Компьютерные методы небесной механики

Метод Адамса

Павел Соболев

22 сентября 2021

Линейные многошаговые методы

Рассмотрим задачу с начальными данными в форме

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Результат аппроксимации решения $y(t)$:

$$y_i \approx y(t_i), \text{ где } t_i = t_0 + ih. \tag{2}$$

Линейный многошаговый метод:

$$\begin{gathered} y_{n+s} + a_{s-1} \cdot y_{n+s-1} + a_{s-2} \cdot y_{n+s-2} + \cdots + a_0 \cdot y_n = \\ = h \cdot (b_s \cdot f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} \cdot f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1})) + \\ + \cdots + b_0 \cdot f(t_n, y_n)). \end{gathered} \tag{3}$$

Примеры явных методов

Метод Эйлера ($s = 1$, $a_{s-1} = -1$, $b_s = 0$):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n); \tag{4}$$

Двухшаговый метод Адамса–Башфорта
($s = 2$, $a_{s-1} = -1$, $b_s = 0$):

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, y_n); \tag{5}$$

Трёхшаговый метод Адамса–Башфорта
($s = 3$, $a_{s-1} = -1$, $b_s = 0$):

$$\begin{gathered} y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{23}{12}hf(t_{n+2}, y_{n+2}) - \\ - \frac{16}{12}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12}hf(t_n, y_n). \end{gathered} \tag{6}$$

Коэффициенты методов Адамса–Башфорта

Используя полиномиальную интерполяцию, находим многочлен p степени $s-1$, такой что

$$p(t_{n+i}) = f(t_{n+i}, y_{n+i}), \quad i = 0, \dots, s-1. \tag{7}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{s-j-1} f(t_{n+j}, y_{n+j})}{j!\,(s-j-1)!\,h^{s-1}} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{s-1} (t - t_{n+i}). \tag{8}$$

Решение уравнения $y' = p(t)$ — интеграл от p, а значит,

$$y_{n+s} = y_{n+s-1} + \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} p(t)\,dt. \tag{9}$$

Точность явных методов

Подставляя p в (9), получаем

$$b_{s-j-1} = \frac{(-1)^j}{j!\,(s-j-1)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{s-1} (u+i)\,du, \qquad j = 0, \dots, s-1. \tag{10}$$

Замена $f(t, y)$ на интерполяционный многочлен p даёт ошибку порядка h^s. Таким образом, s-шаговый явный метод Адамса–Башфорта имеет глобальную ошибку $O(h^s)$.

Примеры неявных методов

Обратный метод Эйлера ($s = 0$, $a_{s-1} = -1$, $b_s \neq 0$):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}); \tag{11}$$

Метод трапеций ($s = 1$, $a_{s-1} = -1$, $b_s \neq 0$):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n); \tag{12}$$

Двухшаговый метод Адамса–Мультона
($s = 2$, $a_{s-1} = -1$, $b_s \neq 0$):

$$\begin{gathered} y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{5}{12}hf(t_{n+2}, y_{n+2}) + \\ + \frac{2}{3}hf(t_{n+1}, y_{n+1} - \frac{1}{12}hf(t_n, y_n)). \end{gathered} \tag{13}$$

Точность неявных методов

Метод получения коэффициентов неявных методов аналогичен тому, что был у явных. Однако теперь в процессе интерполяции участвует и точка t_n:

$$b_{s-j} = \frac{(-1)^j}{j!\,(s-j)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{s} (u+i-1)\,du, \qquad j = 0, \dots, s. \tag{14}$$

Добавление этой точки повышает точность метода до $O(h^{s+1})$.

Интегрирование уравнений движения

Уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varkappa \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{15}$$

интегрируются двухшаговым методом Адамса–Башфорта как

$$r_{i+2} = r_{i+1} + \frac{3}{2} h v_{i+1} - \frac{1}{2} h v_i; \tag{16}$$

$$v_{i+2} = v_{i+1} + \frac{3}{2} h \varkappa \frac{r_{i+1}}{r^3} - \frac{1}{2} h \varkappa \frac{r_i}{r^3}. \tag{17}$$

Листинг 1: Реализация двухшагового метода Адамса-Башфорта

```
# <...>
# Compute the second value of the solution
# by using the one-step Euler's method
ρ = norm(r)^3
for k in 1:N
    a = ϰ * r[k] / ρ
    r[k] += h * v[k]
    v[k] += h * a
end
# Define a couple of independent coefficients
k₁ = 3 / 2 * h; k₂ = 1 / 2 * h
# Compute the rest in two steps
for _ in 2:n
    ρ = norm(r)^3
    # Define a couple of dependent coefficients
    k₃ = k₁ * ϰ / ρ; k₄ = k₂ * ϰ / ρ
    for k in 1:N
        a₁ = k₃ * r[k]
        a₂ = k₄ * rₖ₋₁[k]
        rₖ₋₁[k] = r[k]
        r[k] += k₁ * v[k] - k₂ * vₖ₋₁[k]
        vₖ₋₁[k] = v[k]
        v[k] += a₁ - a₂
    end
end
# <...>
```

