

# Implementazione in C++ di un codice 2D per la risoluzione di leggi di conservazione non lineari\*

Daniela Martelli (Matr. 721891)

Simone Pezzuto (Matr. 724680)

27 Luglio 2009

## Sommario

Lo scopo di questo progetto è implementare in C++ il metodo dei Volumi Finiti per la risoluzione di leggi di conservazione non lineari in due dimensioni, su griglie non strutturate. Nella prima parte del lavoro verrà trattata brevemente la teoria matematica alla base delle leggi di conservazione (non lineari), in modo da inquadrare il contesto della tipologia di problemi che verrà trattata. Sarà dunque presentato il metodo dei Volumi Finiti, soffermandoci solo sugli argomenti di particolare riguardo per la successiva implementazione (come ad esempio le condizioni al contorno).

Nella seconda parte introdurremo il modello di Eulero per il moto di fluidi comprimibili non viscosi. In questa sede accenneremo anche a metodi studiati ad hoc per la risoluzione del problema di Riemann (come il metodo di Roe).

Infine attraverso due casi test di particolare rilievo cercheremo di capire come si comportano il metodo numerico e le varie tipologie di approssimazione del problema di Riemann, con un confronto diretto, ove possibile, con la soluzione esatta, in modo da stimare l'ordine di convergenza.

## 1 Leggi di conservazione

### 1.1 Formulazione integrale e formulazione differenziale

Una generica legge di conservazione si può scrivere in forma integrale come:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathbf{u} \, dx + \oint_{\partial\omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma = \int_{\omega} \mathbf{S} \, dx \quad (1.1)$$

dove  $\omega \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , è un *volume di controllo* arbitrario all'interno del dominio  $\Omega$  nel quale si studia il problema,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  è il vettore delle  $m$  variabili conservate,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  è il tensore di flusso attraverso  $\partial\omega$  ed infine  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t)$  è la sorgente esterna.

L'equazione (1.1) esprime in termini matematici il fatto che la variazione di  $\mathbf{u}$  all'interno di  $\omega$  è pari al flusso netto attraverso il bordo più un eventuale termine sorgente.

---

\*Progetto nell'ambito del corso di Calcolo Scientifico per la Fluidodinamica

Spesso la legge di conservazione si esprime in termini differenziali manipolando formalmente l'espressione (1.1) come segue:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathbf{u} \, dx + \oint_{\partial\omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma = \int_{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, dx + \int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\omega} \mathbf{S} \, dx.$$

La precedente relazione è stata ottenuta sfruttando il teorema della divergenza, che permette di trasformare gli integrali di superficie in integrali sul volume di controllo.

Se ne deduce quindi che, dall'arbitrarietà di  $\omega$ , possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{S} & \text{con } x \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \\ + \text{condizioni al bordo} \end{cases} \quad (1.2)$$

È evidente però che tutto questo è ragionevole a patto di garantire sufficiente regolarità dei dati e della soluzione  $\mathbf{u}$ . Purtroppo nelle leggi di conservazione non lineari è lecito aspettarsi soluzioni discontinue, indipendentemente dalla regolarità dei dati iniziali: in questi casi il problema differenziale (1.2) perde di significato lungo le discontinuità.

Il sistema (1.2) si può scrivere in forma quasi-lineare sviluppando le derivate nel termine di divergenza. Ad esempio con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2]$  si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

dove si è posto  $\mathbf{A}_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$  e, per comodità,  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{0}$ .

