名古屋大学 2019 年度秋季社会数理概論 II/応用数理 II 成果物

About this PDF

このPDFは、2019年度秋季社会数理概論II/応用数理IIの講義における成果物です。

当該講義においては、gitとGithubの基本的な使い方をプログラマーではない数学専攻の学生が学ぶために、様々な大学の入試問題の過去問の回答を自主的に選んでLaTeXで作成し、最終的に結合して一つのPDFとしました。

このPDFファイルは公式のものではありません。

各過去問の著作権は全てその問題を出題した大学にあります。

このPDF作成においては、それぞれの問題は引用の用件を満たしていると考えています。

このPDFファイルの解答は正しいものとは限りませんし、今後修正される予定もありません。

このPDFファイルに関する責任は一切おいかねます。

解答 1. $x = s, t$ での接線を考えると

$$\begin{aligned} y &= (\cos s)x + \sin s - s\cos s \\ y &= (\cos t)x + \sin t - t\cos t \end{aligned} \tag{1.1}$$

2つの接線が直交するので $\cos s \cdot \cos t = -1.$
$-1 \leq \cos s, \cos t \leq 1$ であり, $\cos s \geq \cos t$ としても一般性を失わないので

$$\begin{aligned} &\cos s = 1,\ \cos t = -1 \\ &\therefore s = 2n\pi,\ t = (2k+1)\pi. \quad (n, k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

これと (1.1) より,

$$\begin{aligned} y = x - 2n\pi = -x + (2k+1)\pi \\ \therefore x = \left(n + k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad x = \left(-n + k + \frac{1}{2}\right)\pi \end{aligned}$$

解答 2. まず log の定義より

$$x - n > 0 \text{ かつ } 2n - x > 0 \Longleftrightarrow n < x < 2n \tag{2.1}$$

この範囲で

$$\begin{aligned}
&\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)\\
\iff &\log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x)\\
\iff &\begin{cases} a>1 \\ (x-n)^2 > 2n-x \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 0<a<1 \\ (x-n)^2 < 2n-x \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} a>1 \\ x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0 \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 0<a<1 \\ x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0 \end{cases} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

(1) $a>1$ のとき (2.1) と (2.2) に $n=6$ を代入し

$$6<x<12 \text{ かつ } x^2-11x+24>0 \iff 8<x<12$$

$0<a<1$ のとき同様に

$$6<x<12 \text{ かつ } x^2-11x+24<0 \iff 6<x<8$$

以上より求める整数 x は

$$a>1 \text{ のとき } x=9,10,11 \quad 0<a<1 \text{ のとき } x=7$$

(2) $f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおく. すると $f(x)$ は

$$f(n)=-n<0, \quad f(2n)=n^2>0$$

なる下に凸な二次関数である.
$n<x<2n$ で (2.2) を満たす x が存在する必要十分条件を考える.
$(a)\, a>1$ のとき
求める条件は $f(2n-1)>0$ となるときなので,

$$f(2n-1)=n(n-2)>0 \iff n>2$$

$(b)\, 0<a<1$ のとき
求める条件は $f(n+1)<0$ となるときなので,

$$f(n+1)=-n+2<0 \iff n>2$$

(a), (b) よりいずれの場合でも求める必要十分条件は $n>2$.

解答 3. (1) $x_{n+1}-x_n=x_n^2 \geq 0$ より, 数列 $\{x_n\}$ は単調増加する. よって

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}-x_n = x_n^2 \geq x_1^2 = a^2 \ (\because a>0)\\
&\therefore\ x_{n+1} \geq x_n + a^2
\end{aligned}$$

これを繰り返し用いると

$$x_n \geq x_1 + a^2(n-1) = a + a^2(n-1) \to \infty \quad (n\to\infty)$$

以上より数列 $\{x_n\}$ は発散する.

(2) 数学的帰納法により示す.

$(a) n = 1$ のとき

$-1 < a < 0$ つまり $-1 < x_1 < 0$ より満たす.

$(b) -1 < x_k < 0$ と仮定する.

$x_{k+1} = x_k + x_k^2 = \left(x_k + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ より, 仮定の範囲では $-\dfrac{1}{4} \leq x_{k+1} < 1$.

よって $-1 < x_{k+1} < 1$ を満たす.

