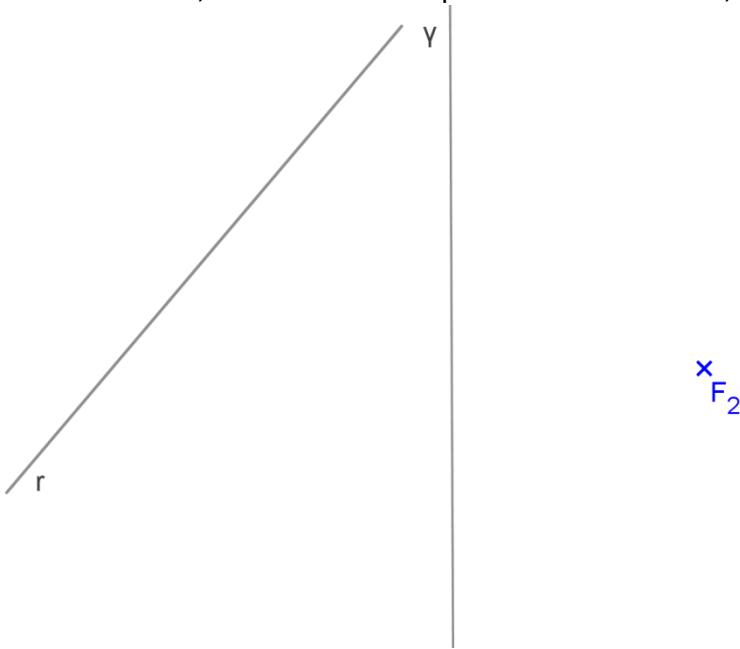


**Exercícios:**

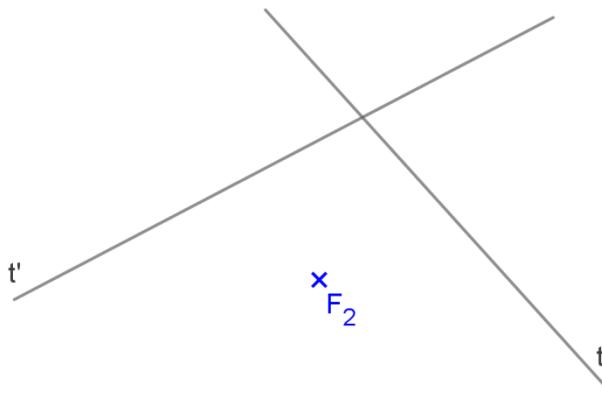
1. Dados o foco e a diretriz de uma parábola, construa pelo ponto P as retas tangentes à parábola.  
Determine os respectivos pontos de tangência.



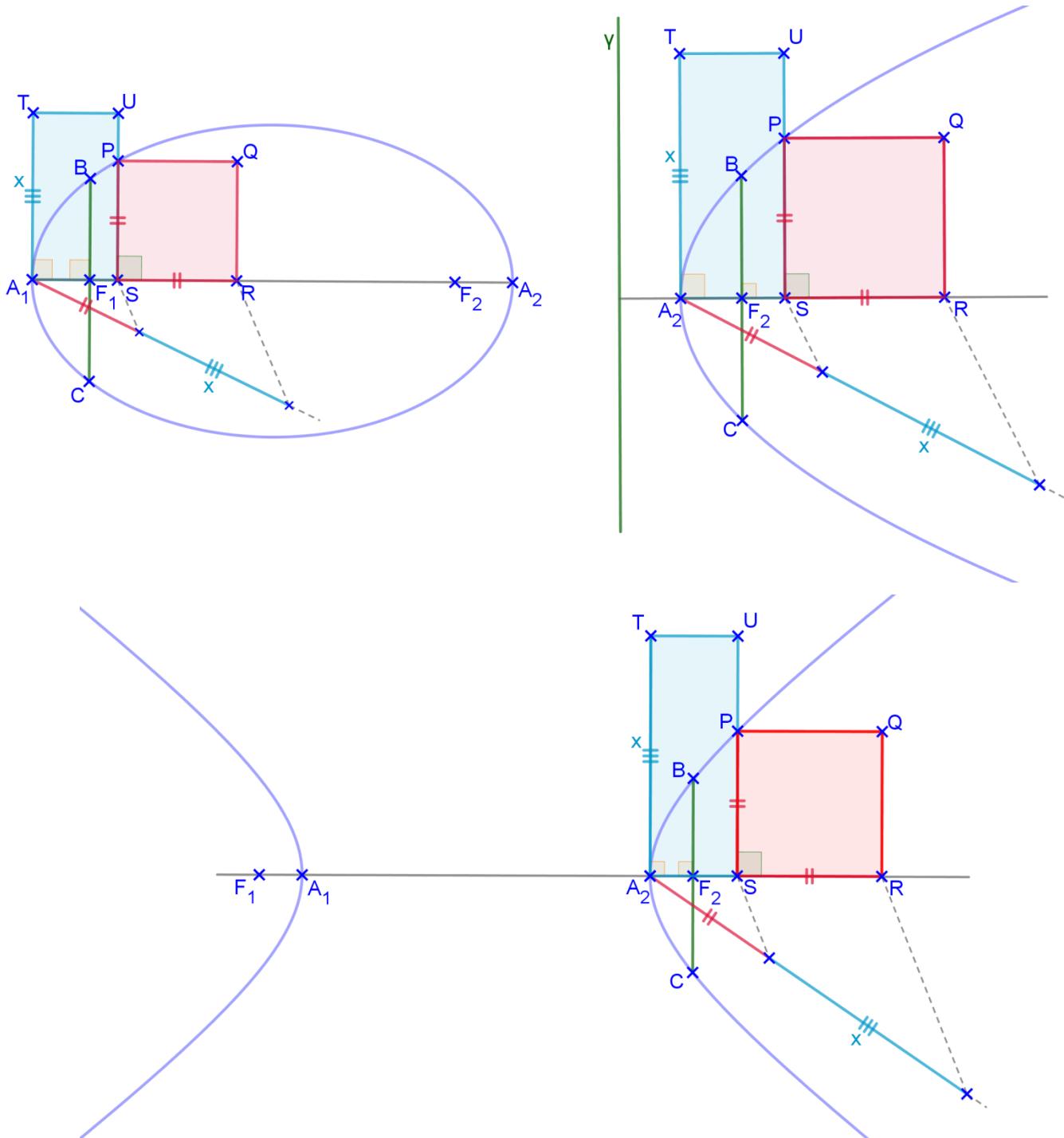
2. Dados o foco, a diretriz de uma parábola e uma reta r, trace a reta paralela a r e tangente à parábola.



3. Construa os elementos principais da parábola com foco F<sub>2</sub> e retas tangentes t e t'.



Definição de Apollonius para as cônicas: Considere os pontos B e C da cônica, tais que BC passa por um dos focos e é perpendicular ao eixo principal da cônica. Sejam um ponto P qualquer da cônica, e o quadrado com lado igual à PS, onde S é a projeção ortogonal de P sobre o eixo principal da cônica. Os segmentos  $A_1S$  e  $A_1T$  (ou  $A_2S$  e  $A_2T$ ) são os lados do retângulo equivalente a este quadrado. Se  $A_1T < BC$ , a cônica é uma elipse (falta); se  $A_2T = BC$ , a cônica é uma parábola (igualdade); e se  $A_1T > BC$ , a cônica é uma hipérbole (excesso).

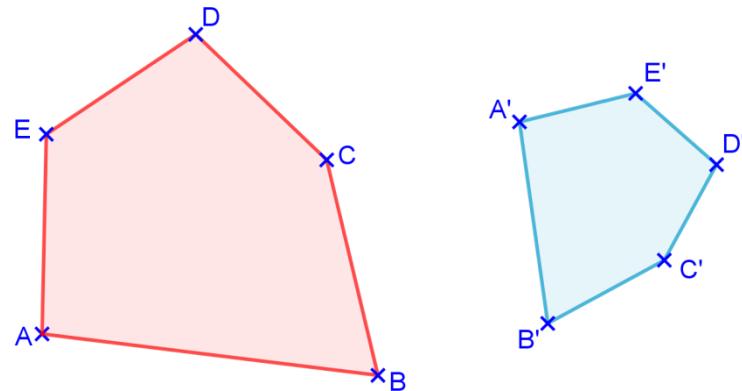


### PARTE III – MÉTODOS GEOMÉTRICOS

#### 3.1. Homotetia

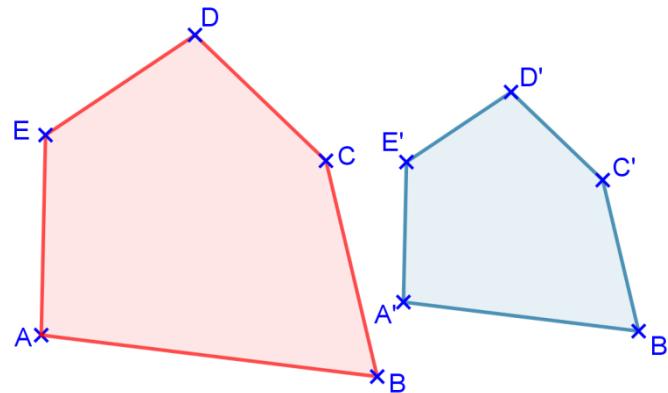
Definição: duas figuras são **semelhantes** se:

- os ângulos homólogos (que ocupam o mesmo lugar nas figuras) são ordenadamente iguais; e
- os segmentos homólogos são proporcionais segundo uma mesma razão.



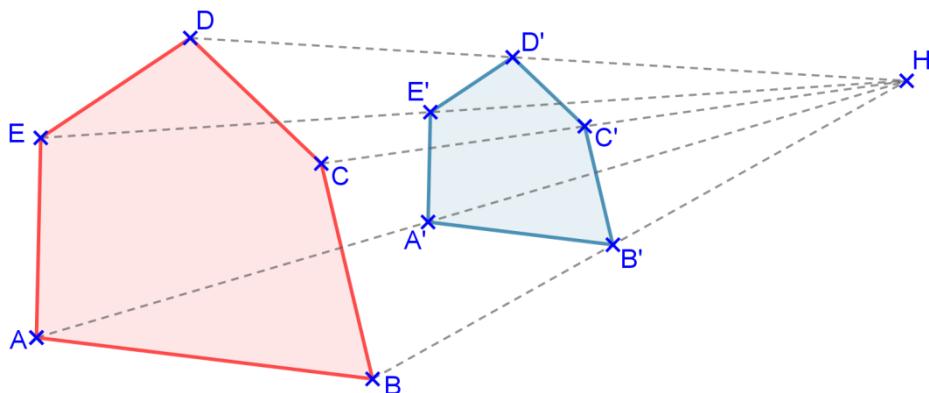
Temos que  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \dots = k$ , sendo  $k$  denominada de **razão de semelhança**.

Definição: Duas figuras são **homotéticas** quando são semelhantes e, além disso, têm os segmentos homólogos paralelos.



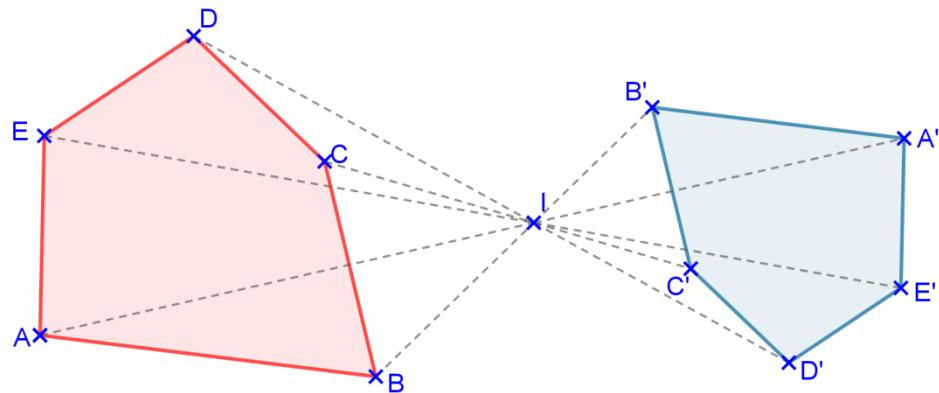
Os centros de homotetia podem ser diretos ou inversos.

1. Centro de homotetia direto  $H$ .



Nos casos de homotetia direta, a razão  $k$  é considerada positiva.

## 2. Centro de homotetia inverso I.

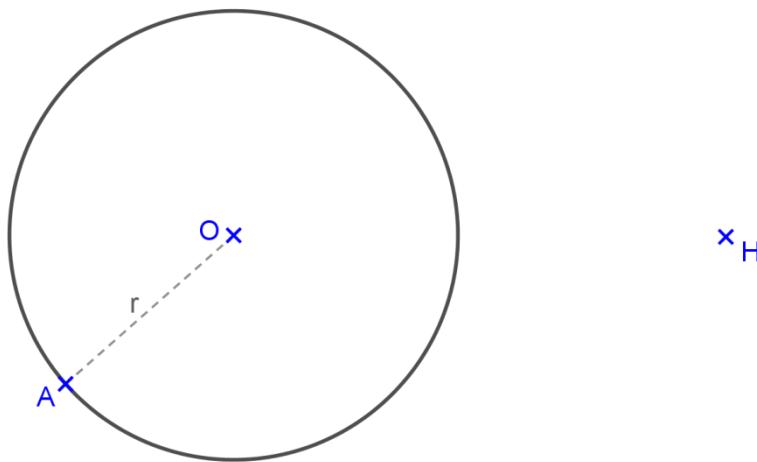


Nos casos de homotetia inversa, a razão  $k$  é considerada negativa.

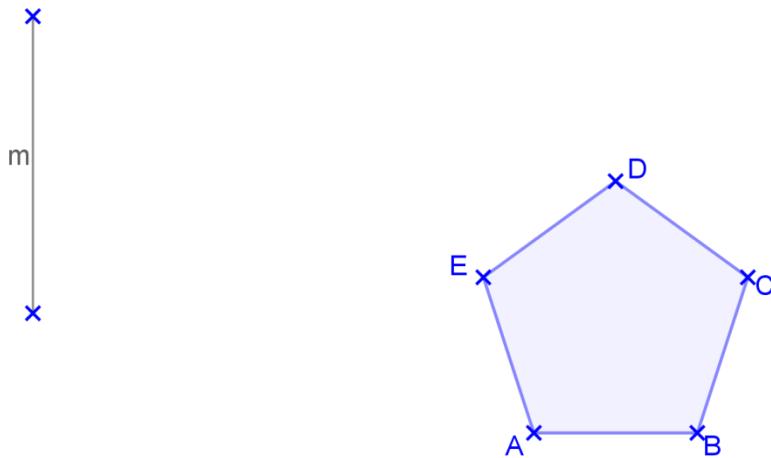
As retas que unem os pontos homólogos incidem todas no mesmo ponto  $H$  ou  $I$ , conforme a homotetia seja direta ou inversa. Os pontos  $H$  e  $I$  são chamados de centros de homotetia.

**Exercícios:**

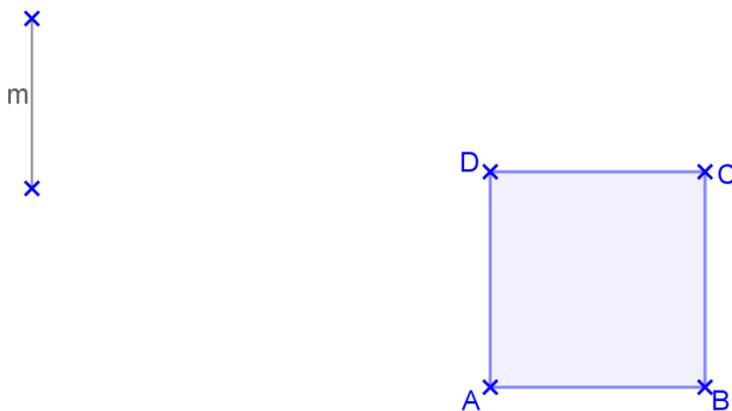
1. Multiplique a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  por  $k$  com centro de homotetia em  $H$ . Considere  $k = -\frac{2}{3}$ ,  $k = \frac{1}{2}$  e  $k = -1$ .



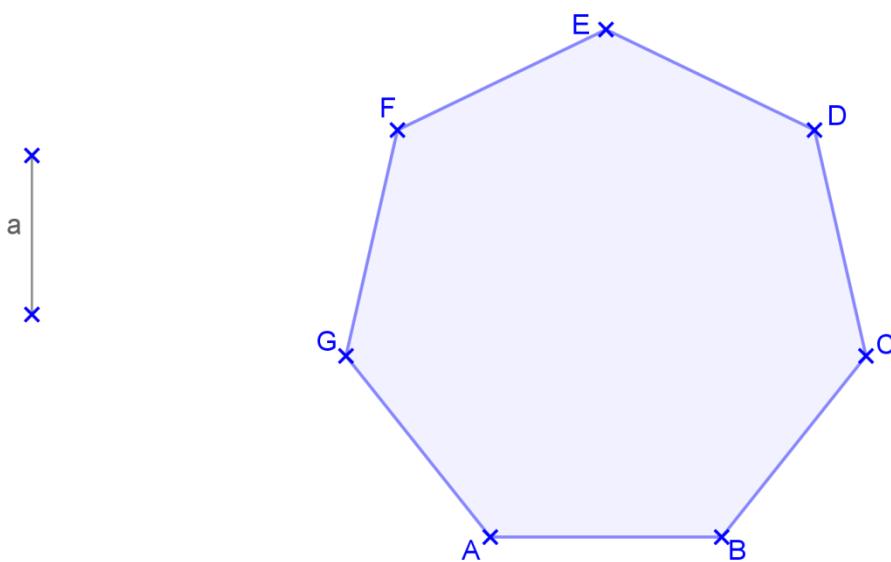
2. Multiplique o pentágono regular dado de tal forma que seu lado tenha medida  $m$ . Use um vértice do pentágono como centro de homotetia.



3. Construa um quadrado no qual a diferença entre as medidas da diagonal e do lado seja igual a m.



4. Construa um heptágono regular com a medida do apótema a.

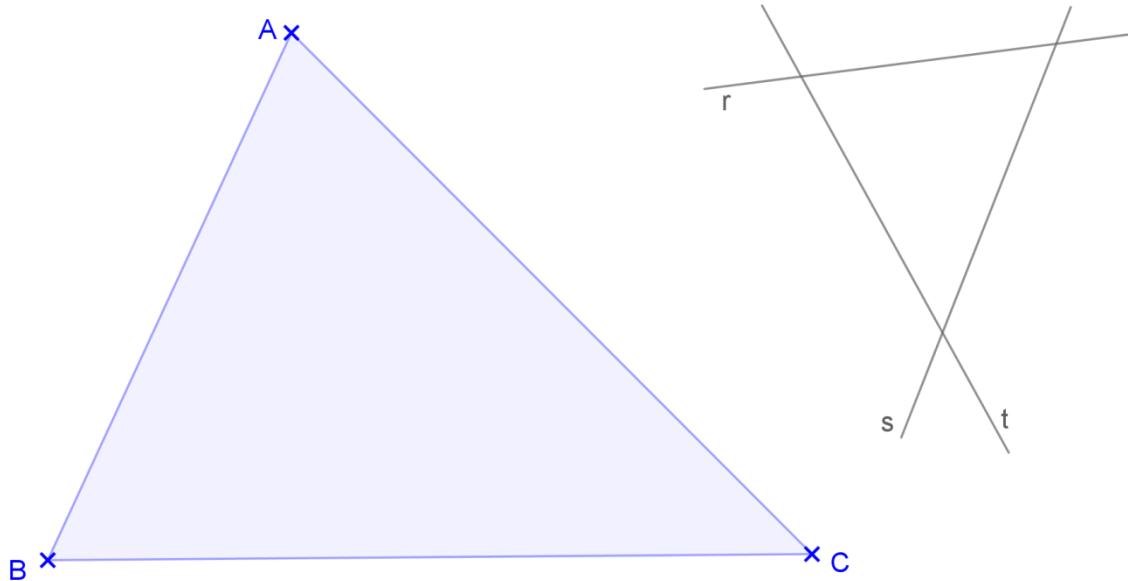


5. Construa um hexágono regular com a medida da diagonal menor igual a d.

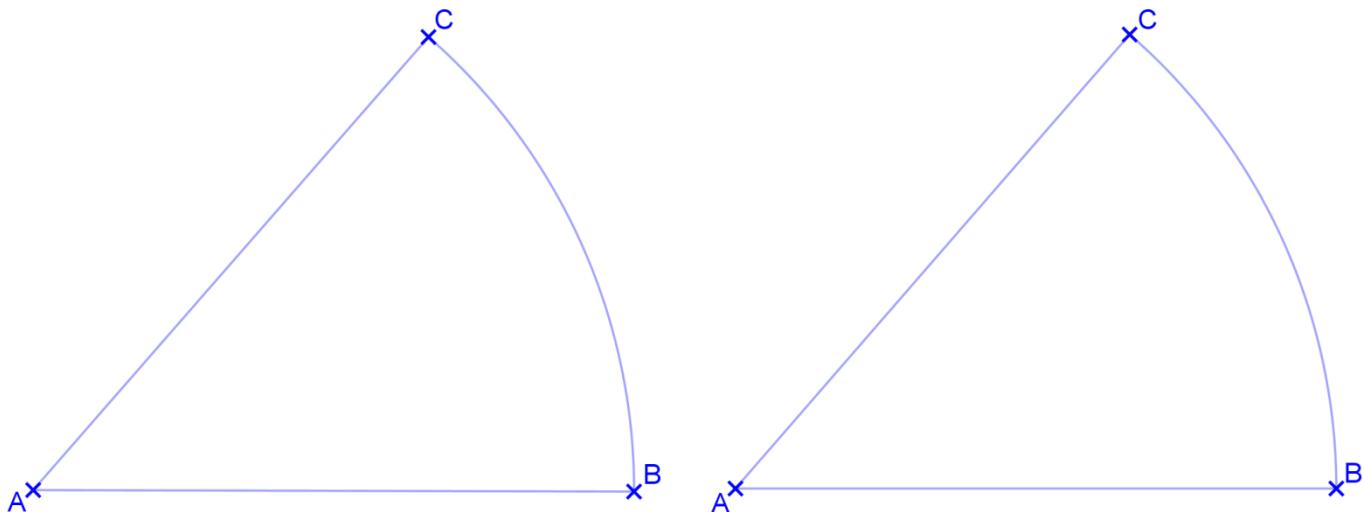


Há uma classe de problemas que propõem a construção de uma figura cuja posição está vinculada a linhas ou pontos dados. Nesses casos, abandonando uma das condições impostas à figura procurada, podemos construir uma figura homotética à mesma e em seguida “levá-la” à posição desejada por meio da homotetia.

