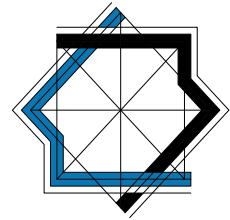




UNIVERSIDAD
DE GRANADA



TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Puntos que se pueden construir con intersección de cónicas

Autor

Eloy Revilla Martín

Tutor:

Pedro A. García Sánchez
Álgebra

Marzo 2022



Resumen

La geometría plana ha sido una de las áreas matemáticas más estudiadas a lo largo de la historia. En este trabajo se trata el conjunto de puntos que es posible construir mediante la regla y el compás, para extenderlo al conjunto construible si además añadimos aquellos puntos que se pueden obtener como intersección de cónicas. Por un lado, estos conjuntos se estudiarán mediante técnicas geométricas, lo que nos permitirá interpretar el uso de sus puntos para la elaboración de construcciones en el plano. Por otro, caracterizaremos los puntos construibles con intersección de cónicas mediante extensiones algebraicas, donde destacaremos el uso de la teoría de Galois. Finalmente, veremos algunas aplicaciones a problemas históricos como son la construcción de polígonos regulares, la resolución de ecuaciones polinomiales o la duplicación del cubo. Los ejemplos y figuras los ilustraremos con construcciones en GeoGebra. Se ha creado un repositorio en GitHub que contiene todas estas construcciones.

Palabras clave: Regla y Compás, Cónicas, Punto construible, Extensiones algebraicas, Teoría de Galois, Geogebra, Ecuación polinomial.

Índice general

Introducción	1
1. Construcciones con regla y compás	4
2. Construcciones mediante cónicas	14
2.1. Cónicas elementos y propiedades	14
2.2. Puntos cónico-construibles	18
2.3. Caracterización algebraica	26
2.4. Comparación con los números Origami	33
3. Ecuaciones polinomiales y geometría	36
3.1. Las ecuaciones de segundo grado y el círculo de Carlyle	36
3.2. Soluciones de ecuaciones cúbicas mediante cónicas	39
3.3. Arquímedes y el corte proporcional de la esfera	41
3.4. Construcción de polígonos regulares	43
Bibliografía	48

Introducción

La construcción de figuras geométricas en el plano mediante el uso de útiles, como la regla o el compás, ha sido uno de los problemas que la matemática ha estudiado a lo largo de la historia. Los primeros tratados sobre construcciones en el plano se remontan a la antigua Grecia. En ellos algunos matemáticos describieron diversos procesos para el trazado de elementos y figuras geométricas, como pueden ser la bisectriz o algunos polígonos regulares.

Los griegos conocían métodos para sumar, multiplicar o calcular raíces cuadradas de puntos en el plano utilizando tan solo regla y compás.

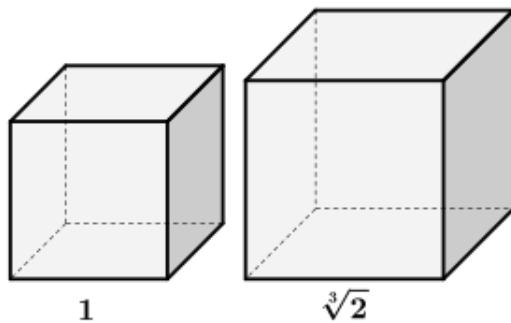


Figura 1: Duplicación del cubo.

Trataron de encontrar solución a otros problemas como la duplicación del cubo, mediante el uso exclusivo de regla y compás. No lo consiguieron, lo cual es lógico puesto que más adelante se demostró que es imposible. En su afán por resolver éste y otros problemas imposibles con dichas herramientas, elaboraron algunos procedimientos que conseguían resolverlos añadiendo el uso de cónicas como elementos auxiliares. Destacamos dos resultados que datan de alrededor del 350 a.C. el cálculo de raíces cúbicas reales (Menecmo) y la trisección del ángulo (Pappus), los cuales serán fundamentales en el desarrollo del trabajo.

Entre las figuras griegas más destacables en el estudio de las cónicas tenemos a Apolonio (262 a.C.). Fue el primero en dar nombre a la elipse, la parábola y la hipérbola. Sus trabajos

sobre geometría abarcan secciones cónicas, curvas planas, secciones en un área dada, entre otros. Tal fue su obra que se le conoció con el sobrenombre de El Gran Geómetra. Por su parte, Arquímedes (287 a.C) fue un conocido físico y matemático; estudió el volumen y la superficie de la esfera y el cilindro entre otros. Además elaboró resultados sobre el estudio de las cónicas de Apolonio y su uso para resolver otros problemas, entre los que destacamos el corte de una esfera mediante un plano de manera que los volúmenes de los casquetes que surgen guarden una proporción dada. Arquímedes logró reducirlo a la resolución de una cónica mediante el cálculo de la intersección entre una parábola y una hipérbola, convenientemente construidas.

Más adelante, cabe destacar a dos persas que hicieron importantes aportaciones sobre el uso de cónicas. En primer lugar, Al-Kuhi (940 d.C.), un matemático y astrónomo que estudió algunos de los problemas tratados por Arquímedes o Apolonio relacionados con ecuaciones de grado mayor que dos. Por otro lado, se le considera el autor de la primera descripción sobre un instrumento capaz de trazar todo tipo de cónicas. En segundo lugar, tenemos a Omar

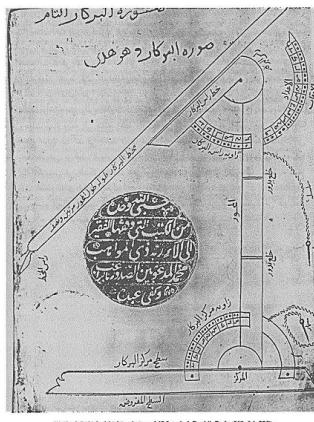


Figura 2: Instrumento para la construcción de cónicas.

Khayyam (1048 d.C.), que también destacó por sus aportaciones al campo de la geometría. En particular, utilizó las cónicas para resolver ecuaciones cúbicas, de tal forma que se le considera el primer matemático en realizar un estudio sistemático y completo sobre el cálculo de soluciones positivas para ecuaciones cúbicas.

Tenemos que esperar hasta el siglo XVIII, para observar nuevos resultados significativos. Gauss trató la construcción de polígonos regulares; estableciendo un criterio suficiente de constructibilidad y desarrolló la construcción del polígono regular de 17 lados. En el siglo XIX, Pierre Wantzel demostró la imposibilidad de duplicar el cubo con regla y compás, basándose en la imposibilidad de calcular raíces cúbicas de distancias con regla y compás. Además, demostró que el criterio de Gauss no solo era suficiente si no que también necesaria-

rio. Por otro lado, en ésta época Lindemann demostró la trascendencia de π lo que, con los resultados ya conocidos entonces, implicaba la imposibilidad de resolver la cuadratura del círculo. En cuanto a los avances en el estudio de las cónicas tenemos que Kepler (1571 d.C.) fue el primero en utilizar el término foco. Desargues (1591 d.C.) y Pascal (1623 d.C.) comenzaron a tratar las cónicas desde un punto de vista proyectivo, sin estar esta geometría aún desarrollada en la época, mientras que otros como Johan de Witt (1625 d.C.) inventaron el término directriz.

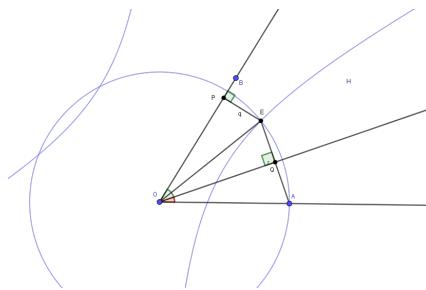
Entre los estudios más recientes sobre las cónicas y su uso en las construcciones geométricas, destaca el realizado por Carlos R. Videla [11]. En él podemos encontrar la caracterización algebraica de los puntos que se pueden obtener intersecándolas. En el trabajo se recogerán estos resultados y se utilizarán para la resolución de algunos problemas geométricos.

Construcciones dinámicas en Geogebra

A lo largo del trabajo estudiaremos problemas geométricos que se resuelven mediante el uso de diversas herramientas como la regla, el compás y las cónicas. Con intención de ilustrar y explicar con mayor claridad los procedimientos de resolución, hemos incluido imágenes diseñadas mediante Geogebra, que describen por pasos la resolución de dichos problemas.

Además, se ha creado una página web donde podemos acceder a los applets de las construcciones más relevantes que expondremos en la memoria. De manera que el lector tendrá la posibilidad de visualizar los archivos Geogebra e interactuar con ellos, modificando algunos de sus elementos y observando cómo varían las construcciones y qué propiedades se mantienen y cuales no. El enlace a dicha página está disponible pinchando sobre la siguiente imagen.

Puntos que son intersección de cónicas



Igualmente, a lo largo de la memoria podemos pinchar en la descripción de algunas figuras para acceder a su applet correspondiente.

Capítulo 1

Construcciones con regla y compás

Como hemos mencionado anteriormente las construcciones con regla y compás han sido estudiadas desde la antigüedad, ya los griegos intentaron resolver algunos problemas mediante el uso de éstas herramientas. La pregunta natural que surge es: ¿qué puntos somos capaces de construir con una regla no graduada y un compás? Teniendo en cuenta que la utilidad de la regla es la de trazar rectas dados dos puntos en el plano, mientras que el compás se utiliza de manera que dada una distancia y un punto podemos trazar una circunferencia con centro dicho punto y radio la distancia.

Para formalizar el tipo de construcciones que podemos realizar mediante estas herramientas, estableceremos axiomas sobre los que asentaremos la teoría. Lo desarrollado a continuación lo podemos encontrar en detalle en [6, Capítulo 10] y en [9]. La idea fundamental es que partimos de una serie de puntos dados y a partir de ellos vamos construyendo los demás, siguiendo estas normas:

- C1 - Dados dos puntos distintos A y B podemos trazar la recta L que los contiene.
- C2 - Dados dos puntos distintos A y B , sea C un punto dado, podemos trazar la circunferencia S de centro C de radio la distancia entre A y B .

En el uso de éstas surgen nuevos puntos como intersección de las rectas y circunferencias construidas:

- P1 - El punto de intersección de dos rectas L_1 y L_2 .
- P2 - Los puntos de intersección de una recta L y una circunferencia S .
- P3 - Los puntos de intersección de dos circunferencias S_1 y S_2 .

A lo largo del trabajo identificaremos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con los números complejos $z \in \mathbb{C}$ de la siguiente forma: $(x, y) \equiv x + yi = z$ (Ejemplos: $(1, 0) \equiv 1$, $(0, 1) \equiv i$). Los trataremos indistintamente, lo que nos permitirá usar la estructura algebraica \mathbb{C} para nuestro objetivo.

Definición 1.1. *Un punto $z \in \mathbb{C}$ se dice construible si existe una secuencia finita de pasos utilizando: C1, C2, P1, P2 y P3, tal que a partir de los puntos 0 y 1 construimos z . El conjunto de puntos construibles lo denotaremos por C .*

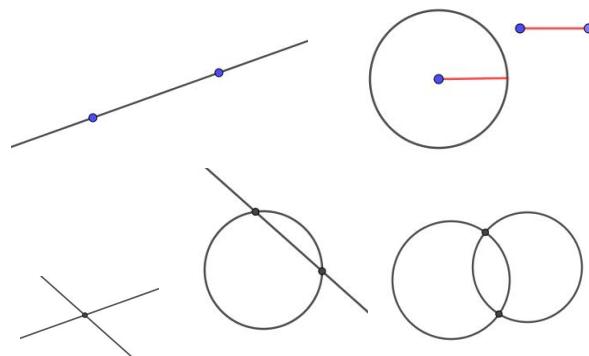


Figura 1.1: Reglas de construcción.

A continuación, veremos que este conjunto tiene estructura de cuerpo para las operaciones de suma y producto definidas en \mathbb{C} , las cuales se pueden definir de forma geométrica mediante el uso de regla y compás. Para ello enunciaremos los siguientes resultados.

Lema 1.2. *El conjunto C es cerrado para la suma.*

Prueba. Dados dos puntos $A, B \in C$ podemos calcular su suma hallando su punto medio y reflejando $O = (0, 0)$, como se muestra en la Figura 1.2. \square

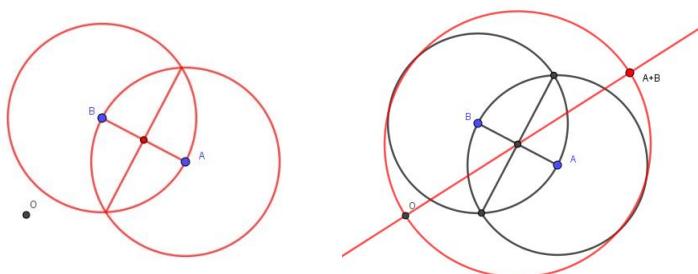


Figura 1.2: Suma de A y B .

Lema 1.3. *El conjunto C es cerrado para el opuesto.*

Prueba. Sea $A \in C$ basta con trazar la circunferencia de centro O que pasa por A y la recta que pasa por ambos puntos, dichas construcciones se intersecan en A y en su opuesto. \square

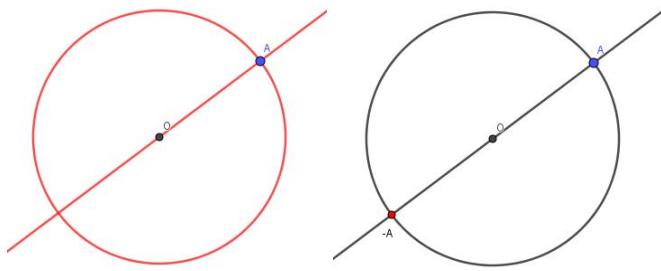


Figura 1.3: Opuesto de A .

Lema 1.4. *El conjunto $C \cap \mathbb{R}$ es cerrado para el producto.*

Prueba. Dados dos números reales A y B construibles podemos construir su producto; en primer lugar trazamos el punto A y el punto Bi , después la recta que pasa por A y por i y finalmente la paralela a ésta que pasa por Bi . La intersección de ésta recta y el eje x será el producto $A \cdot B$. La demostración se basa en la congruencia de los triángulos que se forman. \square

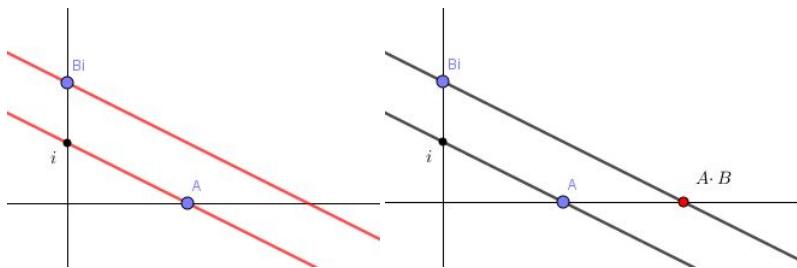
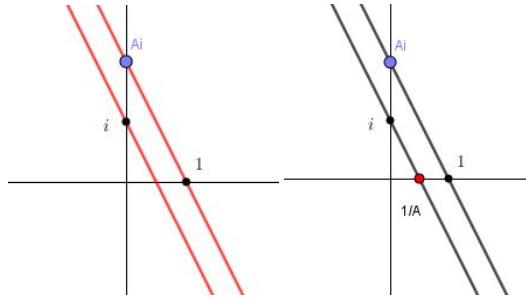


Figura 1.4: Producto de A por B números reales.

