Cálculo lambda y Lógica Intuicionista

Diferentes ópticas del mismo problema

Pedro Bonilla Nadal

26 de junio de 2021

EsLibre 2021

Contenidos

Objetivos

1. Dar las ideas que hay detrás de la visión formal de la teoría.
2. Exponer resultados interesantes.
3. Que todo el mundo se lleve algo a casa.

Cálculo no tipado

Abstraer el problema de Computar

- Los problemas del siglo de Hilbert.
- Solución de Turing inspirada en el cómputo “con lápiz y papel”.
- Solución de Church inspirada en el concepto de sustitución.

Cálculo no Tipado

Definición

Los terminos del cálculo λ se construyen mediante la expresión:

$$A, B ::= x \mid (\lambda x.A) \mid (AB).$$

donde x denota cualquier variable de un conjunto numerable $\mathcal{V}$.

Cálculo no Tipado

Definición

Los terminos del cálculo λ se construyen mediante la expresión:

$$A, B ::= x \mid (\lambda x.A) \mid (AB).$$

donde x denota cualquier variable de un conjunto numerable $\mathcal{V}$.

Example

- $(\lambda x.(x+4))(3) = 7.$
- $(\lambda x.\lambda y.y + x)(\lambda z.z^2) = \lambda y.\lambda z.y + z^2$

Números naturales

Programar es: Números naturales y recursión.

- Naturales de Church:

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x$$

- Operación predecesor:

$$\text{predecesor} = \lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda u.u).$$

- ¿Se os ocurre como hacer una operación de punto fijo?

Reducciónes

Name	Main rule	Equivalence
α	$(\lambda x.M) =_\alpha \lambda y.M[x/y]$	Yes
β	$(\lambda x.M)N \to_\beta M[N/x]$	No
η	$(\lambda x.Mx) \to_\eta M$	No

Cuadro 1: Reducciones

Cálculo lambda tipado

¿Por qué querriamos tipos?

- Ya existían como solución a los problemas de Russel.
- Aunque no haya ninguna incosistencia, había partes que no eran agradables.

Example (Cita Stanford)

Si consideramos ...

- A posteriori, nos ayudan a programar.

Breve Presentación

Definition

The types of basic simply typed λ-calculus are built via the BNF:

$$A, B ::= \iota \mid A \to B \mid 1.$$

where ι denote a basic type.

Definition

Los terminos no depurados de el calculo lambda tipado son:

$$A, B ::= x \mid AB \mid \lambda x^t.A.$$

Declaramos por $M : t$ que un término M es del tipo t. Un contexto de tipificación es un conjunto de supuestos $\Gamma = (x_1 : A_1)$, en el que suponemos que cada variable x_i es del tipo A_i.

Definition (Typing Rules)

- Variable asumidas son del tipo asumido, $*$ es de tipo 1.

$$(var) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash x_i : A_i}, \qquad i = 1, .., n.$$

$$(*) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : 1}.$$

- Aplicación y abstracción:

$$(app) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}.$$

$$(abs) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A . m : A \to B}.$$

Naturaleza del tipado

Hay dos aproximaciones:

- Curry style: Defines una función e infieres su tipo:

```
a = 4
```

- Curch style: Defines un tipo y a partir de el los términos:

```
int a = 4
```

Ambos estilos de escritura pueden ser unificados. Un unificador es un par de sustituciones que hace que dos estilos de tipado sean iguales como plantillas tipadas. Tal unificador se basa en un algoritmo basado en la inferencia de tipos.

Números naturales

Aproximación opuesta. En lugar de existir como resultado, los añadimos como estructura.

$$A, B, C ::= ... \mid \mathfrak{0} \mid S(A) \mid I_t(A, B, C);$$

Se podrían hacer los números de church, sin embargo no tendríamos un tipado correcto. Esta consideración además conecta con los números naturales de Lawvere en Teoría de Categorías.

Extensiones

- Tipos:

$$A, B ::= \iota | \ A \to B \mid A \times B \mid A + B \mid 1 \mid 0.$$

- Terminos:

$$\begin{aligned} A, B, C ::= x \mid AB \mid \lambda x^t.A \mid \langle A, B \rangle \mid \pi_1 A \mid \pi_2 A \mid * \\ \mid \ \mathrm{in}_1\, A \mid \ \mathrm{in}_2\, A \mid \ \mathrm{case}\, A; x^{t_1}.B \,\mathrm{or}\, x^{t_2}.C \mid \Box^t. \end{aligned}$$

Lógica Intuicionista

Breve Presentación

Definición

La presentamos mediante la BNF:

$$A, B ::= x \mid A \rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \top \mid \bot.$$

Todas las normas habituales menos tercio excluido. Dadas dos fórmulas A, B, notaremos $A \vdash B$ al hecho de que de A se deduce siempre B.

Sistemas deductivos

Podemos ver la lógica como un sistema deductivo (que es un grafo):

- Las formulas serían los objetos.
- Las reducciones serían las flechas.

Cálculo lambda tipado como Sistema deductivo

Podemos ver la lógica como un sistema deductivo (que es un grafo):

- Los tipos serían los objetos.
- Los terminos serían las flechas.

Curry-Howard

Curry-Howard

Existe una biyección de la Lógica proposicional intuicionista y el calculo lambda extendido.

Types	Formulas
type $\rightarrow$	Implication $\rightarrow$
Type 1	$\top$
Product type $\times$	Conjuction $\wedge$
Type 0	$\perp$
Sum type $+$	Disjuction $\vee$

Más allá de Curry howard

- Si incluyeramos tipado dependiente: lógica de primer orden.
- Bijección de Lambek con Categorías Cartesianas Cerradas.
- Bijección de Seely del tipado de Martin-Löf y Categorías Cartesianas Cerradas Locáles.

Bibliografía y para saber más