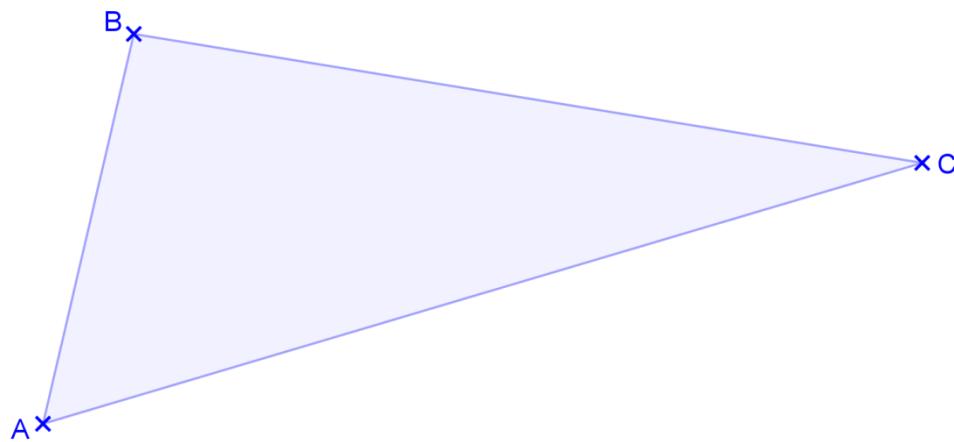
6. São dados um triângulo ABC e as retas r, s e t. Inscreva um triângulo XYZ no triângulo ABC de modo que cada um dos seus lados seja paralelo a uma das retas dadas.



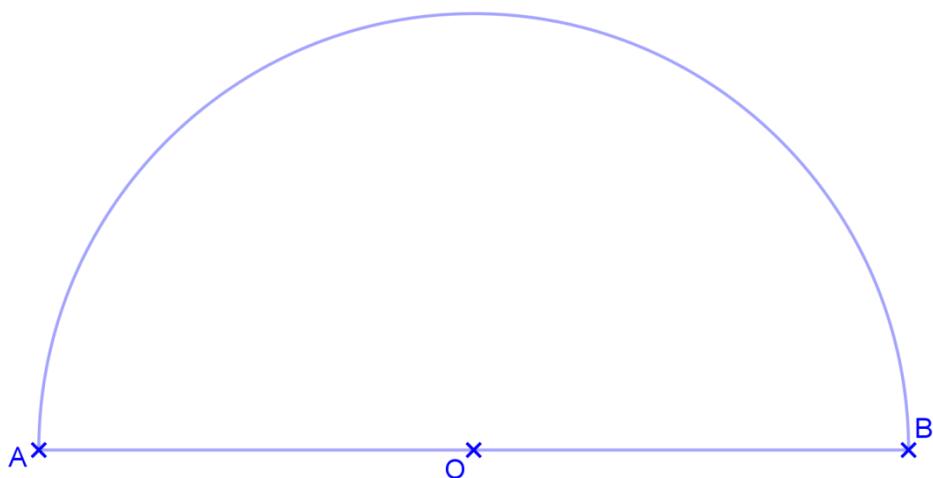
7. Inscreva um quadrado em um setor circular dado de duas maneiras diferentes.



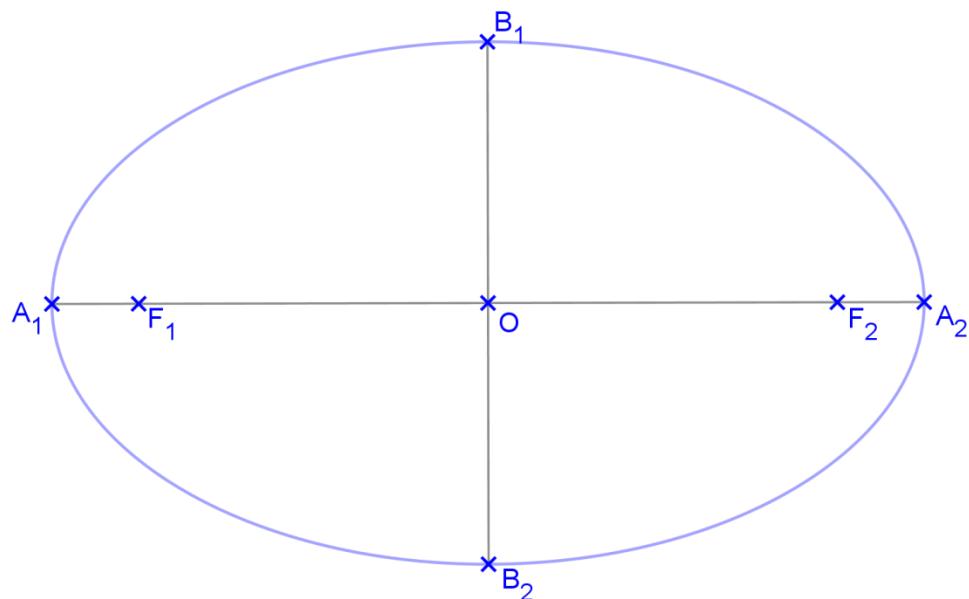
8. Inscreva um losango no triângulo ABC, tal que o ângulo C seja comum com o triângulo.



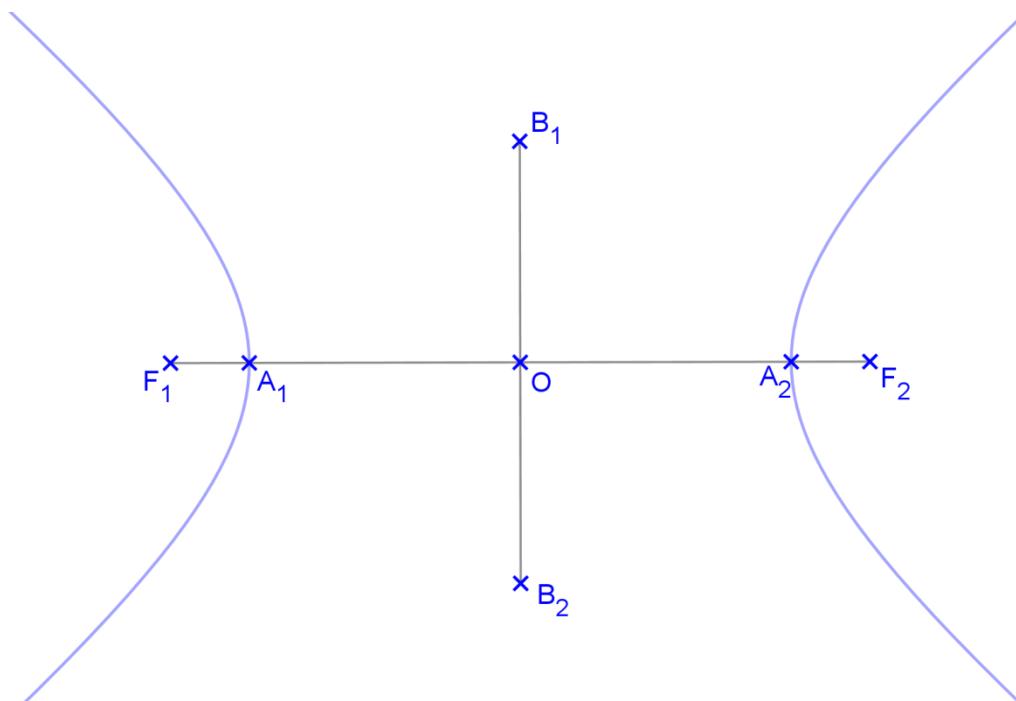
9. Inscreva um retângulo em um semicírculo, tal que um dos lados tenha o triplo do tamanho do outro.



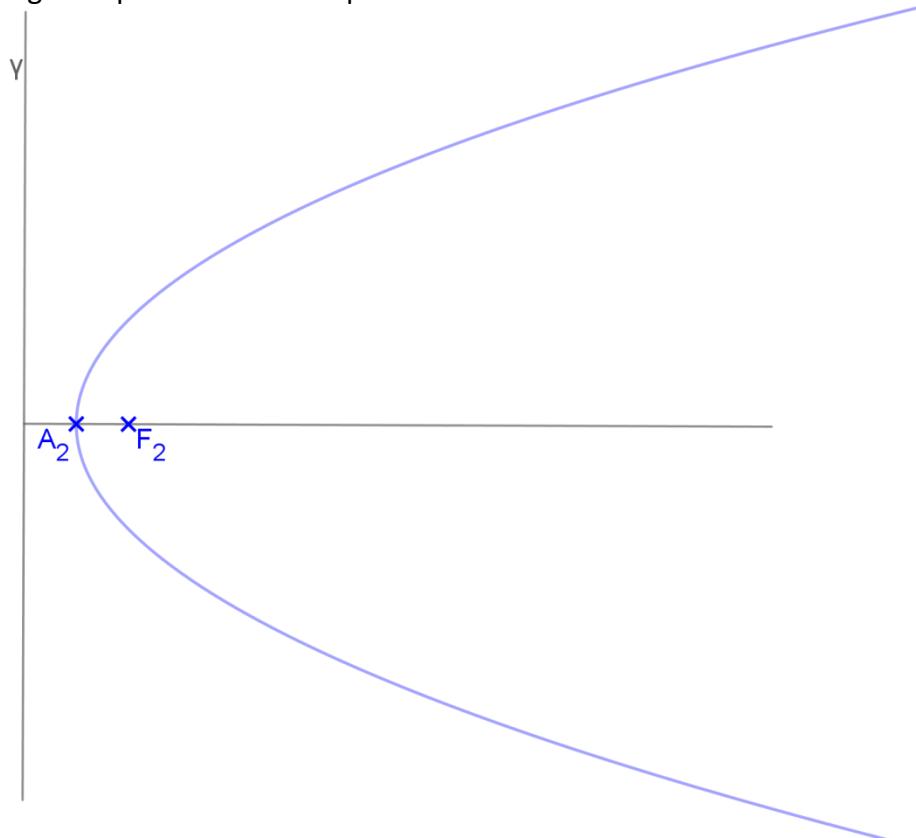
10. Inscreva um quadrado em uma elipse.



11. Inscreva um retângulo de lados proporcionais aos números 2 e 3 em uma hipérbole.



12. Inscreva um triângulo equilátero em uma parábola.

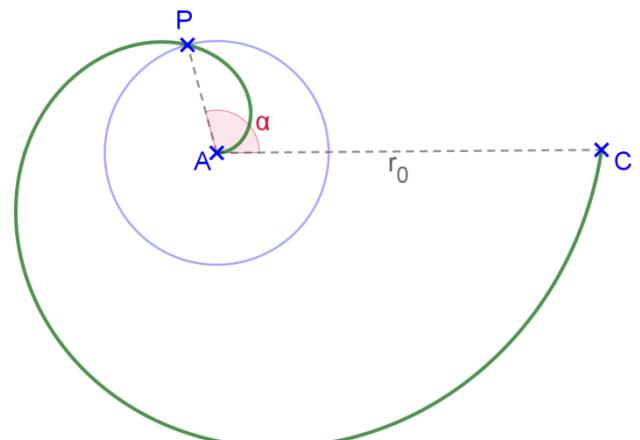
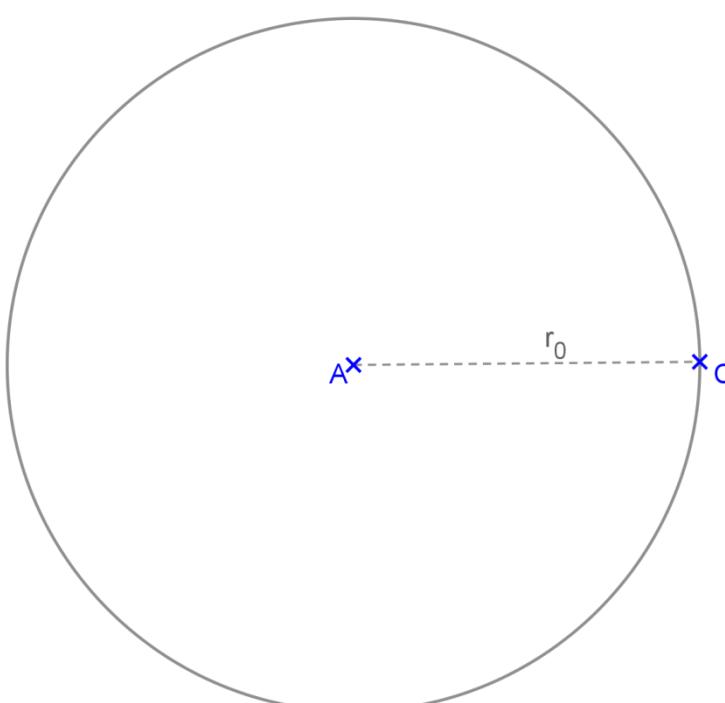


### 3.2. Curvas

**Definição:** A **espiral de Arquimedes** resulta do movimento do ponto P que se desloca em velocidade uniforme sobre um raio AC = r que gira em torno do ponto fixo A. A equação polar desta espiral é:  $r = \frac{r_0 \cdot \alpha}{2\pi}$ .

#### Exercício:

Construa uma espiral de Arquimedes por pontos.

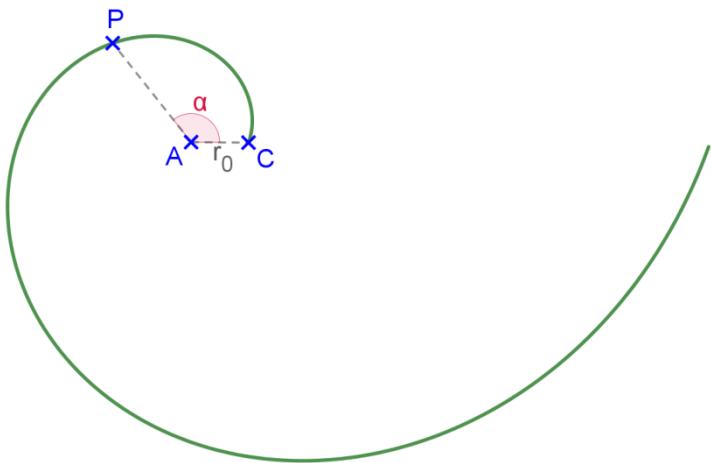


Definição: Se um ponto C colocado sobre um raio vetor de uma espiral se desloca em progressão geométrica, enquanto este raio se desloca em progressão aritmética em torno do ponto A, o lugar geométrico de C será uma **espiral logarítmica**.

A equação polar desta espiral é:  $r = r_0 \cdot e^{m \cdot \alpha}$ ,  $m = \cotg(\beta)$  e  $\beta$  é o ângulo polar tangencial.

**Exercício:**

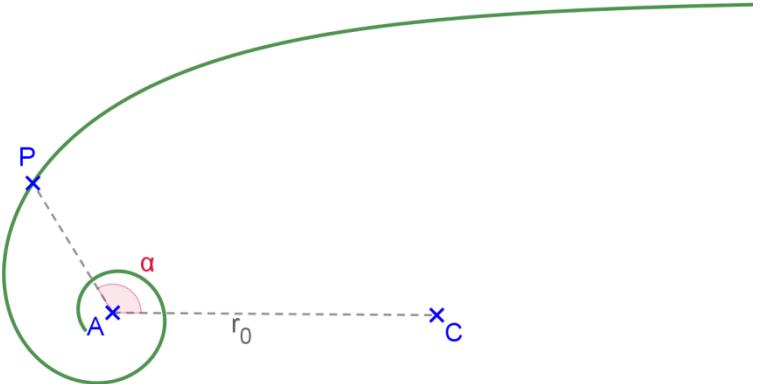
Construa uma espiral logarítmica por pontos.



$A^x \bar{r}_0^- x_C$

Definição: A espiral **hiperbólica** é o lugar geométrico dos pontos extremos de vetores com intensidade inversamente proporcional aos seus ângulos com o eixo principal.

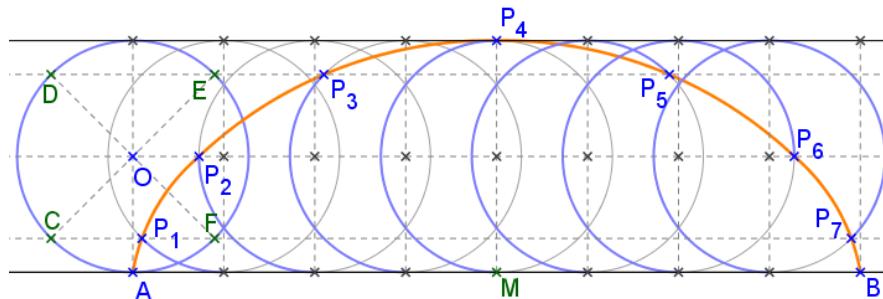
A equação polar desta espiral é:  $r = \frac{r_0}{\alpha}$ .



**Exercício:**

Construa uma espiral hiperbólica usando a equação polar.

Definição: Chama-se **ciclóide** uma curva plana descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma reta.

Elementos:

- a circunferência é denominada **circunferência geradora**;
- a reta é denominada **diretriz**;
- o ponto que descreve a ciclóide é chamado de **ponto gerador**.

Existem três tipos de ciclóide: a **simples ou normal**, quando o ponto P gerador da ciclóide pertence à circunferência geradora; a **encurtada**, quando o ponto gerador está no interior da circunferência geradora; e a **alongada**, quando o ponto gerador é externo à circunferência geradora.