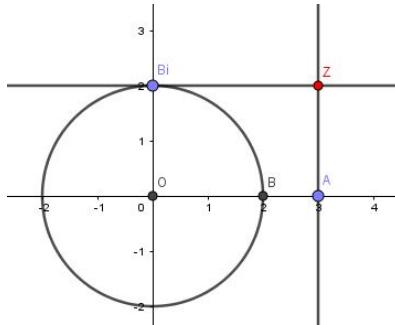
Lema 1.5. *El conjunto $C \cap \mathbb{R}$ es cerrado para el inverso.*

Prueba. Dado el número $A \in C \cap \mathbb{R}$ construimos Ai , después la recta que pasa por Ai y 1 y finalmente la paralela a dicha recta que pasa por i cuya intersección con el eje x nos dará el inverso de A , como se aprecia en la Figura 1.5. De nuevo la demostración viene dada por la congruencia de los triángulos que se forman. \square

Figura 1.5: Inverso de $A \in \mathbb{R}$.

Lema 1.6. Dado un punto $z = a + bi \in \mathbb{C}$ este es constructible si y solo si a y b lo son.

Prueba. Tenemos que si $z \in C$ entonces podemos trazar rectas paralelas a los ejes, la que interseca al eje x nos proporcionará a , mientras que la que interseca al eje y nos proporcionará bi , a partir del cual podemos construir b mediante el uso del compás.

Figura 1.6: a, b y $z = a + bi$.

Recíprocamente si a y b son construibles podemos construir z mediante el proceso inverso. \square

Utilizando el resultado anterior probaremos que el producto y el inverso son construibles para todo elemento de C .

Lema 1.7. El conjunto C es cerrado para el producto.

Prueba. Sean $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in C$. Tenemos que su producto en \mathbb{C} esta definido como

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i,$$

donde parte real e imaginaria son constructibles, lo que implica que $z_1 z_2$ también lo es. \square

Lema 1.8. *El conjunto C es cerrado para el inverso.*

Prueba. Sean $z_1 = a + bi \in C$ tenemos que su inverso en \mathbb{C} esta definido como

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i,$$

donde parte real e imaginaria son constructibles, lo que implica que z_1 también lo es. \square

Corolario 1.9. *El conjunto de puntos construibles con regla y compás C es un subcuerpo de \mathbb{C} .*

Construcciones básicas con regla y compás

Tras la formalización del proceso de construcción, haremos un breve repaso de las construcciones básicas que se pueden realizar con regla y compás paso a paso, incluyendo la definición geométrica de las operaciones que propician la estructura algebraica de cuerpo para C .

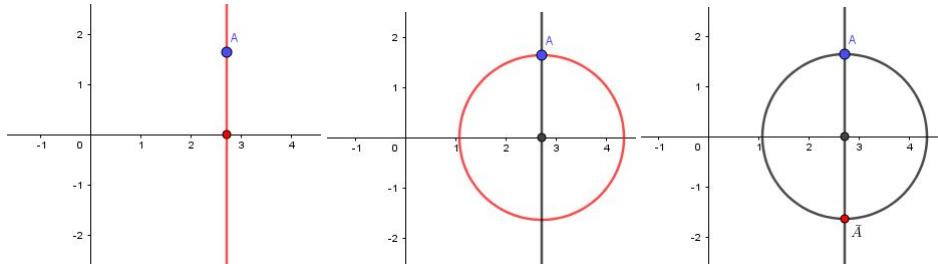


Figura 1.7: Conjugado de A ,

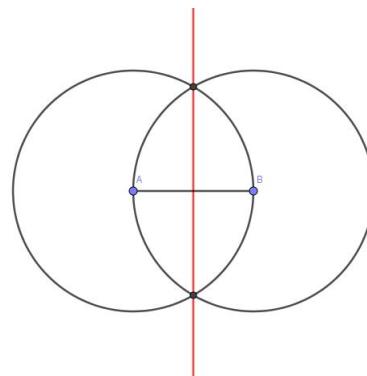


Figura 1.8: mediatrix de \overline{AB} ,

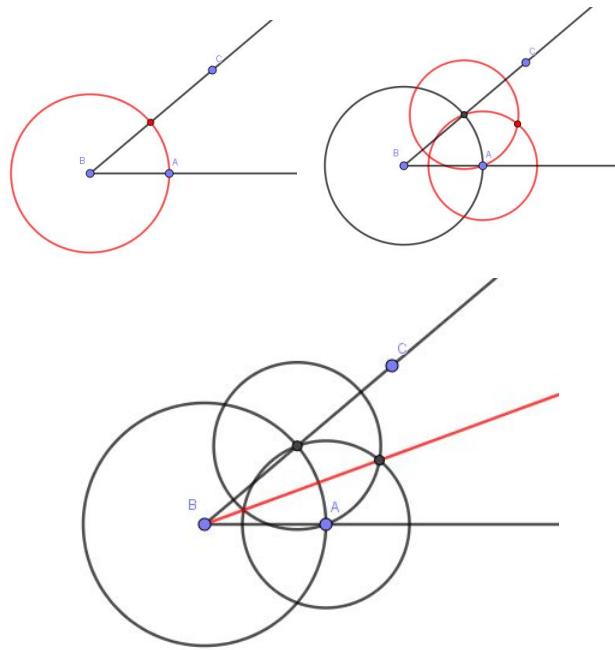


Figura 1.9: bisectriz de \widehat{ABC} ,

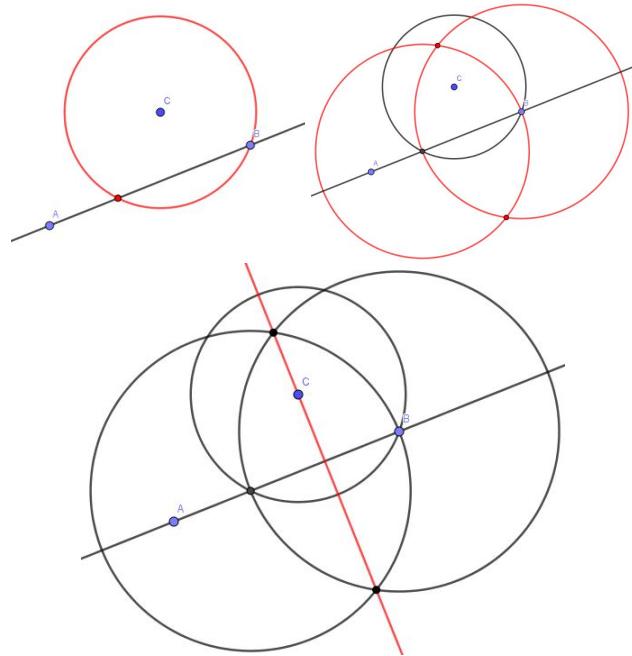


Figura 1.10: perpendicular a L por C ,

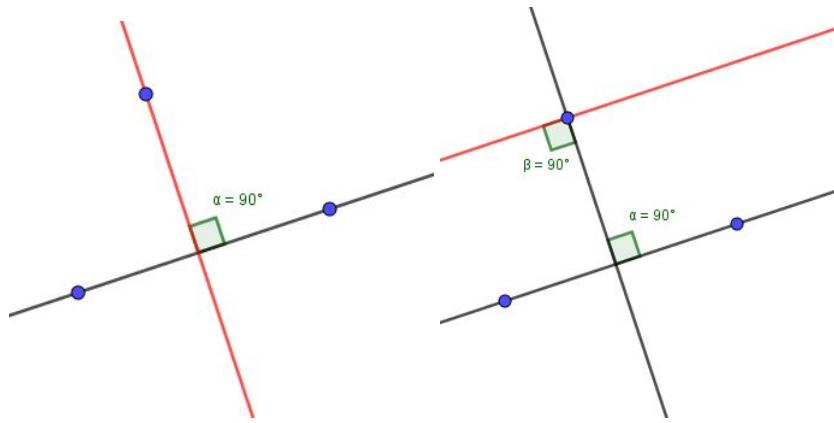


Figura 1.11: paralela a una recta L por un punto dado,

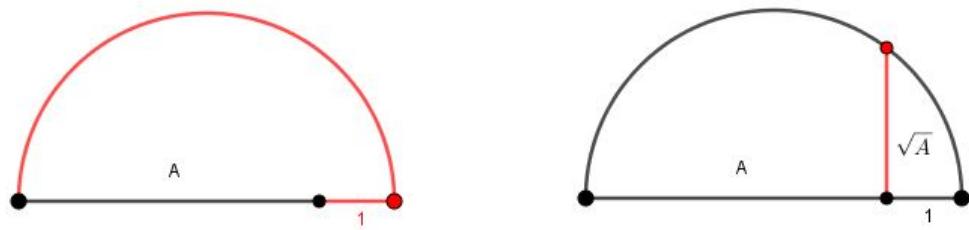


Figura 1.12: raíz cuadrada de $A \in \mathbb{R}$.

Caracterización algebraica

Una vez definido el conjunto C de puntos construibles, recapitularemos una serie de resultados sobre su estructura desde el punto de vista algebraico [6]. Éstos nos permitirán determinar cuando un punto $z \in \mathbb{C}$ es o no constructible.

Teorema 1.10. *Sea $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $z \in C$ si y sólo si existen los subcuerpos:*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C},$$

tal que $z \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ para $1 \leq i \leq n$.

Corolario 1.11. *El conjunto C es el menor subcuerpo cerrado bajo raíces cuadradas.*

Corolario 1.12. *Sea $z \in C$ entonces $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego todo punto constructible con regla y compás es algebraico sobre \mathbb{Q} y el grado de su polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} es una potencia de 2.*

Teorema 1.13. *Sea $z \in \mathbb{C}$ algebraico sobre \mathbb{Q} y L el cuerpo de descomposición de z sobre \mathbb{Q} , entonces $z \in C$ si y solo si $[L : \mathbb{Q}]$ es una potencia de 2.*

Construcción de polígonos regulares

En primer lugar, debemos tener en cuenta que no todos los polígonos regulares son constructibles. Determinar si el n -polígono regular lo es o no, es equivalente a determinar si lo es la n -ésima raíz primitiva de la unidad $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. A continuación, presentamos un resultado que determina qué polígonos regulares son constructibles, previamente definimos el concepto de primo de Fermat y la función ϕ de Euler.

Definición 1.14. *Un número primo se dice de Fermat cuando se puede escribir como $2^{2^r} + 1$ para algún entero $r \geq 0$.*

Definición 1.15. *Se conoce como función ϕ de Euler a aquella función tal que a cada número natural n le asocia la cantidad de naturales menores o iguales a n y coprimos con n ,*

$$\phi(n) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n \wedge \text{mcd}(n, m) = 1\}|.$$

Dicha función cumple que:

- $\phi(1) = 1$.
- $\phi(p^k) = (p - 1)p^{k-1}$ si p es primo y k natural.

- $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ si m y n son primos entre sí.

Teorema 1.16. *Un n -polígono regular puede ser construido con regla y compás si y sólo si la descomposición de n en primos es:*

$$n = 2^s \cdot p_1 \cdots p_m,$$

para unos enteros $s, m \geq 0$ y p_i primos de Fermat.

Prueba. Tenemos que la extensión $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ es de Galois por lo que ζ_n es construible si y solo si $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ es una potencia de 2. Sabemos que si la factorización en primos de n es $q_1^{e_1} \cdots q_s^{e_s}$ el valor de su función de Euler es:

$$\phi(n) = q_1^{e_1-1}(q_1 - 1) \cdots q_s^{e_s-1}(q_s - 1),$$

para que $\phi(n)$ sea una potencia de 2 debe ocurrir que si q_i es impar $e_i = 1$ y $q_i - 1 = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$, luego $q_i = 2^k + 1$. Por otro lado, existe un resultado que afirma que si un primo impar es de esta forma entonces k es una potencia de dos (ver [12]), así podemos concluir que los primos impares han de ser de Fermat y aparecer con multiplicidad 1 en la descomposición. \square

En la Figura 1.13 mostramos un ejemplo sencillo,

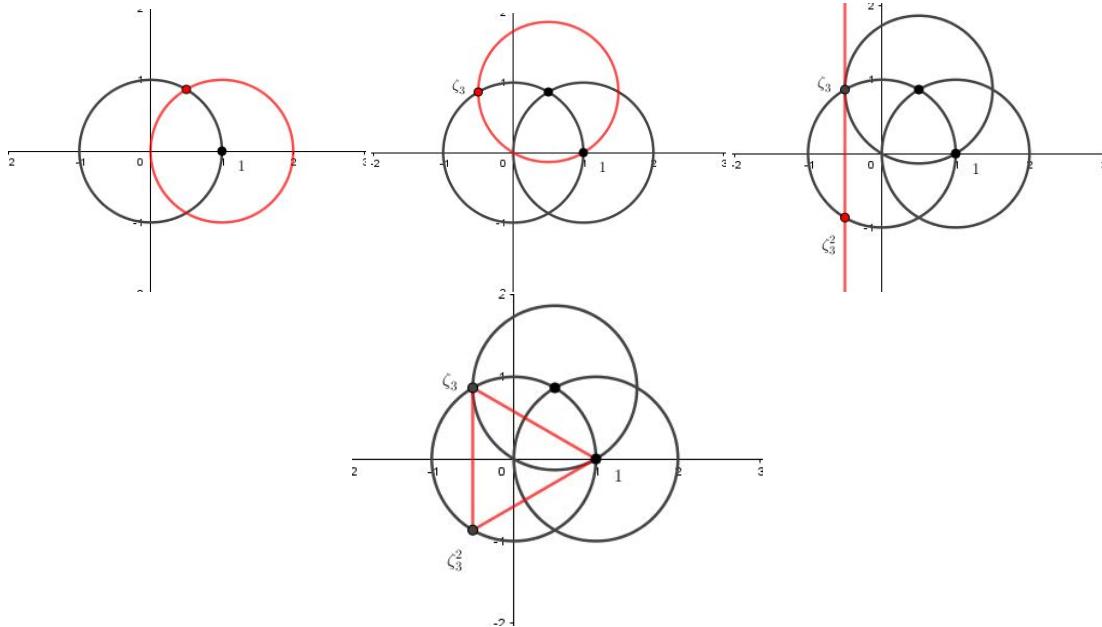


Figura 1.13: Construcción del triángulo regular con regla y compás.

