問題 4.　(1) (a_1, a_2, a_3) の組み合わせとして起こりうるものとそれらが持つサイクルは,

$$\begin{array}{ll}
(1,2,3) & a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3 \\
(1,3,2) & a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \to a_3 = 2 \\
(2,1,3) & a_1 = 2 \to a_2 = 1, \quad a_3 = 3 \\
(2,3,1) & a_1 = 2 \to a_2 = 3 \to a_3 = 1 \\
(3,1,2) & a_1 = 3 \to a_3 = 2 \to a_2 = 1 \\
(3,2,1) & a_1 = 3 \to a_3 = 1, \quad a_2 = 2
\end{array}$$

である．このうち, $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)$ が長さ 1 のサイクルを持つ．従って求める確率は,

$$\frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}$$

(2)$n = 4$ のとき長さ 4 のサイクルは相異なる $i, j, k, l \in \{1,2,3,4\}$ を用いて以下のように表せる．

$$a_i = j \to a_j = k \to a_k = l \to a_l = i$$

ここで i, j, k, l の組み合わせは,

$$(i,j,k,l) = (1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2)$$

の 6 通りである．よって長さ 4 のサイクルを含む順列は以下のものである．

$$(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,4,2,1),(3,1,4,2),(4,3,1,2),(4,1,2,3)$$

(3)　$x > 0$ において, $f(x) = \frac{1}{x}$ は単調減少.
また, n 以下の正の整数 k に対して, $k \leqq x \leqq k+1$ のとき, $f(x) \leqq f(k)$
以上より, 下図から面積を比較して,

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \int_k^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_k^{n+1} = \log(n+1) - \log k$$

よって, 題意は示された.　□

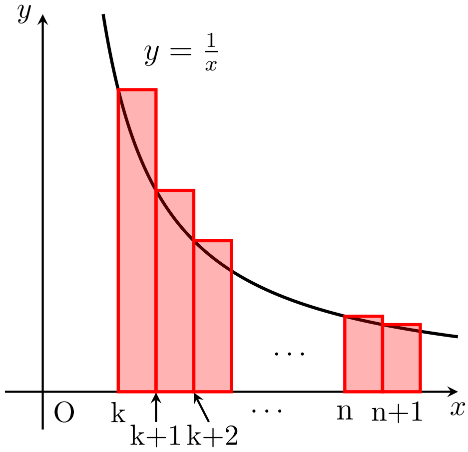

図　$y = \frac{1}{x}$ のグラフと長方形