名古屋大学 2019 年度秋季社会数理概論 II/応用数理 II 成果物

About this PDF

このPDFは、2019年度秋季社会数理概論II/応用数理IIの講義における成果物です。

当該講義においては、gitとGithubの基本的な使い方をプログラマーではない数学専攻の学生が学ぶために、様々な大学の入試問題の過去問の回答を自主的に選んで LaTeX で作成し、最終的に結合して一つのPDFとしました。

このPDFファイルは公式のものではありません。

各過去問の著作権は全てその問題を出題した大学にあります。

このPDF作成においては、それぞれの問題は引用の用件を満たしていると考えています。

このPDFファイルの解答は正しいものとは限りませんし、今後修正される予定もありません。

このPDFファイルに関する責任は一切おいかねます。

解答 1. $x = s, t$ での接線を考えると

$$\begin{aligned} y &= (\cos s)x + \sin s - s\cos s \\ y &= (\cos t)x + \sin t - t\cos t \end{aligned} \tag{1.1}$$

2つの接線が直交するので $\cos s \cdot \cos t = -1$.
$-1 \leq \cos s, \cos t \leq 1$ であり, $\cos s \geq \cos t$ としても一般性を失わないので

$$\begin{aligned} &\cos s = 1,\ \cos t = -1 \\ &\therefore s = 2n\pi,\ t = (2k+1)\pi. \quad (n, k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

これと (1.1) より,

$$\begin{aligned} y &= x - 2n\pi = -x + (2k+1)\pi \\ \therefore x &= \left(n + k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad x = \left(-n + k + \frac{1}{2}\right)\pi \end{aligned}$$

解答 2. まず log の定義より

$$x - n > 0 \text{ かつ } 2n - x > 0 \iff n < x < 2n \tag{2.1}$$

この範囲で

$$\begin{aligned} &\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x) \\ \iff &\log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \\ \iff &\begin{cases} a > 1 \\ (x-n)^2 > 2n - x \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ (x-n)^2 < 2n - x \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} a > 1 \\ x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n > 0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(1) $a > 1$ のとき (2.1) と (2.2) に $n = 6$ を代入し

$$6 < x < 12 \text{ かつ } x^2 - 11x + 24 > 0 \iff 8 < x < 12$$

$0 < a < 1$ のとき同様に

$$6 < x < 12 \text{ かつ } x^2 - 11x + 24 < 0 \iff 6 < x < 8$$

以上より求める整数 x は

$$a>1 \text{ のとき } x=9,10,11 \quad 0<a<1 \text{ のとき } x=7$$

(2) $f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおく. すると $f(x)$ は

$$f(n)=-n<0, \quad f(2n)=n^2>0$$

なる下に凸な二次関数である.
$n<x<2n$ で (2.2) を満たす x が存在する必要十分条件を考える.
$(a)\,a>1$ のとき
求める条件は $f(2n-1)>0$ となるときなので,

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \Longleftrightarrow n>2$$

$(b)\,0<a<1$ のとき
求める条件は $f(n+1)<0$ となるときなので,

$$f(n+1)=-n+2<0 \Longleftrightarrow n>2$$

(a), (b) よりいずれの場合でも求める必要十分条件は $n>2$.

解答 3. (1) $x_{n+1}-x_n=x_n^2\geq 0$ より, 数列 $\{x_n\}$ は単調増加する. よって

$$\begin{aligned}&x_{n+1}-x_n=x_n^2\geq x_1^2=a^2 \ (\because a>0)\\ &\therefore\ x_{n+1}\geq x_n+a^2\end{aligned}$$

これを繰り返し用いると

$$x_n\geq x_1+a^2(n-1)=a+a^2(n-1)\to\infty \quad (n\to\infty)$$

以上より数列 $\{x_n\}$ は発散する.

(2) 数学的帰納法により示す.
$(a) n=1$ のとき
$-1<a<0$ つまり $-1<x_1<0$ より満たす.
$(b)-1<x_k<0$ と仮定する.
$x_{k+1}=x_k+x_k^2=\left(x_k+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ より, 仮定の範囲では $-\dfrac{1}{4}\leq x_{k+1}<1$.
よって $-1<x_{k+1}<1$ を満たす.
$(a)\,(b)$ より示された.