Algunas construcciones imposibles con regla y compás

Existen algunos problemas geométricos conocidos a lo largo de la historia por no haberse encontrado solución mediante el uso de regla y compás. A continuación enumeramos construcciones imposibles de realizar con estas herramientas.

- Duplicación del cubo: resolver este problema es equivalente a construir la distancia $\sqrt[3]{2}$, pero $x^3 - 2$ es su polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} , lo que unido al Corolario 1.12, implica que no podemos construir $\sqrt[3]{2}$, y en consecuencia no podemos duplicar el cubo.
- Trisección del ángulo: este problema se puede resolver mediante regla y compás en algunos casos particulares, pero es imposible plantear un procedimiento general para un ángulo cualquiera. Veamos que no se puede en el caso del ángulo de 120° . Supongamos que podemos trisecarlo, como 120° es construible pues es el argumento de ζ_3 cuya construcción podemos ver en la Figura 1.13, entonces podemos construir el ángulo de 40° el cual nos permite encontrar $\zeta_9 = e^{2\pi i/9}$ (como intersección de la circunferencia unidad y dicho ángulo situado sobre el origen). Por otro lado tenemos que

$$x^9 - 1 = \Phi_1 \Phi_3 \Phi_9 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1),$$

donde $\Phi_6 = (x^6 + x^3 + 1)$ es el polinomio mínimo de $\zeta_9 = e^{2\pi i/9}$ cuyo grado no es potencia de 2, lo que utilizando el Corolario 1.12 implica que es absurdo suponer que podemos trisecar el ángulo 120° con regla y compás. En el Capítulo 3 veremos como éste ángulo se trisecca mediante una hipérbola para la construcción del eneágono regular, Figura 3.11.

- Cuadratura del círculo: consiste en que dado un círculo, se pretende construir un cuadrado cuya área sea igual a la de dicho círculo. Si esto fuese posible implicaría que π es algebraico sobre \mathbb{Q} , y ésto es absurdo pues sabemos que π es trascendente.

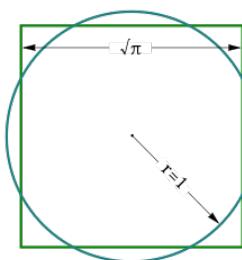


Figura 1.14: Cuadratura del círculo de radio 1.

Capítulo 2

Construcciones mediante cónicas

Como consecuencia de la imposibilidad de resolver ciertos problemas mediante el uso exclusivo de regla y compás, algunos matemáticos pensaron en utilizar otras herramientas que les permitiesen construir puntos auxiliares con los que finalmente dar solución a aquellos problemas que no habían sido capaces.

A continuación, expondremos cómo el uso de cónicas nos amplía la cantidad de puntos construibles y es útil para la resolución algunos problemas ya mencionados. Para ello repasaremos brevemente el concepto de cónica, definiremos lo que es un punto cónico-construible y lo caracterizaremos algebraicamente. Para finalizar veremos la relación que tienen con los puntos origami.

2.1. Cónicas elementos y propiedades

Llamamos cónica a toda curva que se construye mediante la intersección de un plano y un cono doble. Los planos de corte que no contienen al vértice generan tres tipos de cónicas: hipérbola, parábola y elipse (no consideramos la circunferencia como cónica ya que no la podemos definir mediante directriz y foco como veremos más adelante). Mientras que los planos que contienen al vértice generan cónicas degeneradas: recta, par de rectas secantes y punto; algunos autores no las consideran cónicas y nosotros tampoco lo haremos a lo largo del trabajo.

Las cónicas se pueden tratar desde varios puntos de vista. En el caso que nos atañe nos interesan dos de ellos: el algebraico y el geométrico. El primero de ellos nos servirá para usar resultados y propiedades algebraicas sobre las ecuaciones que definen a las cónicas. Por otro lado, las veremos desde el punto de vista geométrico, lo que nos permitirá la obtención de puntos con algunas propiedades derivadas de las cónicas.

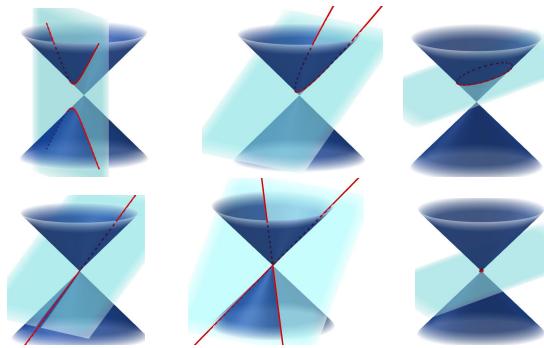


Figura 2.1: Cónicas.

La intersección cono-plano desde el punto de vista algebraico se puede ver como las soluciones de la ecuación que define al cono y que a la vez son soluciones de la ecuación que define el plano. De esta forma tenemos que la ecuación general de un cono recto cuyo vértice se encuentra en el origen es la siguiente:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, tal que a, b y c no son simultáneamente nulos, por tanto podemos definir las cónicas como las soluciones a esta ecuación que se encuentran en el plano $z = r$ para $r \in \mathbb{R}$. En el caso del plano $z = 0$, que contiene el vértice del cono, aparecen las cónicas degeneradas. Por tanto la definición algebraica es la siguiente.

Definición 2.1. *Llamamos cónica a un conjunto \mathcal{W} de puntos en \mathbb{R}^2 tal que son ceros de un polinomio de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ y tal que A, B, C no son todos nulos a la vez:*

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}.$$

Algunos de estos polinomios nos proporcionan, cónicas degeneradas, como ya hemos dicho, las descartaremos a lo largo del trabajo, puesto que las rectas somos capaces de construirlas con la regla. Dado un polinomio de éstas características podemos clasificar el tipo de cónica que define, si ésta no es degenerada, mediante el cálculo de su discriminante $B^2 - 4AC$:

- $B^2 - 4AC < 0$, elipse,
- $B^2 - 4AC = 0$, parábola,
- $B^2 - 4AC > 0$, hipérbola.

En cuanto a el enfoque geométrico, nos interesan las propiedades métricas de las cónicas y por tanto las definimos como sigue.

Definición 2.2. Una cónica \mathcal{W} se define como el lugar de los puntos P en \mathbb{R}^2 tal que el cociente de la distancia a un punto fijo, el foco F , y la distancia a una recta L llamada directriz es constante, dicho cociente se denomina excentricidad y se denota por $e \in \mathbb{R}$,

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)}.$$

En función del valor que tome la excentricidad podemos clasificar las cónicas en tres grupos (ver Figura 2.2):

elipse $0 < e < 1$; parábola $e = 1$; hipérbola $e > 1$,

en el caso de la elipse y la hipérbola existen dos posibles directrices de definición, cada una de ellas con su correspondiente foco asociado, mientras que la parábola se define mediante una única directriz y un único foco.

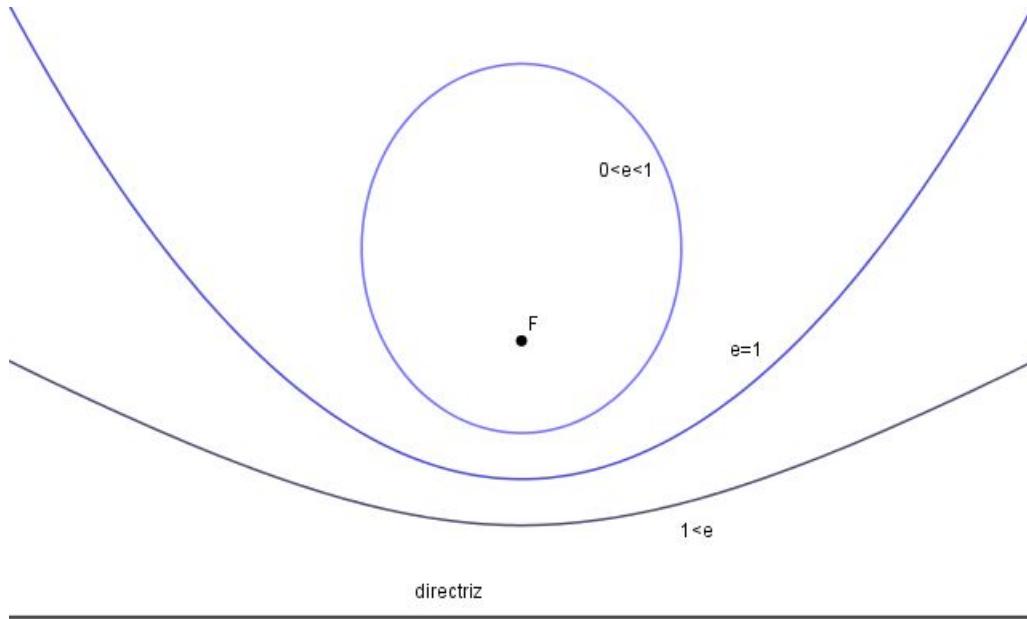


Figura 2.2: Cónicas en función de e .

Teorema de Bézout para cónicas

El objetivo de este apartado es recordar que dadas dos cónicas, a los sumo se intersecan en cuatro puntos distintos, pues de ser más tendríamos que ambas cónicas coincidirían en todos sus puntos. La forma natural de plantear este resultado es desde la geometría proyectiva [7].

Definición 2.3. Definimos el *plano proyectivo complejo* $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ como el conjunto de clases de equivalencia en $\mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tales que dos puntos son equivalentes si y solo si $(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. A cada una de esas clases la llamamos punto de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ cuyas coordenadas las denotamos por

$$[x : y : z] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2),$$

con $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Una curva algebraica en el plano proyectivo complejo es un conjunto de puntos que satisfacen la condición de ser ceros de un polinomio homogéneo en tres variables $G(x, y, z) = 0$. Toda curva afín algebraica $g(x, y) = 0$ se puede completar, mediante la homogeneización del su polinomio asociado

$$g_h(x, y, z) = z^{\deg(g)} g\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

A continuación enunciaremos el teorema de Bézout para curvas algebraicas proyectivas.

Teorema 2.4. Sean G y H dos curvas planas proyectivas de grado m y n respectivamente y sin ninguna componente común. Entonces

$$\sum_{P \in G \cap H} I(P, G \cap H) = nm,$$

donde $I(P, G \cap H)$ es el número de intersección de P para $G \cap H$.

Corolario 2.5. Sean \mathcal{W} y \mathcal{W}' dos curvas proyectivas ambas de grado 2 (cónicas) y sin ninguna componente común entonces

$$\sum_{P \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}'} I(P, \mathcal{W} \cap \mathcal{W}') = 4.$$

Corolario 2.6. Sean \mathcal{W} y \mathcal{W}' dos curvas en el plano afín real ambas de grado 2 (cónicas) tal que no son coincidentes, a lo sumo se cortan en cuatro puntos.

Observamos que en el plano proyectivo complejo tenemos en cuenta las posibles intersecciones que ocurren en puntos complejos y en el punto del infinito. De manera que cuando tratamos las curvas en el plano afín real dichas intersecciones no tienen lugar.

2.2. Puntos cónico-construibles

En primer lugar, debemos formalizar qué consideramos como punto cónico-construible, lo que nos permitirá una descripción precisa y rigurosa de la resolución de algunos problemas mediante el uso de cónicas.

Conjunto de puntos cónico-construibles

Llamaremos $\tilde{C}(S)$ al conjunto de puntos cónico-construibles a partir de un conjunto de puntos dado $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ con $P_i \in \mathbb{C}$, a continuación veremos como se construye. Sea $S_1 = S$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$S_{m+1} = S_m \cup P_R \cup P_{CR} \cup P_{COR} \cup P_{CO},$$

$$\begin{aligned} P_R &= \{P \in \mathbb{C} : P = L_1 \cap L_2 \text{ con } L_1, L_2 \in R\}, \\ P_{CI} &= \{P \in \mathbb{C} : P = S \cap L \text{ con } S \in CI, L \in R\}, \\ P_{COR} &= \{P \in \mathbb{C} : P = E \cap L \text{ con } \mathcal{W} \in CO, L \in R\}, \\ P_{CO} &= \{P \in \mathbb{C} : \mathcal{W} \cap \mathcal{W}' \text{ con } \mathcal{W}, \mathcal{W}' \in CO \cup CI\}. \end{aligned}$$

Donde:

- R es el conjunto de rectas que pasan por al menos dos puntos de S_m .
- CI es el conjunto de circunferencias con centro en puntos de S_m y radio igual a la longitud de los segmentos cuyos extremos están en S_m .
- CO es el conjunto de cónicas con focos en puntos de S_m , directrices en R y excentricidades iguales a la longitud de los segmentos cuyos extremos están en S_m .

Dada la sucesión de conjuntos S_1, S_2, \dots definimos el conjunto de puntos cónico-construibles a partir de S como:

$$\tilde{C}(S) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m.$$

Definición 2.7. Un punto $z \in \mathbb{C}$ se dice cónico-construible si $z \in \tilde{C}(\{O, Q\})$, donde $O = (0, 0) \equiv 0$ y $Q = (1, 0) \equiv 1$. El conjunto de puntos cónico-construibles lo denotaremos por \tilde{C} .

A continuación veremos los conceptos de recta y cónica cónico-construibles, y algunas propiedades algebraicas que poseen, lo que más adelante nos permitirá caracterizar el conjunto \tilde{C} .

Definición 2.8. Se dice que una recta L es cónico-construible cuando los son al menos dos puntos por los que pasa.

Teorema 2.9. Una recta L es cónico-construible si y solo si admite una ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0,$$

con $a, b, c \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$.

Prueba. Como L es construible existen dos puntos en la recta que podemos trazar mediante regla, compás y cónicas, los denotaremos por $P, Q \in \tilde{C}$, por tanto también son cónico-construibles sus coordenadas $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$. La ecuación de la recta que pasa por dichos puntos se puede expresar como

$$\frac{x - p_1}{p_1 - q_1} = \frac{y - p_2}{p_2 - q_2},$$

la cual cuando despejamos nos queda de la forma

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y + (-p_1(p_2 - q_2) - p_2(p_1 - q_1)) = 0,$$

de donde podemos extraer los coeficientes cónico-construibles a, b y c que habíamos enunciado.

Para demostrar el recíproco distinguiremos dos casos:

- Caso en que $a = 0$, en ese caso sabemos que $b \neq 0$, pues no pueden ser nulos ambos a la vez, por tanto podemos construir $\frac{-c}{b} \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$ y en consecuencia también $(0, \frac{-c}{b})$ (Lema 1.6). Por otro lado sabemos que la recta es paralela al eje x, luego podemos construirla como paralela a x que pasa por $(0, \frac{-c}{b})$.
- Caso en que $a \neq 0$, ocurre que $\frac{-c}{a}$ y $\frac{-c-b}{a}$ son cónico-construibles y por tanto también lo son $(0, \frac{-c}{a}), (1, \frac{-c-b}{a}) \in L$, lo que implica que L es cónico-construible.

