正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと, $a \geq 1$ である. このとき $\sqrt{n}$ が整数でなく, 十進数における小数点第1位が0となり, かつ第2位が0でないための必要十分条件は

$$a + 0.01 \leq \sqrt{n} < a + 0.1$$

となる. 各辺を2乗して a^2 を引くと, $a \geq 1$ から $0.02a + 0.0001 > 0$ となるため,

$$0 < 0.02a + 0.0001 \leq n - a^2 < 0.2a + 0.01 \tag{1}$$

これを満たす a が存在する n の中で最小のものが求める n である. $n - a^2$ は正整数であるため, a は $0.2a + 0.01 > 1$ を満たす必要がある. $0.2a + 0.01$ が単調増加であり, $0.2 \times 4 + 0.01 = 0.81 < 1$, $0.2 \times 5 + 0.01 = 1.01 > 1$ から $a \geq 5$ となることが必要である. また $n - a^2 \geq 1$ より $n \geq a^2 + 1$ となり, $a \geq 5$ から $n = 26$ が条件を満たす最小のものとなる. 実際, 不等式 (1) に $a = 5$, $n = 26$ を代入すると

$$0 < 0.1001 \leq 1 < 1.01$$

となり条件を満たしていることが確認できる.

答え $n = 26$