Mảng cộng dồn (prefix sum) và ứng dụng

Trương Phước Hải

Khái niệm

- Mảng cộng dồn là CTDL lưu trữ tổng tích lũy của các phần tử trong một tập tính từ phần tử đầu tiên
- Mảng cộng dồn cho phép thực hiện hiệu quả thao tác tính tổng một nhóm các phần tử liên tiếp nhau

Mảng cộng dồn trên dãy

- Xét dãy các giá trị $a_1, a_2, ..., a_n$. Dãy các giá trị $s_0, s_1, ..., s_n$ được định nghĩa:
 - $s_0 = 0$
 - $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_i$
- Khi đó dãy s_0, s_1, \dots, s_n được gọi là mảng cộng dồn (một chiều) của dãy a_1, a_2, \dots, a_n

Mảng cộng dồn trên dãy

Xây dựng mảng cộng dồn trên dãy

$$s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_i$$

= $(a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1}) + a_i$
= $s_{i-1} + a_i$

Mảng cộng dồn trên dãy

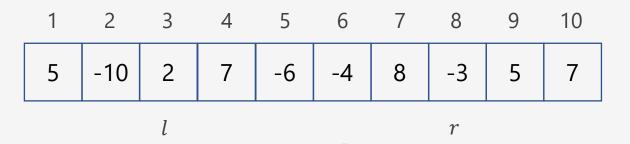
Xây dựng mảng cộng dồn trên dãy

```
s[0] = 0;
for (i = 1; i <= n; ++i)
s[i] = s[i-1] + a[i];
```

• Độ phức tạp của thao tác O(n)

Áp dụng

• Cho dãy gồm n giá trị a_1, a_2, \dots, a_n và m truy vấn có dạng [l,r] yêu cầu trả về giá trị $a_l+a_{l+1}+\dots+a_r$



Thuật toán tầm thường

• Với mỗi truy vấn [l,r], duyệt qua đoạn phần tử và tính tổng của chúng

```
for (i = 0; i < m; ++i) {
    Sum = 0;
    for (j = l[i]; j <= r[i]; ++j)
        Sum = Sum + a[j];
    output Sum;
}</pre>
```

Thuật toán tầm thường

- Đánh giá thuật toán
 - Độ phức tạp của mỗi truy vấn O(n)
 - Độ phức tạp trả lời m truy vấn $O(m \times n)$
- Thao tác xét và in kết quả của từng truy vấn là không thể cải tiến. Tìm cách cải tiến thao tác tính kết quả của từng truy vấn

Phương pháp mảng cộng dồn

• Nhận xét tổng các phần tử trong đoạn [l,r]

$$Sum = a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1}) + a_l + \dots + a_r - (a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1})$$

$$= s_r - s_{l-1}$$

Phương pháp mảng cộng dồn

Cải tiến thao tác trả lời truy vấn với mảng cộng dồn

```
for (i = 0; i < m; ++i) {
    Sum = s[r[i]] - s[l[i]-1];
    output Sum;
}</pre>
```

• Sử dụng mảng cộng dồn giúp độ phức tạp của thao tác trả lời một truy vấn giảm xuống còn O(1)

Phương pháp mảng cộng dồn

- Phương pháp thực hiện qua 2 công đoạn
 - Xây dựng mảng cộng dồn, độ phức tạp O(n)
 - Trả lời m truy vấn, độ phức tạp O(m)
- Độ phức tạp của thuật toán O(n+m)