□

Definición 2.10. Se dice que una cónica \mathcal{W} es cónico-construible cuando los son su foco, su directriz y su excentricidad.

Teorema 2.11. Toda cónica \mathcal{W} cónico-construible admite una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $A, B, C, D, E, F \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$.

Prueba. Por definición de \mathcal{W} son cónico-construibles: su foco $F = (s, t)$, su directriz $px + qy + r = 0$ y su excentricidad $e \in \mathbb{R}$. Por lo visto anteriormente ocurre que $s, t, p, q, r, e \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$.

Sabemos que todo punto $(x, y) \in \mathcal{W}$ cumple que cociente de la distancia al foco entre la distancia a la directriz es igual a la excentricidad:

$$e = \frac{\|(x, y) - (s, t)\|}{\sqrt{|px + qy + r|}} = \frac{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

es decir,

$$e = \frac{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}{\sqrt{|px + qy + r|}} = \frac{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Si despejamos y elevamos al cuadrado,

$$\frac{|px + qy + r|^2}{p^2 + q^2} e^2 = (x-s)^2 + (y-t)^2.$$

Deshaciendo cuadrados,

$$\frac{p^2 x^2 + q^2 y^2 + 2pqxy + r^2 + 2rpx + 2qry}{p^2 + q^2} e^2 = (x^2 + s^2 - 2sx) + (y^2 + t^2 - 2ty).$$

Agrupando términos,

$$\frac{p^2 e^2}{p^2 + q^2} x^2 + \frac{q^2 e^2}{p^2 + q^2} y^2 + \frac{2pqe^2}{p^2 + q^2} xy + \frac{r^2 e^2}{p^2 + q^2} + \frac{2rpe^2}{p^2 + q^2} x + \frac{2rqe^2}{p^2 + q^2} y = x^2 + s^2 - 2sx + y^2 + t^2 - 2ty.$$

Finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p^2 e^2}{p^2 + q^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{2pqe^2}{p^2 + q^2} \right) xy + \left(\frac{q^2 e^2}{p^2 + q^2} - 1 \right) y^2 + \left(\frac{2rpe^2}{p^2 + q^2} + 2s \right) x \\ & + \left(\frac{2rqe^2}{p^2 + q^2} + 2t \right) y + \frac{r^2 e^2}{p^2 + q^2} - t^2 - s^2 = 0. \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los parámetros es cónico-construible y las operaciones que realizamos con ellos también lo son, los coeficientes de la última ecuación lo son, es decir, están contenidos en \tilde{C} . Además como los parámetros son reales tenemos que los coeficientes de la ecuación también los son. \square

Por otro lado podemos pensar el realizar el proceso inverso, es decir, dada la ecuación de la cónica construir su foco, directriz y excentricidad. Para ello desarrollaremos un método inverso al descrito anteriormente, pero con algunos matices.

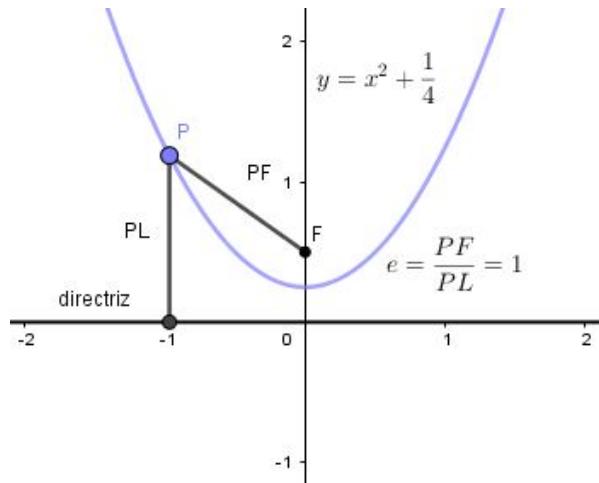


Figura 2.3: Parábola con $e = 1$ y su ecuación asociada $y = x^2 + \frac{1}{4}$.

Teorema 2.12. *Toda cónica \mathcal{W} descrita mediante una ecuación de la forma:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $A, B, C, D, E, F \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$, es cónico-construible.

Prueba. En primer lugar veamos como podemos construir su excentricidad, en [2] se expone el siguiente método. Sea una cónica E , no degenerada, dada por la ecuación del enunciado tenemos que en caso de que $B^2 - 4AC = 0$ es una parábola, y por tanto su excentricidad es igual a 1. Si no fuese una parábola tenemos que la excentricidad se calcula mediante

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{\eta(A+C) + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}},$$

donde $\eta = -1$ si $v > 0$ y $\eta = 1$ si $v < 0$, siendo

$$v = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}.$$

Por tanto, sabemos construir su excentricidad.

A continuación, mostraremos como construir su directriz y su foco. El Teorema 2.11 nos dice que los coeficientes de la ecuación asociada a una cónica en función del foco (s, t) , su

directriz $px + qy + r = 0$ y la excentricidad e son de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^2 e^2}{p^2 + q^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{2pqe^2}{p^2 + q^2} \right) xy + \left(\frac{q^2 e^2}{p^2 + q^2} - 1 \right) y^2 + \left(\frac{2rpe^2}{p^2 + q^2} + 2s \right) x \\ + \left(\frac{2rqe^2}{p^2 + q^2} + 2t \right) y + \frac{r^2 e^2}{p^2 + q^2} - t^2 - s^2 = 0. \end{aligned}$$

Para facilitar los cálculos, podemos suponer que $p^2 + q^2 = 1$ de esta forma estaríamos diciendo que el vector perpendicular a la directriz sea unitario. Como tan solo nos interesa su dirección, esta condición no conlleva una perdida de generalidad, de forma que tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} (p^2 e^2 - 1) x^2 + (2pqe^2) xy + (q^2 e^2 - 1) y^2 \\ + (2rpe^2 + 2s) x + (2rqe^2 + 2t) y + r^2 e^2 - t^2 - s^2 = 0. \end{aligned}$$

Puede ocurrir que la ecuación de la que dispongamos para definir nuestra cónica sea un múltiplo real de la anterior, a continuación describimos el procedimiento para calcular el número real $\lambda \in \mathbb{R}$ por el cuál estaría multiplicada:

$$\begin{aligned} A + C &= \lambda ((p^2 e^2 - 1) + (q^2 e^2 - 1)), \\ A + C &= \lambda (p^2 e^2 - 1 + q^2 e^2 - 1), \\ A + C &= \lambda ((p^2 + q^2)e^2 - 2) = \lambda (e^2 - 2), \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{A + C}{e^2 - 2}.$$

Luego si λ no es nulo dividimos la ecuación por dicho escalar y por tanto podemos calcular los distintos parámetros correspondientes a los elementos igualando con los coeficientes definidos en nuestra ecuación y resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} p^2 e^2 - 1 &= A, \\ q^2 e^2 - 1 &= C, \\ 2pqe^2 &= B, \\ 2rpe^2 + 2s &= D, \\ 2rqe^2 + 2t &= E, \\ r^2 e^2 - t^2 - s^2 &= F. \end{aligned}$$

en primer lugar calculamos los valores de p y q pues las dos primeras ecuaciones nos determinan sus valores absolutos y la tercera su signo (como solución obtenemos dos vectores

opuestos que determinan una única dirección). Para calcular el resto de parámetros resolvemos

$$\begin{aligned} 2rpe^2 + 2s &= D, \\ 2rqe^2 + 2t &= E, \\ r^2e^2 - t^2 - s^2 &= F, \end{aligned}$$

despejando la s y la t en las primeras ecuaciones y sustituyéndolas en la tercera calculamos r como solución de un polinomio de grado 2. En segundo lugar calculamos s y t sustituyendo r en las dos primeras (en algunos casos tendremos dos soluciones para r , se corresponden con aquellas cónicas que poseen dos focos y dos directrices, y en consecuencia también dos valores para s y dos para t).

Si observamos la definición de λ en caso de que $A + C = 0$ no podemos aplicar el procedimiento anterior, teniendo en cuenta como se calcula la excentricidad (Ecuación 2.2)

$$A + C = 0 \text{ si y solo si } e = \sqrt{2}.$$

Este caso particular se trata de una hipérbola equilátera. Para calcular su foco y directriz en primer lugar debemos transportarla tal que su centro se sitúe en el origen de coordenadas, después debemos calcular el ángulo de rotación de sus ejes respecto a los de coordenadas para poder rotarla de forma que estos sean coincidentes. Finalmente resolveremos el caso caso centrado y rotado y aplicaremos los movimientos opuestos que nos darán los elementos de la hipérbola original.

El centro de la hipérbola, ver [8] se obtiene resolviendo el sistema (intersección de dos rectas)

$$\begin{aligned} Ax + By &= D, \\ Bx + Cy &= E. \end{aligned}$$

Mientras que el ángulo de rotación, ver [1], se calcula usando

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

Para construir los focos y las directrices de una hipérbola equilátera centrada cuyos ejes sean los de coordenadas, tenemos que tener en cuenta que existen dos caso posibles; que las ramas de la hipérbola se encuentren en los cuadrantes impares (Figura 2.4) y que se encuentren en los pares, este último se puede reducir al anterior de nuevo por rotación. En el primer caso tenemos que $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para encontrar el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por el que está multiplicada la ecuación tenemos que $B = 2pqe^2\lambda = 2\lambda$ luego $\lambda = B/2$, de manera que podemos resolver el sistema como ya hemos visto anteriormente. \square

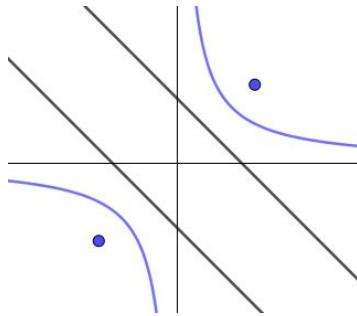


Figura 2.4: Hipérbola centrada.

Uso de cónicas para el cálculo de raíces cúbicas

Una de las aplicaciones más antiguas que tienen las cónicas es la construcción de raíces cúbicas (ver [11]). Tengamos en cuenta que dado un número $z \in \mathbb{C}$ posee un módulo $r = |z|$ y un argumento θ , por lo tanto para calcular sus tres raíces cúbicas basta con ser capaz de construir la distancia s tal que $s^3 = r$ y el ángulo $\theta/3$.

Proposición 2.13 (Raíz cónica de una distancia). *Dada una distancia r podemos hallar una distancia s tal que $s^3 = r$ mediante el uso de paráolas.*

Prueba. Sean \mathcal{W} y \mathcal{W}' las paráolas con foco $(0, 1/4)$ y directriz $y = -1/4$, y con foco $(r/4, 0)$ y directriz $x = -r/4$, respectivamente. Cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &\equiv y = x^2, \\ \mathcal{W}' &\equiv x = \frac{y^2}{r}.\end{aligned}$$

Veamos cuales son las coordenadas de los puntos de intersección (Figura 2.5), en primer lugar sustituimos la primera ecuación en la segunda