## 1.2 Soluzioni ad onde piane

Un ruolo particolarmente importante è svolto dalle soluzioni ad *onde piane*: supponiamo di partire con un dato iniziale  $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(\xi)$ , con  $\xi = x \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , cioè consideriamo una funzione che varia solo in direzione  $\hat{\mathbf{n}}$ , e verifichiamo se è possibile avere una soluzione del tipo  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(\xi - \lambda t)$ . Affinché sia possibile trovare una soluzione del genere si deve avere:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = -\lambda \mathbf{u} + \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) \mathbf{u} n_x + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) \mathbf{u} n_y = \mathbf{0}$$

che riscritto diventa:

$$\{\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) n_x + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) n_y\} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Questo vuol dire che  $\lambda$  dev'essere un autovalore di  $\mathbf{A}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}}) := \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) n_x + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}) n_y$  e  $\mathbf{u}$  il corrispondente autovettore. Quindi, se  $\mathbf{A}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}})$  è diagonalizzabile con autovalori reali allora è possibile trovare una soluzione ad onde piane. Infatti in questo caso il sistema (1.3) si può riscrivere come:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

In generale, il sistema multidimensionale (1.3) è detto *iperbolico* se la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}})$  è diagonalizzabile ed ammette autovalori reali per ogni scelta di  $\mathbf{u}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ .

L'equazione (1.4), che si può riscrivere in modo equivalente come:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{F}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{F}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , risulterà fondamentale nel momento in cui verrà implementato il metodo dei Volumi Finiti su griglie non strutturate, in quanto suggerisce come discretizzare il problema in modo da trovare un adeguato flusso numerico lungo una direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  data.

### 1.3 Problema di Riemann

Tra le soluzioni ad onde piane risultano particolarmente interessanti quelle che soddisfano il problema di Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{F}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} & \text{con } \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \mathbf{u}(\xi, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{per } \xi < 0 \\ \mathbf{u}_R & \text{per } \xi > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.5)$$

Il sistema, a tutti gli effetti monodimensionale, si può studiare in dettaglio fissata  $\mathbf{F}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}})$ : in particolare si può far ricorso a tutta la teoria per sistemi di equazioni non lineari 1D.

Dalla stretta iperbolicità di  $\mathbf{A}(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{n}})$  possiamo trovare sempre un insieme  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  di  $m$  autovalori e un insieme di  $m$  autovettori corrispondenti  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\}$ . A seconda della natura di questi insiemi e dai valori  $\mathbf{u}_L$  e  $\mathbf{u}_R$  si possono avere diverse situazioni:

**Onda piana di shock** La soluzione presenta una discontinuità che si propaga con velocità  $s$  che soddisfa la condizione di Rankine-Hugoniot  $s(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) = (\mathbf{F}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_R)) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ;

**Onda piana di rarefazione** La soluzione è della forma  $\mathbf{u}\left(\frac{\xi}{t}\right)$ ;

**Discontinuità di contatto** La soluzione presenta una discontinuità che viene semplicemente trasportata, senza generazione di shocks oppure onde di rarefazione.

È possibile mostrare il problema di Riemann (1.5) ha una soluzione che consiste in  $m + 1$  stati costanti i quali possono essere connessi da shocks, onde di rarefazione o discontinuità di contatto [Krö97, §4.1].

### 1.4 Condizione di entropia

In generale per il problema di Riemann (1.5) la soluzione non è unica: rimane quindi il dubbio di decidere quale delle disponibili descriva meglio la situazione fisica che si sta modellando. Da un punto di vista fisico infatti è ragionevole immaginare che l'equazione di conservazione possa essere pensata formalmente come un'equazione con termini viscosi dove la viscosità è molto piccola, al limite zero (ad esempio le equazioni di Eulero derivate da quelle di Navier-Stokes). Quindi la soluzione "corretta" è quella ottenuta attraverso questo limite.

Nascono a questo proposito diverse condizioni, dette di *entropia*, che se soddisfatte garantiscono in una certa misura che la soluzione sia effettivamente quella fisicamente più ragionevole.

Da un punto di vista numerico il problema si pone nel momento in cui si cerca di approssimare la soluzione, perché il metodo che si utilizza potrebbe non garantire a priori la convergenza alla

soluzione entropica. La situazione tipica è la presenza di un'onda di shock al posto di un'onda di rarefazione: avremo modo di approfondire la questione attraverso alcuni esempi pratici.