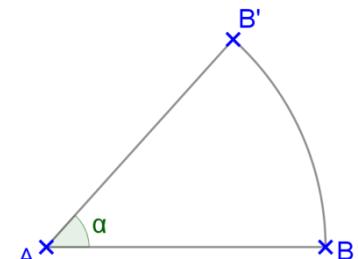
**Exercício:**

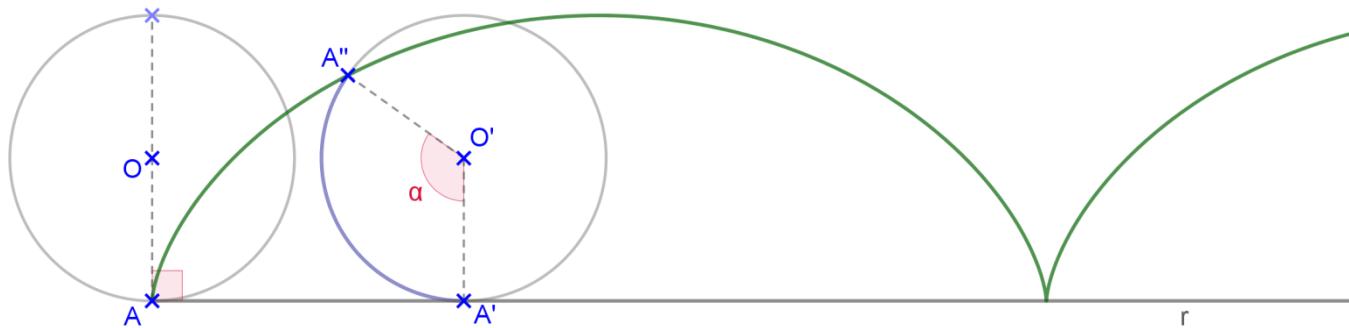
Construa uma ciclóide simples, com circunferência geradora de raio 2cm.

**3.2.1. Rotação**

Definição: Para encontrar a rotação do ponto B em torno de um ponto fixo A com amplitude  $\alpha$ , basta encontrar  $B'$  tal que  $AB' = AB$  e  $\hat{B}AB' = \alpha$ .

Esta transformação geométrica pode ser utilizada na construção de ciclóides, epiciclóides e hipociclóides.





### Exercícios propostos:

- Construa uma ciclóide simples, com circunferência geradora de raio qualquer da seguinte forma: encontre um ponto da curva usando rotação e defina o lugar geométrico em relação a um ponto móvel da reta.
- Construa uma ciclóide encurtada com a mesma ideia do exercício anterior.
- Construa uma ciclóide alongada com a mesma ideia dos exercícios anteriores.
- Construa uma ciclóide simples com uma circunferência geradora de raio qualquer com centro O. Na circunferência móvel, com centro O', construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel A'' da ciclóide.

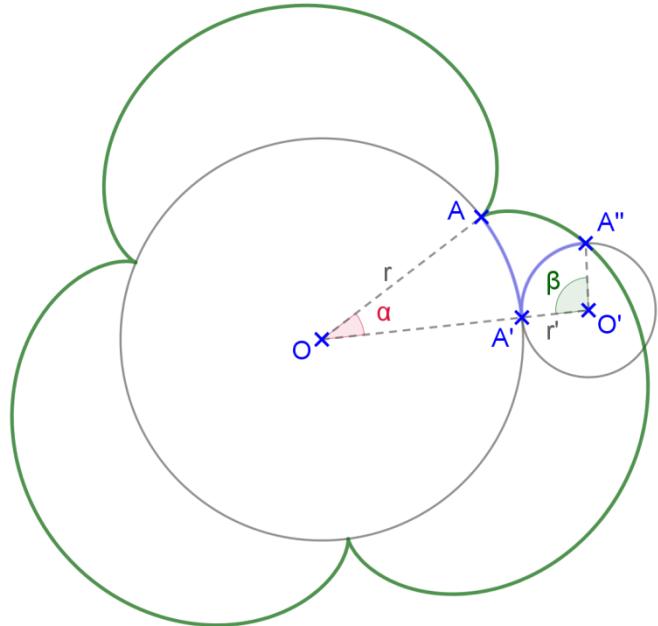
Definição: Chama-se **epiciclóide** a curva descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola externamente, sem escorregar, sobre outra circunferência fixa.

### Elementos da epiciclóide:

- a circunferência móvel é a **circunferência geradora**;
- o ponto que descreve a epiciclóide é o **ponto gerador**;
- a circunferência fixa é a **circunferência diretora**.

Conforme o ponto gerador pertença à circunferência geradora, ou esteja no seu interior ou no seu exterior, a epiciclóide é chamada, respectivamente, **simples, encurtada ou alongada**.

Quando a circunferência geradora completa uma volta inteira, o ponto gerador descreve um **círculo** da epiciclóide.



### Epiciclóides notáveis:

Sejam  $r$  e  $r'$ , respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma epiciclóide. Se  $r' = \frac{r}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a epiciclóide tem início e término num mesmo ponto. Nesse caso, o número de ciclos da epiciclóide é igual a  $n$ , isto é, a circunferência geradora dá  $n$  voltas sobre si mesma para então completar uma volta inteira sobre a diretora.

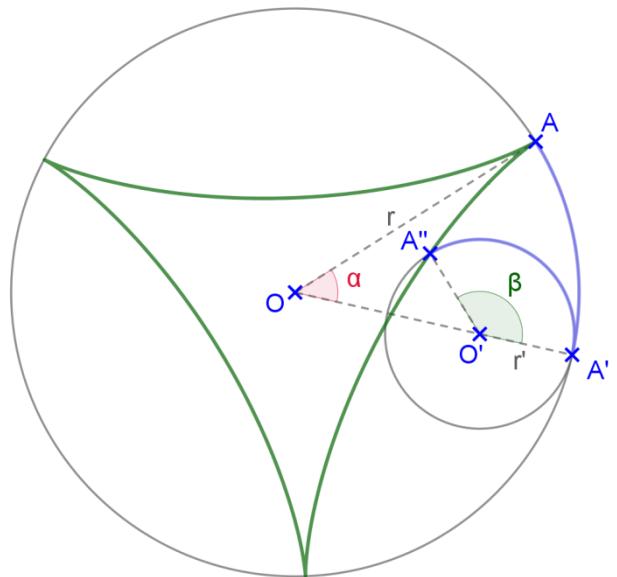
Essas epiciclóides particulares, em que  $r' = \frac{r}{n}$ , são denominadas **notáveis** e, para os casos em que  $n \geq 3$ , a figura constituída pela reunião dos  $n$  ciclos é chamada de **polígono epicicloidal**.

**Exercícios propostos:**

1. Construa uma epiciclóide com  $r' = \frac{r}{n}$ , onde  $n \geq 2$ .
2. Construa uma epiciclóide alongada, com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$  e  $P$  pertencente ao prolongamento de  $O'A'$ .
3. Construa uma epiciclóide encurtada, com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$  e  $P \in O'A'$ .
4. Construa uma epiciclóide simples com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$ . Na circunferência móvel, com centro  $O'$ , construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel  $A''$  da epiciclóide.

Definição: Chama-se **hipociclóide** a curva descrita por um ponto de um raio ou do prolongamento de um raio de uma circunferência que rola internamente sem escorregar sobre outra circunferência fixa. As hypociclóides podem ser: **simples, encurtadas ou alongadas**.

Sejam  $r$  e  $r'$ , respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma hypociclóide. Se  $r' = \frac{r}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a hypociclóide tem início e término num mesmo ponto.

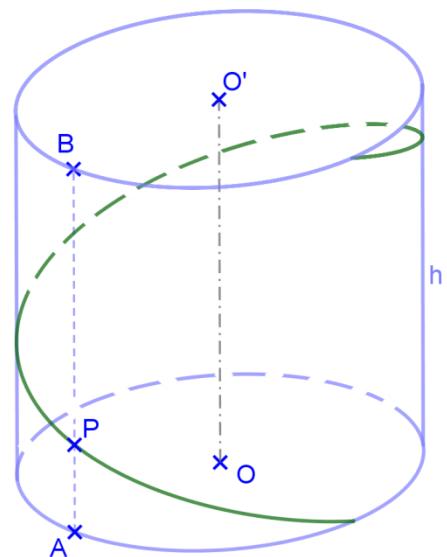
**Exercícios propostos:**

1. Construa uma hypociclóide com  $r' = \frac{r}{n}$ , onde  $n \geq 2$ .
2. Construa uma hypociclóide alongada, com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$  e  $P$  pertencente ao prolongamento de  $O'A'$ .
3. Construa uma hypociclóide encurtada, com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$  e  $P \in O'A'$ .
4. Construa uma hypociclóide simples com  $r' = \frac{r}{n}$ ,  $n \geq 2$ . Na circunferência móvel, com centro  $O'$ , construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel  $A''$  da hypociclóide.

Definição: Uma **hélice cilíndrica** é uma curva que intersecta as geratrizes de um cilindro circular reto segundo ângulo constante.

**Exercício proposto:**

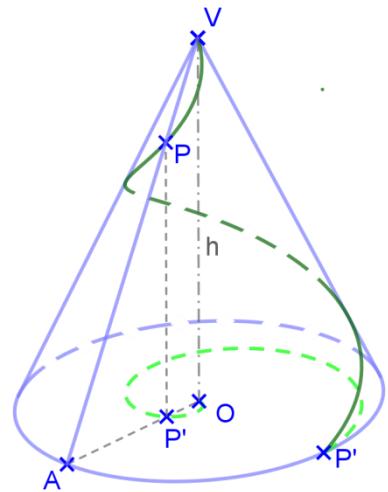
Construa as projeções de uma hélice cilíndrica, dadas as medidas do raio da base  $r$  e da altura  $h$  do cilindro.



**Definição:** Uma **hélice cônica** é uma curva que intersecta as geratrizes de um cone circular reto com ângulo constante.

### Exercício proposto:

Construa as projeções de uma hélice cônica, dadas as medidas do raio da base  $r$  e da altura  $h$  do cone.



### 3.2.2. Translação

**Definição:** Seja um ponto se deslocando sobre uma reta  $r$ , de uma posição  $A$  para uma posição  $A'$ .

Dizemos que  $A$  sofreu uma translação de  $A$  para  $A'$ . Esta translação pode ocorrer nos dois sentidos.



Considere um ponto  $A$ , não pertencente à reta  $r$ , se deslocando para a posição  $A'$ , paralelamente à  $r$ . Dizemos que a translação do ponto  $A$  tem a direção da reta  $r$ .



A translação de um ponto  $A$  para uma posição  $A'$  fica definida quando se conhecem três características distintas desse deslocamento: a direção, o sentido e a amplitude (distância entre  $A$  e  $A'$ ).

**Definição:** Considere uma figura qualquer  $F$ .

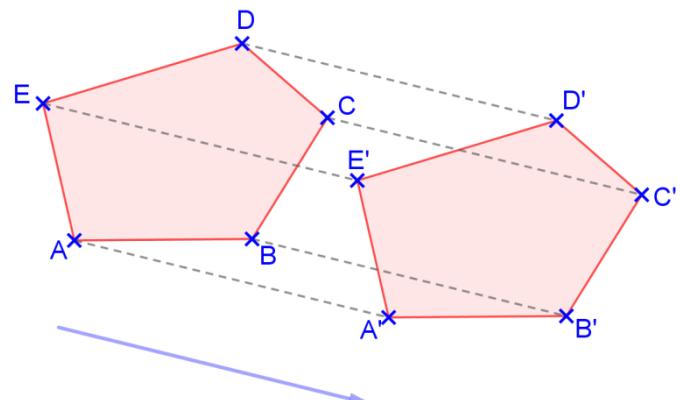
Suponha que cada ponto de  $F$  sofra uma translação de mesma direção, sentido e amplitude. O conjunto de todos os pontos obtidos pelas translações dos pontos de  $F$  é uma segunda figura  $F'$ . Dizemos, então, que  $F'$  é uma transformação de  $F$  por translação.

Se, por meio de uma translação, um ponto  $A$  de uma figura  $F$  se transforma no ponto  $A'$  da figura  $F'$ , então dizemos que  $A$  e  $A'$  são pontos homólogos, ou ainda que  $A'$  é a imagem de  $A$  pela translação.

Considere uma translação que transforma uma figura  $F$  na figura  $F'$ . Se  $A$  e  $B$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $A'$  e  $B'$  os seus homólogos em  $F'$ , então  $AB \parallel A'B'$  e  $AB = A'B'$ .

O método da translação é usado para aproximar os elementos dados uns dos outros, transportando qualquer um dos segmentos da figura para novas posições, paralelas às posições primitivas.

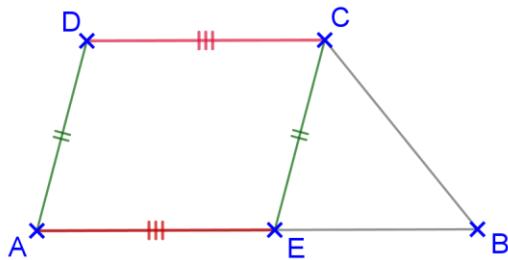
Esse método pode ser aplicado quando conhecemos dois segmentos de uma figura e o ângulo que eles formam entre si. Deslocando-se um deles de maneira que uma das extremidades coincida com uma extremidade do outro, obtemos um triângulo que pode ser construído, e em seguida, podemos obter a solução.



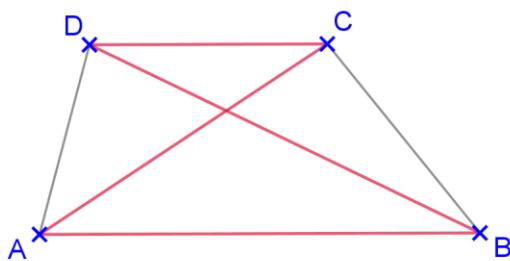
**Exercícios:**

1. Construa um trapézio ABCD de bases AB e CD, dadas as medidas dos quatro lados.

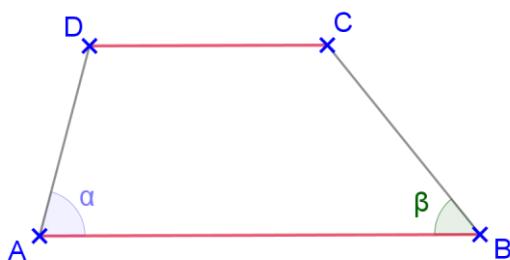
Solução: Começando-se pela construção de uma base sobre a outra (CD sobre AB), encontramos o segmento  $AE = CD$ . Logo, aplicando-se uma translação sobre AE até chegar em CD, obtemos a posição da base menor. Para determinar a posição correta desta base, basta encontrar o ponto C ( $EB = AB - CD$ ,  $EC = AD$  e BC é conhecido). Dados:  $AB = 7\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$ ,  $CD = 4,5\text{cm}$ ,  $AD = 3,5\text{cm}$ .



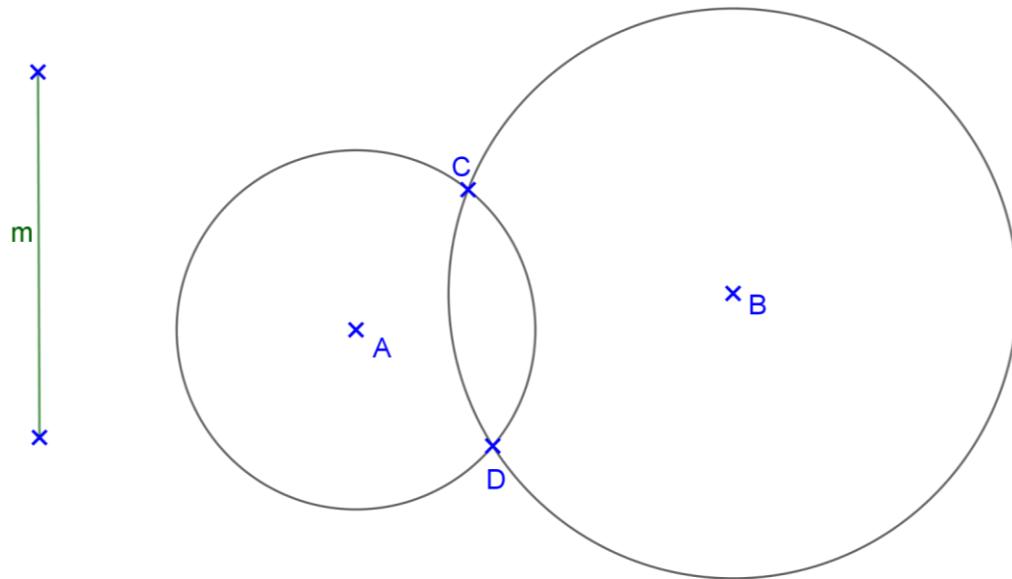
2. Construa um trapézio ABCD, dadas as medidas das bases AB e CD e das diagonais AC e BD. Dados:  $AB = 8,5\text{cm}$ ,  $CD = 3,5\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ ,  $BD = 8\text{cm}$ .



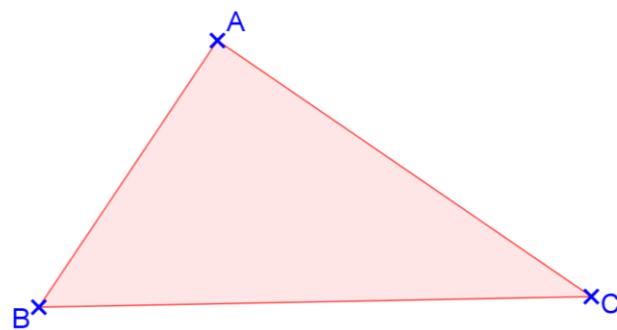
3. Construa um trapézio ABCD, de bases AB e CD, dadas as medidas das bases AB e CD e dos ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$ . Dados  $AB = 8,5\text{cm}$ ,  $CD = 3\text{cm}$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ .



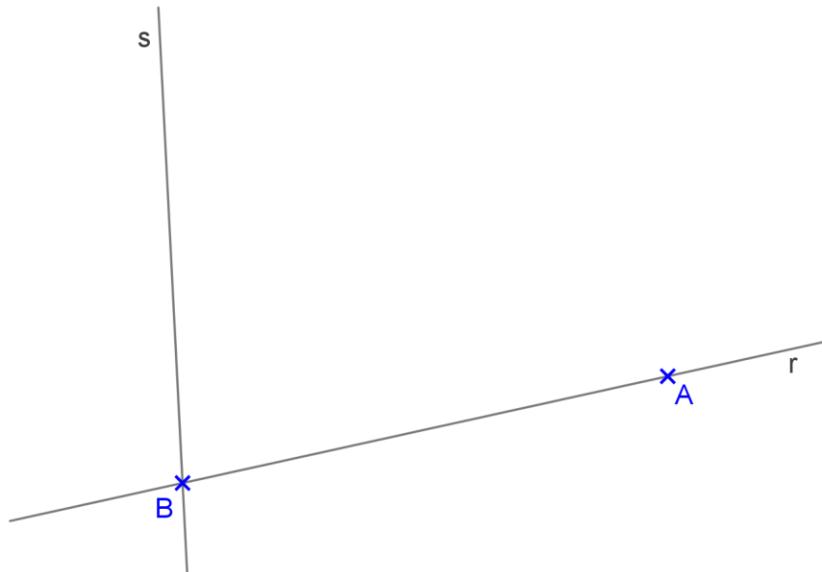
4. São dados um segmento de comprimento  $m$  e duas circunferências de centros A e B, secantes nos pontos C e D. Traçar por A uma reta que intersecte uma circunferência em P, a outra em Q, de modo que se tenha  $PQ = 2m$ .