$(a)\,(b)$ より示された.

(3) $-1 < a < 0$ のとき (2) より $x_{n+1}, x_n, x_n + 1 \neq 0$ なので, 漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n + x_n^2} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n + 1} < \frac{1}{x_n} - 1 \quad (\because (2) -1 < x_n < 1)$$

これを繰り返し用いると

$$\frac{1}{x_n} < \frac{1}{x_1} + (-1) \cdot (n-1) = \frac{1}{a} - (n-1) \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

以上より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

問題 4.

解答. (1) $2x^2 + x + 3 = 2(x^2 + 1) + x + 1$ より, $[2x^2 + x + 3] = x + 1$ である.

次に, $x^5 - 1 = (x^3 - x)(x^2 + 1) + x - 1$ より, $[x^5 - 1] = x - 1$ である.

最後に, $[2x^2 + x + 3][x^5 - 1] = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = (x^2 + 1) - 2$ より, $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = -2$ である.

(2) $[\cdot]$ の定義より,

$$\begin{aligned} A(x) &= \exists P(x)(x^2 + 1) + [A(x)], \\ B(x) &= \exists Q(x)(x^2 + 1) + [B(x)] \end{aligned}$$

と書ける. ただし, $P(x), Q(x)$ は整式である.

このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \{P(x)(x^2 + 1) + [A(x)]\}\{Q(x)(x^2 + 1) + [B(x)]\} \\ &= \{P(x)Q(x)(x^2 + 1) + (P(x)[B(x)] + Q(x)[A(x)])\}(x^2 + 1) \\ &+ \quad [A(x)][B(x)] \end{aligned}$$

$\{\}$ の中身は整式だから,

$$[A(x)][B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

が成り立つ.

(3)

$$(x \sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta(x^2 + 1) + \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2x \sin\theta \cos\theta$$

よって,

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

を得る.

(4)

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &:= \frac{b}{r} \\ \sin\theta &:= \frac{a}{r} \end{aligned}$$

と定義する. このとき,

$$ax+b=r(x\sin\theta+\cos\theta)$$

と書ける. すると, (3) より

$$\begin{aligned} [(ax+b)^4] &= r^4[[(x\sin\theta+\cos\theta)^2][(x\sin\theta+\cos\theta)^2]] \\ &= r^4[(x\sin 2\theta+\cos 2\theta)^2] \\ &= r^4(x\sin 4\theta+\cos 4\theta) \end{aligned}$$

これが -1 に等しいので,

- $r^4=1$
- $\sin 4\theta=0$
- $\cos 4\theta=-1$

となる. 特に $r\in\mathbb{R}$ より, これは

$$r=1,\quad \theta=-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},\quad (n\in\mathbb{Z})$$

という条件と同値である. これを (a,b) に直すと,

$$(a,b)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}),\quad (\text{複号任意})$$

を得る.

問題 5.

解答. (1)

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx, \\ I_1 &:= \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx, \\ I_2 &:= \int_{-1}^1 \frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx \end{aligned}$$

とおく．

まず，$I = \frac{1}{2}$ を示す．

$$\sin^2(\pi x) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}$$

より，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 1-\cos(2\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と積分できる．

次に，$I_1 = \frac{1}{2}$ を示そう．

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{1+e^x}{1+e^x}dx \\ &= 2\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx \\ &= 2I = 1 \end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{-1+e^x}{1+e^x}dx \\ &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}dx \end{aligned}$$

特に被積分関数は奇関数であるから，$I_2 = I_1$．これより，$I_1 = \frac{1}{2}$

(2)

$$a := \int_{-1}^1 f(t)dt, \quad b := \int_{-1}^1 e^t f(t)dt$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned} (1+e^x)f(x) &= \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t)dt \\ &= \sin^2(\pi x) + (e^x+1)a - b \end{aligned}$$

と書ける．すると，辺々積分することで

$$\begin{aligned} a + b = \int_{-1}^1 (1+e^x)f(x)dx = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)dx + a\int_{-1}^1 (1+e^x)dx - 2b \\ = 1 + a(2+e-e^{-1}) - 2b \end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned} a = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx + 2a - b\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x}dx \\ = \frac{1}{2} + 2a - b \end{aligned}$$

を得る．これらの式を用いて,

- $a = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)}$
- $b = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2}$

が成り立つ．これを元の式に代入して,

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} - \frac{1}{1+e^x}\left\{\frac{1}{2(e-e^{-1}-2)} + \frac{1}{2}\right\}$$

を得る.

