

# Компьютерные методы небесной механики

## Метод Адамса

Павел Соболев

23 сентября 2021

# Линейные многошаговые методы

Рассмотрим задачу с начальными данными в форме

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Результат аппроксимации решения  $y(t)$ :

$$y_i \approx y(t_i), \text{ где } t_i = t_0 + ih. \quad (2)$$

Линейный многошаговый метод:

$$\begin{aligned} y_{n+s} + a_{s-1} \cdot y_{n+s-1} + a_{s-2} \cdot y_{n+s-2} + \dots + a_0 \cdot y_n = \\ = h \cdot (b_s \cdot f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} \cdot f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1})) + \\ + \dots + b_0 \cdot f(t_n, y_n)). \end{aligned} \quad (3)$$

## Примеры явных методов

Метод Эйлера ( $s = 1, a_{s-1} = -1, b_s = 0$ ):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n); \quad (4)$$

Двухшаговый метод Адамса–Башфорта

( $s = 2, a_{s-1} = -1, b_s = 0$ ):

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, y_n); \quad (5)$$

Трёхшаговый метод Адамса–Башфорта

( $s = 3, a_{s-1} = -1, b_s = 0$ ):

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{23}{12}hf(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{16}{12}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12}hf(t_n, y_n). \quad (6)$$

# Коэффициенты методов Адамса–Башфорта

Используя полиномиальную интерполяцию, находим многочлен  $p$  степени  $s - 1$ , такой что

$$p(t_{n+i}) = f(t_{n+i}, y_{n+i}), \quad i = 0, \dots, s - 1. \quad (7)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{s-j-1} f(t_{n+j}, y_{n+j})}{j! (s-j-1)! h^{s-1}} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s-1} (t - t_{n+i}). \quad (8)$$

Решение уравнения  $y' = p(t)$  — интеграл от  $p$ , а значит,

$$y_{n+s} = y_{n+s-1} + \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} p(t) dt. \quad (9)$$

## Точность явных методов

Подставляя  $p$  в (9), получаем

$$b_{s-j-1} = \frac{(-1)^j}{j! (s-j-1)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s-1} (u+i) du, \quad (10)$$
$$j = 0, \dots, s-1.$$

Замена  $f(t, y)$  на интерполяционный многочлен  $p$  даёт ошибку порядка  $h^s$ . Таким образом,  $s$ -шаговый явный метод Адамса–Башфорта имеет глобальную ошибку  $O(h^s)$ .

## Примеры неявных методов

Обратный метод Эйлера ( $s = 0$ ,  $a_{s-1} = -1$ ,  $b_s \neq 0$ ):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}); \quad (11)$$

Метод трапеций ( $s = 1$ ,  $a_{s-1} = -1$ ,  $b_s \neq 0$ ):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n); \quad (12)$$

Двухшаговый метод Адамса–Мульттона

( $s = 2$ ,  $a_{s-1} = -1$ ,  $b_s \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{5}{12}hf(t_{n+2}, y_{n+2}) + \\ + \frac{2}{3}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}hf(t_n, y_n). \end{aligned} \quad (13)$$

## Точность неявных методов

Метод получения коэффициентов неявных методов аналогичен тому, что был у явных. Однако теперь в процессе интерполяции участвует и точка  $t_n$ :

$$b_{s-j} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^s (u+i-1) du, \quad (14)$$
$$j = 0, \dots, s.$$

Добавление этой точки повышает точность метода до  $O(h^{s+1})$ .

# Интегрирование уравнений движения

Уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \kappa \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (15)$$

интегрируются двухшаговым методом Адамса–Башфорта как

$$r_{i+2} = r_{i+1} + \frac{3}{2}h v_{i+1} - \frac{1}{2}h v_i; \quad (16)$$

$$v_{i+2} = v_{i+1} + \frac{3}{2}h \kappa \frac{r_{i+1}}{r_{i+1}^3} - \frac{1}{2}h \kappa \frac{r_i}{r_i^3}. \quad (17)$$



## Листинг 1: Реализация двухшагового метода Адамса-Башфорта

```
# <...>
# Compute the second value of the solution
# by using the one-step Euler's method
ρ = norm(r)^3
for k in 1:N
    a = x * r[k] / ρ
    r[k] += h * v[k]
    v[k] += h * a
end
# Define a couple of independent coefficients
k1 = 3 / 2 * h; k2 = 1 / 2 * h
# Compute the rest in two steps
for _ in 2:n
    ρk = norm(r)^3
    ρk-1 = norm(rk-1)^3
    # Define a couple of dependent coefficients
    k3 = k1 * x / ρk
    k4 = k2 * x / ρk-1
    for k in 1:N
        a1 = k3 * r[k]
        a2 = k4 * rk-1[k]
        rk-1[k] = r[k]
        r[k] += k1 * v[k] - k2 * vk-1[k]
        vk-1[k] = v[k]
        v[k] += a1 - a2
    end
end
# <...>
```