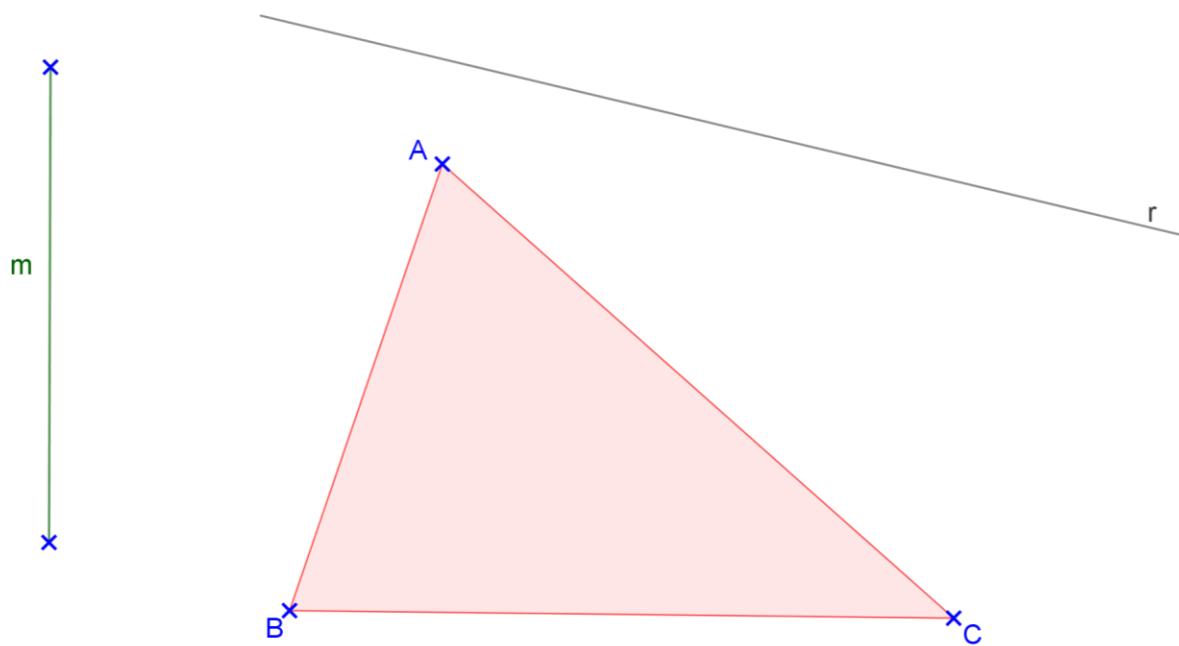
5. Circunscreva a um triângulo ABC dado um triângulo equilátero.



6. São dadas duas retas  $r$  e  $s$ , concorrentes em  $B$ , e um ponto  $A$  sobre  $r$ . Determine um ponto  $C$  em  $s$  que enxergue o segmento  $AB$  segundo um ângulo de  $60^\circ$ .

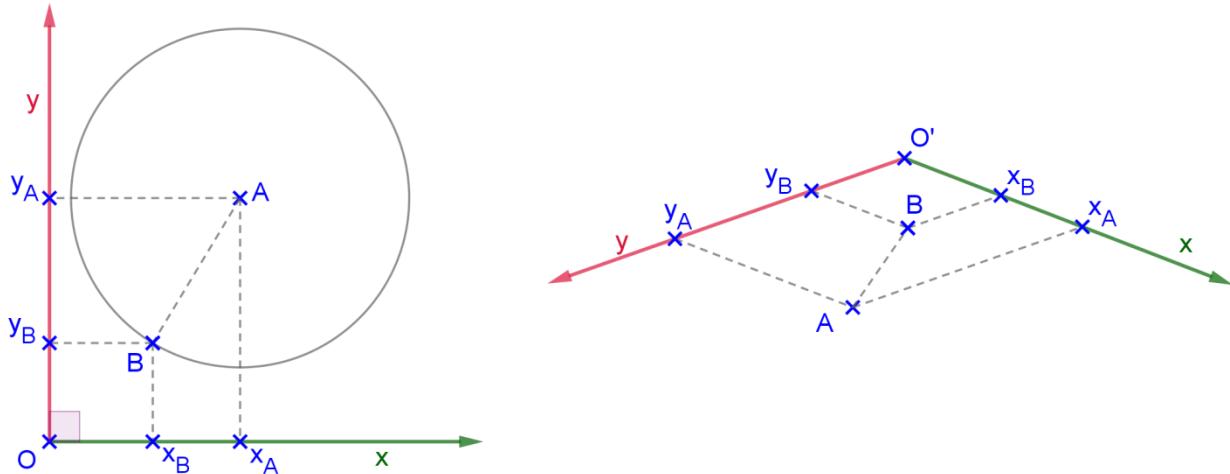


7. São dados um triângulo  $ABC$ , um segmento  $m$  e uma reta  $r$ . Construa uma reta paralela a  $r$  que intersecte o lado  $AB$  em  $X$  e o lado  $AC$  em  $Y$ , de modo que  $XY = m$ .



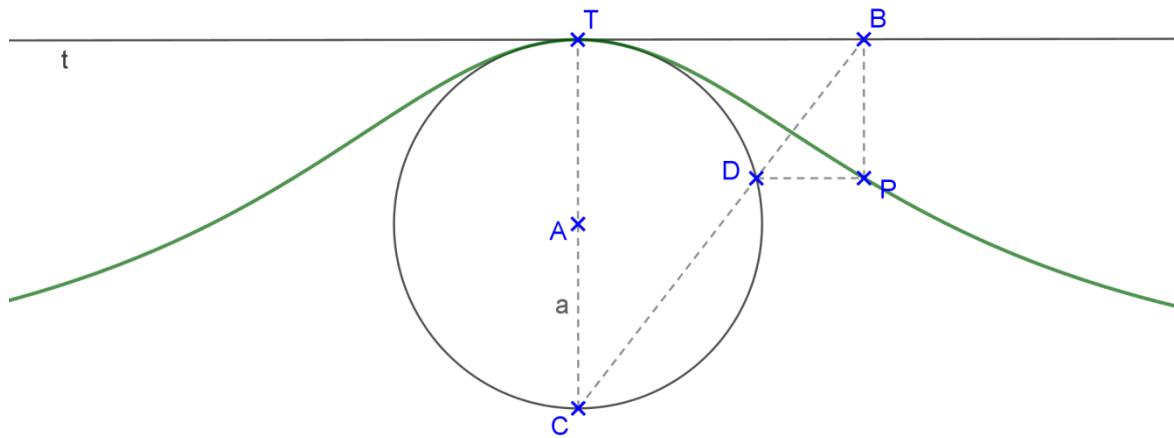
#### Exercícios propostos:

- Construa um sistema de coordenadas  $xy$ , com eixos perpendiculares. Defina uma transformação que transfira as coordenadas deste sistema para um sistema em perspectiva, usando como base a transformação de uma circunferência de centro  $A$  e raio  $AB$  em uma circunferência em perspectiva com raio  $A'B'$ . A partir destes elementos, construa uma hélice cilíndrica em perspectiva, usando a translação para marcar a altura e os pontos da hélice.



2. Faça os mesmos procedimentos para construir a hélice cônica em perspectiva.
3. Construa uma hélice esférica em perspectiva.
4. Construa uma hélice elíptica em perspectiva.
5. Construa uma hélice hiperbólica em perspectiva.
6. Construa uma hélice parabólica em perspectiva.

**Definição:** Na geometria, a **curva de Agnesi** ou **Versiera** é uma curva cúbica do plano caracterizada por uma forma de sino, semelhante à distribuição de Gauss. É uma curva simétrica em relação ao eixo y, onde x é uma assíntota da curva. Sua equação é  $y \cdot x^2 = a^2(a - y)$ , onde a é a medida do diâmetro de uma circunferência.



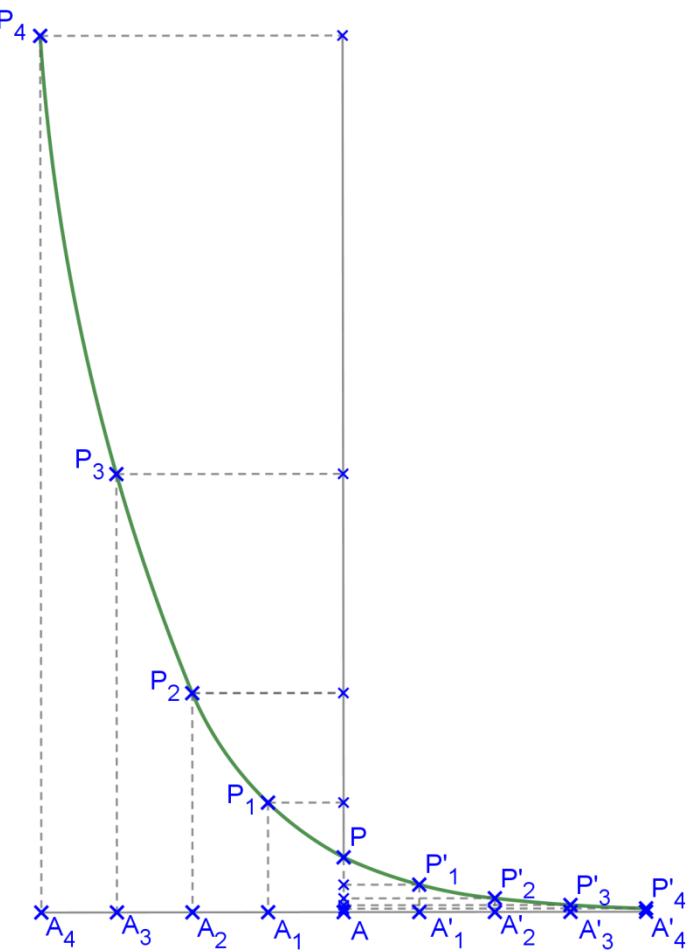
**Exercício proposto:**

Construa a curva de Agnesi de uma circunferência de raio a.

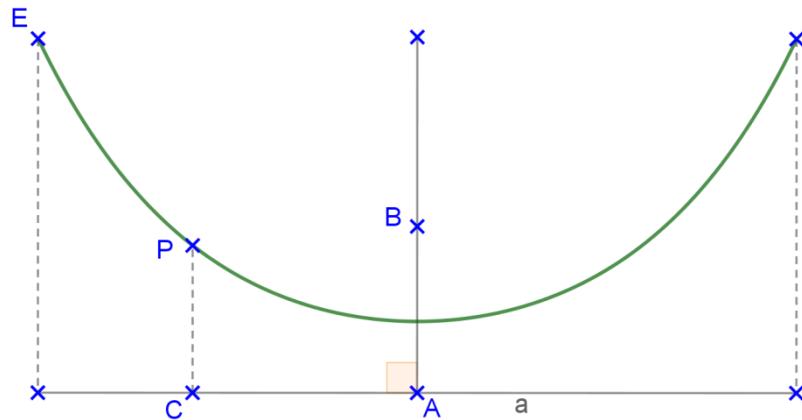
**Definição:** A **curva logarítmica** é caracterizada pelo crescimento em progressão geométrica da ordenada, com o respectivo crescimento em progressão aritmética da abscissa, ou vice-versa.

**Exercício proposto:**

Construa uma curva logarítmica.



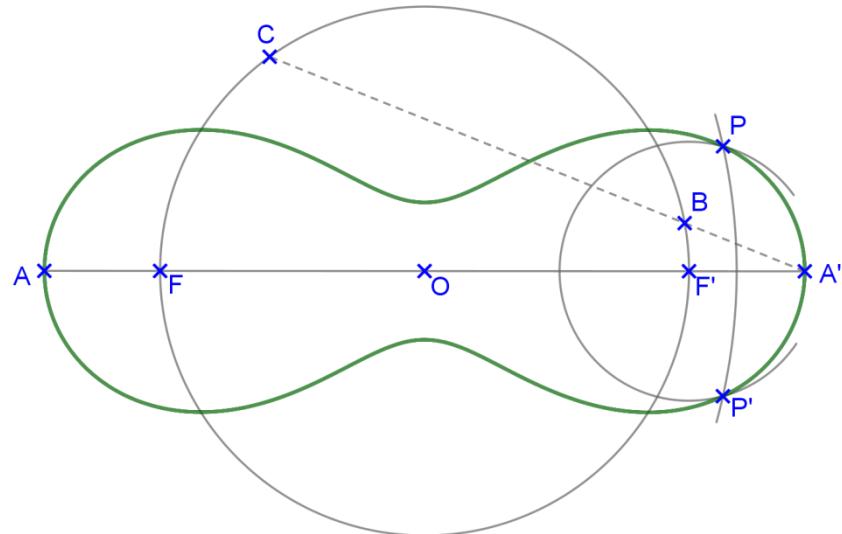
**Definição:** A **curva catenária** é formada por um fio flexível inextensível e homogêneo, sob ação da gravidade com seus extremos E e F fixos e com parâmetro AB.



**Exercício proposto:**

Construa uma curva Catenária, conhecendo as medidas do parâmetro AB e do segmento a = EF.

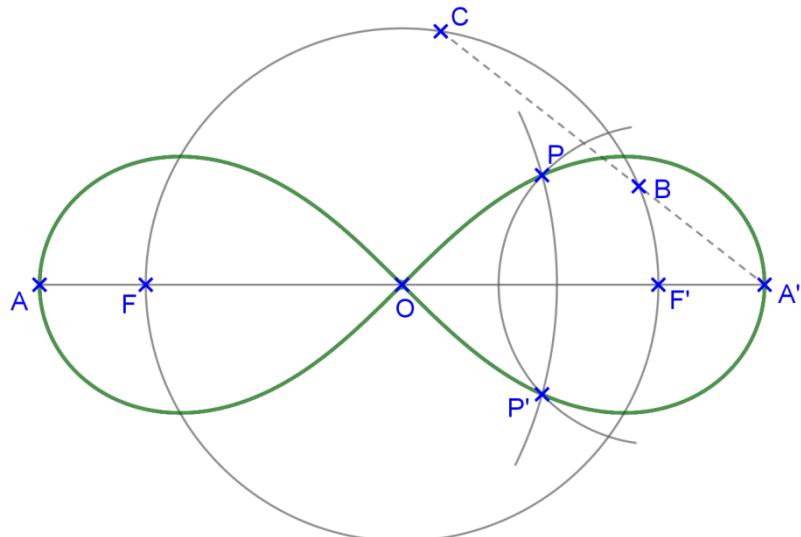
Definição: A **curva de Cassini** é fechada e o produto das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos interiores, chamados de focos F e F', é constante e igual a  $a^2$ .



#### Exercício proposto:

Construa a curva de Cassini, dadas as medidas de AA' e de FF'.

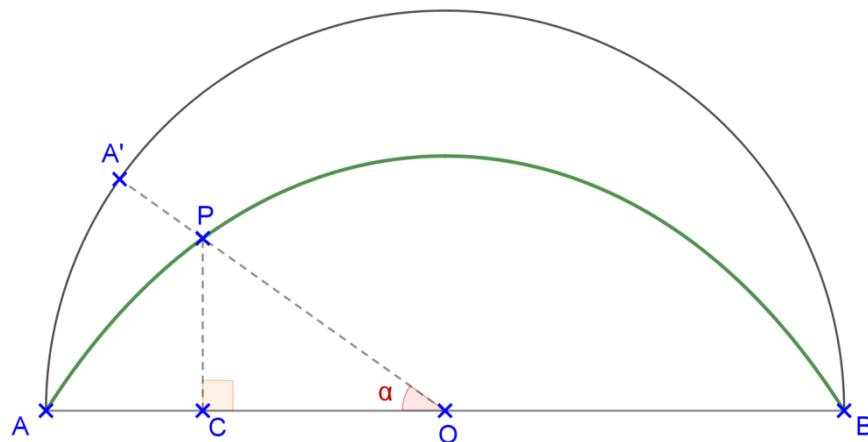
Definição: A **Lemniscata de Bernoulli** é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante, e igual ao quadrado da metade do segmento que liga dois pontos dados. Trata-se de um caso particular da curva de Cassini, quando  $a = OF$ .



#### Exercício proposto:

Construa a Lemniscata de Bernoulli, dada a medida FF'.

**Definição:** A **Quadratriz de Hippias** é a curva descrita pelo ponto de interseção de duas retas que se movem, onde a primeira é o raio de uma circunferência, e a segunda é uma paralela a um de seus diâmetros.

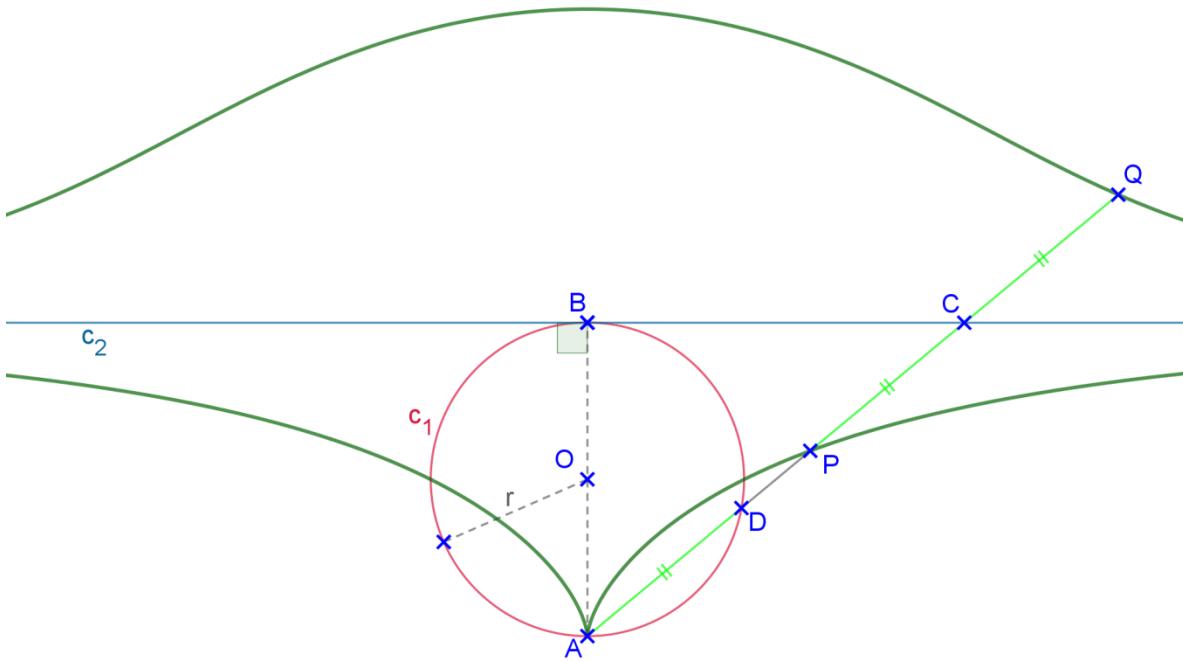


#### Exercício proposto:

Construa a Quadratriz de Hippias, definida pela medida do segmento dos pontos extremos AB.

**Definição:** Considere as curvas  $c_1$  e  $c_2$  e um ponto A chamado de pólo pertencente a  $c_1$  (circunferência).

Quando for possível determinar os pontos E  $\in c_1$  (circunferência) e D  $\in c_2$  (reta), ambos pertencentes à reta AC e tais que PC = QC = AD, o lugar geométrico dos pontos P e Q é chamado de **cissóide**.



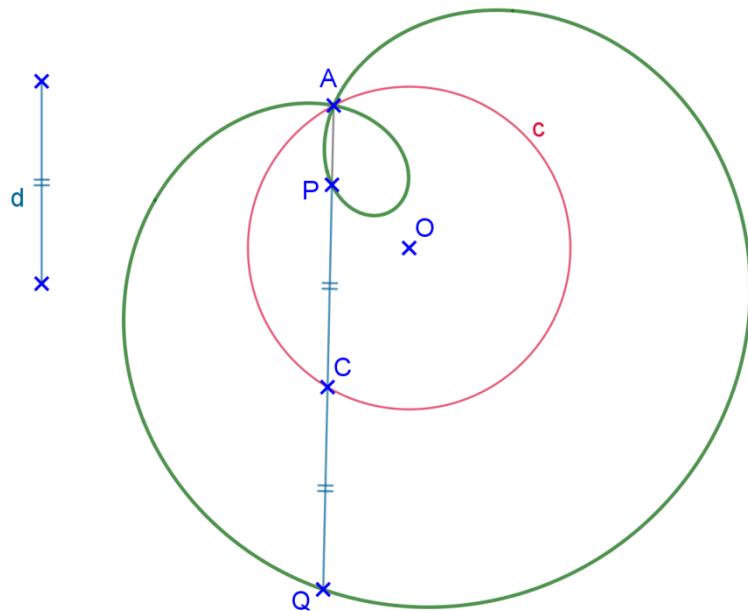
O exemplo acima é de uma cissóide simétrica em relação à reta AB, com a curva  $c_2$  sendo uma reta tangente à circunferência. Deslocando-se a curva  $c_1$  temos outros casos de cissóides.

#### Exercícios propostos:

1. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida  $r$ , exterior a uma reta dada.
2. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida  $r$ , tangente a uma reta dada.
3. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida  $r$ , secante a uma reta dada.

4. Construa uma cissóide de uma elipse, secante a uma reta dada.
5. Construa uma cissóide de uma hipérbole, secante a uma reta dada.

**Definição:** Considere uma curva  $c$ , uma distância  $d$  e um ponto  $A$  chamado de pólo. Quando for possível determinar os pontos  $C$ ,  $P$  e  $Q$  pertencentes à reta  $AC$ , tais que  $PC = QC = d$ , o lugar geométrico dos pontos  $P$  e  $Q$  é chamado de **conchóide**.



