

Разложение бимодальной функции распределения на две нормальные составляющие методом наибольшего правдоподобия

Руководитель: И. И. Никифоров

Выполнил: П. Л. Соболев

Задачи

- Определить точечные оценки и доверительные интервалы каждого из параметров модели;
- Построить графики профилей каждого из параметров с отмеченными на них доверительными интервалами;
- Построить график сравнения наблюдаемого распределения с модельным.

Ход выполнения и результаты

Дифференциальный закон распределения:

$$\varphi(f) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(f-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-c}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(f-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Функция правдоподобия:

$$L(f_1, f_2, \dots, f_N; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c) = \prod_{i=1}^N \varphi(f_i; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c).$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - \sum_{i=1}^N \ln \varphi(f_i; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c) = \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{c}{\sigma_1} e^{-\frac{(f_i-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-c}{\sigma_2} e^{-\frac{(f_i-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}(f_1, f_2, \dots, f_N; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c). \end{aligned}$$

Точечные оценки параметров $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c$ находятся минимизацией:

$$\mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{f}; \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, c) \rightarrow \min, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad 0 < c < 1.$$

Результаты минимизации:

Таблица 1: Точечные оценки и доверительные интервалы параметров

Параметр	Значение	σ^-	σ^+
μ_1	-1.5162	0.0550	0.0592
σ_1	0.3948	0.0388	0.0456
μ_2	-0.5195	0.0717	0.0589
σ_2	0.2291	0.0364	0.0509
c	0.7502	0.0591	0.0549

