

# Mảng cộng dồn (prefix sum) và ứng dụng

Trương Phước Hải



# Khái niệm

---

- Mảng cộng dồn là CTDL lưu trữ tổng tích lũy của các phần tử trong một tập tính từ phần tử đầu tiên
- Mảng cộng dồn cho phép thực hiện hiệu quả thao tác tính tổng một nhóm các phần tử liên tiếp nhau

## Mảng cộng dồn trên dãy

---

- Xét dãy các giá trị  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dãy các giá trị  $s_0, s_1, \dots, s_n$  được định nghĩa:
  - $s_0 = 0$
  - $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_i$
- Khi đó dãy  $s_0, s_1, \dots, s_n$  được gọi là mảng cộng dồn (một chiều) của dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n$

## Mảng cộng dồn trên dãy

---

- Xây dựng mảng cộng dồn trên dãy

$$\begin{aligned} s_i &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_i \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}) + a_i \\ &= s_{i-1} + a_i \end{aligned}$$

# Mảng cộng dồn trên dãy

---

- Xây dựng mảng cộng dồn trên dãy

```
s[0] = 0;
```

```
for (i = 1; i <= n; ++i)
```

```
    s[i] = s[i-1] + a[i];
```

- Độ phức tạp của thao tác  $O(n)$

# Áp dụng

---

- Cho dãy gồm  $n$  giá trị  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $m$  truy vấn có dạng  $[l, r]$  yêu cầu trả về giá trị  $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	-10	2	7	-6	-4	8	-3	5	7
$l$			$r$						

# Thuật toán tầm thường

---

- Với mỗi truy vấn  $[l, r]$ , duyệt qua đoạn phần tử và tính tổng của chúng

```
for (i = 0; i < m; ++i) {  
    Sum = 0;  
    for (j = l[i]; j <= r[i]; ++j)  
        Sum = Sum + a[j];  
    output Sum;  
}
```

# Thuật toán tầm thường

---

- Đánh giá thuật toán
  - Độ phức tạp của mỗi truy vấn  $O(n)$
  - Độ phức tạp trả lời  $m$  truy vấn  $O(m \times n)$
- Thao tác xét và in kết quả của từng truy vấn là không thể cải tiến. Tìm cách cải tiến thao tác tính kết quả của từng truy vấn



# Phương pháp mảng cộng dồn

---

- Nhận xét tổng các phần tử trong đoạn  $[l, r]$

$$Sum = a_l + a_{l+1} + \cdots + a_r$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{l-1}) + a_l + \cdots + a_r - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{l-1})$$

$$= S_r - S_{l-1}$$

## Phương pháp mảng cộng dồn

---

- Cải tiến thao tác trả lời truy vấn với mảng cộng dồn

```
for (i = 0; i < m; ++i) {  
    Sum = s[r[i]] - s[l[i]-1];  
    output Sum;  
}
```

- Sử dụng mảng cộng dồn giúp độ phức tạp của thao tác trả lời một truy vấn giảm xuống còn  $O(1)$

# Phương pháp mảng cộng dồn

---

- Phương pháp thực hiện qua 2 công đoạn
  - Xây dựng mảng cộng dồn, độ phức tạp  $O(n)$
  - Trả lời  $m$  truy vấn, độ phức tạp  $O(m)$
- Độ phức tạp của thuật toán  $O(n + m)$