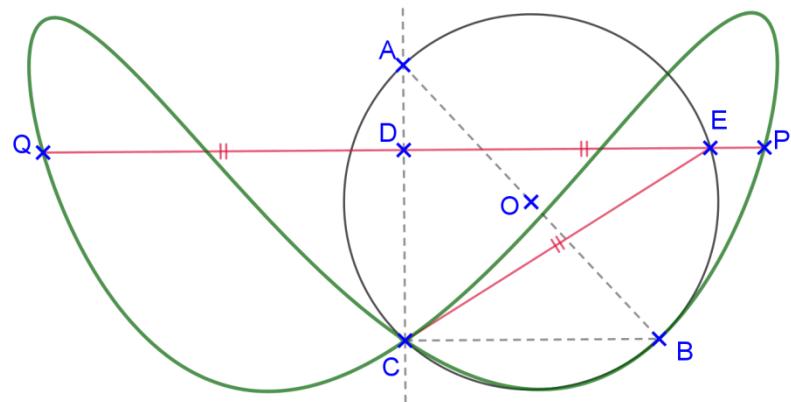
**Exercícios propostos:**

1. Construa a conchóide da circunferência de raio de medida  $r$  usando a medida do parâmetro  $d$ .
2. Construa a conchóide da circunferência de raio de medida  $r$  usando a medida do parâmetro  $d = r$ .
3. Construa a conchóide de uma reta  $s$  com a medida do parâmetro  $d$  e considerando o pólo  $A \notin s$ .
4. Construa a conchóide de uma elipse com a medida do parâmetro  $d$ .
5. Construa a conchóide de uma hipérbole com a medida do parâmetro  $d$ .

**Definição:** Dada a circunferência de diâmetro  $AB$  e um ponto  $C$  da circunferência, a **besácea** é o lugar geométrico dos pontos  $P$  que pertencem à paralela a  $BC$ , tais que  $D$  pertence à reta  $AC$  e  $PD = EC$ .

**Exercício proposto:**

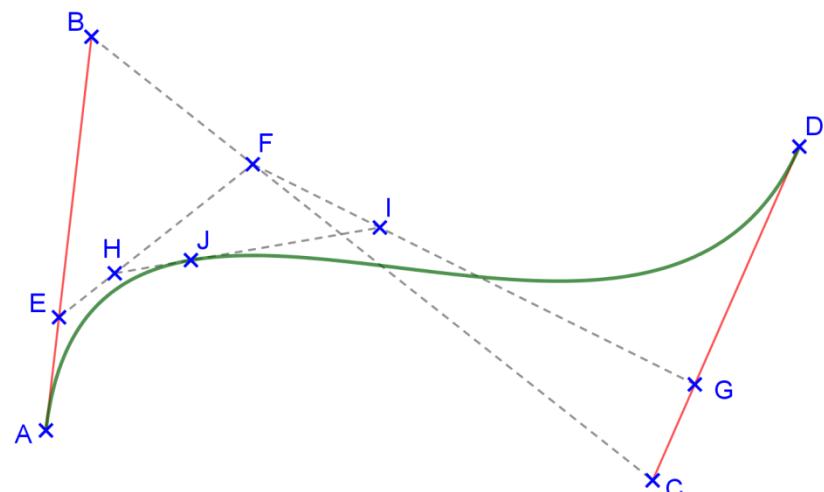
Construa uma besácea dadas as medidas do diâmetro  $AB$  e do segmento  $AC$ .



**Definição:** A **curva de Bézier** é uma polinomial e pode ser expressa como a interpolação linear entre alguns pontos representativos, chamados de pontos de controle. A curva de Bézier linear é baseada na proporção  $t$  entre os pontos de controle A e B (AE), usada na obtenção dos demais pontos usando a equação recursiva:  $F = B + c \cdot (C - B)$ , onde  $c = \frac{AE}{AB}$ .

### Exercício proposto:

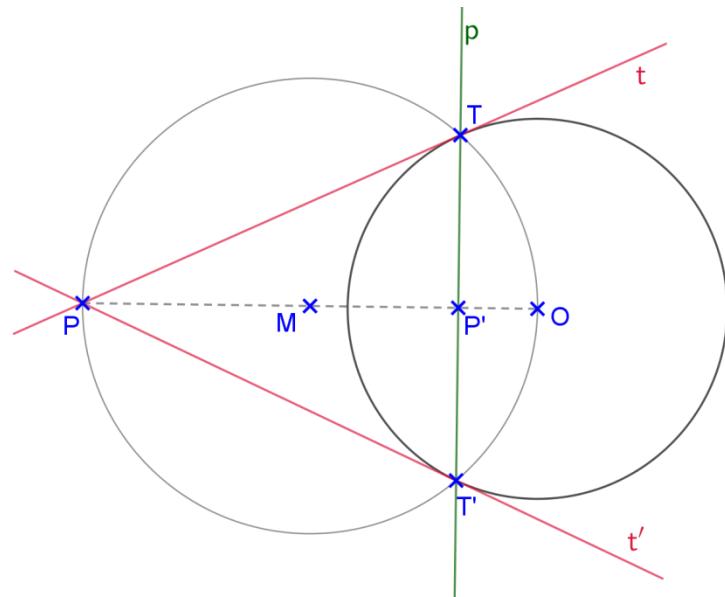
Construa uma curva de Bézier dados os segmentos AB e CD.



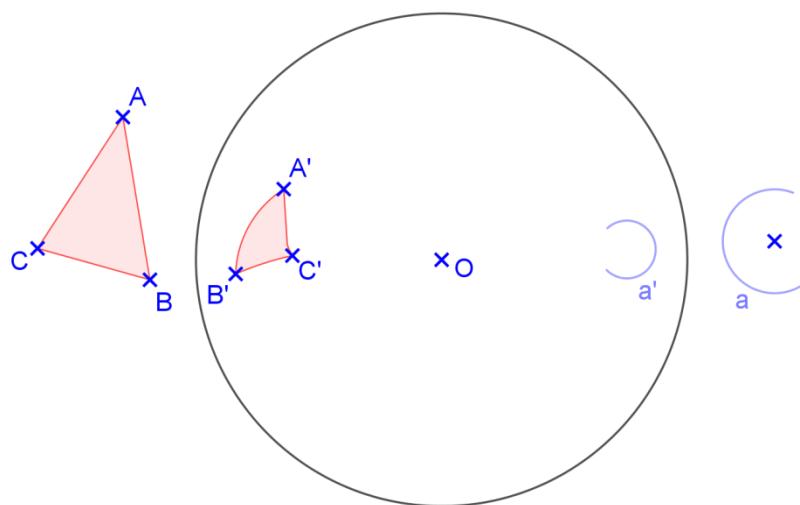
### 3.2.3. Inversão, pólo e polar

**Definição:** A **polar** é uma reta que está relacionada, ou com um par de retas, ou com uma circunferência ou com uma cônica. A um ponto P, denominado de **pólo**, corresponde uma reta p, denominada de **polar** do ponto P. Este conceito de pólo e polar está relacionado com o de razão harmônica de quatro pontos.

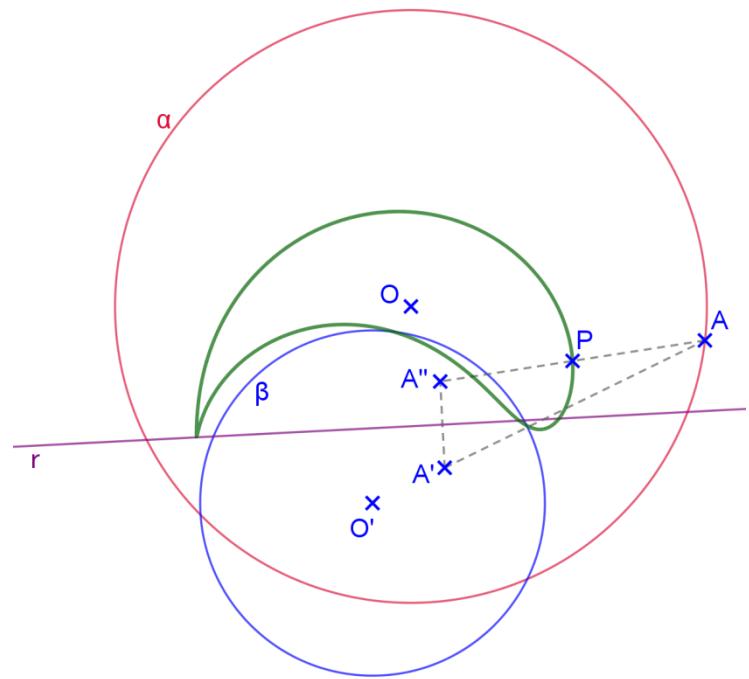
Considere uma circunferência de centro O e um ponto P exterior. Conduzimos por P tangentes t e t' à circunferência. A polar do ponto P em relação à circunferência corresponde às retas definidas pelos pontos de tangência T e T'. O ponto P' é denominado **inverso** de P em relação à circunferência.



### Inversão de figuras:

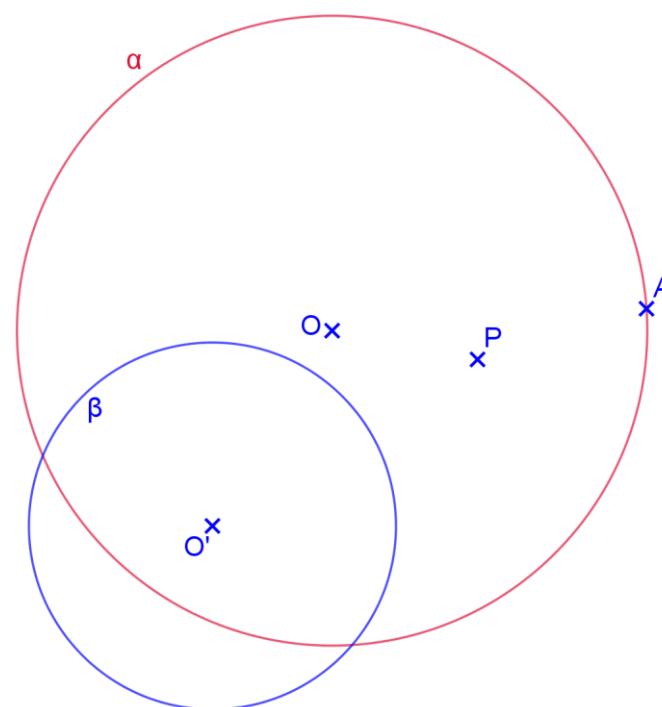


Definição: Uma seção bidimensional projetada para provocar a variação de velocidade chama-se **aerofólio**. Esta curva é também chamada de **curva de Joukowski**, e uma aproximação dela é construída com os seguintes elementos: as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ ; uma reta  $r$ ; o inverso  $A'$  do ponto  $A$  de  $\alpha$  em relação a  $\beta$ ; e o simétrico  $A''$  do inverso  $A'$  de  $A$  em relação a  $\beta$ . O lugar geométrico dos pontos médios de  $AA''$  é o aerofólio.



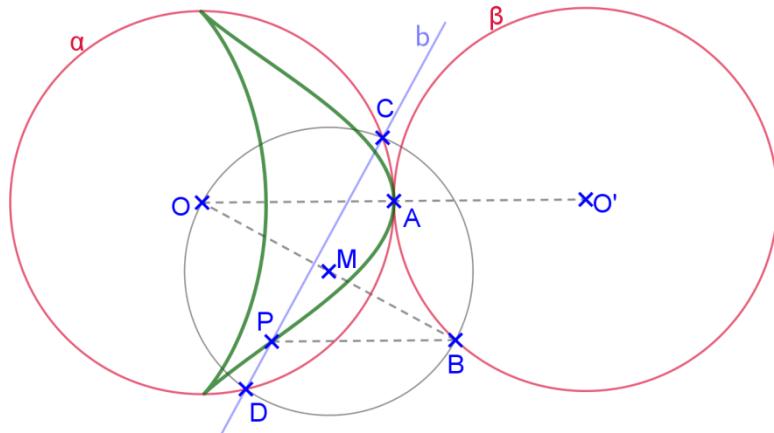
#### Exercícios propostos:

1. Construa a curva aerofólio dados os seguintes elementos: as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , e uma reta  $r$ .
2. Dados os pontos  $A$  e  $P$  e as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , encontre a reta  $r$  que define os pontos do aerofólio. Determine mais um ponto  $P'$  do aerofólio.

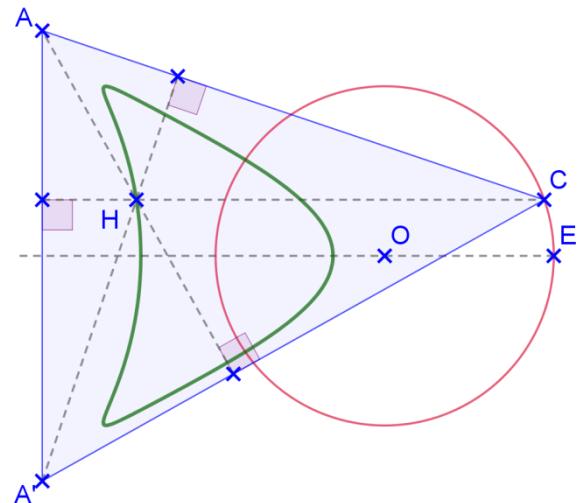


Uma curva chamada **bicorne**, similar a um chapéu de duas pontas, pode ser construída de três formas vistas a seguir.

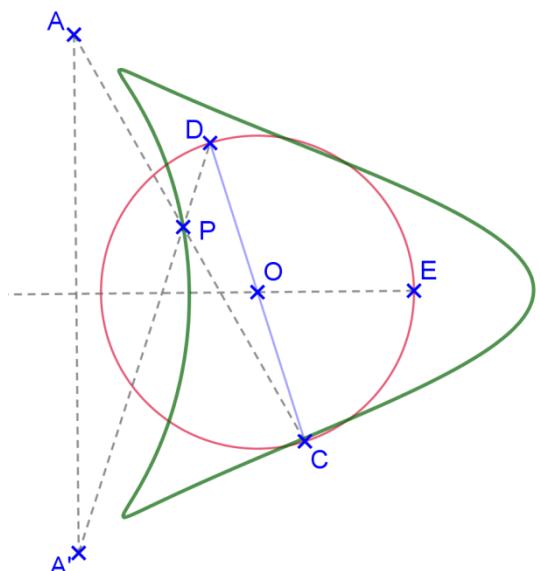
Definição 1: São dados as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , com raios iguais, tangentes em A e um ponto B pertencente a  $\beta$ . O lugar geométrico da interseção de BP, paralelo a  $OO'$ , com a reta CD, polar de B em relação a  $\alpha$ , é uma curva **bicorne**.



Definição 2: São dados os pontos A e A', simétricos em relação a OE, a circunferência de centro O e raio OE e um ponto C pertencente a esta circunferência. O lugar geométrico do ortocentro de um triângulo AA'C é uma curva **bicorne**.



Definição 3: São dados os pontos A e A', simétricos em relação à reta OE, a circunferência de centro O e um diâmetro CD desta circunferência. O lugar geométrico da interseção das retas AC com A'D é uma curva **bicorne**.



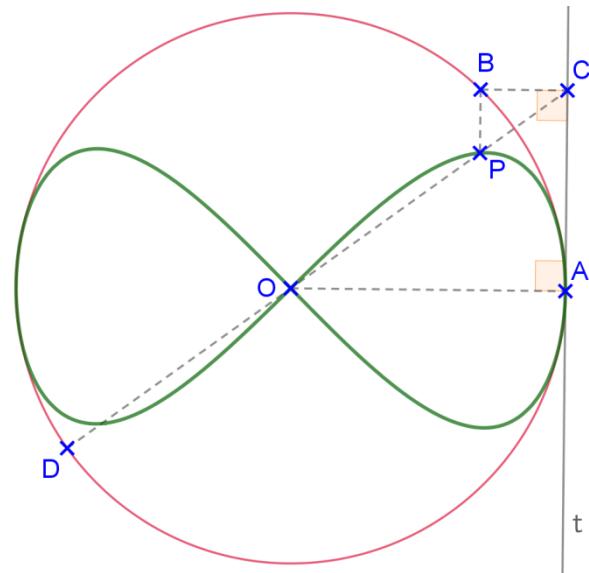
#### Exercício proposto:

Construa as curvas bicorne usando cada uma das definições.

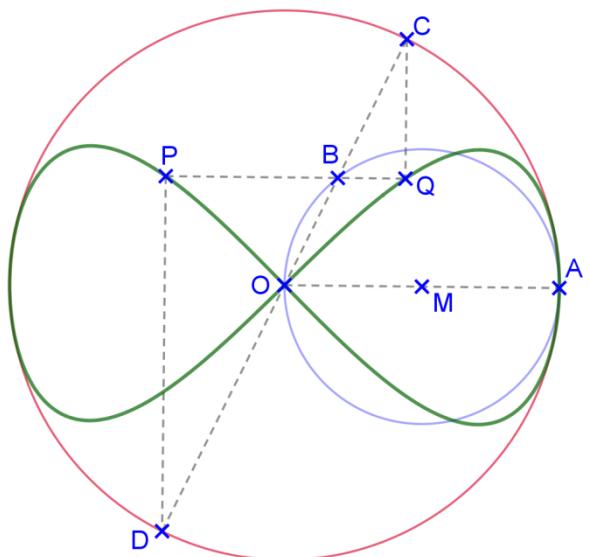
Nas curvas das definições 2 e 3 verifique as relações das medidas de AA' com o raio OE.

A curva **Lemniscata de Gerono**, similar ao símbolo de infinito, pode ser construída usando três lugares geométricos mostrados a seguir.

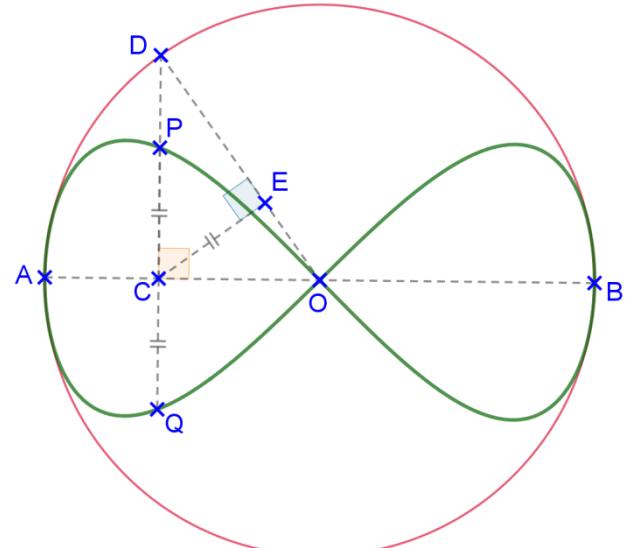
Definição 1: Dadas uma circunferência, uma reta tangente à circunferência  $t$  e um ponto  $B$  da circunferência, determine  $BC$  perpendicular a  $t$  e  $CD$  passando por  $O$ . A interseção da reta  $BP$  paralela a  $t$  com  $CD$  é o lugar geométrico definido como **Lemniscata de Gerono**.



Definição 2: Dadas as circunferências tangentes, uma de raio  $AO$  e outra de diâmetro  $AO$ , e um ponto  $B$  pertencente à circunferência menor, determine o diâmetro da circunferência maior que passa por  $B$ . As interseções de  $PQ \parallel AO$  com  $CQ \perp AO$  e  $PD \perp AO$  é a Lemniscata de Gerono.