(3) $-1<a<0$ のとき (2) より $x_{n+1}, x_n, x_n+1\neq 0$ なので, 漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n+x_n^2}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}<\frac{1}{x_n}-1 \ \ (\because (2)-1<x_n<1)$$

これを繰り返し用いると

$$\frac{1}{x_n}<\frac{1}{x_1}+(-1)\cdot(n-1)=\frac{1}{a}-(n-1)\to-\infty \quad (n\to\infty)$$

以上より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

問題 4.

解答. (1) $2x^2+x+3=2(x^2+1)+x+1$ より, $[2x^2+x+3]=x+1$ である.
次に, $x^5-1=(x^3-x)(x^2+1)+x-1$ より, $[x^5-1]=x-1$ である.
最後に, $[2x^2+x+3][x^5-1]=(x+1)(x-1)=x^2-1=(x^2+1)-2$ より, $[[2x^2+x+3][x^5-1]]=-2$ である.
(2) $[\cdot]$ の定義より,

$$A(x)=\exists P(x)(x^2+1)+[A(x)],$$
$$B(x)=\exists Q(x)(x^2+1)+[B(x)]$$

と書ける．ただし，$P(x)$, $Q(x)$ は整式である．
このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}A(x)B(x) &= \{P(x)(x^2+1)+[A(x)]\}\{Q(x)(x^2+1)+[B(x)]\} \\ &= \{P(x)Q(x)(x^2+1)+(P(x)[B(x)]+Q(x)[A(x)])\}(x^2+1) \\ + & \quad [A(x)][B(x)]\end{aligned}$$

$\{\}$ の中身は整式だから，

$$[A(x)][B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

が成り立つ．

(3)

$$(x\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta(x^2+1)+\cos^2\theta-\sin^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta$$

よって，

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2] = x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

を得る．

(4)

$$\begin{aligned}r &:= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &:= \frac{b}{r} \\ \sin\theta &:= \frac{a}{r}\end{aligned}$$

と定義する．このとき，

$$ax+b = r(x\sin\theta+\cos\theta)$$

と書ける．すると，(3) より

$$\begin{aligned}[(ax+b)^4] &= r^4[[(x\sin\theta+\cos\theta)^2][(x\sin\theta+\cos\theta)^2]] \\ &= r^4[(x\sin 2\theta+\cos 2\theta)^2] \\ &= r^4(x\sin 4\theta+\cos 4\theta)\end{aligned}$$

これが -1 に等しいので，

- $r^4 = 1$
- $\sin 4\theta = 0$
- $\cos 4\theta = -1$

となる．特に $r \in \mathbb{R}$ より，これは

$$r = 1, \quad \theta = -\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という条件と同値である．これを (a,b) に直すと，

$$(a,b) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad (\text{複号任意})$$

を得る．

問題 5.

解答． (1)

$$\begin{aligned}I &:= \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx, \\ I_1 &:= \int_{-1}^1 \tfrac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx, \\ I_2 &:= \int_{-1}^1 \tfrac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx\end{aligned}$$

とおく．

　まず，$I = \frac{1}{2}$ を示す．

$$\sin^2(\pi x) \quad = \quad \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}$$

より，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 1-\cos(2\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2}[x-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と積分できる．

　次に，$I_1 = \frac{1}{2}$ を示そう．

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{1+e^x}{1+e^x}dx \\ &= 2\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx \\ &= 2I = 1 \end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{-1+e^x}{1+e^x}dx \\ &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}dx \end{aligned}$$

特に被積分関数は奇関数であるから，$I_2 = I_1$．これより，$I_1 = \frac{1}{2}$

　(2)

$$a := \int_{-1}^1 f(t)dt, \quad b := \int_{-1}^1 e^t f(t)dt$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned} (1+e^x)f(x) &= \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t)dt \\ &= \sin^2(\pi x) + (e^x+1)a - b \end{aligned}$$

と書ける．すると，辺々積分することで

$$\begin{aligned} a + b = \int_{-1}^1 (1+e^x)f(x)dx = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)dx + a\int_{-1}^1 (1+e^x)dx - 2b \\ = 1 + a(2+e-e^{-1}) - 2b \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} a = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx + 2a - b\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x}dx \\ = \frac{1}{2} + 2a - b \end{aligned}$$

を得る．これらの式を用いて，

- $a = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)}$

- $b = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2}$

が成り立つ．これを元の式に代入して，

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} - \frac{1}{1+e^x}\left\{\frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2}\right\}$$

を得る．

問題 6.