# Результаты интегрирования положений

Начальные данные:

$$\mathbf{r} = (1.0, 0.0), \quad \mathbf{v} = (0.0, 0.5). \quad (18)$$

Таблица 1: Сравнение результатов интегрирования положений

$h$	$n$	$r_{ab2}[1]$	$r_{ab2}[2]$
$10^{-2}$	$10^2$	0.432121746394179	0.37815749277595
$10^{-3}$	$10^3$	0.431860672712581	0.37796026535278
$10^{-4}$	$10^4$	0.431858022761150	0.37795824197535
$10^{-5}$	$10^5$	0.431857996224758	0.37795822169228
$10^{-6}$	$10^6$	0.431857995959396	0.37795822148942
$10^{-7}$	$10^7$	0.431857995956774	0.37795822148731

# Результаты интегрирования скоростей

Таблица 2: Сравнение результатов интегрирования скоростей

$h$	$n$	$v_{ab2}[1]$	$v_{ab2}[2]$
$10^{-2}$	$10^2$	-1.3165065004310472	0.00568983216741340
$10^{-3}$	$10^3$	-1.3171652194392918	0.00501794516416678
$10^{-4}$	$10^4$	-1.3171719282657055	0.00501101126551030
$10^{-5}$	$10^5$	-1.3171719954650160	0.00501094171752966
$10^{-6}$	$10^6$	-1.3171719961370885	0.00501094102188871
$10^{-7}$	$10^7$	-1.3171719961438284	0.00501094101492268

# Результаты интегрирования положений за цикл

Таблица 3: Сравнение результатов интегрирования положений за цикл

$h$	$n$	$r_{ab2}[1]$	$r_{ab2}[2]$
$10^{-2}$	271	1.0509719048610	-0.16457519920592
$10^{-3}$	2714	1.0000767603444	-0.00124383331363
$10^{-4}$	27141	1.0000000820458	-0.00000190353812
$10^{-5}$	271408	1.0000000001267	-0.00000058425521
$10^{-6}$	2714081	1.0000000000009	0.00000002832152
$10^{-7}$	27140809	0.9999999999997	-0.00000002055261

# Результаты интегрирования скоростей за цикл

Таблица 4: Сравнение результатов интегрирования скоростей за цикл

$h$	$n$	$v_{ab2}[1]$	$v_{ab2}[2]$
$10^{-2}$	271	0.15737122990461	0.45300615550211
$10^{-3}$	2714	0.00076998949004	0.49996341808806
$10^{-4}$	27141	-0.00001339288816	0.49999996625940
$10^{-5}$	271408	0.00000099650822	0.49999999998835
$10^{-6}$	2714081	-0.00000005836344	0.50000000000010
$10^{-7}$	27140809	0.00000004108792	0.50000000000004

## Результаты вычисления интеграла энергии

Интеграл энергии вычисляется как

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\kappa^2}{r} = E = \text{const.} \quad (19)$$

Для указанных начальных данных  $E = -0.875$ .

Таблица 5: Сравнение результатов вычисления интеграла энергии

$h$	$n$	$E$	$\Delta E$
$10^{-2}$	$10^2$	-0.8748722073707290	0.000127792629270984
$10^{-3}$	$10^3$	-0.8749986881874487	0.000001311812551252
$10^{-4}$	$10^4$	-0.8749999868440875	0.000000013155912471
$10^{-5}$	$10^5$	-0.8749999998683713	0.000000000131628708
$10^{-6}$	$10^6$	-0.8749999999985617	0.000000000001438294
$10^{-7}$	$10^7$	-0.8749999999999362	0.000000000000063838

# Результаты вычисления интеграла энергии за цикл

Таблица 6: Сравнение результатов  
вычисления интеграла энергии за цикл

$h$	$n$	$E$	$\Delta E$
$10^{-2}$	271	-0.825054247099501	0.049945752900499
$10^{-3}$	2714	-0.874940466010563	0.000059533989437
$10^{-4}$	27141	-0.874999934733018	0.000000065266982
$10^{-5}$	271408	-0.874999999878500	0.000000000121501
$10^{-6}$	2714081	-0.874999999999061	0.000000000000939
$10^{-7}$	27140809	-0.875000000000267	0.000000000000267

