

# 名古屋大学 2019 年度秋季社会数理概論 II/応用数理 II 成果物

## About this PDF

この PDF は、2019 年度秋季社会数理概論 II/応用数理 II の講義における成果物です。

当該講義においては、git と Github の基本的な使い方をプログラマーではない数学専攻の学生が学ぶために、様々な大学の入試問題の過去問の回答を自主的に選んで  $\text{\LaTeX}$  で作成し、最終的に結合して一つの PDF としました。

この PDF ファイルは公式のものではありません。

各過去問の著作権は全てその問題を出題した大学にあります。

この PDF 作成においては、それぞれの問題は引用の要件を満たしていると考えています。

この PDF ファイルの解答は正しいものとは限りませんし、今後修正される予定もありません。

この PDF ファイルに関する責任は一切おいかねます。

解答 1.  $x = s, t$  での接線を考えると

$$\begin{aligned}y &= (\cos s)x + \sin s - s \cos s \\y &= (\cos t)x + \sin t - t \cos t\end{aligned}\tag{1.1}$$

2 つの接線が直交するので  $\cos s \cdot \cos t = -1$ .

$-1 \leq \cos s, \cos t \leq 1$  であり、 $\cos s \geq \cos t$  としても一般性を失わないので

$$\begin{aligned}\cos s &= 1, \cos t = -1 \\ \therefore s &= 2n\pi, t = (2k+1)\pi. \quad (n, k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

これと (??) より,

$$\begin{aligned}y &= x - 2n\pi = -x + (2k+1)\pi \\ \therefore x &= \left(n + k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad x = \left(-n + k + \frac{1}{2}\right)\pi\end{aligned}$$

解答 2. まず  $\log$  の定義より

$$x - n > 0 \text{ かつ } 2n - x > 0 \iff n < x < 2n\tag{2.1}$$

この範囲で

$$\begin{aligned}
 & \log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x) \\
 \iff & \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \\
 \iff & \begin{cases} a > 1 \\ (x-n)^2 > 2n-x \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ (x-n)^2 < 2n-x \end{cases} \\
 \iff & \begin{cases} a > 1 \\ x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n > 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n < 0 \end{cases} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

(1)  $a > 1$  のとき (??) と (??) に  $n = 6$  を代入し

$$6 < x < 12 \text{ かつ } x^2 - 11x + 24 > 0 \iff 8 < x < 12$$

$0 < a < 1$  のとき同様に

$$6 < x < 12 \text{ かつ } x^2 - 11x + 24 < 0 \iff 6 < x < 8$$

以上より求める整数  $x$  は

$$a > 1 \text{ のとき } x = 9, 10, 11 \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } x = 7$$

(2)  $f(x) = x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n$  とおく. すると  $f(x)$  は

$$f(n) = -n < 0, \quad f(2n) = n^2 > 0$$

なる下に凸な二次関数である.

$n < x < 2n$  で (??) を満たす  $x$  が存在する必要十分条件を考える.

(a)  $a > 1$  のとき

求める条件は  $f(2n-1) > 0$  となるときなので,

$$f(2n-1) = n(n-2) > 0 \iff n > 2$$

(b)  $0 < a < 1$  のとき

求める条件は  $f(n+1) < 0$  となるときなので,

$$f(n+1) = -n + 2 < 0 \iff n > 2$$

(a), (b) よりいずれの場合でも求める必要十分条件は  $n > 2$ .

**解答 3.** (1)  $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$  より, 数列  $\{x_n\}$  は単調増加する. よって

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= x_n^2 \geq x_1^2 = a^2 \quad (\because a > 0) \\
 \therefore x_{n+1} &\geq x_n + a^2
 \end{aligned}$$

これを繰り返し用いると

$$x_n \geq x_1 + a^2(n-1) = a + a^2(n-1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

以上より数列  $\{x_n\}$  は発散する.

(2) 数学的帰納法により示す.