解答. (1) $n+1$ 回目の試行が終わったとき, 赤玉が 2 個である場合は,

(1) n 回目に赤玉が 2 個で, 白玉を引く.

(2) n 回目に白玉が 1 個で, 赤玉を引く.

の二つに分けられる. 白玉と赤玉の数の和は常に 10 であることに注意すると,

$$p(n+1,2) = \frac{7}{10}p(n,2) + \frac{4}{10}p(n,1)$$

が成り立つ.

(2), (3) (1) と同様に $p(n+1,1)$, $p(n+1,0)$ を $p(n,2)$, $p(n,1)$, $p(n,0)$ で表すと, 次の表示を得る.

$$\begin{pmatrix} p(n+1,2) \\ p(n+1,1) \\ p(n+1,0) \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(n,2) \\ p(n,1) \\ p(n,0) \end{pmatrix}$$

ここで,

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と置くと,

$$\begin{pmatrix} p(n,2) \\ p(n,1) \\ p(n,0) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p(0,2) \\ p(0,1) \\ p(0,0) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる.

あとは A^n を求めればよい. いま,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(7,6,5)$ が分かるので,

$$A^n = P\mathrm{daig(7^n, 6^n, 5^n)P^{-1}}$$

を計算して,

$$p(n,1) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{6^n 5 - 5^n 5\}$$

$$p(n,2) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{3^n 10 - 6^n 20 + 5^n 10\}$$

を得る.

(2) $(\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より、

$$\begin{aligned}
(\tan\theta \cdot \frac{1}{\cos^{n-2}\theta})' &= \frac{1}{\cos^n\theta} + \tan\theta \cdot \frac{2-n}{\cos^{n-1}\theta} \cdot (-\sin\theta) && (3.1) \\
&= \frac{1}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^n\theta} \cdot \sin^2\theta && (3.2) \\
&= \frac{1}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^n\theta} \cdot (1-\cos^2\theta) && (3.3) \\
&= \frac{1}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^{n-2}\theta} && (3.4) \\
&= \frac{n-1}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^{n-2}\theta} && (3.5) \\
& && (3.6)
\end{aligned}$$

この式の両辺を 0 から $\frac{\pi}{3}$ まで積分する。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{n-1}{\cos^n\theta} + \frac{n-2}{\cos^{n-2}\theta}) d\theta && (3.7) \\
&= (n-1)I_n - (n-2)I_{n-2} && (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta})'d\theta \qquad (3.9)\\ &= \sqrt{3}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2})^{n-2}} \qquad (3.10)\end{aligned}$$

式を整理して、

$$I_n = \frac{(n-2)I_{n-2} + \sqrt{3}\cdot 2^{n-2}}{n-1} \qquad (3.11)$$

(2)

$$\begin{aligned}5.1^2 &= 26.01\cdots\\ 6.1^2 &= 37.2\cdots\\ 7.1^2 &= 50.41\cdots\\ 8.1^2 &= 65.6\cdots\\ 9.1^2 &= 82.8\cdots\\ 10.1^2 &= 102.01\cdots\\ 11.1^2 &= 123.2\cdots\\ 12.1^2 &= 146.4\cdots\end{aligned}$$