$$x = \frac{y^2}{r} = \frac{x^4}{r}.$$

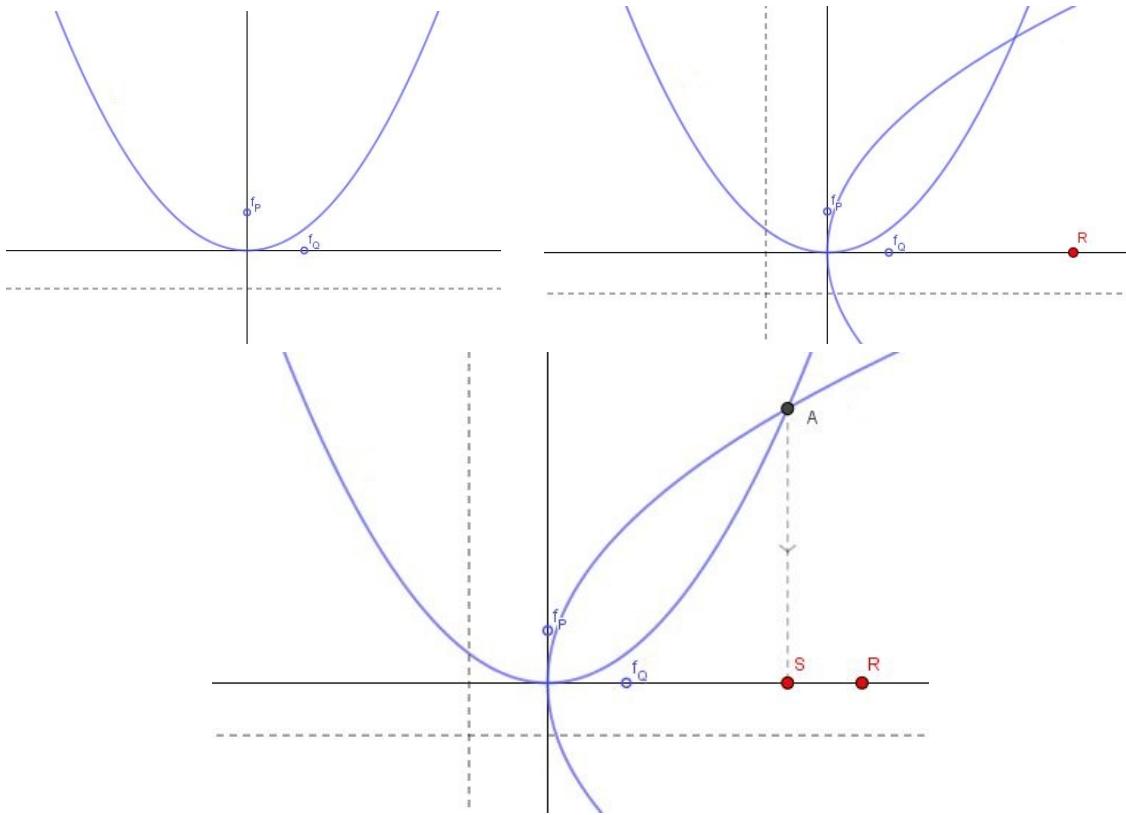
Despejamos

$$(x - \frac{x^4}{r}) = 0.$$

Finalmente sacamos factor común

$$x(1 - \frac{x^3}{r}) = 0,$$

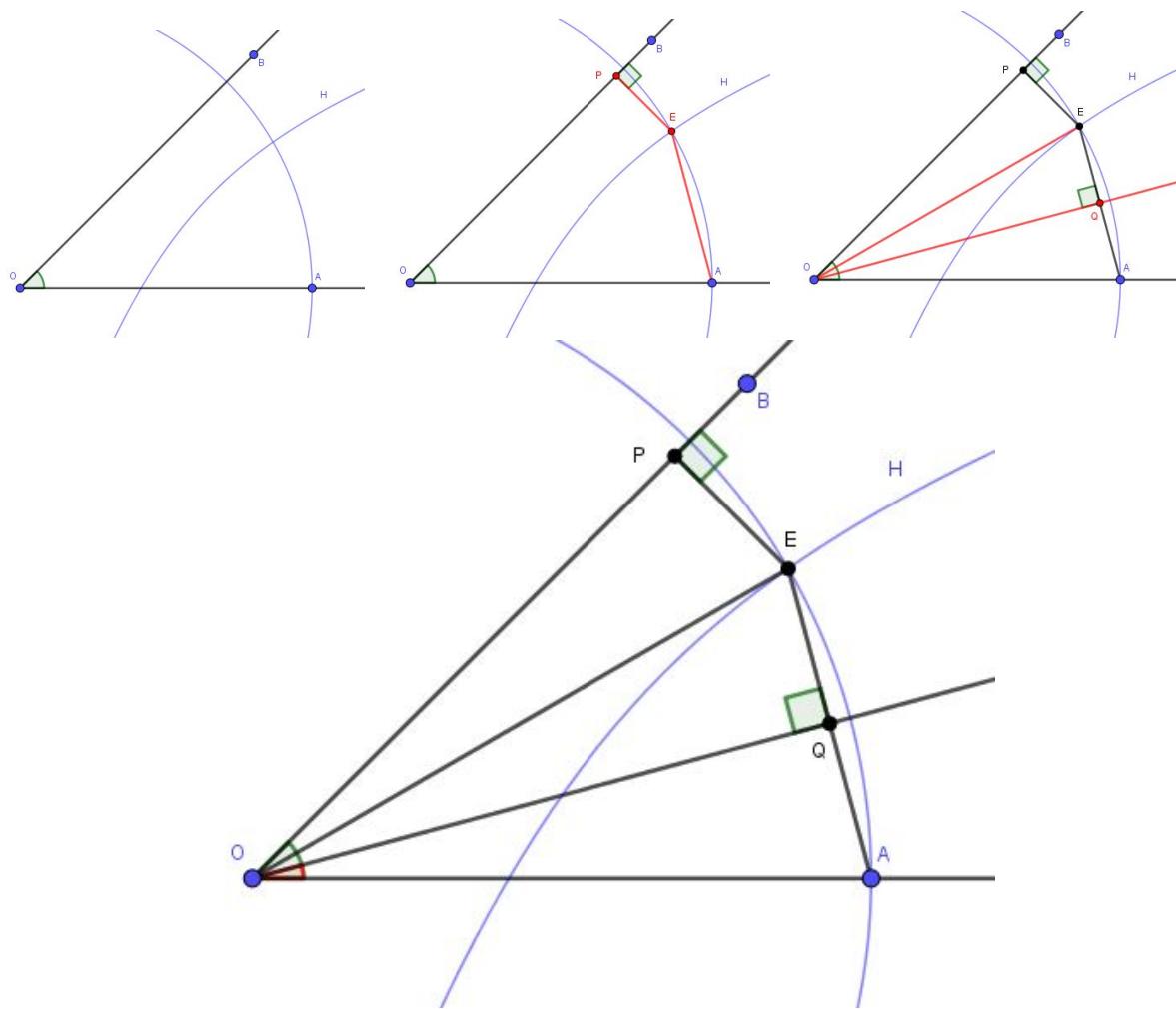
de donde podemos deducir que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' = \{(0, 0), (\sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r^2})\}$, así vemos que la primera coordenada del segundo punto de intersección (A en 2.5) toma el valor s que buscábamos. \square

Figura 2.5: Construcción de s .

Proposición 2.14 (Trisección de un ángulo). *Sea θ un ángulo conocido, entonces podemos construir $\theta/3$ mediante el uso de una circunferencia y una hipérbola.*

Prueba. Supongamos un ángulo θ dado por tres puntos A, O y B . Trazamos la circunferencia de centro O que pasa por A . Por otro lado construimos la hipérbola \mathcal{H} con directriz la recta que contiene OB , foco A y excentricidad 2. La hipérbola \mathcal{H} interseca en un punto E , interior al ángulo, a la circunferencia.

Si trazamos la perpendicular a OB que pasa por E obtenemos el punto P de intersección entre ambas rectas. Además, podemos construir el punto medio del segmento EA al que llamaremos Q . Dada la excentricidad de \mathcal{H} , $e = 2$ tenemos que la longitud de PE , EQ y QA es la misma. A continuación demostraremos que los triángulos OPE , OEQ y BQA son congruentes. Los dos triángulos inferiores (OEQ y OQA) tienen las tres longitudes de sus lados iguales y por tanto son congruentes, además son triángulos rectángulos ya que sus ángulos en el vértice Q son iguales y suman entre los dos 180° . Por otro lado, el triángulo OPE también es rectángulo, ya que PE es perpendicular a OP , teniendo en cuenta que comparte hipotenusa con OEQ y ambos poseen un cateto de igual longitud (PE y EQ), podemos concluir que

Figura 2.6: Trisección de $\theta = \widehat{BOA}$.

OPE es congruente con los otros dos. Por tanto los ángulos con vértice O son todos iguales y $\widehat{QOA} = \widehat{BOA}/3 = \theta/3$. \square

2.3. Caracterización algebraica

A lo largo de este apartado estudiaremos las propiedades algebraicas del conjunto de puntos cónico-construibles, lo que nos dará una perspectiva de por qué es un conjunto interesante y que lo diferencia del conjunto de los puntos construibles con regla y compás.

El siguiente es un resultado previo que nos permitirá más adelante estudiar como se

comporta el conjunto de puntos cónico-construibles bajo la operación raíz cúbica.

Lema 2.15. *Toda ecuación con coeficientes en $\tilde{C} \cap \mathbb{R}$ cuyo grado sea menor o igual a cuatro se puede resolver mediante operaciones cónico-construibles.*

A continuación veremos como encontrar las soluciones de dichas ecuaciones. En el caso de la ecuación de primer grado $ax + b = 0$ basta con calcular el opuesto de b y el inverso de a para luego multiplicarlos de manera que,

$$x_1 = -b/a.$$

Si la ecuación es de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ debemos utilizar su fórmula general,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Por otro lado, en [6, Capítulo 1] se desarrolla el siguiente método para calcular las soluciones de una ecuación de tercer grado. En primer lugar, vamos a suponer el coeficiente cúbico igual a 1, es decir, $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (no perdemos generalidad porque al dividir la ecuación por su coeficiente del término cúbico no alteramos sus soluciones), por tanto las soluciones vienen dadas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3} + z_1 + z_2, \\ x_2 &= -\frac{b}{3} + \zeta_3 z_1 + \zeta_3^2 z_2, \\ x_3 &= -\frac{b}{3} + \zeta_3^2 z_1 + \zeta_3 z_2, \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}})}, \\ z_2 &= -\frac{p}{3z_1}, \\ \zeta_3 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \end{aligned}$$

donde z_1 denota una de las raíz cúbicas fija (podemos asumir que es la calculada mediante la trisección del argumento y la raíz cúbica del módulo, pero cualquiera de ellas es útil para

nuestro procedimiento). El cálculo de p y q se realiza a partir de los coeficientes de la ecuación:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b^2}{3} + c, \\ q &= -\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d. \end{aligned}$$

Finalmente en el caso de las cuárticas $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, existe el conocido como método de Ferrari para calcular sus soluciones, ver [10]. A continuación mostraremos las operaciones a realizar para hallarlas y veremos que todas ellas son cónico-construibles. En primer lugar calculamos los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}, \\ \beta &= \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}, \\ \gamma &= -\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{cb^2}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

En caso de que $\beta = 0$ las soluciones vienen dadas por la siguiente igualdad,

$$x = -\frac{b}{4a} \pm_s \sqrt{\frac{-\alpha \pm_t \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}}.$$

En otro caso debemos calcular,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\alpha^2}{12} - \gamma, \\ Q &= -\frac{\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8}, \\ R &= -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}, \\ U &= \sqrt[3]{R} \end{aligned}$$

y además,

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{6}\alpha + U - \frac{P}{3U} & \text{si } U \neq 0 \\ -\frac{5}{6}\alpha + U - \sqrt[3]{Q} & \text{si } U = 0 \end{cases},$$

$$W = \sqrt{\alpha + 2y}.$$

Finalmente las soluciones se calculan como sigue:

$$x = -\frac{b}{4a} + \frac{\pm_s W \pm_t \sqrt{-(3\alpha + 2\gamma \pm_s \frac{2\beta}{W})}}{2},$$

donde el subíndice s denota que ambos \pm_s deben coincidir en signo, mientras que \pm_t es independiente.

Lema 2.16. *El conjunto de los números cónico-construibles \tilde{C} , es el menor subcuerpo de \mathbb{C} cerrado para la conjugación, las raíces cuadradas y las raíces cúbicas.*

Prueba. Sabemos que dado un punto $z \in \mathbb{C}$, mediante el uso exclusivo de regla y compás somos capaces de construir tanto su conjugado \bar{z} como su raíz cuadrada \sqrt{z} . Además hemos visto que con el uso de la cónicas podemos calcular $\sqrt[3]{z}$. Por lo tanto, tenemos que \tilde{C} es cerrado para las tres operaciones. A continuación, veremos que es el menor con estas características.

Supongamos un subcuerpo $C' \subset \mathbb{C}$ cerrado bajo las tres operaciones. Probaremos que cualquier punto construido mediante el uso de regla, compás y cónicas definidos a partir de puntos en C' y distancias entre los mismos está en C' , lo que implica que $\tilde{C} \subseteq C'$.

En el caso de C' se sigue cumpliendo que dado $a+bi = z \in C'$ tenemos que $a, b \in C'$, es decir, los puntos correspondientes a las coordenadas de uno dado en C' , también pertenecen a C' . Basta ver que el subcuerpo es cerrado bajo conjugación y que $a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Además su recíproco es cierto ya que $i \in C'$ por ser cerrado bajo raíces cuadradas.

De la misma manera que en el Teorema 2.11, podemos demostrar que cualquier cónica \mathcal{W} obtenida a partir de puntos en C' y distancias entre los mismos, se puede definir como la solución de una ecuación de este tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

con $A, B, C, D, E, F \in C' \cap \mathbb{R}$, ya que C' es cerrado para raíces cuadradas.

Si ahora tomamos otra cónica \mathcal{W}' con ecuación:

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

tal que $A', B', C', D', E', F' \in C' \cap \mathbb{R}$.

Tenemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$ a lo sumo contiene cuatro puntos, de lo contrario serían la misma cónica. A continuación, demostraremos que dichos puntos están contenidos en C' . Para calcular las coordenadas de los puntos debemos resolver simultáneamente ambas ecuaciones. En el proceso observaremos que la resolución consiste en encontrar raíces de polinomios

cuyo grado es menor o igual a cuatro, lo que implicaría que las raíces son calculadas usando raíces cuadradas y cúbicas sobre elementos de C' .

Veamos ahora los distintos casos que existen para resolver las ecuaciones a la vez, en función de los coeficientes B y B' .

- Supongamos $B = B' = 0$, tenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \end{array} \right\}.$$

Restando a la segunda ecuación la primera multiplicada por $\frac{C'}{C}$ obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A''x^2 + D''x + E''y + F'' = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos despejar y de la siguiente forma:

$$y = -\frac{A''}{E''}x^2 - \frac{D''}{E''}x - \frac{F''}{E''},$$

por lo que al sustituir y en la primera expresión obtenemos un polinomio $P(x)$ cuyo grado es menor o igual que cuatro. De manera que calculamos mediante $P(x)$ las primeras coordenadas de los puntos de intersección, estas soluciones se calculan usando raíces cuadradas y cúbicas. Bastará sustituir éstas en el cualquiera de las cónicas para calcular sus segundas coordenadas, resolviendo polinomios de a lo sumo grado dos.

- Tratemos el caso en que $B \neq 0$ $B' = 0$. En este caso \mathcal{W}' no tiene término xy , lo que significa que sus ejes están alineados con los cartesianos. Mediante el uso de regla y compás podemos trasladar ambas cónicas de manera que el origen de coordenadas $(0, 0)$ sea el centro de \mathcal{W}' , de igual forma la acción inversa es posible. Por lo tanto a partir de ahora suponemos \mathcal{W} y \mathcal{W}' ya trasladadas, lo cual nos facilitará la demostración. Dividimos el caso en tres supuestos, dependiendo de el tipo de cónica que sea \mathcal{W}' .

Supongamos que \mathcal{W}' es una parábola, en ese caso tenemos que el sistema ha de ser de una de las siguientes formas:

$$\left. \begin{array}{l} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A'x^2 + E'y + F' = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ C'y^2 + D'x + F' = 0 \end{array} \right\}.$$

En el primer caso despejamos la variable y en la segunda ecuación y la sustituimos en la que corresponde a \mathcal{W} , de esta manera obtenemos una ecuación $P(x) = 0$ que a lo sumo es de grado cuatro. En el segundo caso, análogamente llegamos a una ecuación $Q(y) = 0$ que a lo sumo es de grado cuatro. En consecuencia $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}' \subset C'$.

En caso de que \mathcal{W}' sea una elipse (incluyendo el caso particular de la circunferencia), observamos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A'x^2 + C'y^2 + F' = 0 \end{array} \right\}.$$

Despejando en la segunda ecuación tenemos que: $x^2 = -\frac{C'}{A'}y^2 - \frac{F'}{A'}$, lo que podemos escribir como: $x^2 = \alpha^2(1 - \frac{y^2}{\beta^2})$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cap C'$). De manera que al sustituir en la primera ecuación se da la siguientes igualdad:

$$A\alpha^2(1 - \frac{y^2}{\beta^2}) + Cy^2 + Ey + F = -x(By + D),$$

de donde se deduce que:

$$\left(A\alpha^2(1 - \frac{y^2}{\beta^2}) + Cy^2 + Ey + F \right)^2 = -x^2(By + D)^2,$$

$$\left(A\alpha^2(1 - \frac{y^2}{\beta^2}) + Cy^2 + Ey + F \right)^2 + \alpha^2(1 - \frac{y^2}{\beta^2})(By + D)^2 = 0.$$

De nuevo tenemos que resolver una ecuación de grado menor o igual que cuatro.

Cuando \mathcal{W}' es una hipérbola se actúa de forma similar al caso en que \mathcal{W}' es una elipse.

- Finalmente cuando $B \neq 0 B' \neq 0$, basta con multiplicar la segunda ecuación por $\frac{B}{B'}$ para posteriormente sustraerla la primera ecuación de forma que anulamos su término xy y entonces procedemos como en el caso anterior.