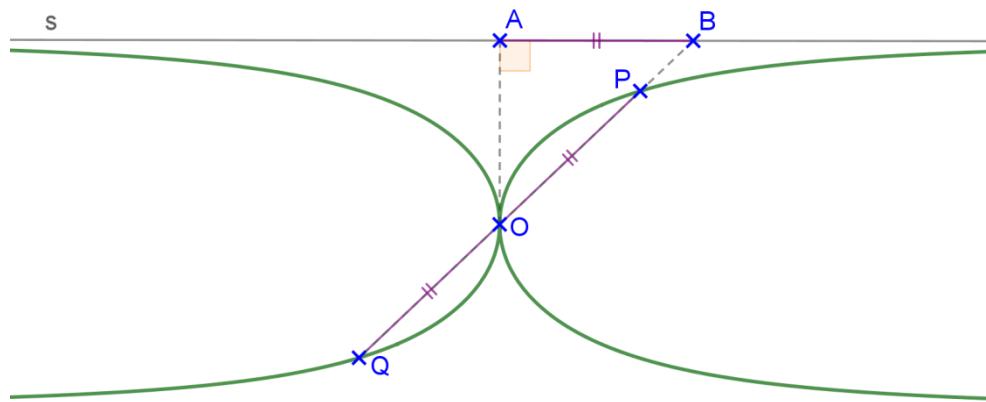
Definição 3: Considere a circunferência de diâmetro  $AB$ , o ponto  $C$  em  $AB$  e  $CD \perp AB$ . Além disso, considere  $CE \perp OD$  e  $CP = CQ = CE$ . o lugar geométrico dos pontos  $P$  e  $Q$  é a Lemniscata de Gerono.



### Exercício proposto:

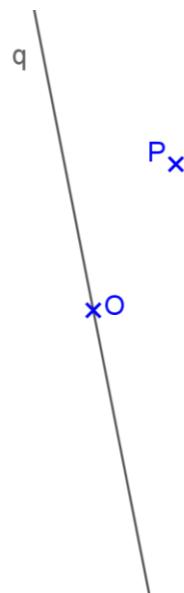
Construa as lemniscatas de Gerono usando cada uma das definições.

**Definição:** A **curva Gutschoven** ou **kappa** é uma curva algébrica bidimensional semelhante à letra κ do alfabeto grego. Dados um ponto O e uma reta s, considere  $AO \perp s$  e  $B \in s$ . Unindo B com O e determinando  $OP = OQ = AB$ , onde  $P, Q \in OB$ , o lugar geométrico de P e Q é a curva kappa.



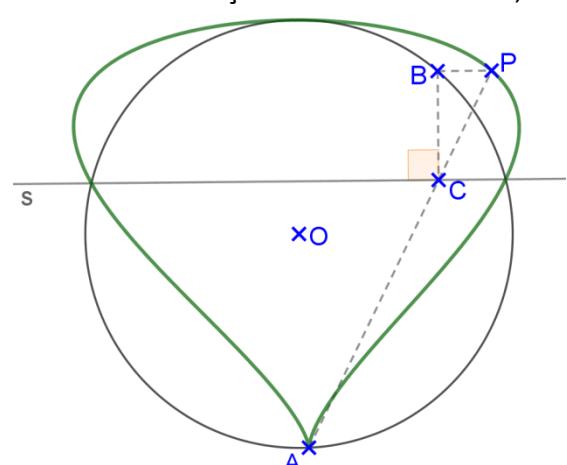
#### Exercícios propostos:

1. Construa uma curva kappa dados o ponto O e a reta s.
2. Dados os pontos O e P, onde P pertence à curva kappa, e a reta q que passa por A, determine a reta s da curva kappa. Determine um ponto a mais da curva kappa.



**Definição:** Dados uma circunferência de centro O e raio OA, uma reta s e um ponto B da circunferência.

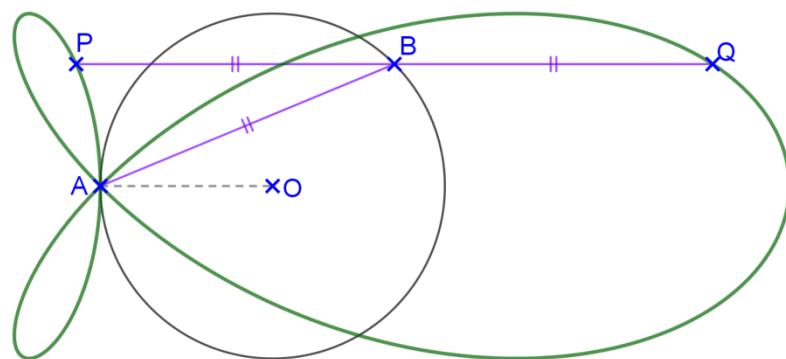
Considere  $BC \perp s$ , e o ponto A fixo. Unindo A e C, o ponto D será a interseção de  $BD \parallel s$  com AC, e seu lugar geométrico será a curva **quártica piriforme** (forma de pêra ou lágrima).



#### Exercício proposto:

Construa uma quártica piriforme dados: a circunferência, o ponto A e a reta s.

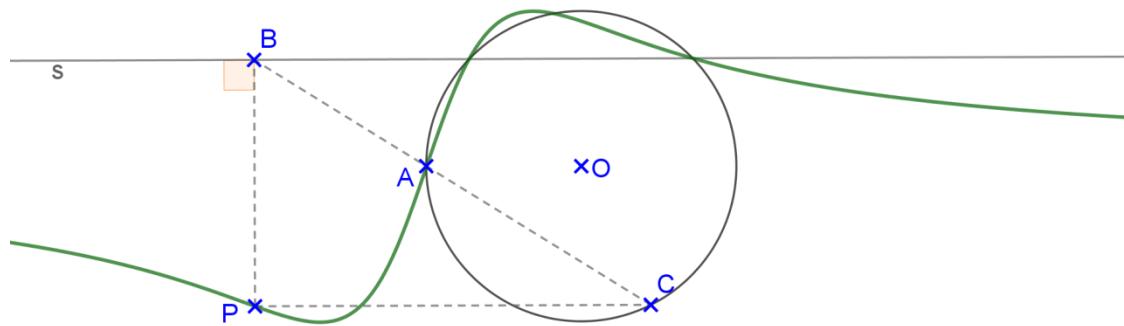
Definição: Dados uma circunferência de raio AO, com ponto A fixo, e um ponto B na circunferência, determine PQ passando por B tal que AB = BP = BQ e PQ // AO. O lugar geométrico dos pontos P e Q é a **curva torpedo**.



#### Exercício proposto:

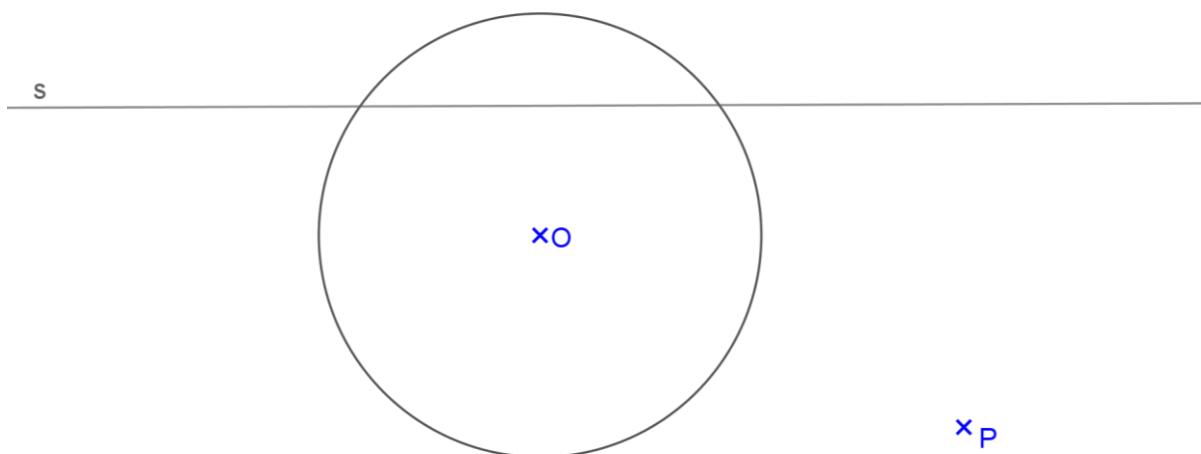
Construa uma curva torpedo dados: a circunferência e o ponto A fixo.

Definição: Dadas uma circunferência de raio AO, sendo A fixo, e uma reta s, considere um ponto B  $\in$  s tal que  $BP \perp s$ . Unindo A e B encontramos C na circunferência. A interseção de BP com CP // s é um dos pontos da curva chamada **serpentina**.

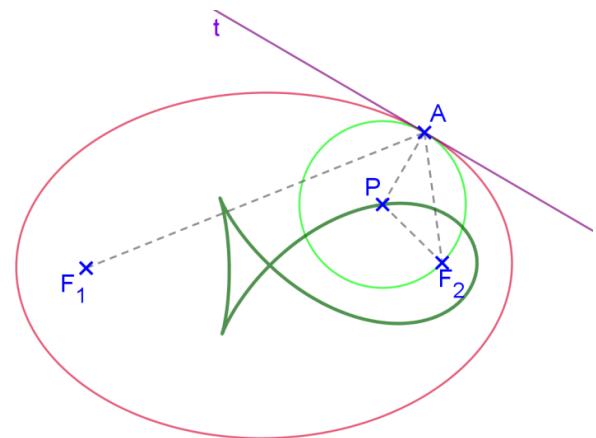


#### Exercícios propostos:

1. Construa uma serpentina dados: a circunferência, o ponto A e a reta s.
2. Dados a circunferência, a reta s e o ponto P da curva serpentina, determine o ponto fixo A. Encontre mais um ponto da curva.



**Definição:** A **curva de Talbot** é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma elipse que passam por um dos focos ou pelo centro da elipse. No exemplo ao lado, a curva é definida pelo foco  $F_2$ .



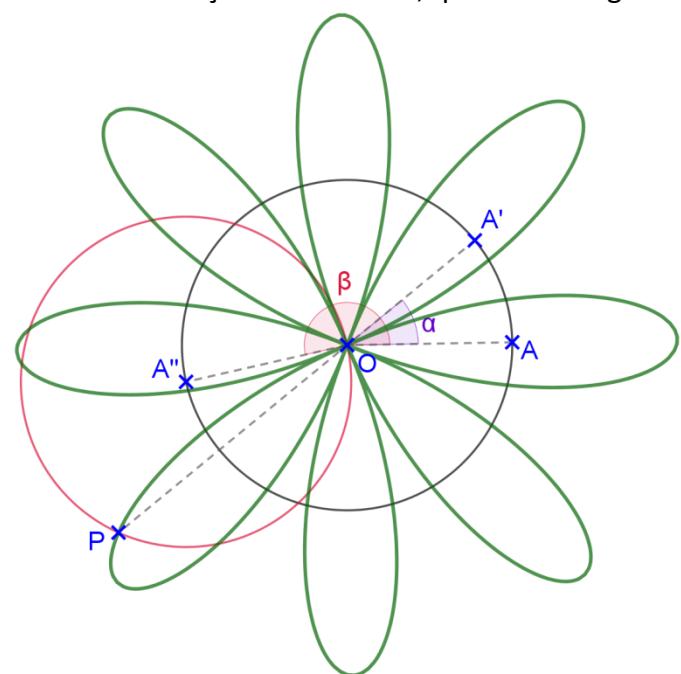
**Exercício proposto:**

Construa uma curva de Talbot com as circunferências tangentes à elipse passando pelo centro da cônica.

**Definição:** As **rosáceas** são obtidas por meio da trajetória da interseção de uma reta, que forma ângulo  $\alpha$  com  $AO$  ( $A'P$ ), e uma circunferência com raio  $A''O$  que forma ângulo  $\beta$  com  $AO$ . A relação entre os ângulos é  $\beta = n \cdot \alpha$ .

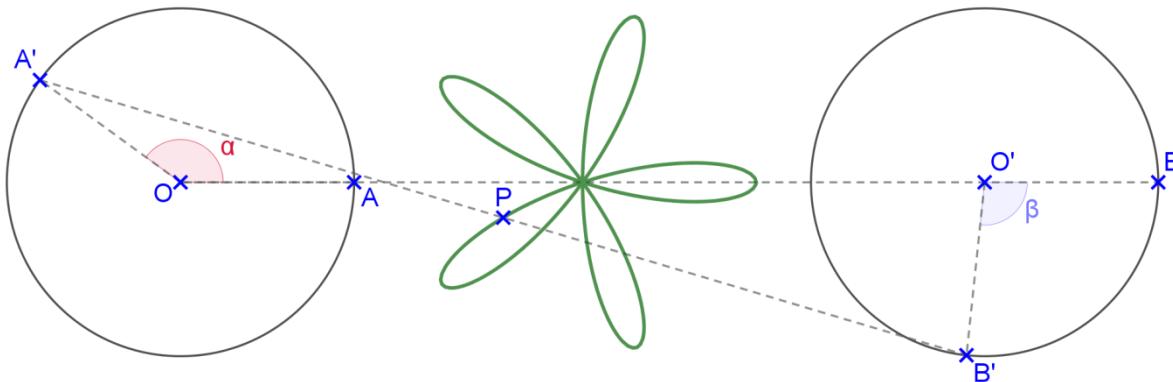
**Exercício proposto:**

Construa rosáceas com  $n = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .



**Definição:** Considere as circunferências de centros

$O$  e  $O'$  com raios iguais, um ângulo  $\theta$ , e os raios  $OA$  e  $O'B$  alinhados. Defina os ângulos centrais das circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\alpha = A\hat{O}A' = n \cdot \theta$  e  $\beta = B\hat{O}B' = -m \cdot \theta$ , onde  $m$  e  $n$  são números naturais. O lugar geométrico dos pontos médios de  $A'B'$  é a **ciclóide centrada**.

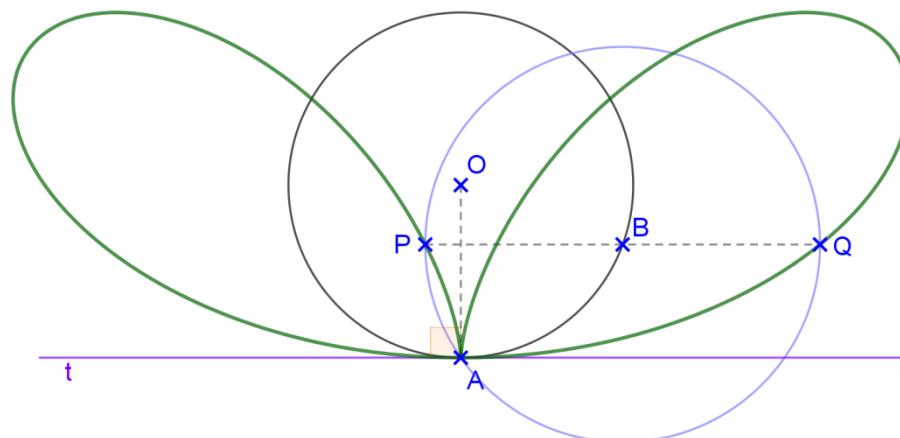


**Exercício proposto:**

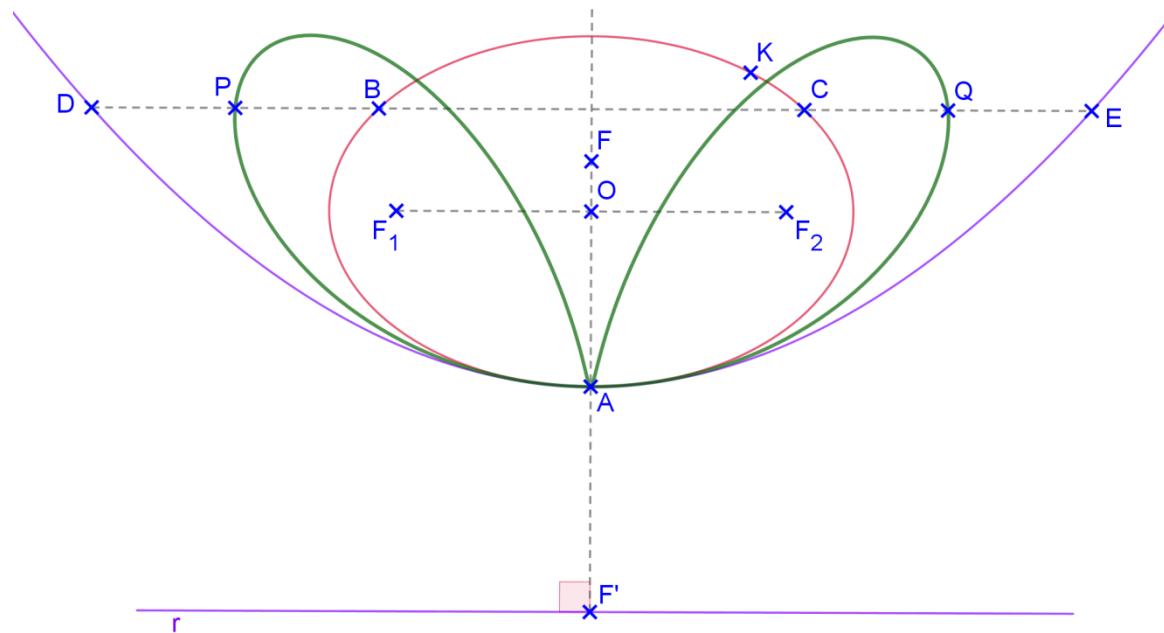
Construa as ciclóides centradas usando os pontos médios de  $A'B'$ ,  $B'P$  e  $PA'$ .

A curva **bifolium** pode ser construída usando três lugares geométricos mostrados a seguir.

Definição 1: Dadas a circunferência de raio AO, onde A é fixo e a reta tangente t. Considere a circunferência de centro B e raio BA. As extremidades dos diâmetros paralelos à reta r determinam a curva **bifolium**.



Definição 2: Considere uma elipse e uma parábola, tangentes no vértice principal da parábola coincidente com o vértice do eixo menor da elipse. Seja uma reta BC // r, onde r é a diretriz da parábola. O lugar geométrico dos pontos médios de BD e CE, onde D e E pertencem à parábola e B e C pertencem à elipse, determinam a curva **bifolium**.

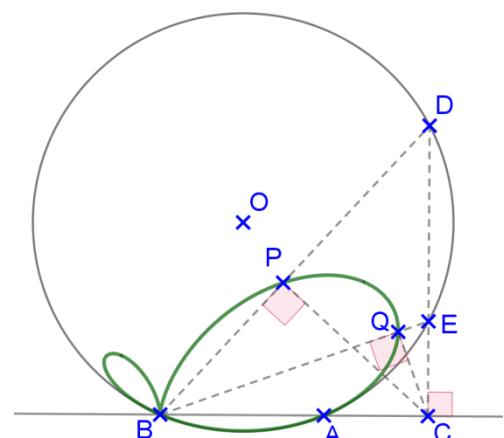


Definição 3: Considere uma circunferência com os pontos A e B fixos e um ponto C sobre a reta AB.

Sejam  $CD \perp BC$ ,  $CP \perp BD$  e  $CQ \perp BE$ . O lugar geométrico dos pontos P e Q é a curva **bifolium irregular**.

### Exercício proposto:

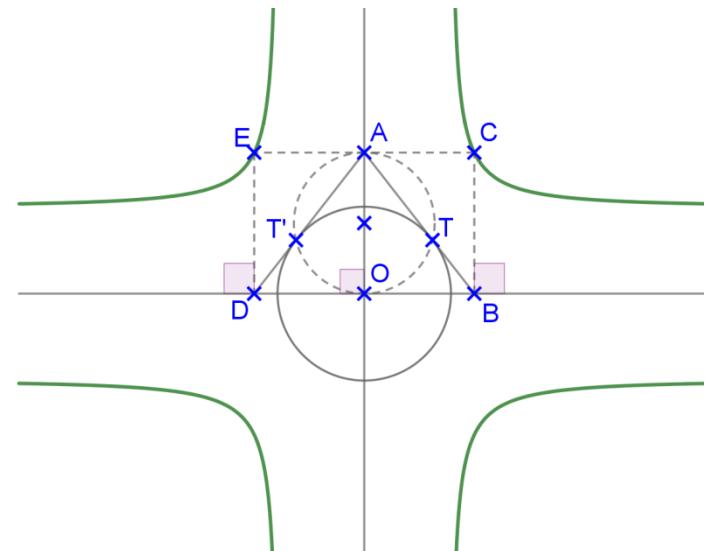
Construa 3 curvas bifolium usando cada uma das definições.  
Utilize posições diferentes da elipse e da parábola na definição 2 para obter formatos diferentes das curvas.



