Компьютерные методы небесной механики

Метод Эрмита

Павел Соболев

18 ноября 2021

Третья производная положения

Гравитационное уравнение движения:

$$\mathbf{a}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{M_j}{r_{ji}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji}, \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{ji} = \mathbf{r}_{ji}/r_{ji}$. Дифференцируя его по времени, получаем

$$\mathbf{j}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} M_j \left[\frac{\mathbf{v}_{ji}}{r_{ji}^3} - 3 \frac{(\mathbf{r}_{ji} \cdot \mathbf{v}_{ji})\, \mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^5} \right] \tag{2}$$

— рывок, где $\mathbf{v}_{ji} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$.

Обобщение над методом leapfrog

Метод Эрмита (4-ый порядок):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})(\Delta t)^2; \\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{i+1})(\Delta t)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Метод leapfrog (2-ой порядок):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i+1/2}\Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^3\right); \\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_{i+1/2}\Delta t + \mathcal{O}\left((\Delta t)^3\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Вывод метода

Разложим $\mathbf{r}_{i+1}$, $\mathbf{v}_{i+1}$, $\mathbf{a}_{i+1}$ и $\mathbf{j}_{i+1}$ по степеням Δt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 + \tfrac{1}{24}\mathbf{s}_i(\Delta t)^4;\\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{s}_i(\Delta t)^3 + \tfrac{1}{24}\mathbf{c}_i(\Delta t)^4;\\
\mathbf{a}_{i+1} &= \mathbf{a}_i + \mathbf{j}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{c}_i(\Delta t)^3;\\
\mathbf{j}_{i+1} &= \mathbf{j}_i + \mathbf{s}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{c}_i(\Delta t)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Используя последние две строки, получаем для $\mathbf{s}_i$ (snap):

$$\begin{gathered}
6\mathbf{a}_{i+1} - 2\mathbf{j}_{i+1}\Delta t = 6\mathbf{a}_i + 4\mathbf{j}_i\Delta t + \mathbf{s}_i(\Delta t)^2, \implies\\
\mathbf{s}_i(\Delta t)^2 = -6\mathbf{a}_i + 6\mathbf{a}_{i+1} - 4\mathbf{j}_i\Delta t - 2\mathbf{j}_{i+1}\Delta t.
\end{gathered} \tag{6}$$

Вывод метода

Домножив последнюю строку в (5) на Δt и подставив (6), получаем для $\mathbf{c}_i$ (crackle):

$$\mathbf{j}_{i+1}\Delta t = -6\mathbf{a}_i + 6\mathbf{a}_{i+1} - 3\mathbf{j}_i\Delta t - 2\mathbf{j}_{i+1}\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{c}_i(\Delta t)^3, \implies$$

$$\mathbf{c}_i(\Delta t)^3 = 12\mathbf{a}_i - 12\mathbf{a}_{i+1} + 6\mathbf{j}_i\Delta t + 6\mathbf{j}_{i+1}\Delta t. \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) во вторую строку (5), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i &= \mathbf{a}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{s}_i(\Delta t)^3 + \tfrac{1}{24}\mathbf{c}_i(\Delta t)^4 \\
&= \mathbf{a}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2 \\
&- \mathbf{a}_i\Delta t + \mathbf{a}_{i+1}\Delta t - \tfrac{2}{3}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{3}\mathbf{j}_{i+1}(\Delta t)^2 \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_i\Delta t - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_{i+1}\Delta t + \tfrac{1}{4}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{4}\mathbf{j}_{i+1}(\Delta t)^2, \implies
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{i+1})(\Delta t)^2. \qquad (8)$$

Вывод метода

Выделим из первой строки (5) выражение для метода leapfrog:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})\Delta t \\
&\quad = \{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\} - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_i\Delta t + \left\{-\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_{i+1}\right\}\Delta t \\
&\quad = \left\{\mathbf{v}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 + \tfrac{1}{24}\mathbf{s}_i(\Delta t)^4\right\} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_i\Delta t \\
&\quad + \left\{-\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_i\Delta t - \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{24}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{i+1})(\Delta t)^3\right\} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 \\
&\quad - \tfrac{1}{4}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{4}\mathbf{a}_{i+1}(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{6}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 - \tfrac{1}{12}\mathbf{j}_{i+1}(\Delta t)^3 \\
&\quad - \tfrac{1}{4}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{4}\mathbf{a}_{i+1}(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{24}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 + \tfrac{1}{24}\mathbf{j}_{i+1}(\Delta t)^3 \\
&\quad = -\tfrac{1}{24}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 - \tfrac{1}{24}\mathbf{j}_{i+1}(\Delta t)^3 \\
&\quad = -\tfrac{1}{24}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 - \tfrac{1}{24}\left\{\mathbf{j}_i + \mathbf{s}_i\Delta t\right\}(\Delta t)^3 \\
&\quad = -\tfrac{1}{12}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 - \tfrac{1}{24}\mathbf{s}_i(\Delta t)^4. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Вывод метода

