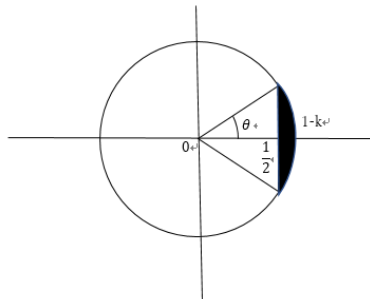


**問題.1** (3)  $z = k$  と置く.  $S$  の存在範囲から  $k$  が  $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$  の時の断面積を積分すればよい. 各  $k$  の断面積を  $S_k$  と置き, また次の断面図のとおり  $\theta$  を置く.



すると  $\cos \theta = \frac{1}{2(1-k)}$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ) が成立する.

$$\begin{aligned} -\sin \theta d\theta &= \frac{1}{2(1-k)^2} dk \\ S_k &= \frac{1}{2}(1-k)^2 2\theta - \frac{1}{2}(1-k)^2 \sin 2\theta \\ &= (1-k)^2 \theta - \frac{1}{2}(1-k)^2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

であって  $k$  が 0 から  $\frac{1}{2}$  まで動くとき  $\theta$  は  $\frac{\pi}{3}$  から 0 まで単調に動くので

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} S_k dk &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 -\frac{\theta \sin \theta}{8 \cos^4 \theta} + \frac{\sin \theta \sin 2\theta}{16 \cos^4 \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 -\frac{\theta \sin \theta}{8 \cos^4 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{8 \cos^3 \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\theta}{24} (\cos^{-3} \theta)' + \frac{1}{8 \cos^3 \theta} - \frac{1}{8 \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{24} \left[ \frac{\theta}{\cos^3 \theta} \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{24} \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^3 \theta} + \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos^3 \theta} - \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12} I_3 - \frac{1}{8} I_1 \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} I_1 \right) - \frac{1}{8} I_1 \end{aligned}$$