I - Otimização Lagrangeana

Programação não-linear • Otimização com restrições

Pedro Maciel Xavier

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
PESC/COPPE/UFRJ

Table of contents I

UFRJ faz 100 ANOS 1920 I 2020

Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Multiplicadores de Lagrange)

Sejam $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ onde $\mathbf{x}^\circ \in \mathbb{R}^m$ minimiza (maximiza) localmente o sistema

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} \{f(\mathbf{x})|g(\mathbf{x}) = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Se a matriz Jacobiana $n \times m$ $g'(\mathbf{x}^\circ)$ tiver linhas linearmente independentes, então existe um único $\boldsymbol{\lambda}^\circ \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz

$$f'(\mathbf{x}^\circ) = \boldsymbol{\lambda}^\circ g'(\mathbf{x}^\circ)$$

Demonstrações são encontradas em [1] e [2].

Multiplicadores de Lagrange

O teorema permite reescrever um problema definido pelas funções $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ como o sistema de $m+n$ variáveis

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \nabla g(\mathbf{x}) = 0$$

chamado de *Lagrangeano* do sistema.

Exemplo

Considere o seguinte problema [2]:

$$\text{minimizar } x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$
$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Multiplicadores de Lagrange

Exemplo

Reescrevemos

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\
\text{sujeito a } & x_1 + x_2 + x_3 = 3
\end{aligned}
$$

como

$$
\begin{array}{cccc}
 & + x_2 & + x_3 & + \lambda = 0 \\
x_1 & & + x_3 & + \lambda = 0 \\
x_1 & + x_2 & & + \lambda = 0
\end{array}
$$

cuja solução é $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $\lambda = -2$.

Relaxação Lagrangeana

Definição (Relaxação Lagrangeana)

Dado um problema na forma

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeito a } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Podemos embutir parte das restrições na função objetivo

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ \text{sujeito a } & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

penalizando a violação das restrições em $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Relaxação Lagrangeana

Definição (Relaxação Lagrangeana)

Nos referimos a este problema como Relaxação Langrangeana ou Dual Lagrangeano do problema original e chamamos a função

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \min \left\{ \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \,|\, \mathbf{x} \in X \right\}$$

de função Lagrangeana.

Satyrus

No contexto do Satyrus, temos uma equação de energia a minimizar dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \mathbb{E}_{\text{opt}} + \mathbb{E}_{\text{int}} \\ &= \sum_i \mathcal{H}\left(\varphi_i\right) + \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j \mathcal{H}\left(\neg\varphi_j\right)\end{aligned}$$

onde λ_j é a penalidade associada à j-ésima restrição de integridade e $\mathcal{H}\left(\,\cdot\,\right)$ é o mapeamento. É possível escrever um problema modelado no Satyrus como

$$\begin{aligned}\text{minimizar } & f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot g(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n\end{aligned}$$

Próximos Tópicos

Compreender melhor:

1. O princípio da dualidade (e suas demonstrações).
2. A relação entre o lagrangeano de um sistema e seu hamiltoniano.
3. Modelagem QUBO

References I

Olga Brezhneva, Alexey A. Tret'yakov, Stephen E. Wright
A short elementary proof of the Lagrange multiplier theorem
Optimization Letters.
Springer-Verlag, 2011.

David G. Luenberger, Yiniu Ye
Linear and Nonlinear Programming
Springer-Verlag, 2008.