(a)  $n = 1$  のとき

$-1 < a < 0$  つまり  $-1 < x_1 < 0$  より満たす.

(b)  $-1 < x_k < 0$  と仮定する.

$$x_{k+1} = x_k + x_k^2 = \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ より, 仮定の範囲では } -\frac{1}{4} \leq x_{k+1} < 1.$$

よって  $-1 < x_{k+1} < 1$  を満たす.

(a) (b) より示された.

(3)  $-1 < a < 0$  のとき (2) より  $x_{n+1}, x_n, x_n + 1 \neq 0$  なので, 漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n + x_n^2} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n + 1} < \frac{1}{x_n} - 1 \quad (\because -1 < x_n < 1)$$

これを繰り返し用いると

$$\frac{1}{x_n} < \frac{1}{x_1} + (-1) \cdot (n-1) = \frac{1}{a} - (n-1) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

以上より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$  なので,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

#### 問題 4.

解答. (1)  $2x^2 + x + 3 = 2(x^2 + 1) + x + 1$  より,  $[2x^2 + x + 3] = x + 1$  である.

次に,  $x^5 - 1 = (x^3 - x)(x^2 + 1) + x - 1$  より,  $[x^5 - 1] = x - 1$  である.

最後に,  $[2x^2 + x + 3][x^5 - 1] = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = (x^2 + 1) - 2$  より,  $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = -2$  である.

(2)  $[\cdot]$  の定義より,

$$\begin{aligned} A(x) &= \exists P(x)(x^2 + 1) + [A(x)], \\ B(x) &= \exists Q(x)(x^2 + 1) + [B(x)] \end{aligned}$$

と書ける. ただし,  $P(x), Q(x)$  は整式である.

このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \{P(x)(x^2 + 1) + [A(x)]\}\{Q(x)(x^2 + 1) + [B(x)]\} \\ &= \{P(x)Q(x)(x^2 + 1) + (P(x)[B(x)] + Q(x)[A(x)])\}(x^2 + 1) \\ &\quad + [A(x)][B(x)] \end{aligned}$$

$\{\}$  の中身は整式だから,

$$[A(x)][B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

が成り立つ.

(3)

$$(x \sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta (x^2 + 1) + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2x \sin \theta \cos \theta$$

よって,

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

を得る.

(4)

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta &:= \frac{b}{r} \\ \sin \theta &:= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

と定義する. このとき,

$$ax + b = r(x \sin \theta + \cos \theta)$$

と書ける. すると, (3) より

$$\begin{aligned} [(ax + b)^4] &= r^4[(x \sin \theta + \cos \theta)^2][(x \sin \theta + \cos \theta)^2] \\ &= r^4[(x \sin 2\theta + \cos 2\theta)^2] \\ &= r^4(x \sin 4\theta + \cos 4\theta) \end{aligned}$$

これが  $-1$  に等しいので,

- $r^4 = 1$
- $\sin 4\theta = 0$
- $\cos 4\theta = -1$

となる. 特に  $r \in \mathbb{R}$  より, これは

$$r = 1, \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という条件と同値である. これを  $(a, b)$  に直すと,

$$(a, b) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad (\text{複号任意})$$

を得る.

**問題 5.**

**解答.** (1)

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx, \\ I_1 &:= \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + e^x} dx, \\ I_2 &:= \int_{-1}^1 \frac{e^x \sin^2(\pi x)}{1 + e^x} dx \end{aligned}$$

とおく.

まず,  $I = \frac{1}{2}$  を示す.

$$\sin^2(\pi x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2}$$

より,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 - \cos(2\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と積分できる.

次に,  $I_1 = \frac{1}{2}$  を示そう.