□

En cuanto a la demostración anterior, una forma alternativa de realizarla hubiese sido mediante el uso de resultantes. Sean dos polinomios $f, g \in K[x]$ (K cuerpo), su resultante $Res_x(f, g)$ se define como el determinante de su matriz de Sylvester asociada [14]. Se da la propiedad de que la resultante de f y g es cero si y solo sí poseen raíces comunes en un cuerpo algebraicamente cerrado que contenga a sus coeficientes.

La búsqueda de las posibles intersecciones entre dos cónicas, desde el punto de vista algebraico consiste en resolver en \mathbb{R}^2 un sistema de dos ecuaciones polinomiales de grado dos

en dos variables $p(x, y) = 0$ y $q(x, y) = 0$, como ya hemos visto. Por tanto si fijamos la variable y para un determinado $y_0 \in \mathbb{R}$ y calculamos la resultante $Rex_x(p(x, y_0), q(x, y_0))$ obtenemos un polinomio de grado menor o igual a cuatro en función de y_0 , que podemos resolver como hemos mostrado antes. Finalmente por cada uno de las raíces $\alpha \in K$ de la resultante podemos sustituirla en el sistema y resolver el que nos surge: $p(x, \alpha) = 0$ y $q(x, \alpha) = 0$ y encontrar las posibles soluciones comunes para la x . De nuevo observamos que no necesitamos resolver polinomios de grado mayor que cuatro.

Haciendo uso del anterior resultado demostraremos como podemos determinar si un punto $z \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto de cónico-construibles \tilde{C} o no a través de sus propiedades algebraicas.

Teorema 2.17. *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces z es cónico-construible si y solo si está contenido en $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ un subcuerpo de \mathbb{C} , de manera que $\alpha_1^n \in \mathbb{Q}$ y $\alpha_i^n \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ con $2 \leq i \leq l$ y $n \in \{2, 3\}$. A estos cuerpos los llamamos (2,3)-cadenas sobre \mathbb{Q} .*

Prueba. Consideremos el conjunto C' de todos los puntos complejos contenidos en una (2,3)-cadena sobre \mathbb{Q} . Podemos afirmar que C' está contenido en el conjunto \tilde{C} de puntos cónico-construibles ya que este es cerrado bajo raíces cuadradas y cúbicas.

Para demostrar que $\tilde{C} \subseteq C'$, tenemos que \tilde{C} es cerrado para raíces cuadradas y cúbicas, como $\overline{\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)} = \mathbb{Q}(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_l)$ también lo es bajo la conjugación, por lo que queda demostrada la segunda inclusión. \square

Para probar el resultado final, antes debemos recordar el siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [4].

Teorema 2.18 (Burnside). *Sean p y q dos primos distintos, todo grupo de orden $p^n q^m$, con m y n enteros tales que $n, m \geq 0$, es resoluble.*

Teorema 2.19. *Un punto $z \in \mathbb{C}$ pertenece a \tilde{C} si y solo si es algebraico sobre \mathbb{Q} y la clausura normal K/\mathbb{Q} de $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ tiene dimensión $2^n 3^m$ sobre \mathbb{Q} , siendo $n, m \in \mathbb{N}$*

Prueba. Supongamos $z \in \mathbb{C}$ tal que es cónico-construible, el resultado anterior implica que está contenido en una (2,3)-cadena $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$. Podemos asumir que esta cadena es extensión de Galois sobre \mathbb{Q} . Por tanto la clausura normal K/\mathbb{Q} de $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$, que es un subcuerpo de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, cumple:

$$[K : \mathbb{Q}] = 2^n 3^m \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado supongamos que la clausura normal K/\mathbb{Q} de $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ tiene dimensión $2^n 3^m$ sobre \mathbb{Q} , siendo $n, m \in \mathbb{N}$. El grupo de Galois $G = Gal(K/\mathbb{Q})$ tiene orden $2^n 3^m$.

Por el teorema de Burnside G es resoluble, en consecuencia existe una cadea finita de subgrupos tal que $G = G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_k = \{1\}$ tal que G_i/G_{i+1} tiene orden 2 ó 3. Entonces el teorema

fundamental de la teoría de Galois nos garantiza que existe una cadena de subcuerpos de K , tal que:

$$\mathbb{Q} = F_1 \subset \cdots \subset F_l = K,$$

cumpliendo que $[F_i : F_{i+1}] = 2$ ó $[F_i : F_{i+1}] = 3$. Podemos escribir $F_{i+1} = F_i(\alpha_i)$. Si la extensión es de grado dos la podemos construir añadiendo $\sqrt{\alpha_i}$, en caso que sea de grado 3 y no se pueda obtener mediante una raíz cúbica, tenemos que $F_i \subset F_{i+1}$ se puede sustituir por $F_i \subset L'_i \subset L''_i \subset L'''_i$, con $\alpha_i \in L'''_i$, siendo esta una (2,3)-cadena. Por lo que z está contenido en una (2,3)-cadena sobre \mathbb{Q} y por tanto es construible. \square

Construcción de polígonos regulares

A continuación, veremos de forma algebraica como el uso de cónicas amplia la cantidad de polígonos regulares que podemos construir, lo cual es uno de los motivos por el que es interesante estudiar las construcciones mediante cónicas.

Teorema 2.20. *Un n -polígono regular es cónico-construible si y sólo si la descomposición de n en primos es:*

$$n = 2^s 3^t \cdot p_1 \cdots p_m,$$

para unos enteros $s, t, m \geq 0$, además los p_i son todos distintos y tal que los factores primos de $p_i - 1$ son 2 ó 3.

Prueba. Un n -polígono regular sera cónico-construible si y solo si $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ lo es. Consideremos la extensión ciclotómica de la n -raíz $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, sabemos que es de Galois [6, Capítulo 9] y su grado sobre \mathbb{Q} es $\phi(n)$. Si $n = 2^s 3^t \cdot p_1 \cdots p_m$ con $s, t \geq 1$ ocurre que:

$$[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n) = 2^s 3^{t-1} \cdot p_1^{e_1-1} (p_1 - 1) \cdots p_m^{e_m-1} (p_m - 1),$$

por tanto ζ_n es cónico-construible si y solo si $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^n 3^m$ es decir si y solo si $e_i = 1$ y $p_i - 1$ solo es divisible por los primos 2 y 3. En caso de que $s = 0$ ó $t = 0$ se demuestra de una forma similar. \square

2.4. Comparación con los números Origami

A lo largo de este apartado vamos a comparar el conjunto de los puntos cónico-construibles, con el de aquellos puntos que se pueden construir mediante papiroflexia. De nuevo es una ampliación de aquellos construibles con regla y compás.

El conjunto de puntos origami-construible también se puede estudiar desde los puntos de vista geométrico y algebraico [9]. Para formalizar este conjunto se establecen los conocidos como axiomas de Huzita.

- O1 - Dados dos puntos A y B , podemos construir un pliegue que los una.
- O2 - Dados dos puntos A y B , podemos construir un pliegue que superponga el punto A sobre el B .
- O3 - Dadas dos rectas L_1 y L_2 , podemos construir un pliegue que superponga una sobre la otra.
- O4 - Dados el punto A y la recta L , podemos crear un pliegue que pase por A y sea perpendicular a L .
- O5 - Dados los puntos A y B y la recta L , no perteneciendo B a L , podemos construir un pliegue pasando por A y tal que superponga B sobre un punto de L .
- O6 - Dados dos puntos A y B y dos rectas L_1 y L_2 , podemos crear un pliegue que superponga el punto A sobre uno de L_1 , a la vez que hace lo mismo para B y L_2 .

Definición 2.21. Un punto $z \in \mathbb{C}$ se dice origami-construible si existe una secuencia finita de pasos usando: $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$, tal que a partir de 0 y 1 construimos z . El conjunto de puntos origami-construibles lo denotaremos por \mathcal{O} .

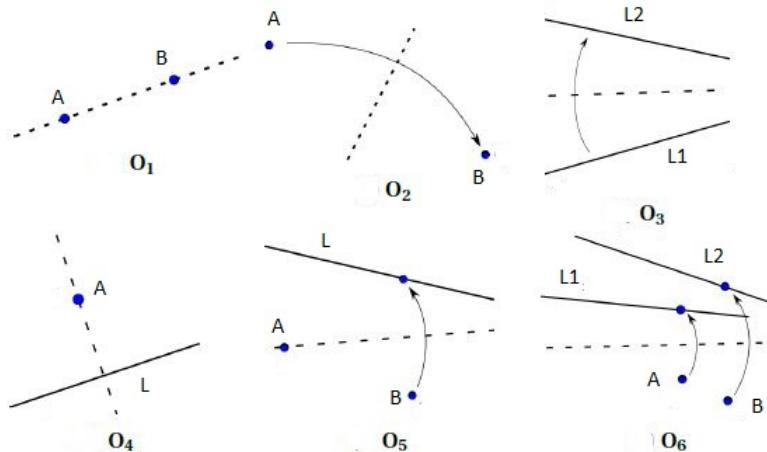


Figura 2.7: Axiomas de Huzita [9].

Entre las construcciones que nos permite la papiroflexia se encuentra también la trisección del ángulo (Figura 2.8). En el trabajo hemos visto que la trisección del ángulo es una construcción que se puede realizar mediante cónicas, además de ésta; toda construcción cónico-construible se puede realizar mediante la papiroflexia y viceversa. En [6, Capítulo 10] podemos encontrar el siguiente resultado,

Teorema 2.22. *Sea $z \in \mathbb{C}$. El punto z es origami-construible, $z \in \mathcal{O}$, si y solo si es cónicoconstruible, $z \in \tilde{\mathcal{C}}$.*

Además, el libro relaciona las construcciones mediante papiroflexia, con construcciones con regla graduada, teniendo también en cuenta sus caracterizaciones algebraicas.

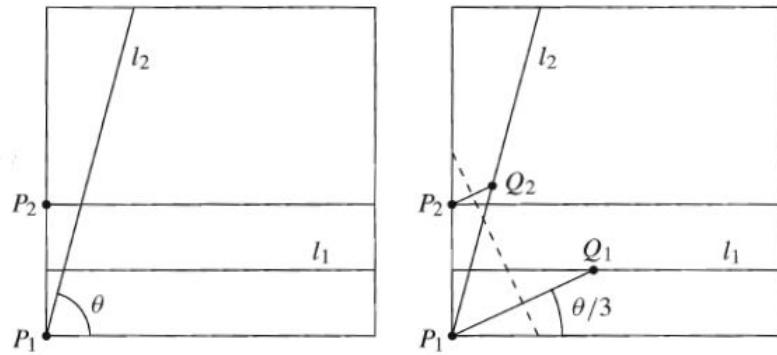


Figura 2.8: Trisección de θ mediante papiroflexia [6].

Capítulo 3

Ecuaciones polinomiales y geometría

A lo largo de este capítulo desarrollaremos diversas construcciones geométricas haciendo uso de regla, compás y cónicas. Pretendemos así ilustrar la teoría desarrollada en los anteriores capítulos y la puesta en práctica de algunos resultados. Varias de las construcciones que realizaremos se pueden encontrar en [3].

3.1. Las ecuaciones de segundo grado y el círculo de Carlyle

El círculo de Carlyle aporta un método para el cálculo de soluciones reales en ecuaciones de grado 2 de forma geométrica. Sea $x^2 - sx + p = 0$ con $s, p \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$ queremos conocer los valores de x que satisfacen la igualdad, en caso de que sean reales. Para ello elaboramos la siguiente construcción: tomamos los puntos $P = (0, 1)$ y $Q = (s, p)$, a partir de ellos construimos el punto medio entre ambos M y trazamos la circunferencia de centro M que pasa por P , ver Figura 3.1.

Ahora veremos porque los puntos de intersección de la circunferencia de Carlyle y el eje x se corresponden con las soluciones reales de la ecuación. En primer lugar vamos a calcular la ecuación asociada a la circunferencia

$$||(x, y) - M|| = ||M - P||,$$

$$||(x, y) - M||^2 = ||M - P||^2,$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2} - 1\right)^2, \\ x^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - sx + y^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - (p+1)y &= \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + 1 - (p+1), \\ x^2 - sx + y^2 - (p+1)y &= +1 - (p+1), \\ x^2 + y^2 - sx - (p+1)y + p &= 0. \end{aligned}$$

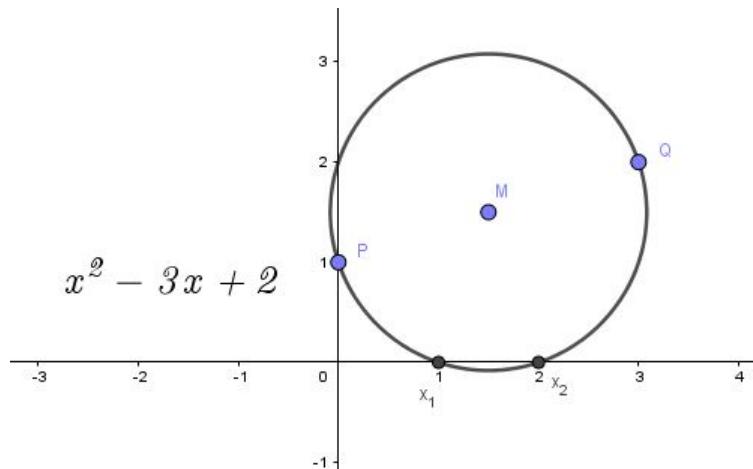


Figura 3.1: Ejemplo del círculo de Carlyle.

Una vez obtenida, calculamos de forma algebraica su intersección con el eje x, para ello sustituimos $y = 0$ y obtenemos

$$x^2 - sx + p = 0,$$

es decir, la ecuación que pretendíamos resolver.

Teniendo en cuenta que en una ecuación de segundo grado podemos determinar si sus soluciones, x_1 y x_2 , son reales o complejas en función del valor que toma su discriminante, en el caso de la ecuación $x^2 - sx + p = 0$ tenemos que $\Delta = s^2 - 4p$ y por tanto:

- si $s^2 - 4p > 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$,
- si $s^2 - 4p = 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 = x_2$ (multiplicidad 2),
- si $s^2 - 4p < 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ con $x_1 = \overline{x_2}$.