## 1.5 Condizioni al bordo

Definito il problema, resta aperta la questione riguardante quali condizioni al contorno da imporre al problema stesso: se nel caso scalare la soluzione è piuttosto semplice, nel caso vettoriale invece la situazione è molto più delicata.

Limitiamoci per il momento al caso lineare. Posto  $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$ , con  $\mathbf{R}^{-1}$  matrice con colonne gli autovettori di  $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{n}})$ , possiamo *disaccoppiare* il sistema (1.4) e scriverlo nella forma:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} = \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{A}$  matrice degli autovalori. A questo punto osserviamo che il sistema è formato a questo punto da  $m$  equazioni disaccoppiate, e che ognuna è una equazione di trasporto nella direzione positiva o negativa a seconda dell'autovalore. Quindi è necessario assegnare le condizioni al bordo sulla variabile  $\mathbf{w}$  in modo che effettivamente l'informazione sia *entrante*.

Una prima difficoltà risiede nel fatto che le condizioni non si impongono sulla variabile  $\mathbf{u}$ , cioè quella fisica, ma su opportune combinazioni lineari delle sue componenti.

Una seconda difficoltà si trova invece nel caso non lineare, molto più ostico perché gli autovalori in generale dipendono dalla soluzione stessa.

Ovviamente nel caso multidimensionale si analizza l'equazione proiettandola lungo la normale, così come abbiamo visto in precedenza, per poi trattarla come un'equazione monodimensionale. Citiamo un paio di condizioni al contorno abbastanza tipiche e generali:

**Condizioni assorbenti** Si vuole fare in modo che l'informazione proveniente dall'interno non sia propagata nuovamente all'interno del dominio, bensì assorbita: questo serve tipicamente per riprodurre l'effetto di un dominio non limitato con uno invece limitato. Una buona condizione è porre  $\partial_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{u} = 0$  lungo il bordo;

**Condizioni periodiche** L'idea è quella di immaginare di “incollare” due bordi del dominio (un rettangolo chiuso a cilindro per esempio) ed imporre che la soluzione si propaghi così come se in quel punto non ci fosse bordo: l'effetto è che l'informazione che esce da un lato rientra direttamente dall'altro;

**Condizioni riflettenti** Se si volesse riprodurre l'effetto di una parete in un modello di dinamica dei fluidi si dovrebbe imporre che le particelle urtino elasticamente per essere poi riflesse. Dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica si trova che la condizione giusta in una situazione come questa è imporre velocità normale nulla al bordo.

Vi sono poi le condizioni *inflow*, ossia dove entra effettivamente nuova informazione nel dominio.

## 2 Il metodo dei Volumi Finiti

### 2.1 Approssimazione su griglie non strutturate

Consideriamo una approssimazione poligonale  $\Omega_h$  di  $\Omega$ , e costruiamone una triangolazione  $\mathcal{T}$ , ossia un insieme di poligoni chiusi  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tale che:

1.  $\Omega_h = \bigcup_{i=1}^N K_i$ ;
2. Dati  $K_i, K_j$  con  $i \neq j$ , sia  $K_i \cap K_j = \emptyset$  oppure  $K_i \cap K_j$  è un vertice o un lato comune ai due;

L'idea che sta alla base del metodo dei *Volumi Finiti* è quella di considerare l'equazione in forma integrale (1.1) ponendo  $\omega = K_i$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} \mathbf{u} \, dx + \oint_{\partial K_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\gamma = \int_{K_i} \mathbf{S} \, dx$$

A questo punto supponiamo che, fissato  $t$ , all'interno di ogni elemento  $K_i$  la soluzione numerica e il termine sorgente siano costanti:

$$\mathbf{U}_i(t) \approx \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{u}(x, t) \, dx, \quad \mathbf{S}_i(t) \approx \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} \mathbf{S}(\mathbf{u}, x, t) \, dx$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{U}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{|K_i|} \sum_{e_{ij} \in \partial K_i} \mathcal{F}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) + \mathbf{S}_i(t) \quad (2.1)$$

dove  $e_{ij}$  è il lato condiviso dagli elementi  $K_i$  e  $K_j$  e:

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) := \frac{1}{|e_{ij}|} \oint_{e_{ij}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij} \, d\gamma$$

è il *flusso numerico* attraverso il lato di normale  $\hat{\mathbf{n}}_{ij}$  (cioè la normale esterna al lato  $e_{ij}$  diretta da  $K_i$  a  $K_j$ ), calcolato in base ai valori della soluzione alla destra e alla sinistra dell'interfaccia stessa.

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.1) può essere risolto con diversi metodi, come ad esempio Runge-Kutta.

Nella *schema a volumi finiti* classico si utilizza Eulero esplicito, con cui si ottiene:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t \sum_{e_{ij} \in \partial K_i} \frac{|e_{ij}|}{|K_i|} \mathcal{F}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) + \mathbf{S}_i(\mathbf{U}_i^n) \quad (2.2)$$

Osserviamo che il valore della soluzione  $\mathbf{U}_i$  è assegnata all'intero elemento  $K_i$ , e non ad uno specifico nodo. Essendo però un'approssimazione di ordine zero, si è soliti assegnare questo valore ad un punto interno di  $K_i$ , ad esempio al baricentro. Questo tipo di discretizzazione è detta *cell-centered*. Dato che i vertici non entrano in gioco direttamente può diventare problematico assegnare condizioni al bordo essenziali, mentre l'assegnazione di condizioni di flusso è affrontata in modo naturale.

Un'alternativa è invece quella di costruire una triangolazione *duale*, composta da poligoni centrati nei vertici della triangolazione originale (per esempio da una triangolazione Delaunay si utilizza come duale il diagramma di Voronoi). Il problema integrale si discretizza quindi sulla triangolazione duale, cosicché assegnando la soluzione al centro dei poligoni si sta automaticamente costruendo la soluzione nei vertici della triangolazione originale. Si può così ovviare al problema delle condizioni al bordo essenziali poiché adesso i nodi al bordo sono “elementi” della triangolazione duale. Questo tipo di discretizzazione è detta *vertex-centered*.

## 2.2 Flussi numerici

Nello schema (2.2) resta ancora da scegliere il flusso numerico  $\mathcal{F}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_j^n, \hat{\mathbf{n}}_{ij})$ , il quale deve soddisfare le seguenti proprietà:

1.  $|\mathcal{F}(u, v, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) - \mathcal{F}(u', v', \hat{\mathbf{n}}_{ij})| \leq C \max_i \text{diam } K_i (|u - u'| + |v - v'|)$ ;
2.  $\mathcal{F}(u, v, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) = -\mathcal{F}(v, u, \hat{\mathbf{n}}_{ji})$ ;
3.  $\mathcal{F}(u, u, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) = \mathbf{F}(u; \hat{\mathbf{n}}_{ij})$ .

La prima è una condizione di Lipschitzianità, la seconda indica che il flusso è conservativo, mentre l'ultima è una relazione di consistenza.

Come già osservato nella sezione precedente, in direzione normale il problema è essenzialmente monodimensionale: possiamo quindi utilizzare flussi numerici già noti.

### 2.2.1 Metodo di Lax-Friedrichs

Il metodo di Lax-Friedrichs utilizza un flusso del tipo:

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_i; \hat{\mathbf{n}}_{ij}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j; \hat{\mathbf{n}}_{ij})] - \frac{c}{2} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i)$$

dove  $c = \max\{|\lambda(\mathbf{U}_i)|, |\lambda(\mathbf{U}_j)|\}$  è la massima velocità di propagazione delle onde.

L'implementazione di questo flusso numerico è molto semplice, a costo però di un'eccessiva dissipazione numerica che vicino alle discontinuità tende a smussare gli angoli.