以上より条件を満たす n は小さい順に

$$26, 37, 50, 65, 82, 101, 102, 122, 123, 145, \cdots$$

よって 145

(別解法)
$\sqrt{n}$ の整数部分を m とおく.
問題の条件から $\sqrt{n}$ は整数ではないので

$$\begin{aligned}m < \sqrt{n} &< m+1\\ m^2 < n &< (m+1)^2\end{aligned}$$

となるので, $n = m^2 + k$ のようになる. (ただし $k = 1, 2, \cdots 2m$) また小数点以下に関する条件から

$$\begin{aligned}0.01 \leq \sqrt{n} - m &< 0.1\\ m + 0.01 \leq \sqrt{n} &< m + 0.1\\ (m+0.01)^2 \leq n(= m^2 + k) &< m + 0.1\\ 0.02m + 0.0001 \leq k &< 0.2m + 0.01\end{aligned}$$

ここで $0.02m + 0.0001 \geq 1$ とすると, $m \leq 49.995$. (1) によって一番小さい n は $26 = 5^2 + 1$ であった. (つまり $m = 5$.)
一方で, $f(m) = 0.2m+0.01$ としておくと, $f(5) = 1.01, f(6) = 1.21 f(7) = 1.41, f(8) = 1.61, f(9) = 1.81, f(10) = 2.01, f(11) = 2.21, f(12) = 2.41$ のようになる. つまり $m = 5, 6, \cdots, 12$ のときの k の個数は $1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2$ のようになる. 求めるものは, 小さいものから 10 番目であるので小さいものから数えてゆくと, $m = 12$ で $k = 1$ のときつまり $n = 12^2 + 1 = 145$.
以上から 145 が答えである.

問題 4. (1) (a_1, a_2, a_3) の組み合わせとして起こりうるものとそれらが持つサイクルは,

$$\begin{aligned}&(1,2,3) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3\\ &(1,3,2) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \to a_3 = 2\\ &(2,1,3) \quad a_1 = 2 \to a_2 = 1, \quad a_3 = 3\\ &(2,3,1) \quad a_1 = 2 \to a_2 = 3 \to a_3 = 1\\ &(3,1,2) \quad a_1 = 3 \to a_3 = 2 \to a_2 = 1\\ &(3,2,1) \quad a_1 = 3 \to a_3 = 1, \quad a_2 = 2\end{aligned}$$

である．このうち, $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)$ が長さ 1 のサイクルを持つ．従って求める確率は,

$$\frac{4}{6}=\underline{\frac{2}{3}}$$

(2)$n=4$ のとき長さ 4 のサイクルは相異なる $i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$ を用いて以下のように表せる．

$$a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to a_l=i$$

ここで i,j,k,l の組み合わせは,

$$(i,j,k,l)=(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2)$$

の 6 通りである．よって長さ 4 のサイクルを含む順列は以下のものである．

$$(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,4,2,1),(3,1,4,2),(4,3,1,2),(4,1,2,3)$$

(3)　$x>0$ において, $f(x)=\frac{1}{x}$ は単調減少.
また, n 以下の正の整数 k に対して, $k\leqq x\leqq k+1$ のとき, $f(x)\leqq f(k)$
以上より, 下図から面積を比較して,

$$\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\int_k^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=[\log x]_k^{n+1}=\log(n+1)-\log k$$

よって, 題意は示された． □

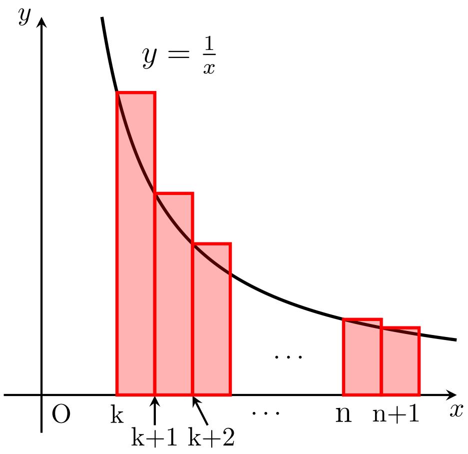

図　$y=\frac{1}{x}$ のグラフと長方形

$g(x)=F(x)-f(x)$ とする．曲線 $y=g(x)$ が x 軸と異なる 3 つの交点をもつためには, $g(x)$ が 2 つの極値をもち, かつ極大値と極小値の積が負になればよい．