С требуемой точностью это то, что нужно:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{12}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})(\Delta t)^2 \\
&\qquad = \tfrac{1}{12}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 - \tfrac{1}{12}\left\{\mathbf{a}_i + \mathbf{j}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}_i(\Delta t)^2\right\}(\Delta t)^2 \\
&\qquad = -\tfrac{1}{12}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3 - \tfrac{1}{24}\mathbf{s}_i(\Delta t)^4.
\end{aligned} \tag{10}$$

А значит,

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})(\Delta t)^2. \tag{11}$$

Реализация

Имеем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1})(\Delta t)^2; \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{i+1})(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Итеративный процесс решения: получаем пробные значения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{p,i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_i(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{j}_i(\Delta t)^3; \\ \mathbf{v}_{p,i+1} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i\Delta t + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}_i(\Delta t)^2, \end{aligned} \tag{13}$$

используем их для вычисления $\mathbf{a}_{p,i+1}$ и $\mathbf{j}_{p,i+1}$, корректируем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{c,i+1} &= \mathbf{v}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{p,i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{p,i+1})(\Delta t)^2; \\ \mathbf{r}_{c,i+1} &= \mathbf{r}_i + \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{c,i+1})\Delta t + \tfrac{1}{12}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{p,i+1})(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Листинг 1: Реализация метода Эрмита

```julia
# <...>
# Define the acceleration and jerk functions
acc(r) = ϰ * r / norm(r)^3
jerk(r, v) = ϰ * (v / norm(r)^3 -
             3 * (r ⋅ v) .* r / norm(r)^5)
# Compute the solution
for _ = 1:n
    # Save old values
    rₒ, vₒ = copy(r), copy(v)
    aₒ, jₒ = acc(r), jerk(r, v)
    # Predict position and velocity
    r += v * h + aₒ * (h^2 / 2) + jₒ * (h^3 / 6)
    v += aₒ * h + jₒ * (h^2 / 2)
    # Predict acceleration and jerk
    a, j = acc(r), jerk(r, v)
    # Correct velocity and position
    v = vₒ + (aₒ + a) * (h / 2) + (jₒ - j) * (h^2 / 12)
    r = rₒ + (vₒ + v) * (h / 2) + (aₒ - a) * (h^2 / 12)
end
# <...>
```

Результаты интегрирования положений

Начальные данные:

$$\mathbf{r} = (1.0, 0.0), \quad \mathbf{v} = (0.0, 0.5). \tag{15}$$

Таблица 1: Сравнение результатов интегрирования положений

h	n	$r[1]$	$r[2]$
10^{-2}	10^{2}	0.43185799708395	0.37795822375649
10^{-3}	10^{3}	0.43185799595678	0.37795822148757
10^{-4}	10^{4}	0.43185799595667	0.37795822148734
10^{-5}	10^{5}	0.43185799595550	0.37795822148700

Таблица 2: Сравнение результатов интегрирования скоростей

h	n	$v[1]$	$v[2]$
10^{-2}	10^{2}	-1.31717198985366	0.00501095407767
10^{-3}	10^{3}	-1.31717199614327	0.00501094101611
10^{-4}	10^{4}	-1.31717199614391	0.00501094101480
10^{-5}	10^{5}	-1.31717199614611	0.00501094101321

Таблица 3: Сравнение результатов интегрирования положений за цикл

h	n	$r[1]$	$r[2]$
10^{-2}	271	0.99993813747413	−0.00184975466342
10^{-3}	2714	0.99999999625280	−0.00004045565939
10^{-4}	27141	0.99999999981830	0.0000952946012
10^{-5}	271408	0.99999999999970	−0.00000047053993

Таблица 4: Сравнение результатов интегрирования скоростей за цикл

h	n	$v[1]$	$v[2]$
10^{-2}	271	0.00391996768321	0.50002409416594
10^{-3}	2714	0.00008093349358	0.49999999860681
10^{-4}	27141	-0.00001905891802	0.49999999990922
10^{-5}	271408	0.00000094108047	0.49999999999972

Результаты вычисления интеграла энергии

Интеграл энергии вычисляется как

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\varkappa^2}{r} = E = const. \tag{16}$$

Для указанных начальных данных $E = -0.875$.

Таблица 5: Сравнение результатов вычисления интеграла энергии

h	n	E	ΔE
10^{-2}	10^2	-0.87500000110683	0.00000000110683
10^{-3}	10^3	-0.87500000000012	0.00000000000012
10^{-4}	10^4	-0.87500000000001	0.00000000000001
10^{-5}	10^5	-0.87500000000048	0.00000000000048

Таблица 6: Сравнение результатов вычисления интеграла энергии за цикл

h	n	E	ΔE
10^{-2}	271	-0.87504042479722	0.00004042479722
10^{-3}	2714	-0.87500000035035	0.00000000035035
10^{-4}	27141	-0.87500000000006	0.00000000000006
10^{-5}	271408	-0.87499999999989	0.00000000000011