Результаты интегрирования положений

Начальные данные:

$$\mathbf{r} = (1.0, 0.0), \quad \mathbf{v} = (0.0, 0.5). \tag{18}$$

Таблица 1: Сравнение результатов интегрирования положений

h	n	$r_{ab2}[1]$	$r_{ab2}[2]$
10^{-2}	10^{2}	0.435437715211439	0.37944842309144
10^{-3}	10^{3}	0.432208217258280	0.37809932620572
10^{-4}	10^{4}	0.431892934330208	0.37797224730258
10^{-5}	10^{5}	0.431861488949840	0.37795962321643
10^{-6}	10^{6}	0.431858345247357	0.37795836165169
10^{-7}	10^{7}	0.431858030885679	0.37795823550368

Результаты интегрирования скоростей

Таблица 2: Сравнение результатов интегрирования скоростей

h	n	$v_{ab2}[1]$	$v_{ab2}[2]$
10^{-2}	10^{2}	-1.3009362221009624	$0.014953565070778\,94$
10^{-3}	10^{3}	-1.3155265530101994	$0.006019925309096\,97$
10^{-4}	10^{4}	-1.3170072387780147	$0.005111984448295\,79$
10^{-5}	10^{5}	-1.3171555182833297	$0.005021046805356\,62$
10^{-6}	10^{6}	-1.3171703483368804	$0.005011951608124\,97$
10^{-7}	10^{7}	-1.3171718313629457	$0.005011042074288\,13$

Результаты интегрирования положений за цикл

Таблица 3: Сравнение результатов интегрирования положений за цикл

h	n	$r_{ab2}[1]$	$r_{ab2}[2]$
10^{-2}	271	-0.1604975924005	-0.096692805208753
10^{-3}	2714	0.8823584231585	0.093325201740137
10^{-4}	27141	0.9886444114973	0.009826145714103
10^{-5}	271408	0.9988685738941	0.000985674834330
10^{-6}	2714081	0.9998868981071	0.000098688713746
10^{-7}	27140809	0.9999886902216	0.000009845830270

Результаты интегрирования скоростей за цикл

Таблица 4: Сравнение результатов интегрирования скоростей за цикл

h	n	$v_{ab2}[1]$	$v_{ab2}[2]$
10^{-2}	271	0.96438874188171	−2.57672146215406
10^{-3}	2714	−0.21096042231669	0.54435348573780
10^{-4}	27141	−0.01988354566649	0.50554539418657
10^{-5}	271408	−0.00197364723866	0.50056440631491
10^{-6}	2714081	−0.00019740040884	0.50005653786030
10^{-7}	27140809	−0.00001969188954	0.50000565475921

Результаты вычисления интеграла энергии

Интеграл энергии вычисляется как

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\varkappa^2}{r} = E = const. \tag{19}$$

Для указанных начальных данных $E = -0.875$.

Таблица 5: Сравнение результатов вычисления интеграла энергии

h	n	E	ΔE
10^{-2}	10^2	$-0.885062522143366$8	$0.0100625221433667$81
10^{-3}	10^3	$-0.876078702938386$5	$0.00107870293838652$2
10^{-4}	10^4	$-0.875108621612284$4	0.000108621612284421
10^{-5}	10^5	$-0.875010869701776$2	$0.0000108697017762$17
10^{-6}	10^6	$-0.875001087045746$3	$0.00000108704574630$6
10^{-7}	10^7	$-0.875000108705360$3	0.000000108705360269

Результаты вычисления интеграла энергии за цикл

Таблица 6: Сравнение результатов вычисления интеграла энергии за цикл

h	n	E	ΔE
10^{-2}	271	−1.552153224026029	0.677153224026029
10^{-3}	2714	−0.956627303555853	0.081627303555853
10^{-4}	27141	−0.883450312956503	0.008450312956504
10^{-5}	271408	−0.875847910174825	0.000847910174825
10^{-6}	2714081	−0.875084819803159	0.000084819803159
10^{-7}	27140809	−0.875008482268327	0.000008482268327