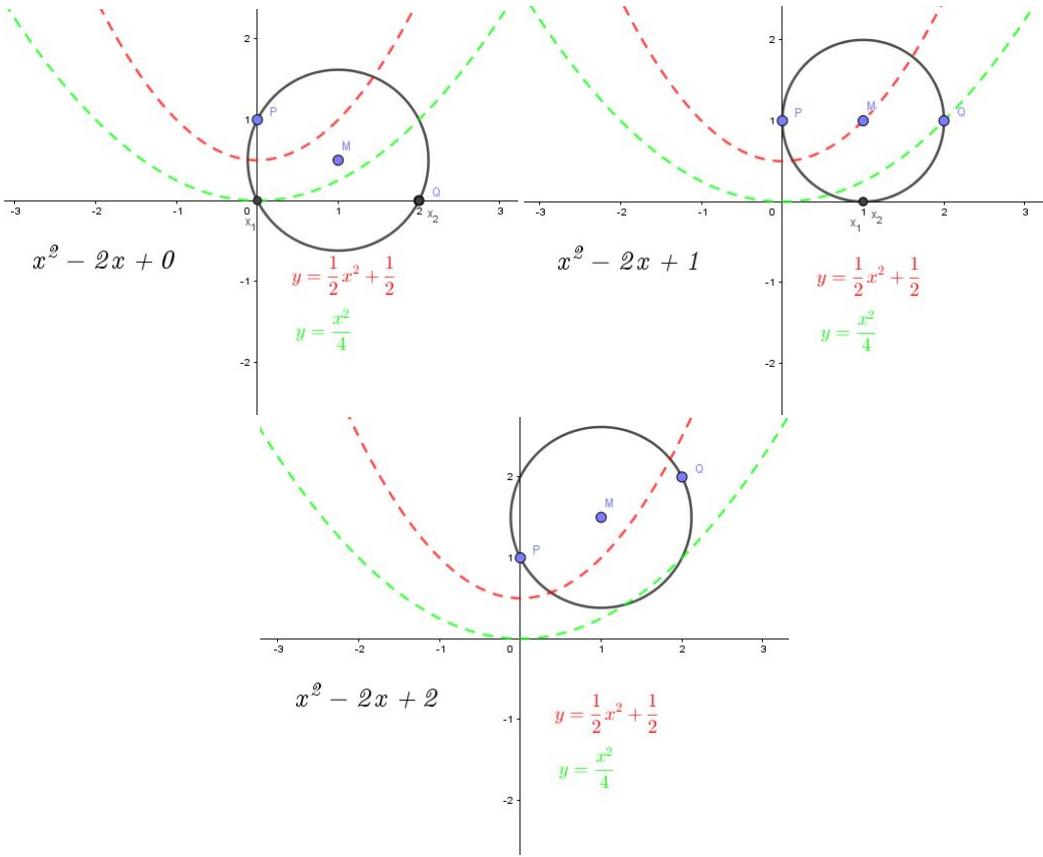


Figura 3.2: Casos en el Círculo de Carlyle.

Si observamos en la Figura 3.2, en el caso en que $s^2 - 4p = 0$ vemos que los puntos de la forma $(s, \frac{1}{4}s^2)$ componen la parábola $\frac{1}{4}x^2 - y = 0$. De forma que cuando M se encuentra en dicha parábola la ecuación tiene una única solución doble, mientras que si M se encuentra en la región superior delimitada por la parábola las soluciones son conjugadas y finalmente si M se encuentra en la región inferior observamos que existen dos soluciones reales distintas. Esta misma observación se puede elaborar en términos del punto Q y la parábola $\frac{1}{4}x^2 - y = 0$.

Además tenemos que las soluciones x_1 y x_2 cumplen las siguientes propiedades:

$$x_1 x_2 = p \quad x_1 + x_2 = s,$$

éstas se deducen de la factorización $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

3.2. Soluciones de ecuaciones cúbicas mediante cónicas

Sea $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \tilde{C} \cap \mathbb{R}$ podemos encontrar sus soluciones reales mediante el uso de cónicas. A continuación, presentaremos diferentes métodos a través del uso de circunferencias, hipérbolas y paráboles.

- Tomemos la hipérbola $\mathcal{H} \equiv xy = 1$, sus puntos cumplen $y = x^{-1}$, haciendo uso de la misma construimos la siguiente parábola:

$$y^2(x^3 + ax^2 + bx + c) = 0, \quad x^{-2}(x^3 + ax^2 + bx + c) = 0,$$

$$\mathcal{W} \equiv x + a + by + cy^2 = 0.$$

Por tanto si tomamos los puntos de intersección de ambas cónicas, tenemos que sus

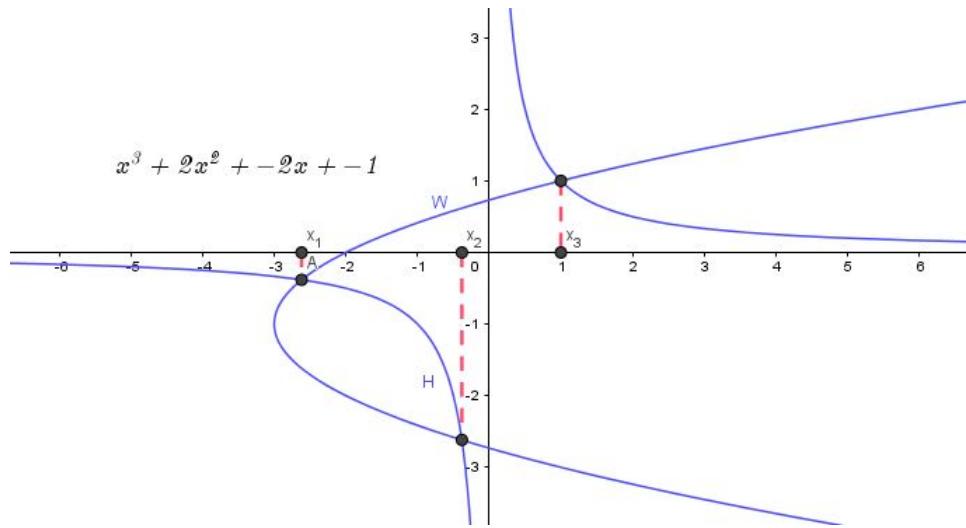


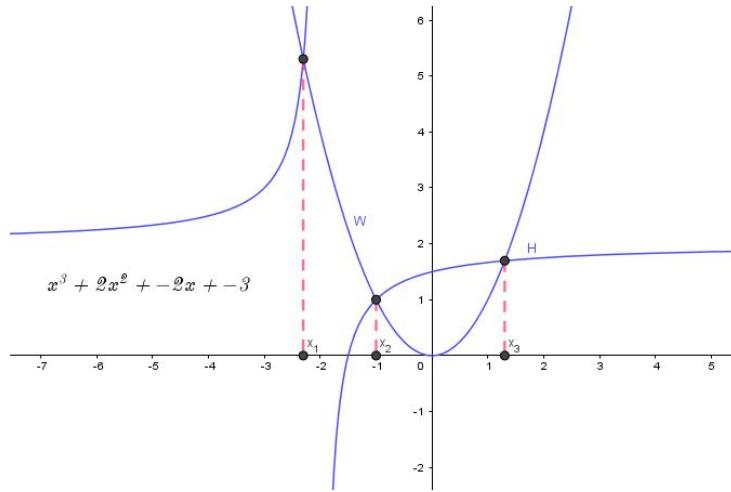
Figura 3.3: Intersección de \mathcal{H} y \mathcal{W} .

abscisas con las raíces reales del polinomio original.

- Si trazamos la parábola $\mathcal{W} \equiv y = x^2$ y construimos la siguiente hipérbola mediante nuestra ecuación cúbica y sustituyendo x^2 por y :

$$\mathcal{H} \equiv xy + ay + bx + c = 0,$$

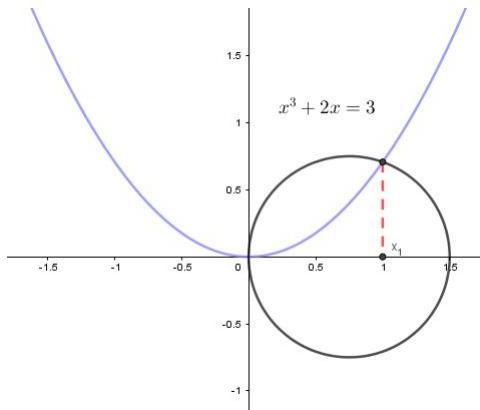
tenemos que las abscisas de sus intersecciones en el plano real son soluciones de nuestra cónica.

Figura 3.4: Intersección de \mathcal{H} y \mathcal{W} .

- Omar Khayyam planteó la resolución de la ecuación cúbica $x^3 + cx - d = 0$ con $c, d > 0$ mediante el uso de una circunferencia y una parábola. Tomemos la ecuación de la circunferencia de centro $(\frac{d}{2c}, 0)$ y radio $\frac{d}{2c}$ y por otro lado la parábola $y = \frac{x^2}{\sqrt{c}}$,

$$\begin{aligned} y^2 + \left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 &= \frac{d^2}{4c^2}, \\ \frac{x^2}{\sqrt{c}} - y &= 0. \end{aligned}$$

Si tomamos ambas cónicas veremos que tienen dos puntos de intersección, uno en

Figura 3.5: Raíz real positiva de $x^3 + cx - d = 0$

el origen $O = (0, 0)$ y otro en el primer cuadrante cuya abscisa es la solución real de la

cúbica que buscábamos pues

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 &= \frac{d^2}{4c^2}, \\ \frac{x^4}{c} + x^2 + \frac{d^2}{4c^2} - \frac{d}{c}x &= \frac{d^2}{4c^2}, \\ \frac{x^4}{c} + x^2 - \frac{d}{c}x &= 0, \\ x\left(\frac{x^3}{c} + x - \frac{d}{c}\right) &= 0, \\ x^3 + cx - d &= 0. \end{aligned}$$

3.3. Arquímedes y el corte proporcional de la esfera

Arquímedes también hizo uso de las cónicas como herramienta auxiliar en la resolución de problemas geométricos y resolución de cúbicas [5]. En su libro sobre la esfera y el cilindro resuelve el siguiente problema,

Sea una esfera ;Cómo podemos cortarla con un plano de forma que los volúmenes de los segmentos esféricos resultantes respeten la proporción dada $\frac{a}{b}$?

En primer lugar podemos suponer que $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$, puesto que los casos en que $\frac{a}{b} \geq 1$ se obtienen invirtiendo los anteriores, es decir dividiendo el volumen del segmento mayor entre el volumen del segmento menor (son casos simétricos). Además, se observa que el segmento menor es un casquete esférico, por tanto para resolverlo debemos conocer la fórmula que nos permite calcular su volumen [15] (Figura 3.6).

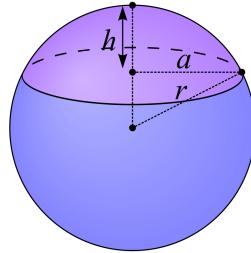


Figura 3.6: Casquete esférico,

$$V_c = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h).$$

Por otro lado, el volumen del segmento mayor viene dado por la diferencia del volumen de la esfera y el del casquete,

$$V_m = V_e - V_c = \frac{4\pi}{3}r^3 - \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Por tanto el problema se reduce a determinar $0 \leq h \leq r$ de forma que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{V_c}{V_m} = \frac{V_c}{V_e - V_c} = \frac{\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}{\frac{4\pi}{3}r^3 - \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}, \\ \frac{a}{b} &= \frac{h^2(3r - h)}{4r^3 - h^2(3r - h)}.\end{aligned}$$

Operando la podemos reducir a la expresión

$$\frac{4r^2}{h^2} = \frac{(3r - h)(a + b)}{ar}. \quad (3.1)$$

Si definimos los siguientes parámetros

$$c = 3r, \quad p = 2r, \quad d = \frac{ar}{a + b},$$

tenemos que la Ecuación 3.1 es equivalente a

$$h^2(c - h) = dp^2. \quad (3.2)$$

Cuyas raíces podemos encontrar mediante la intersección de la parábola $ch^2 = p^2$ y la hipérbola $(c - h)y = cd$.

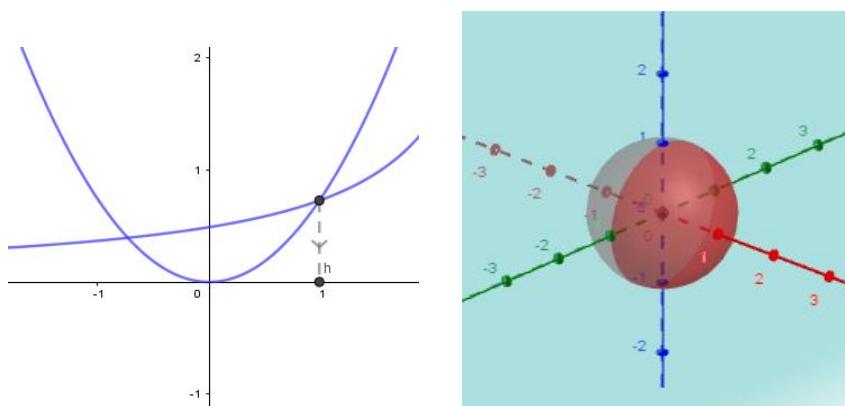


Figura 3.7: Corte de la esfera con $r = 1$, $a = 1$ y $b = 1$.

3.4. Construcción de polígonos regulares

A lo largo del trabajo hemos descrito algunos resultados sobre la construcción de polígonos regulares con regla y compás y posteriormente añadiendo el uso de cónicas que amplía nuestras posibilidades de construcción. Para facilitar las construcciones que realizaremos en este apartado vamos a definir un polígono regular R_n como sigue.

Definición 3.1. *Llamamos R_n al polígono regular con n lados, cuyos vértices son:*

$$(\cos(k\frac{2\pi}{n}), \sin(k\frac{2\pi}{n})),$$

con $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Observamos que está inscrito en la circunferencia unidad.

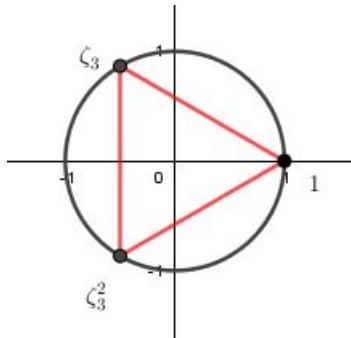


Figura 3.8: R_3 .

Los números complejos que se corresponden con los vértices de R_n son también las soluciones de la ecuación $x^n - 1 = 0$. En caso de que n sea primo e impar, los factores irreducibles del polinomio sobre \mathbb{Q} son $x - 1$ y $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$.

Teniendo en cuenta lo anterior vamos a elaborar un método para la construcción de algunos polígonos regulares, con número de lados primo impar. Observamos que el polinomio

$$f_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

tiene por raíces $(n-1)/2$ parejas de conjugados. Ahora definimos el polinomio mónico $g_n(x)$ cuyos ceros son $2\cos(k\frac{2\pi}{n})$ ¹ con $k = 1, \dots, (n-1)/2$, éste es de grado $(n-1)/2$ y sus coeficientes son enteros, ver [13]. El polinomio g_n cumple que

$$x^{\frac{n-1}{2}} g_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = f_n(x),$$

¹Notesé que estos valores son las partes reales de esas raíces conjugadas multiplicadas por 2

ya que $x^{\frac{n-1}{2}} g_n(x + \frac{1}{x})$ es un polinomio mónico que tiene grado $n - 1$ y $e^{2k\pi i/n}$ para $0 < k < n$ son sus raíces, puesto que

$$e^{2k\pi i/n} + \frac{1}{e^{2k\pi i/n}} = 2\operatorname{Re}(e^{2k\pi i/n}) = 2 \cos(k \frac{2\pi}{n}).$$

Esta propiedad nos permitirá calcular g_n igualando coeficientes.