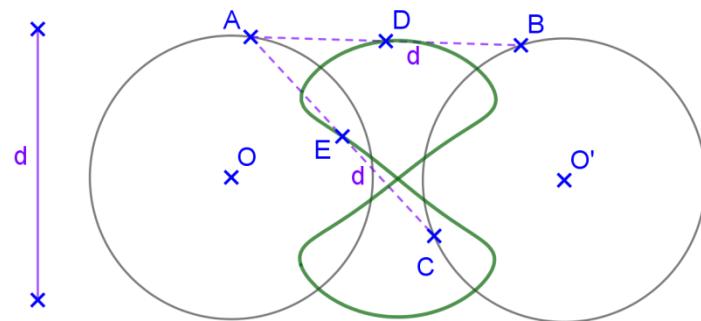
Definição: Dados uma circunferência e dois diâmetros perpendiculares, determine um ponto A pertencente a uma reta suporte de um destes diâmetros. Construa as retas tangentes à circunferência que passam por A, determinando os pontos B e D no outro diâmetro. Se  $BC \parallel AO$  e  $AC \parallel OB$ , então C pertence à **crosscurve** (curva em forma de cruz).

#### Exercício proposto:

Construa uma crosscurve, dada uma circunferência com a medida do raio r.



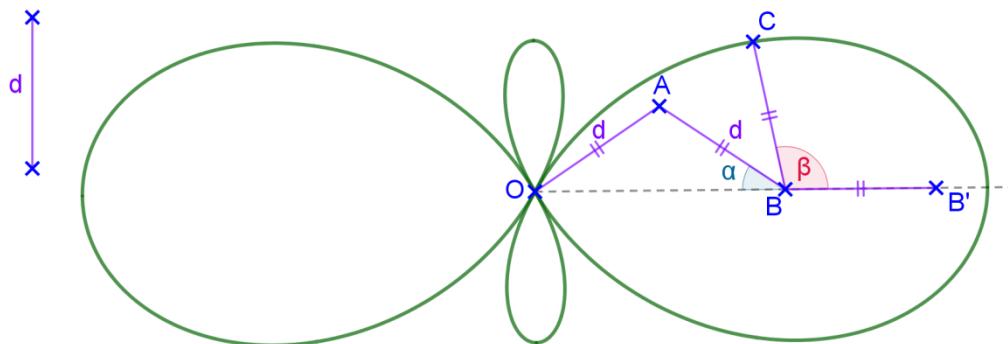
Definição: Dadas as circunferências de centros O e  $O'$ , com raios iguais a  $r$ , um segmento  $d$  e o ponto móvel A, determine na circunferência de centro  $O'$  os pontos: B tal que  $AB = d$  e C tal que  $AC = d$ . O lugar geométrico de D e E, pontos médios de AB e de AC, é a **curva de Watt**, ou **lemniscóide**.



#### Exercício proposto:

Construa uma curva de Watt dadas as circunferências de raio  $r$  e a distância  $d$ .

Definição: Dados uma semi-reta de origem O e uma distância fixa  $d$ , determine: um ponto móvel B na semi-reta; o ponto A tal que  $AO = AB = d$  e  $A\hat{O}B = A\hat{B}O = \alpha$ ; C tal que  $BC = AB = d$  e  $\beta = 3\alpha$ . O lugar geométrico do ponto C é a **trissetriz de Ceva**.



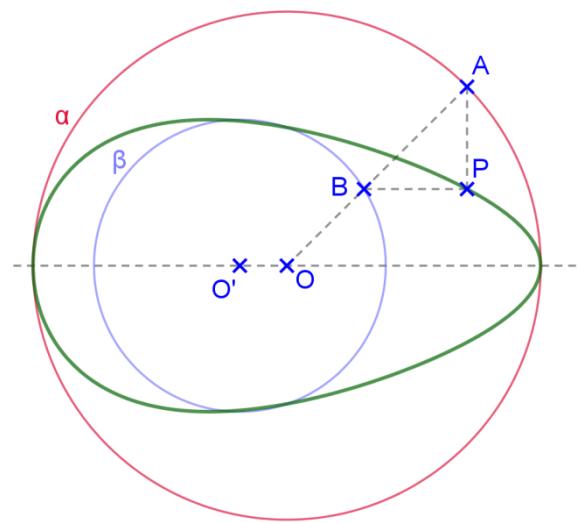
#### Exercício proposto:

Construa uma trissetriz de Ceva, dada a medida  $d$ , o ponto fixo O e a semi-reta de origem O.

**Definição:** Dadas as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ , determine um ponto qualquer  $A$  de  $\alpha$  e o ponto  $B$  de interseção da reta  $AO$  com  $\beta$ . Construa  $BP$  paralelo a  $OO'$  e  $AP$  perpendicular a  $OO'$ . O lugar geométrico do ponto  $P$  é a **oval de Hügelschäffer**.

#### Exercício proposto:

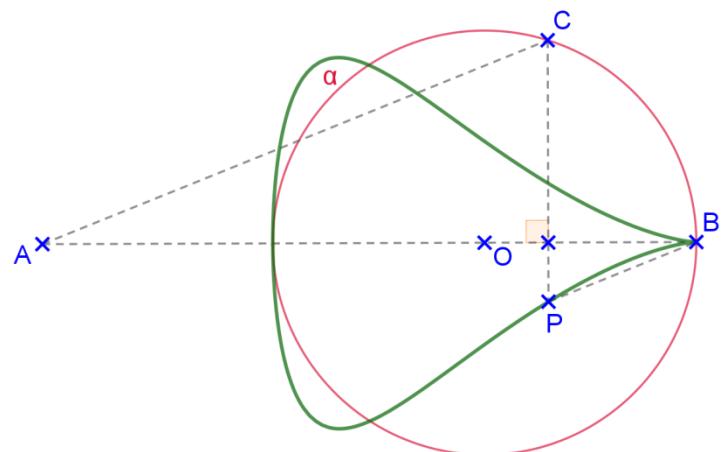
Construa uma oval de Hügelschäffer dadas as circunferências  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Definição:** Dados a circunferência  $\alpha$  de centro  $O$ , e o ponto  $A$ , determine o ponto  $B$  de interseção da reta  $AO$  com  $\alpha$ . Determine um ponto  $C$  de  $\alpha$  e construa as retas  $CP$  perpendicular a  $AB$  e  $BP$  paralela a  $AC$ . O lugar geométrico do ponto  $P$  é a **curva de Rosillo**.

#### Exercício proposto:

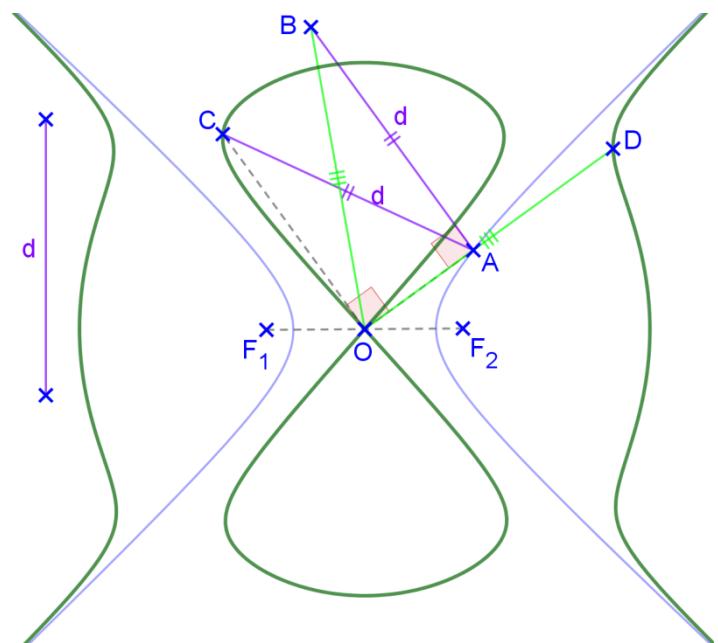
Construa uma curva de Rosillo, dados um ponto  $A$  e uma circunferência  $\alpha$ .



**Definição:** Também chamada de “curva do diabo”, a **curva de Cramer-Lacroix** tem como elementos iniciais uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  e um segmento  $d$ . Determine um ponto  $A$  da hipérbole e trace as retas  $AO$ ,  $AH$  e  $OC$ , onde  $OC$  e  $AH$  são perpendiculares a  $AO$ . Marque os pontos  $H$  ( $AH = d$ ),  $B$  ( $BO = OH$ ) e  $C$  ( $AC = d$ ). O lugar geométrico dos pontos  $B$  e  $C$  é a curva de Cramer-Lacroix.

#### Exercícios propostos:

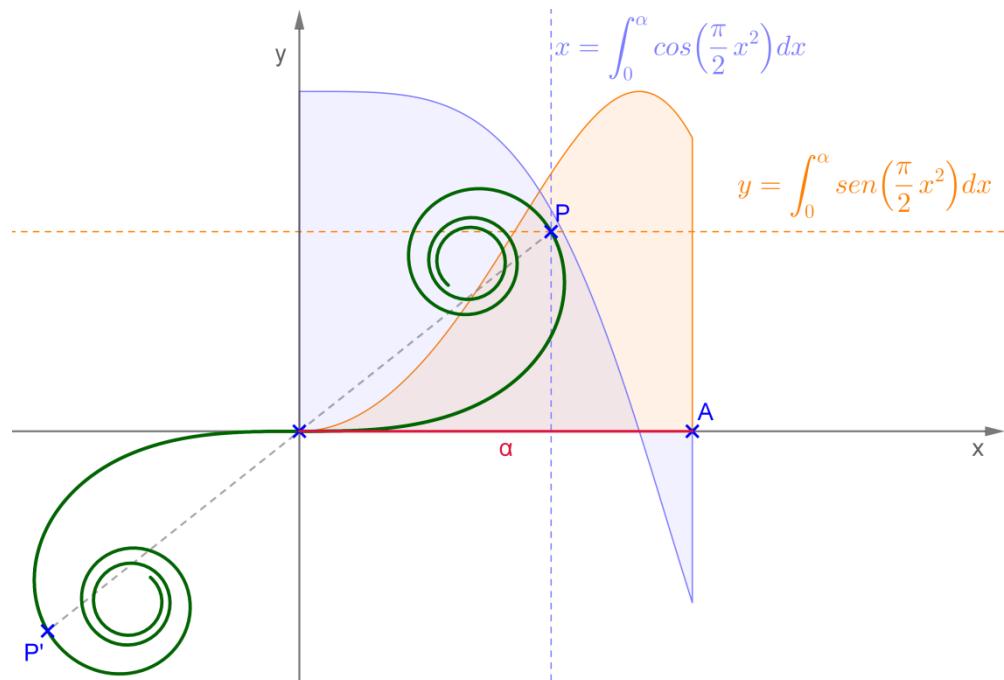
1. Construa uma curva de Cramer-Lacroix, dadas uma distância  $d$  e uma hipérbole.
2. Construa uma curva de Cramer-Lacroix em uma elipse com uma distância dada  $d$ .



### 3.2.4. Curvas paramétricas

Algumas curvas que vimos como lugares geométricos também podem ser representadas na forma paramétrica, ou seja, usando-se uma equação com parâmetros que envolvem ângulos ou segmentos.

**Definição:** A **espiral de Cornu**, também conhecida como **clótóide** ou **espiral de Euler**, é uma curva cujo raio de curvatura varia linearmente ao longo de seu comprimento. Esta curva assegura um decrescimento linear do raio de curvatura com o caminho percorrido ao longo do seu desenvolvimento, proporcionando assim uma variação gradual da curvatura.



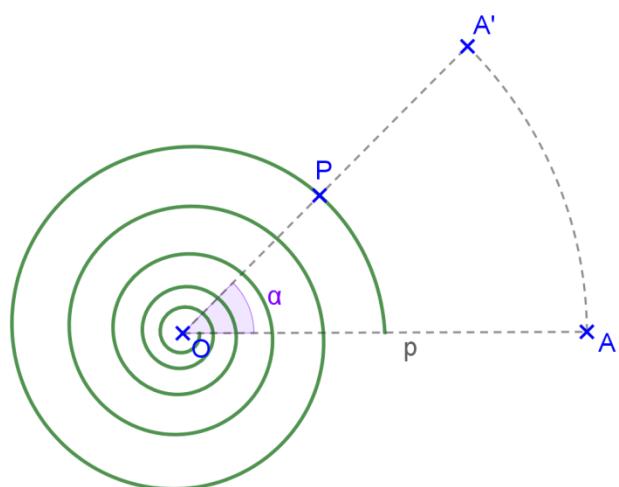
#### Exercício proposto:

Determine um dos pontos P da espiral de Euler, considerando o ponto A sobre um segmento e definido sobre o eixo x. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

**Definição:** um ponto P da **espiral curva**, similar à mola de bobina de relógio, satisfaz a equação polar  $OP = \frac{p}{1+e^{m\cdot\alpha}}$ , onde O é o centro, p = OA e m são parâmetros da curva.

#### Exercício proposto:

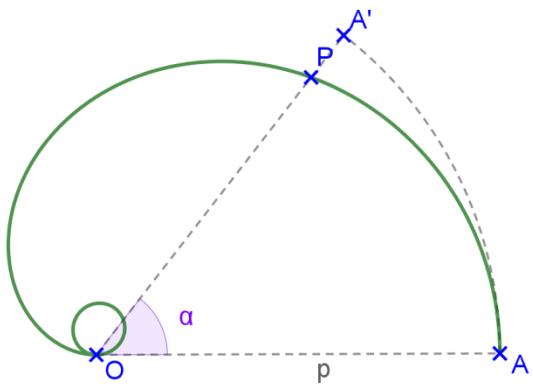
Determine um ponto P da espiral curva com a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



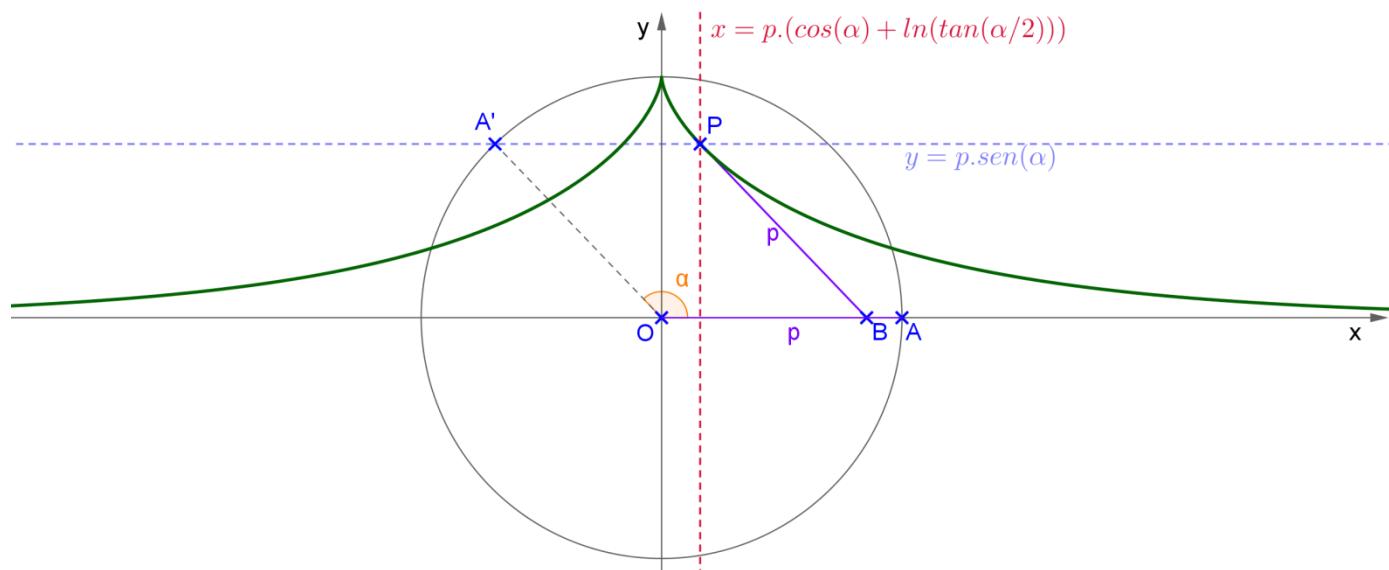
Definição: um ponto P da **espiral cóclea (caracol)** satisfaz a equação polar  $OP = \frac{p \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}$ , onde O é o centro e p o parâmetro da curva.

**Exercício proposto:**

Determine um ponto P da espiral cóclea com a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



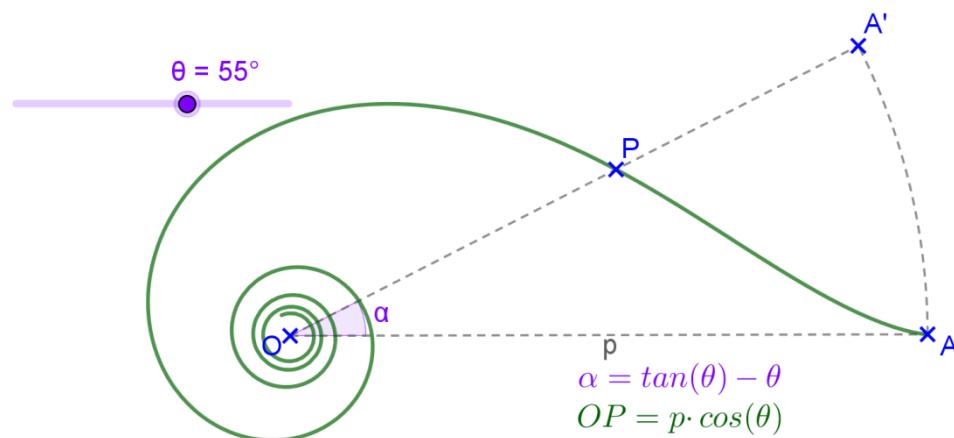
Definição: **Tratriz** é a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento AO = p mantido esticado, cuja extremidade B se desloca por uma reta (eixo x).



**Exercício proposto:**

Determine um ponto P da tratriz com as equações de x e y. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado. Determine o ponto B do eixo x tal que BP = p.

Definição: **Espiral tratriz** é a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento  $\frac{p}{2}$  mantido esticado, cuja extremidade A se desloca por uma circunferência de raio  $\frac{p}{2}$ .



**Exercício proposto:**

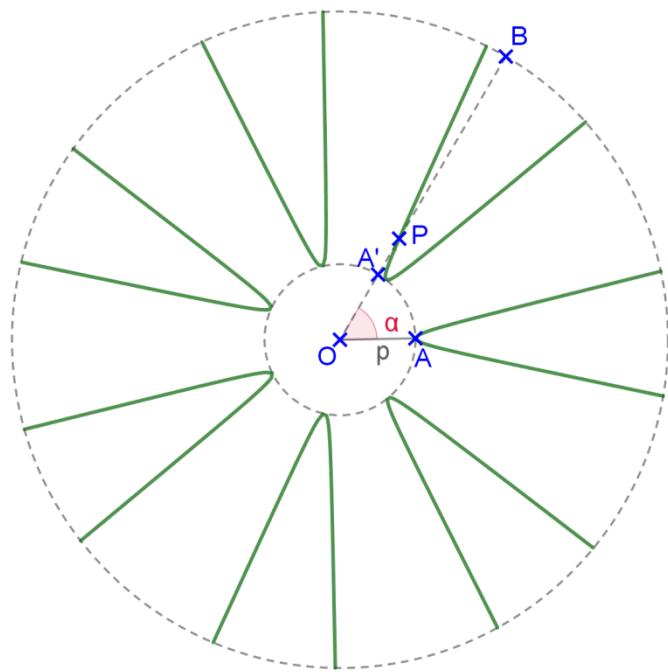
Determine um ponto P da espiral trátriz com as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

Encontre um ponto B tal que  $BP = OP = \frac{p}{2}$ . Defina a interseção de BP com a reta perpendicular a OP que passa por O. Ao movimentar o ponto P a distância BC é modificada?

**Definição:** Dados o número n e a circunferência de centro O e raio  $AO = p$ , o ponto P da **curva epi** satisfaz a equação polar  $OP = \frac{p}{\cos(n \cdot \alpha)}$ .