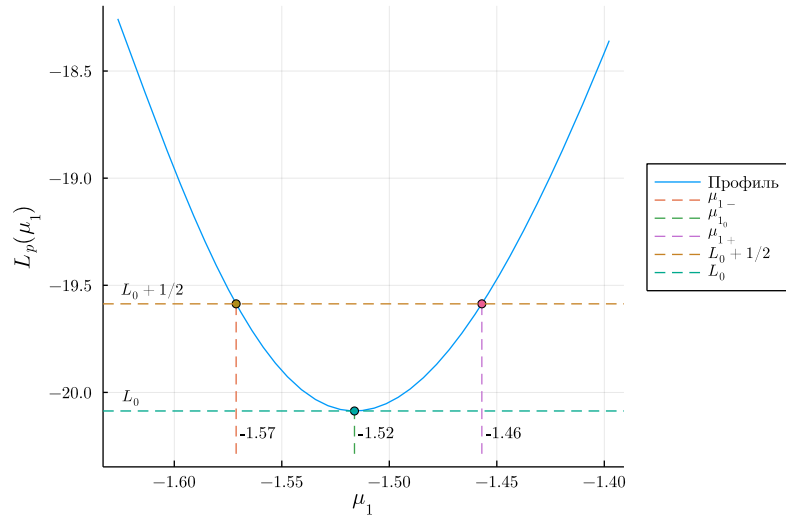


Рис. 1: Профиль параметра μ_1

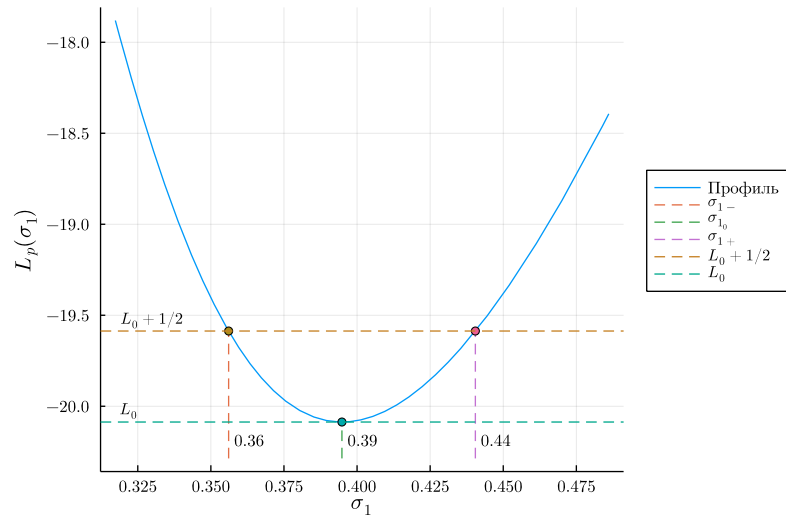


Рис. 2: Профиль параметра σ_1

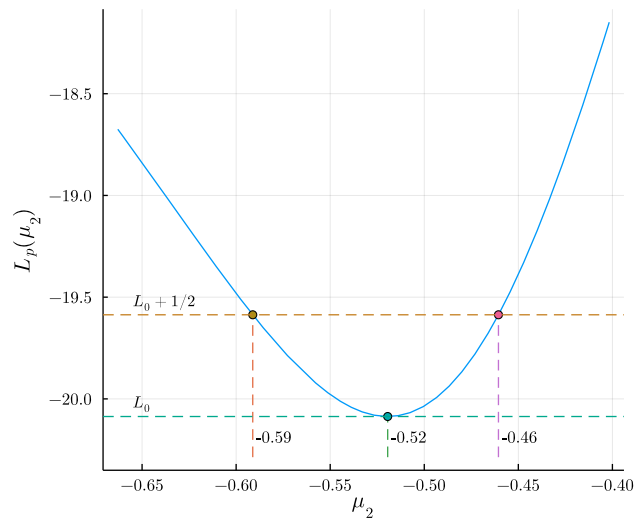


Рис. 3: Профиль параметра μ_2

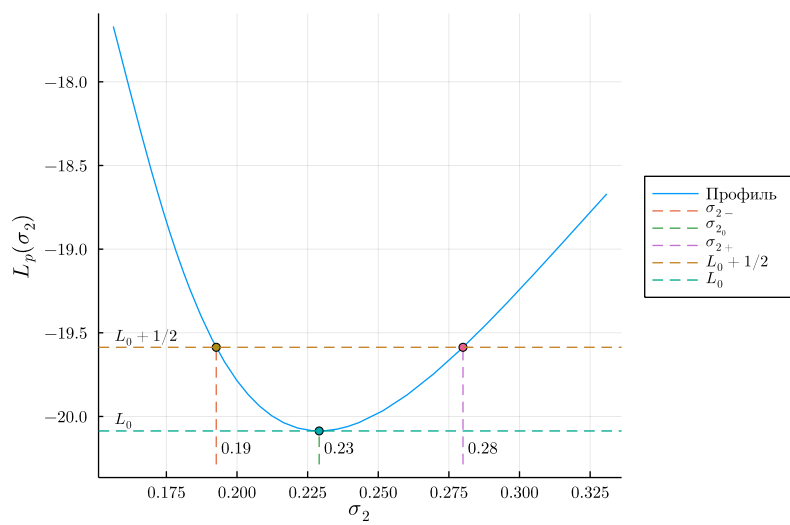


Рис. 4: Профиль параметра σ_2

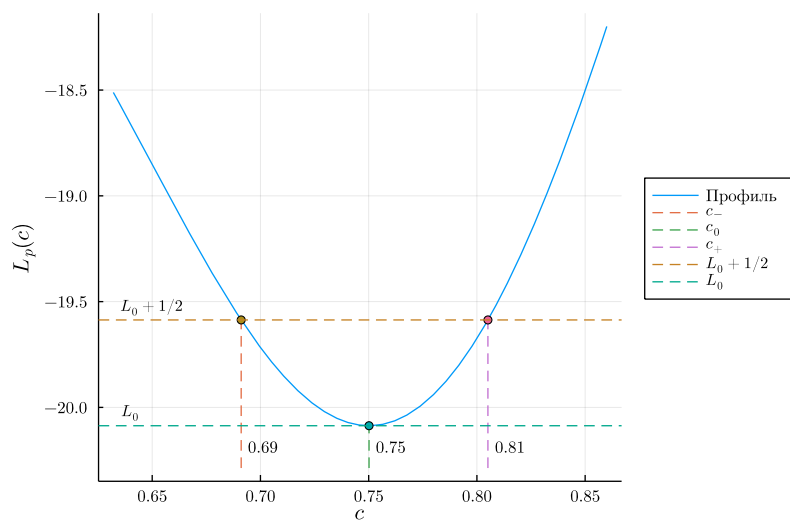


Рис. 5: Профиль параметра c

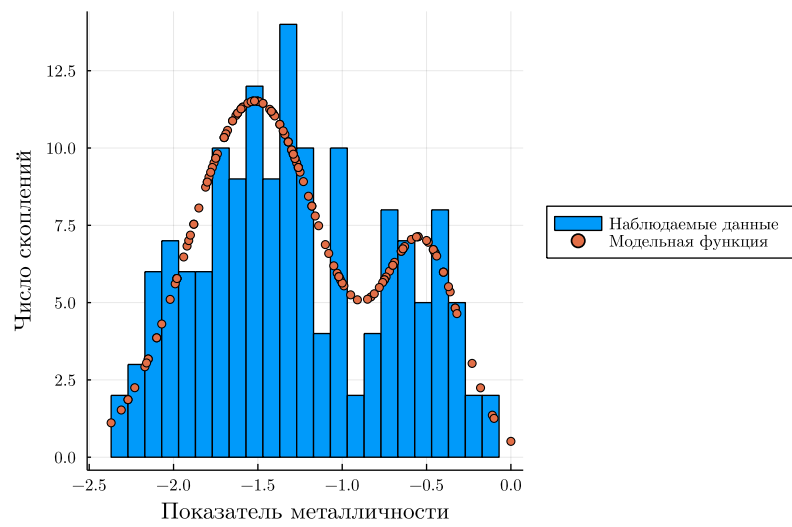


Рис. 6: Модельная функция и гистограмма наблюдаемого распределения