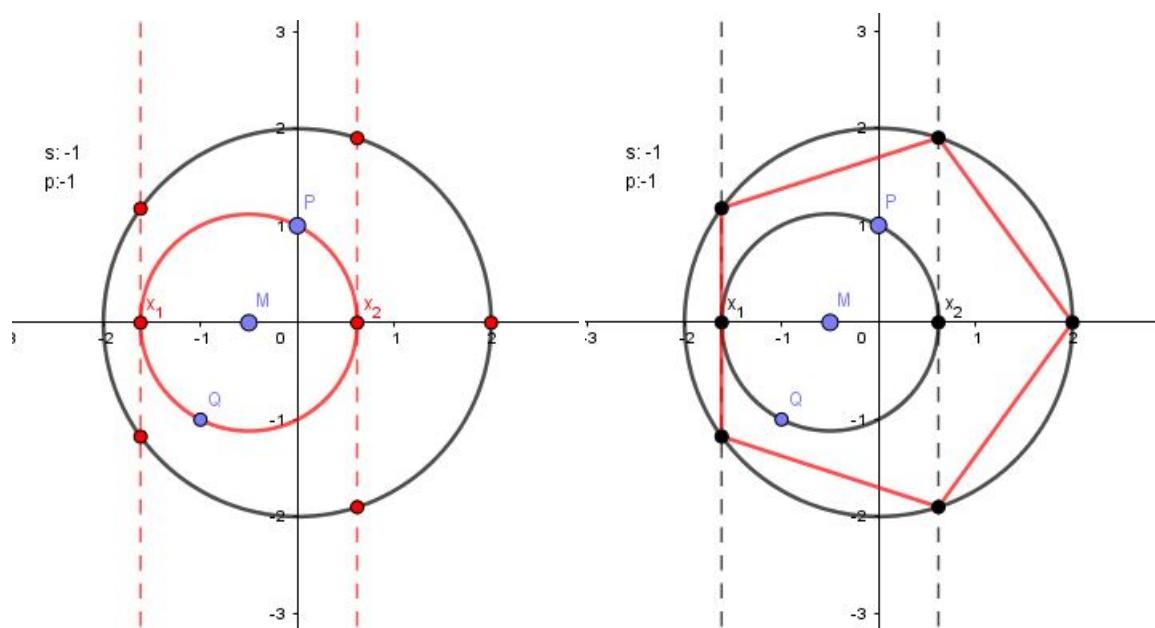
La razón por la que hemos definido g_n es que nos resultará más sencillo la construcción de sus ceros que en el caso de f_n . Una vez los tengamos construidos, podemos trazar las rectas perpendiculares al eje x que pasan por dichos puntos. Las intersecciones de dichas rectas con la circunferencia de centro O y radio dos serán los vértices del polígono regular inscrito. Para obtener R_n basta realizar una homotecia de centro $O = (0, 0)$ y razón $1/2$.

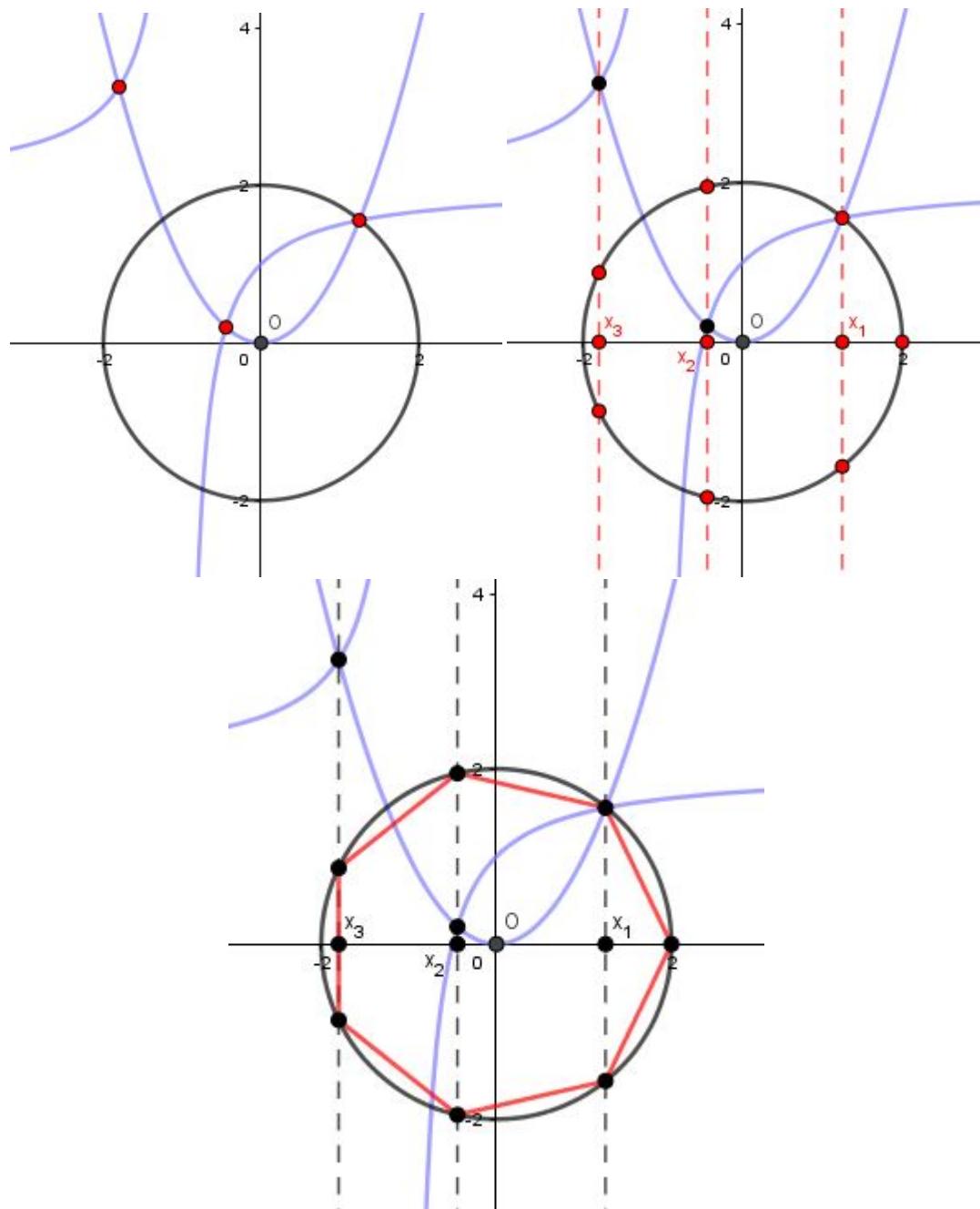
Para ilustrar lo anterior procederemos a desarrollar algunos ejemplos de construcciones de polígonos:

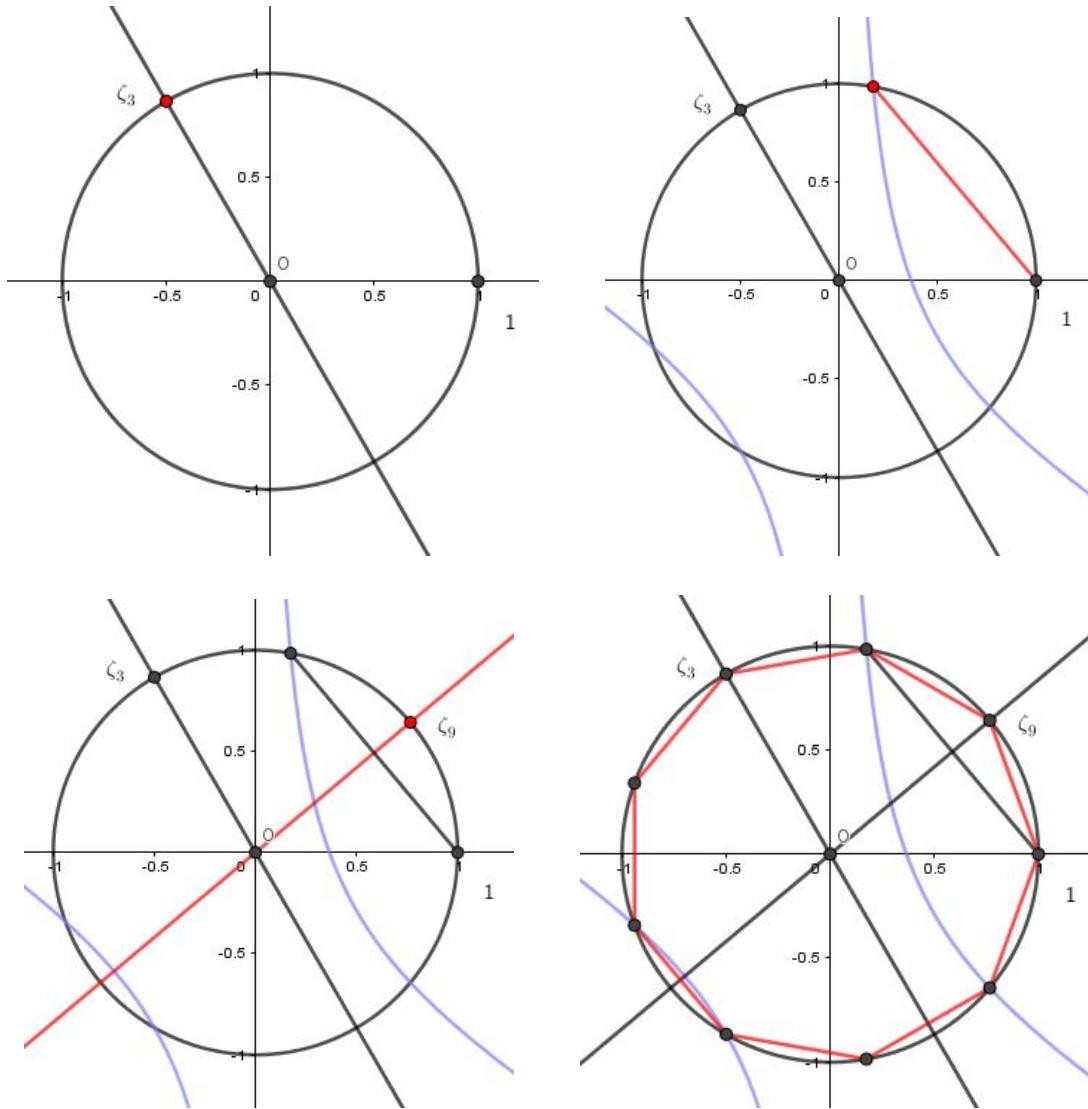
- **Construcción de R_5** (Figura 3.9). En este caso tenemos que $g_5 = x^2 + x - 1$, polinomio de grado dos del que podemos encontrar las soluciones reales mediante el círculo de Carlyle. Podemos observar que las raíces de g_5 son el opuesto a ϕ y a su conjugado, números muy presentes en el pentágono regular.
- **Construcción de R_7** (Figura 3.10). Tenemos que $g_7 = x^3 + x^2 - 2x - 1$ cuyos ceros podemos construir utilizando cónicas como hemos visto anteriormente. En la figura calculamos las raíces de g_7 intersecando $y = x^2$ con $xy + y - 2x - 1 = 0$. Trazando rectas verticales por dichas raíces encontramos los vértices del heptágono regular inscrito en la circunferencia de radio 2.

Además del anterior método existe gran variedad de procedimientos para la construcción de polígonos regulares, en la Figura 3.11 se muestra como se puede utilizar la trisección del ángulo mediante una hipérbola para trazar ζ_9 y en consecuencia R_9 (polígono de imposible construcción mediante el uso exclusivo de regla y compás).

- **Construcción de R_9** (Figura 3.11). En primer lugar debemos trazar ζ_3 cuyo proceso conocemos (descrito en la Figura 1.13). A continuación utilizamos la hipérbola de foco 1, excentricidad 2 y directriz la recta que pasa por O y ζ_3 para trisecar el ángulo de 120° (argumento de ζ_3), de manera que podemos construir ζ_9 como se observa en la figura y finalmente transportarla a lo largo de la circunferencia para construir el polígono.

Figura 3.9: Construcción de R_5 , usando el círculo de Carlyle.

Figura 3.10: Construcción de R_7 .

Figura 3.11: Construcción de R_9 .

Bibliografía

- [1] Almagest. (2015, March 18). Slope of axes of a General Conic Section. In *Mathematics Stack Exchange* Retrieved 19:42, March 9, 2022, from <https://math.stackexchange.com/q/1783801>
- [2] Ayoub, A. B. (2003). *The eccentricity of a conic section*. The College Mathematics Journal, 34(2), 116-121.
- [3] Bainville, E. y Genevés, B. (2000). *Constructions using conics*. *The Mathematical Intelligencer*, 22(3), 60-72.
- [4] Burnside, W. (1904). *On groups of order $p^\alpha q^\beta$* . Proceedings of the London Mathematical Society, s2-1: 388-392.
- [5] Connor, M. B. *A historical survey of methods of solving cubic equations*. University of Richmond, 1956.
- [6] Cox, D.A. *Galois theory*. Jhon Wiley & Sons, inc, 2004.
- [7] Fulton, W. *Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geometry*, 2008.
- [8] Martin Sleziak. (2018, March 18) How to find center of a conic section from the equation? In *Mathematics Stack Exchange* Retrieved 19:42, March 9, 2022, from <https://math.stackexchange.com/q/1287530>
- [9] Romero Rielo A. *Matemáticas y origami*. Trabajo fin de máster, Máster en matemáticas, Universidad de Granada, Septiembre 2021.
- [10] Szénási, S., y Tóth, Á. (2015). *Solving Multiple Quartic Equations on the GPU using Ferrari's Method*. In IEEE 13th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI2015) (Vol. 7, pp. 333-337).
- [11] Videla, C. R. (1997). *On points constructible from conics*. *Mathematical Intelligencer*, 19(2), 53-57.

- [12] Wikipedia contributors. (2022, January 26). Fermat number. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 16:08, March 7, 2022, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fermat_number&oldid=1068069548
- [13] Wikipedia contributors. (2022, February 15). Minimal polynomial of $2\cos(2\pi/n)$. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 22:46, March 8, 2022, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Minimal_polynomial_of_2cos\(2pi/n\)&oldid=1072079168](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Minimal_polynomial_of_2cos(2pi/n)&oldid=1072079168)
- [14] Wikipedia contributors. (2022, March 10). Resultant. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 16:28, March 10, 2022, from <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Resultant&oldid=1076321865>
- [15] Wikipedia contributors. (2022, February 23). Spherical cap. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 12:42, March 9, 2022, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spherical_cap&oldid=1073675175