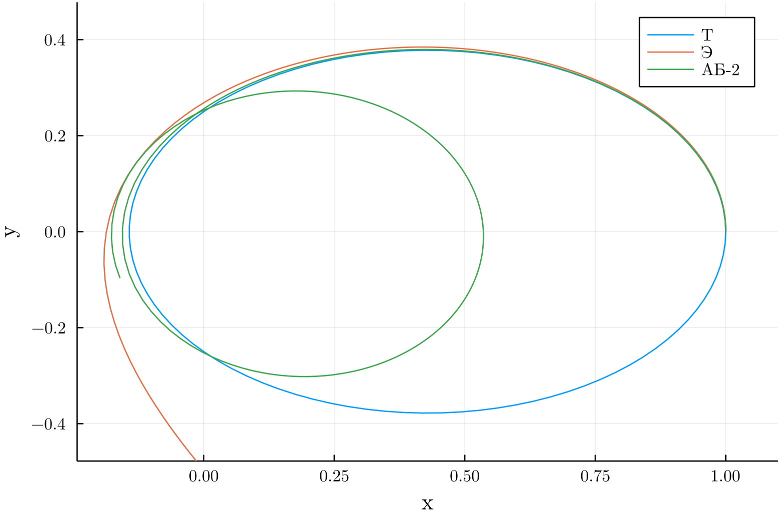

Рис. 1: Визуализация орбиты при $h = 10^{-2}$, $n = 10^2$

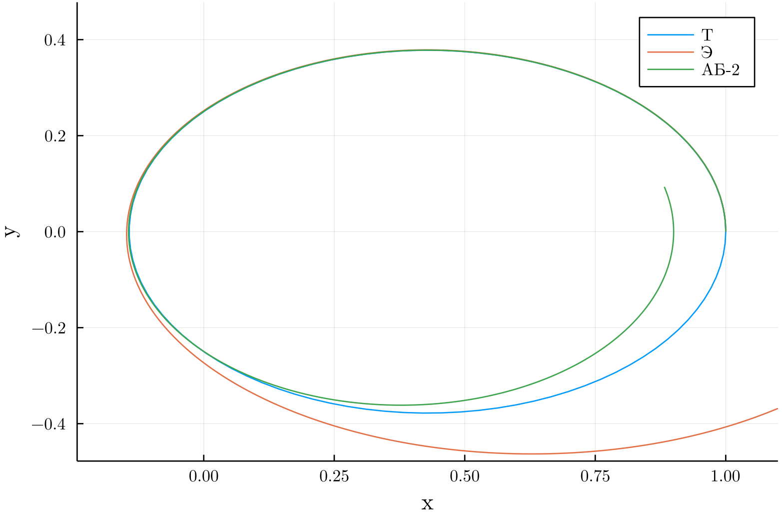

Рис. 2: Визуализация орбиты при $h = 10^{-3}$, $n = 10^3$

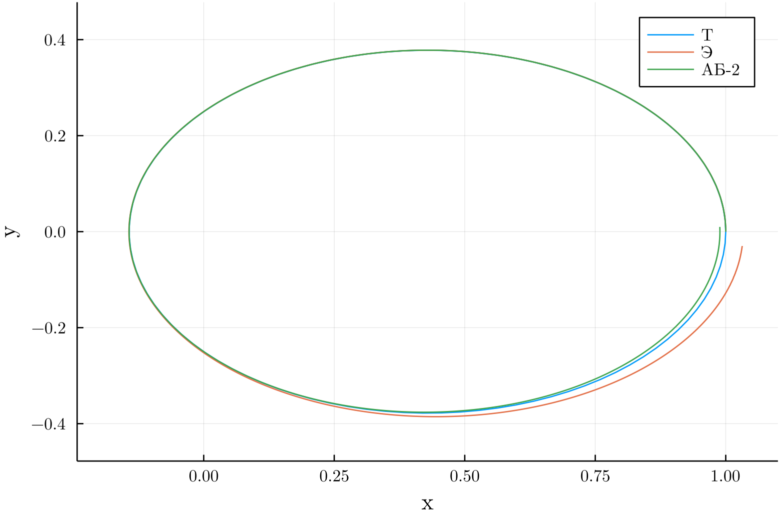

Рис. 3: Визуализация орбиты при $h = 10^{-4}$, $n = 10^4$

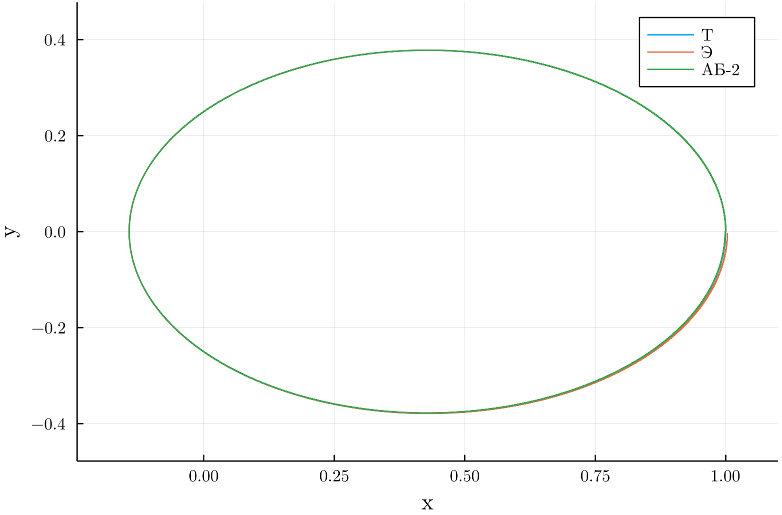

Рис. 4: Визуализация орбиты при $h = 10^{-5}$, $n = 10^5$