**Exercício proposto:**

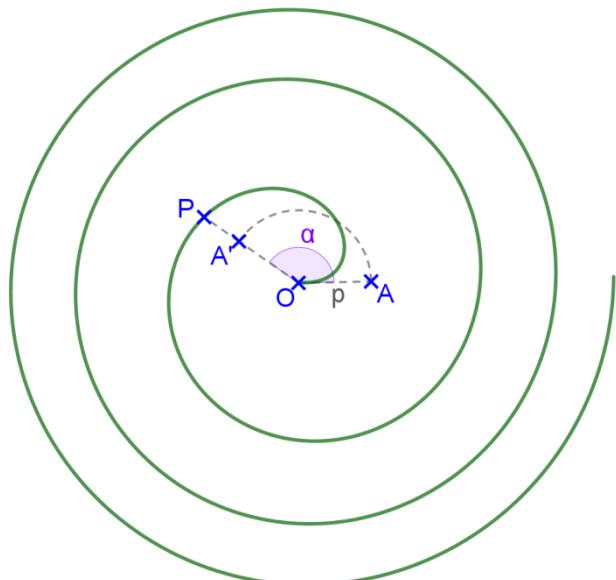
Determine um ponto P da curva epi usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



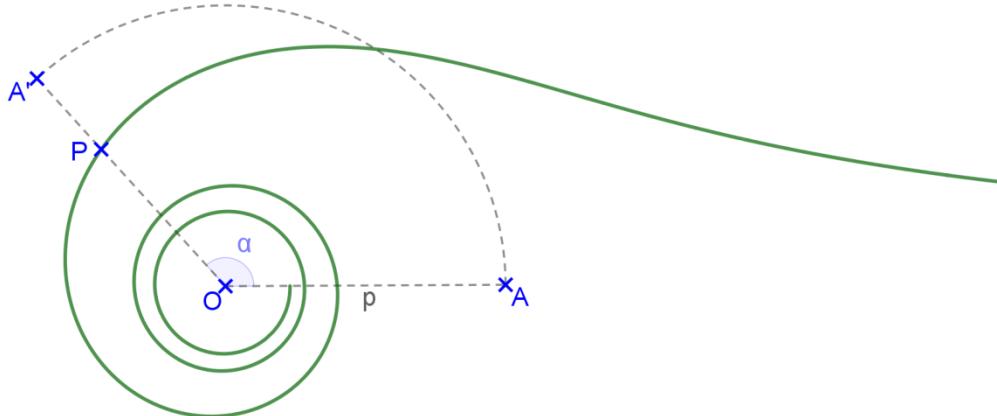
**Definição:** um ponto P da **espiral de Fermat** satisfaz a equação polar  $OP = p\sqrt{\alpha}$ , onde O é o centro e  $p = OA$  o parâmetro da curva.

**Exercício proposto:**

Determine um ponto P da espiral de Fermat usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



**Definição:** **Espiral Lituus** é a curva com ângulo inversamente proporcional ao quadrado do raio. Esta espiral se aproxima cada vez mais da origem, mas nunca a alcança. A equação polar desta curva é  $OP = p \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ , onde O é o centro e p = OA o parâmetro da curva.



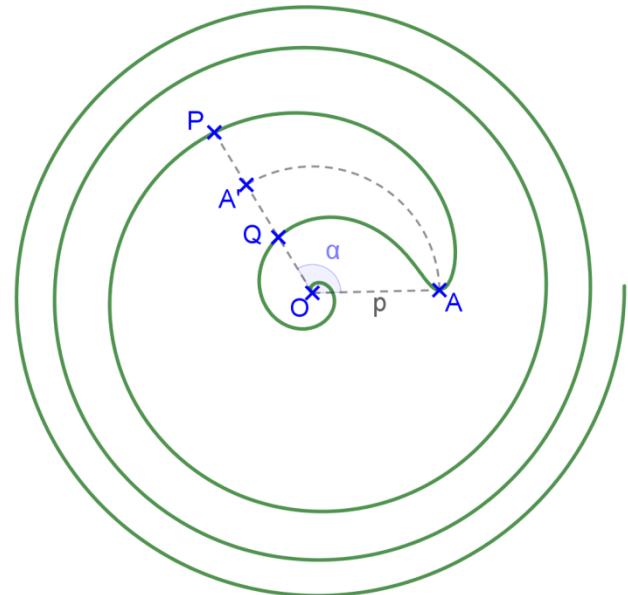
#### Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral Lituus usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

**Definição:** um ponto P da **espiral parabólica** satisfaz a equação  $OP = p \pm \sqrt{2b \cdot p \cdot \alpha}$ , onde O é o centro, p = AO e b são os parâmetros da curva.

#### Exercício proposto:

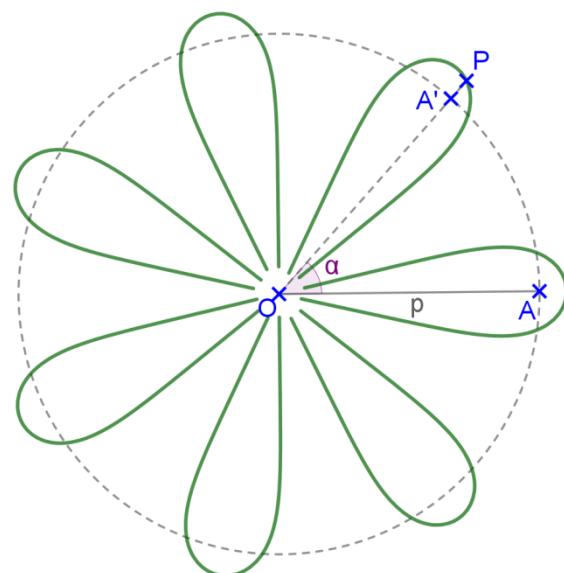
Determine um ponto P da espiral parabólica usando as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



**Definição:** Dados o número n e a circunferência de centro O e raio AO = p, o ponto P da **espiral sinusoidal** satisfaz a equação polar  $OP = p \cdot \sqrt[n]{2 \cdot \cos(n \cdot \alpha)}$ .

#### Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral sinusoidal usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



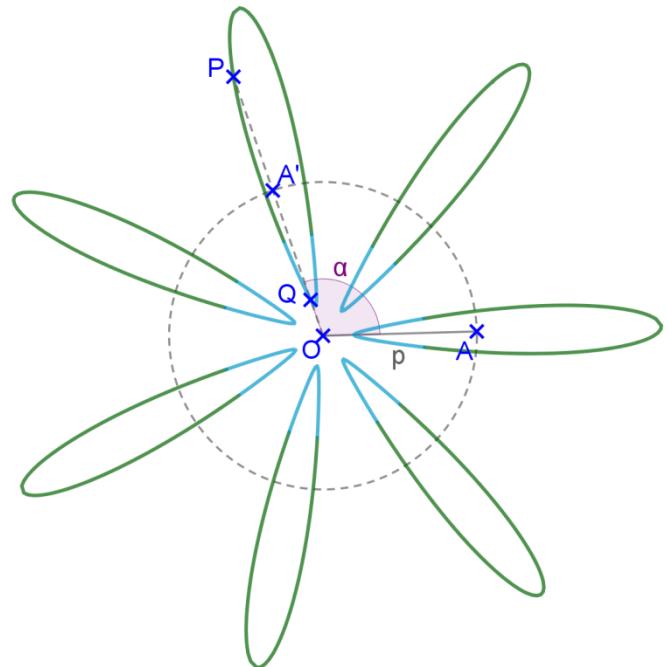
**Definição:** Dados os números  $m$  e  $n$  e a circunferência de centro  $O$  e raio  $AO = p$ , os pontos  $P$  e  $Q$  da **curva folióide** satisfazem as equações:

$$OP = p \cdot \left( m \cdot \cos(n \cdot \alpha) + \sqrt{1 - (m \cdot \sin(n \cdot \alpha))^2} \right)$$

$$OQ = p \cdot \left( m \cdot \cos(n \cdot \alpha) - \sqrt{1 - (m \cdot \sin(n \cdot \alpha))^2} \right)$$

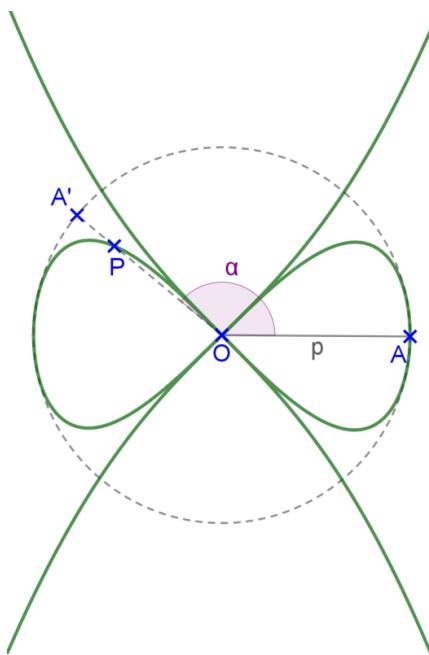
### Exercício proposto:

Determine um ponto  $P$  da curva folióide usando as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto  $P$  determinado.

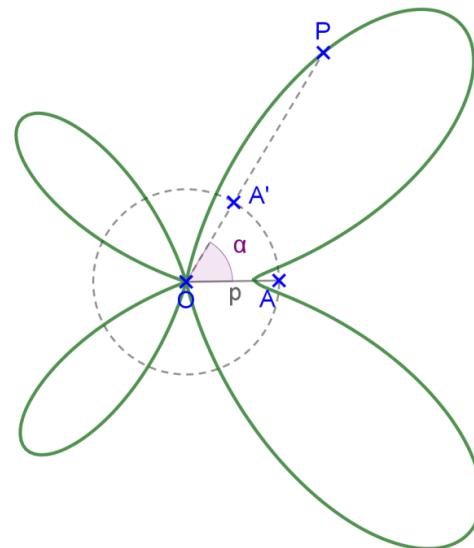


### 3.2.5. Curvas ornamentais

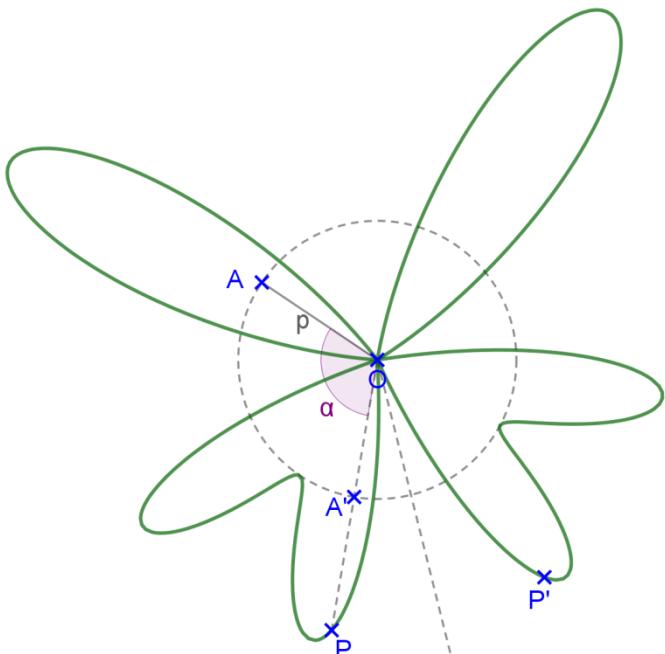
Seguindo o mesmo raciocínio dos exercícios propostos das curvas paramétricas, vamos determinar um ponto  $P$  de cada curva ornamental usando as respectivas equações polares. Depois, podemos construir cada curva ornamental usando o lugar geométrico do ponto  $P$  determinado.



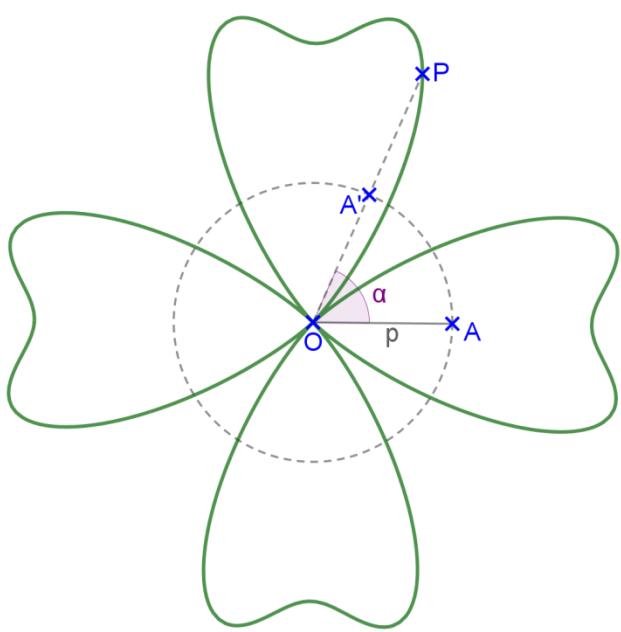
$$OP = p \cdot \frac{\sqrt{|\cos(2\alpha)|}}{\cos(\alpha)^2}$$



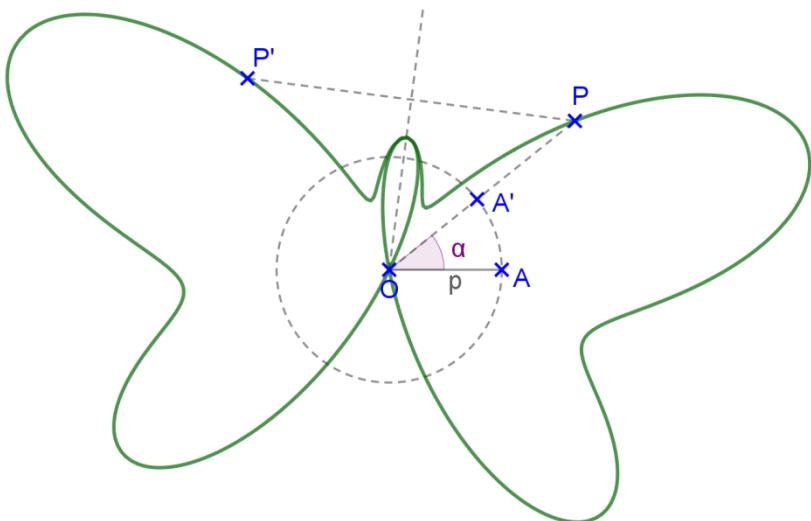
$$OP = p \cdot \left( e^{\cos(\frac{\pi}{12}\alpha)} - 2 \cos(4\alpha) + \left( \sin\left(\frac{\alpha}{12}\right) \right)^5 \right)$$



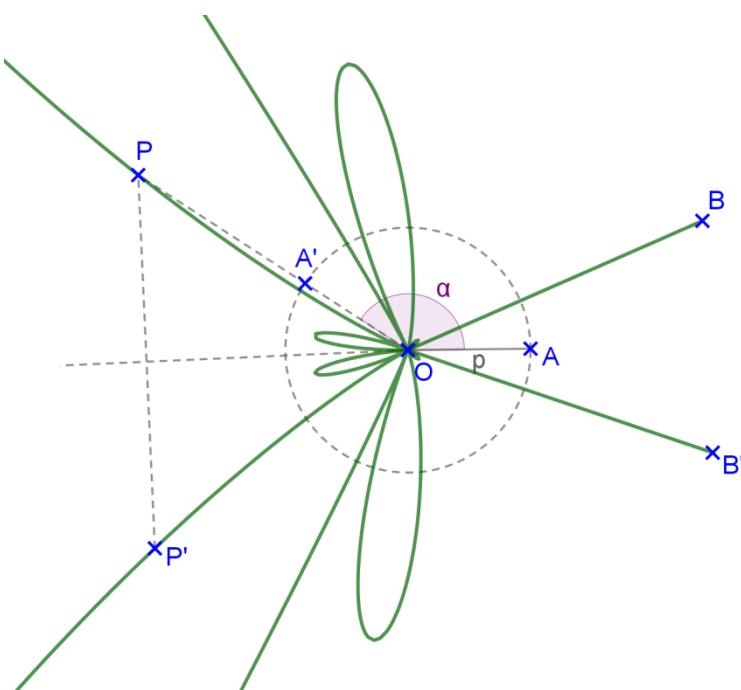
$$OP = p \cdot (-3\cos(2\alpha) + \sin(7\alpha) - 1)$$



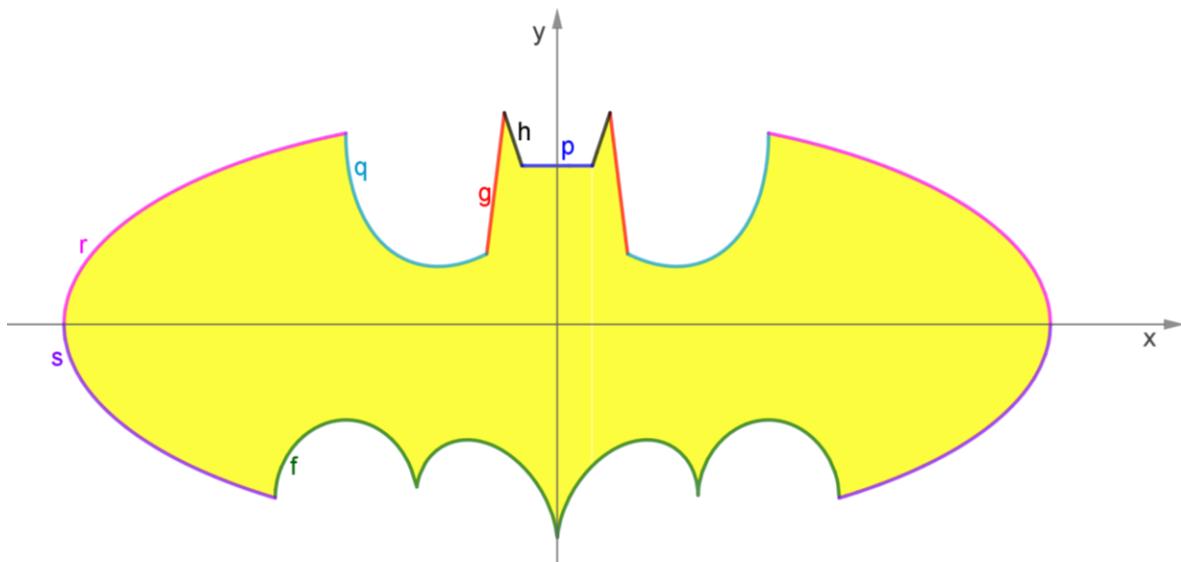
$$OP = p \cdot (1 + \cos(n \cdot \alpha) + (\sin(n \cdot \alpha))^2)$$



$$OP = p \cdot (\sin(5\alpha) + 3\cos(\alpha))$$



$$OP = p \cdot \left( \frac{\left(5\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^3 (\cos^2(4\alpha))^2}{\tan\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} \right)$$



$$f(x) = \left| \frac{x}{2} \right| - \frac{3\sqrt{33}-7}{122} x^2 - 3 + \sqrt{1 - (|x|-2)^2} - 0.1$$

$$g(x) = 9 \sqrt{\frac{|-(|x|-1)(|x|-0.8)|}{-(|x|-1)(|x|-0.8)}} - 8|x|$$

$$h(x) = 3|x| + 0.8 \sqrt{\frac{|-(|x|-0.5)(|x|-0.8)|}{-(|x|-0.5)(|x|-0.8)}}$$

$$p(x) = 2.3 \sqrt{\frac{|-(x-0.5)(x+0.5)|}{-(x-0.5)(x+0.5)}}$$

$$q(x) = 6 \cdot \frac{\sqrt{10}}{7} + (1.5 - 0.5|x|) \sqrt{\frac{| |x|-1 |}{|x|-1}} - 6 \cdot \frac{\sqrt{10}}{14} \sqrt{4 - (|x|-1)^2}$$

$$r(x) = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \sqrt{\frac{| |x|-3 |}{|x|-3}}$$

$$s(x) = -3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \sqrt{\frac{| |x|-4 |}{|x|-4}}$$

$$t(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x}}$$

### Exercícios propostos:

Determine um ponto P de cada curva usando as respectivas equações polares dadas a seguir. Construa cada curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

$$1. OP = p \cdot (1 + (\cos(n\alpha))^3 + (\sin(n\alpha))^2), \text{ onde } n = 3, 4 \text{ e } 5$$

$$2. OP = \frac{p \cdot \cos(2\alpha)}{(\cos(\alpha))^2}$$

$$3. OP = p \cdot |\tan(\alpha)|^{\frac{2}{|\tan(\alpha)|}}$$

$$4. OP^2 = p \cdot \tan(3\alpha)$$

$$5. OP^2 = p \cdot |\cot(5\alpha)|$$

$$6. OP = \frac{p \cdot \alpha}{\alpha + \beta}$$

$$7. OP = p \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$$

$$8. OP = p \cdot \sin(\alpha) \cdot (\cos(2\alpha))^2$$

$$9. OP = p \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(7\alpha))$$