微分積分学の基本定理より,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$$

である．これより,

$$\begin{aligned}g^{'}(x)&=f(x)-f^{'}(x)\\&=x^2+(a-2)x-2a\\&=(x+a)(x-2).\end{aligned}$$

よって, 求める条件は

$$a\neq-2 \tag{3.12}$$

$$g(-a)g(2)<0 \tag{3.13}$$

で与えられる．

ここで,

$$0>g(-a)g(2)=(F(-a)-f(-a))(F(2)-f(2)).$$

さらに

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2-ax$$

なので

$$g(-a) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + a,$$
$$g(2) = -(a + \frac{4}{3})$$

がわかる．つまり

$$g(-a)g(2) = -a(\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{2}a + 1)(a + \frac{4}{3})$$

が負となるような a の範囲を求めて $a \neq -2$ を考慮すれば，それがいま考えている問題に対する答えである．$g(-a)g(2) < 0$ となる a の範囲は

$$a < -3 - \sqrt{3} \text{ または } -\frac{4}{3} < a < -3 + \sqrt{3} \text{ または } a > 0$$

である．これは $a = -2$ を含まないので (1) (2) を同時に満たす a の範囲である．よって，これが答えとなる．

(3)

(2) より P_n，P_{n+1} の座標はそれぞれ $(\cos n\alpha, \sin n\alpha)$，$(\cos(n+1)\alpha, \sin(n+1)\alpha)$ であるので，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} &= |\mathrm{OP}_n||\mathrm{OP}_{n+1}|\frac{1}{2}\sin\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left|\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\cos(n+1)\alpha\right| \\ &= \frac{1}{2}|\sin\alpha| \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\end{aligned}$$

となる．ここで $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k$ より，$\sin\alpha = \frac{2k}{1+k^2}$ なので，

$$\triangle P_nOP_{n+1} = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{k}{1+k^2}$$

となる．

平成３１年度名古屋大学文系大問２（1）の解答

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - k(y_n + y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + k(x_n + x_{n+1}) \end{cases}$$

について，1 行目を 2 行目に代入・整理すると

$$y_{n+1} = \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

が得られる．さらに，この式を $x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$ に代入・整理すると

$$x_{n+1} = \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}\frac{1-k^2}{1+k^2} &= (1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2}))\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos\alpha, \\ \frac{2k}{1+k^2} &= 2\tan(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sin\alpha\end{aligned}$$

であるから

$$x_{n+1} = x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha,\ y_{n+1} = x_n\sin\alpha + y_n\cos\alpha$$

となる．P_0 の座標は $(1, 0)$ であるから

$$x_1 = x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha = \cos\alpha,\ y_1 = x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha = \sin\alpha$$

である．また

$$x_2 = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,\ y_2 = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

である．従って，P_1 の座標は $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，P_2 の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ である．

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと, $a \geq 1$ である. このとき $\sqrt{n}$ が整数でなく, 十進数における小数点第 1 位が 0 となり, かつ第 2 位が 0 でないための必要十分条件は

$$a + 0.01 \leq \sqrt{n} < a + 0.1$$

となる. 各辺を 2 乗して a^2 を引くと, $a \geq 1$ から $0.02a + 0.0001 > 0$ となるため,

$$0 < 0.02a + 0.0001 \leq n - a^2 < 0.2a + 0.01 \tag{3.14}$$

これを満たす a が存在する n の中で最小のものが求める n である. $n - a^2$ は正整数であるため, a は $0.2a + 0.01 > 1$ を満たす必要がある. $0.2a + 0.01$ が単調増加であり, $0.2 \times 4 + 0.01 = 0.81 < 1$, $0.2 \times 5 + 0.01 = 1.01 > 1$ から $a \geq 5$ となることが必要である. また $n - a^2 \geq 1$ より $n \geq a^2 + 1$ となり, $a \geq 5$ から $n = 26$ が条件を満たす最小のものとなる. 実際, 不等式 (**??**) に $a = 5$, $n = 26$ を代入すると

$$0 < 0.1001 \leq 1 < 1.01$$

となり条件を満たしていることが確認できる.

答え $n = 26$