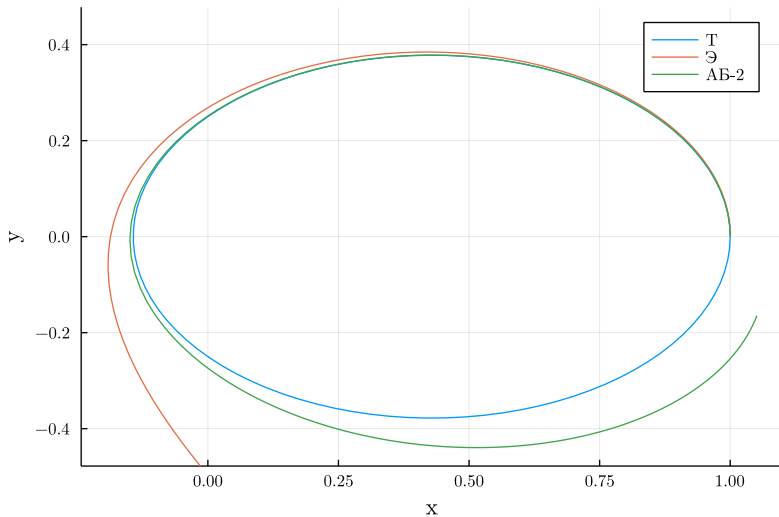


Рис. 1: Визуализация орбиты при  $h = 10^{-2}$ ,  $n = 10^2$



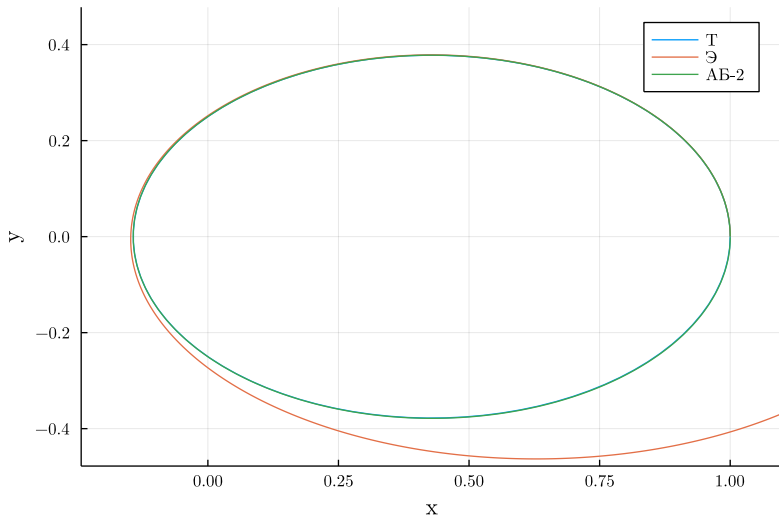


Рис. 2: Визуализация орбиты при  $h = 10^{-3}$ ,  $n = 10^3$

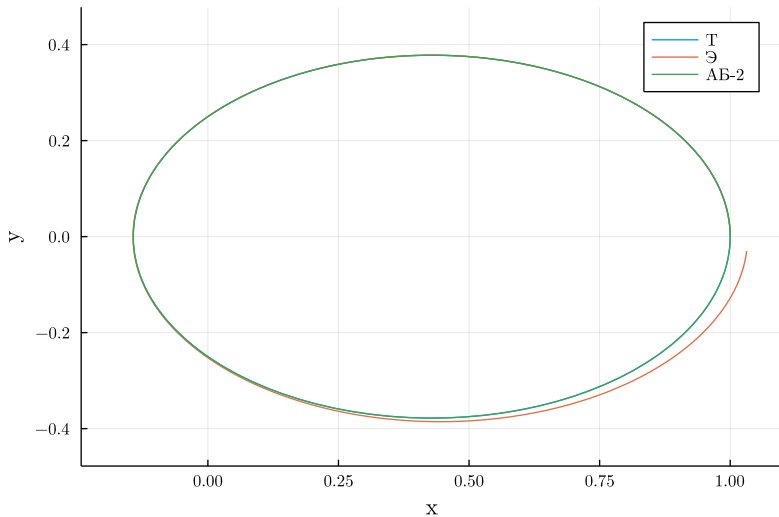


Рис. 3: Визуализация орбиты при  $h = 10^{-4}$ ,  $n = 10^4$

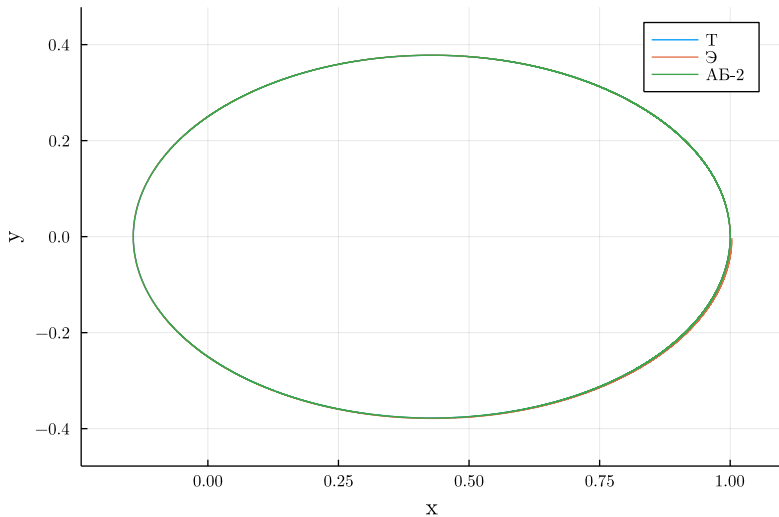


Рис. 4: Визуализация орбиты при  $h = 10^{-5}$ ,  $n = 10^5$