問題 6.

解答. (1) $n+1$ 回目の試行が終わったとき, 赤玉が 2 個である場合は,

(1) n 回目に赤玉が 2 個で, 白玉を引く.
(2) n 回目に白玉が 1 個で, 赤玉を引く.

の二つに分けられる．白玉と赤玉の数の和は常に 10 であることに注意すると,

$$p(n+1,2) = \frac{7}{10}p(n,2) + \frac{4}{10}p(n,1)$$

が成り立つ.

(2), (3) (1) と同様に $p(n+1,1)$, $p(n+1,0)$ を $p(n,2)$, $p(n,1)$, $p(n,0)$ で表すと, 次の表示を得る.

$$\begin{pmatrix} p(n+1,2) \\ p(n+1,1) \\ p(n+1,0) \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(n,2) \\ p(n,1) \\ p(n,0) \end{pmatrix}$$

ここで,

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と置くと,

$$\begin{pmatrix} p(n,2) \\ p(n,1) \\ p(n,0) \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} p(0,2) \\ p(0,1) \\ p(0,0) \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる.

あとは A^n を求めればよい．いま,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(7,6,5)$ が分かるので,

$$A^n = P\mathrm{daig}(7^\mathrm{n}, 6^\mathrm{n}, 5^\mathrm{n})\mathrm{P}^{-1}$$

を計算して,

$$p(n,1) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{6^n 5 - 5^n 5\}$$
$$p(n,2) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \{3^n 10 - 6^n 20 + 5^n 10\}$$

を得る.

(2)

$$\begin{aligned} 5.1^2 &= 26.01\cdots \\ 6.1^2 &= 37.2\cdots \\ 7.1^2 &= 50.41\cdots \\ 8.1^2 &= 65.6\cdots \\ 9.1^2 &= 82.8\cdots \\ 10.1^2 &= 102.01\cdots \\ 11.1^2 &= 123.2\cdots \\ 12.1^2 &= 146.4\cdots \end{aligned}$$

以上より条件を満たす n は小さい順に

$$26, 37, 50, 65, 82, 101, 102, 122, 123, 145, \cdots$$

よって 145

(別解法)
$\sqrt{n}$ の整数部分を m とおく.
問題の条件から $\sqrt{n}$ は整数ではないので

$$\begin{aligned} m < \sqrt{n} < m+1 \\ m^2 < n < (m+1)^2 \end{aligned}$$

となるので, $n = m^2 + k$ のようになる. (ただし $k = 1, 2, \cdots 2m$) また小数点以下に関する条件から

$$\begin{aligned} 0.01 \leq \sqrt{n} - m < 0.1 \\ m + 0.01 \leq \sqrt{n} < m + 0.1 \\ (m+0.01)^2 \leq n (= m^2 + k) < m + 0.1 \\ 0.02m + 0.0001 \leq k < 0.2m + 0.01 \end{aligned}$$

ここで $0.02m + 0.0001 \geq 1$ とすると, $m \leq 49.995$. (1) によって一番小さい n は $26 = 5^2 + 1$ であった. (つまり $m = 5$.)
一方で, $f(m) = 0.2m + 0.01$ としておくと, $f(5) = 1.01, f(6) = 1.21 f(7) = 1.41, f(8) = 1.61, f(9) = 1.81, f(10) = 2.01, f(11) = 2.21, f(12) = 2.41$ のようになる. つまり $m = 5, 6, \cdots, 12$ のときの k の個数は $1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2$ のようになる. 求めるものは, 小さいものから 10 番目であるので小さいものから数えてゆくと, $m = 12$ で $k = 1$ のときつまり $n = 12^2 + 1 = 145$.
以上から 145 が答えである.