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) \frac{1 + e^x}{1 + e^x} dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx \\ &= 2I = 1 \end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) \frac{-1 + e^x}{1 + e^x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} dx \end{aligned}$$

特に被積分関数は奇関数であるから,  $I_2 = I_1$ . これより,  $I_1 = \frac{1}{2}$

(2)

$$a := \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad b := \int_{-1}^1 e^t f(t) dt$$

とおく. すると,

$$\begin{aligned} (1 + e^x) f(x) &= \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1) f(t) dt \\ &= \sin^2(\pi x) + (e^x + 1)a - b \end{aligned}$$

と書ける. すると, 辺々積分することで

$$\begin{aligned} a + b &= \int_{-1}^1 (1 + e^x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx + a \int_{-1}^1 (1 + e^x) dx - 2b \\ &= 1 + a(2 + e - e^{-1}) - 2b \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} a &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1 + e^x} dx + 2a - b \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^x} dx \\ &= \frac{1}{2} + 2a - b \end{aligned}$$

を得る。これらの式を用いて、

$$\bullet a = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)}$$

$$\bullet b = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。これを元の式に代入して、

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} - \frac{1}{1+e^x} \left\{ \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2} \right\}$$

を得る。

#### 問題 6.

解答. (1)  $n+1$  回目の試行が終わったとき、赤玉が 2 個である場合は、

(1)  $n$  回目に赤玉が 2 個で、白玉を引く。

(2)  $n$  回目に白玉が 1 個で、赤玉を引く。

の二つに分けられる。白玉と赤玉の数の和は常に 10 であることに注意すると、

$$p(n+1, 2) = \frac{7}{10}p(n, 2) + \frac{4}{10}p(n, 1)$$

が成り立つ。

(2), (3) (1) と同様に  $p(n+1, 1)$ ,  $p(n+1, 0)$  を  $p(n, 2)$ ,  $p(n, 1)$ ,  $p(n, 0)$  で表すと、次の表示を得る。

$$\begin{pmatrix} p(n+1, 2) \\ p(n+1, 1) \\ p(n+1, 0) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(n, 2) \\ p(n, 1) \\ p(n, 0) \end{pmatrix}$$

ここで、

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{pmatrix} p(n, 2) \\ p(n, 1) \\ p(n, 0) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p(0, 2) \\ p(0, 1) \\ p(0, 0) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。

あとは  $A^n$  を求めればよい。いま、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、 $P^{-1}AP = \text{diag}(7, 6, 5)$  が分かるので、

$$A^n = P \text{diag}(7^n, 6^n, 5^n) P^{-1}$$

を計算して,

$$p(n, 1) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{6^n 5 - 5^n 5\}$$
$$p(n, 2) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{3^n 10 - 6^n 20 + 5^n 10\}$$

を得る.

(2)

$$\begin{aligned} 5.1^2 &= 26.01 \dots \\ 6.1^2 &= 37.2 \dots \\ 7.1^2 &= 50.41 \dots \\ 8.1^2 &= 65.6 \dots \\ 9.1^2 &= 82.8 \dots \\ 10.1^2 &= 102.01 \dots \\ 11.1^2 &= 123.2 \dots \\ 12.1^2 &= 146.4 \dots \end{aligned}$$

以上より条件を満たす  $n$  は小さい順に

$$26, 37, 50, 65, 82, 101, 102, 122, 123, 145, \dots$$

よって 145

(別解法)

$\sqrt{n}$  の整数部分を  $m$  とおく.

問題の条件から  $\sqrt{n}$  は整数ではないので

$$\begin{aligned} m &< \sqrt{n} < m + 1 \\ m^2 &< n < (m + 1)^2 \end{aligned}$$

となるので,  $n = m^2 + k$  のようになる. (ただし  $k = 1, 2, \dots, 2m$ ) また小数点以下に関する条件から

$$\begin{aligned} 0.01 &\leq \sqrt{n} - m < 0.1 \\ m + 0.01 &\leq \sqrt{n} < m + 0.1 \\ (m + 0.01)^2 &\leq n (= m^2 + k) < m + 0.1 \\ 0.02m + 0.0001 &\leq k < 0.2m + 0.01 \end{aligned}$$

ここで  $0.02m + 0.0001 \geq 1$  とすると,  $m \leq 49.995$ . (1) によって一番小さい  $n$  は  $26 = 5^2 + 1$  であった. (つまり  $m = 5$ .)

一方で,  $f(m) = 0.2m + 0.01$  としておくと,  $f(5) = 1.01, f(6) = 1.21, f(7) = 1.41, f(8) = 1.61, f(9) = 1.81, f(10) = 2.01, f(11) = 2.21, f(12) = 2.41$  のようになる. つまり  $m = 5, 6, \dots, 12$  のときの  $k$  の個数は  $1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2$  のようになる. 求めるものは, 小さいものから 10 番目であるので小さいものから数えてゆくと,  $m = 12$  で  $k = 1$  のときつまり  $n = 12^2 + 1 = 145$ .

以上から 145 が答えである.

■問題 4. (1)  $(a_1, a_2, a_3)$  の組み合わせとして起こりうるものとそれらが持つサイクルは,

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) & a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3 \\ (1, 3, 2) & a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \rightarrow a_3 = 2 \\ (2, 1, 3) & a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 1, \quad a_3 = 3 \\ (2, 3, 1) & a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 3 \rightarrow a_3 = 1 \\ (3, 1, 2) & a_1 = 3 \rightarrow a_3 = 2 \rightarrow a_2 = 1 \\ (3, 2, 1) & a_1 = 3 \rightarrow a_3 = 1, \quad a_2 = 2 \end{aligned}$$

である. このうち,  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$  が長さ 1 のサイクルを持つ. 従って求める確率は,

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(2)  $n = 4$  のとき長さ 4 のサイクルは相異なる  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$  を用いて以下のように表せる.

$$a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow a_l = i$$

ここで  $i, j, k, l$  の組み合わせは,

$$(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)$$

の 6 通りである. よって長さ 4 のサイクルを含む順列は以下のものである.

$$(2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 2, 1), (3, 1, 4, 2), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$$

(3)

(2) より  $P_n, P_{n+1}$  の座標はそれぞれ  $(\cos n\alpha, \sin n\alpha), (\cos(n+1)\alpha, \sin(n+1)\alpha)$  であるので,

$$\begin{aligned} \triangle P_n O P_{n+1} &= |OP_n| |OP_{n+1}| \frac{1}{2} \sin \angle P_n O P_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} |\sin(n+1)\alpha \cos n\alpha - \sin n\alpha \cos(n+1)\alpha| \\ &= \frac{1}{2} |\sin \alpha| \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

となる. ここで  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k$  より,  $\sin \alpha = \frac{2k}{1+k^2}$  なので,

$$\triangle P_n O P_{n+1} = \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{k}{1+k^2}$$

となる.



## 平成31年度名古屋大学文系大問2 (1) の解答

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - k(y_n + y_{n+1}) \\ y_{n+1} &= y_n + k(x_n + x_{n+1}) \end{cases}$$

について、1行目を2行目に代入・整理すると

$$y_{n+1} = \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

が得られる。さらに、この式を  $x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$  に代入・整理すると

$$x_{n+1} = \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{1-k^2}{1+k^2} &= (1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos \alpha, \\ \frac{2k}{1+k^2} &= 2 \tan(\frac{\alpha}{2}) \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) = \sin \alpha \end{aligned}$$

であるから

$$x_{n+1} = x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha, \quad y_{n+1} = x_n \sin \alpha + y_n \cos \alpha$$

となる。P<sub>0</sub>の座標は(1, 0)であるから

$$x_1 = x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha = \cos \alpha, \quad y_1 = x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha = \sin \alpha$$

である。また

$$x_2 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, \quad y_2 = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

である。従って、P<sub>1</sub>の座標は  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、P<sub>2</sub>の座標は  $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$  である。