■問題 4. (1) (a_1, a_2, a_3) の組み合わせとして起こりうるものとそれらが持つサイクルは,

$$\begin{aligned}
(1,2,3) \quad a_1 =& 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3 \\
(1,3,2) \quad a_1 =& 1, \quad a_2 = 3 \to a_3 = 2 \\
(2,1,3) \quad a_1 =& 2 \to a_2 = 1, \quad a_3 = 3 \\
(2,3,1) \quad a_1 =& 2 \to a_2 = 3 \to a_3 = 1 \\
(3,1,2) \quad a_1 =& 3 \to a_3 = 2 \to a_2 = 1 \\
(3,2,1) \quad a_1 =& 3 \to a_3 = 1, \quad a_2 = 2
\end{aligned}$$

である. このうち, $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)$ が長さ 1 のサイクルを持つ. 従って求める確率は,

$$\frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}$$

(2)$n = 4$ のとき長さ 4 のサイクルは相異なる $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ を用いて以下のように表せる.

$$a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to a_l = i$$

ここで i, j, k, l の組み合わせは,

$$(i, j, k, l) = (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2)$$

の 6 通りである. よって長さ 4 のサイクルを含む順列は以下のものである.

$$(2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,4,2,1), (3,1,4,2), (4,3,1,2), (4,1,2,3)$$

(3) $x > 0$ において, $f(x) = \frac{1}{x}$ は単調減少.
また, n 以下の正の整数 k に対して, $k \leqq x \leqq k+1$ のとき, $f(x) \leqq f(k)$
以上より, 下図から面積を比較して,

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \int_k^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_k^{n+1} = \log(n+1) - \log k$$

よって, 題意は示された. □

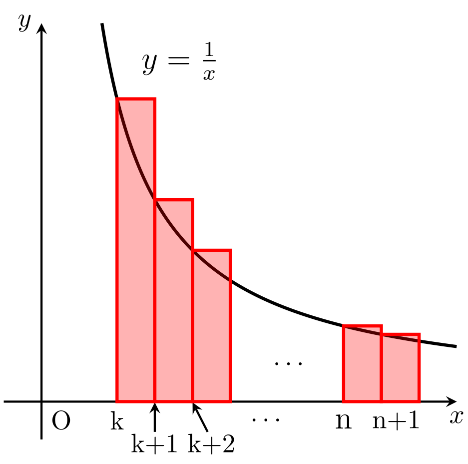

図 $y = \frac{1}{x}$ のグラフと長方形

(3)

(2) より P_n，P_{n+1} の座標はそれぞれ $(\cos n\alpha, \sin n\alpha)$，$(\cos(n+1)\alpha, \sin(n+1)\alpha)$ であるので，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} &= |\mathrm{OP}_n||\mathrm{OP}_{n+1}|\frac{1}{2}\sin\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\left|\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\cos(n+1)\alpha\right| \\ &= \frac{1}{2}|\sin\alpha| \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\end{aligned}$$

となる．ここで $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k$ より, $\sin\alpha = \frac{2k}{1+k^2}$ なので,

$$\triangle P_nOP_{n+1} = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{k}{1+k^2}$$

となる．

平成３１年度名古屋大学文系大問２（1）の解答

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n - k(y_n + y_{n+1}) \\ y_{n+1} & = y_n + k(x_n + x_{n+1}) \end{cases}$$

について，1 行目を 2 行目に代入・整理すると

$$y_{n+1} = \frac{2k}{1+k^2}x_n + \frac{1-k^2}{1+k^2}y_n$$

が得られる．さらに，この式を $x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1})$ に代入・整理すると

$$x_{n+1} = \frac{1-k^2}{1+k^2}x_n - \frac{2k}{1+k^2}y_n$$

が得られる．ここで

$$\begin{aligned}\frac{1-k^2}{1+k^2} &= (1-\tan^2(\frac{\alpha}{2}))\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos\alpha, \\ \frac{2k}{1+k^2} &= 2\tan(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sin\alpha\end{aligned}$$

であるから

$$x_{n+1} = x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha,\ y_{n+1} = x_n\sin\alpha + y_n\cos\alpha$$

となる．P_0 の座標は $(1, 0)$ であるから

$$x_1 = x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha = \cos\alpha,\ y_1 = x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha = \sin\alpha$$

である．また

$$x_2 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,\ y_2 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

である．従って，P_1 の座標は $(\cos\alpha, \sin\alpha)$，P_2 の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ である．