### 2.2.2 Metodo di Godunov

L'idea alla base del metodo è quella di risolvere esattamente su ogni lato un problema di Riemann con onde piane nella direzione  $\hat{\mathbf{n}}_{ij}$ , con dati  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{U}_j$ . Sarà quindi:

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \hat{\mathbf{n}}_{ij}) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_{ij}(0); \hat{\mathbf{n}}_{ij})$$

dove  $\tilde{\mathbf{U}}_{ij} \left( \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{ij}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij}}{t} \right)$  è la soluzione esatta del problema di Riemann all'interfaccia e  $\mathbf{m}_{ij}$  è invece il punto medio del lato su cui si sta lavorando.

### 2.2.3 Flussi numerici approssimati

Spesso applicare in modo rigoroso il metodo di Godunov risulta troppo oneroso. Per questo si opta per flussi numerici approssimati, i quali spesso mostrano performances simili a quelle dei solutori esatti.

In letteratura è presente una grande varietà di flussi approssimati, i quali si basano sull'idea di sostituire al flusso esatto una funzione che approssimi la vera soluzione del problema di Riemann con gli stessi dati iniziali. Uno dei solutori più noti è quello di Roe, che verrà presentato nella sezione riguardante le equazioni di Eulero.

Altre tipologie di flussi approssimati, come Rusanov, HLL e HLLC, modificano direttamente il flusso numerico con correzioni adeguate. Questi metodi (così come per Roe) necessitano però di una taratura, ossia alcuni parametri che descrivono lo stato del sistema devono essere opportunamente stimati, ad esempio attraverso delle medie particolari.

La forma esplicita dei metodi citati si può trovare ampiamente discussa in [Tor97, Cap. 9-11].

## 2.3 Convergenza, stabilità

Discutiamo ora brevemente le proprietà di convergenza e stabilità dello schema a volumi finiti (2.2). Seppur più semplice, l'avanzamento in tempo del tutto esplicito impone spesso delle forti restrizioni riguardanti i parametri della discretizzazione. Nel caso di Eulero esplicito per garantire la convergenza del metodo deve essere imposta una condizione di tipo CFL in cui si richiede *necessariamente* che  $\Delta t$  sia sufficientemente piccolo da garantire che il dominio di influenza numerico sia contenuto in quello analitico (cioè che l'informazione non si propaghi più velocemente di quando dovrebbe).

Come accennato però la condizione è solo *necessaria* e attualmente trovare una condizione di tipo CFL (ossia di vincolo su  $\Delta t$ ) risulta particolarmente difficile per schemi su griglie non strutturate. Nel caso di griglie strutturate invece si può dire di più (limitando l'attenzione a schemi di tipo dimensional-splitting per equazioni scalari), e la condizione è simile al caso unidimensionale.

Riguardo la convergenza del metodo dei volumi finiti per sistemi non lineari multidimensionali su griglie non strutturate, si sa ancora molto poco, in quanto è molto difficile trovare e/o dimostrare che il flusso numerico utilizzato soddisfi particolari proprietà.

Nei casi test che vedremo più avanti cerchiamo di dare un'idea di quale possa essere l'ordine di convergenza. Sono presenti in letteratura, per casi specifici, risultati che sono in linea con quanto osservato [Krö97]. Possiamo fin d'ora accennare che per via dell'approssimazione costante a tratti è praticamente impossibile aspettarsi una convergenza lineare o più.

## 2.4 Condizioni al bordo

Se  $K_i$  è un poligono di bordo, allora il flusso numerico attraverso il suo lato libero non è definito. In questo caso infatti è necessaria l'applicazione di condizioni al contorno. Un metodo efficace per far ciò è quello di costruire idealmente un triangolo “fantasma” adiacente a quel lato, e assegnare in quest'ultimo il valore di  $\mathbf{U}$  desiderato. È possibile assegnare valori espliciti, o costruire in base alla soluzione adiacente condizioni di assorbimento, periodiche e riflettenti. Sarà poi il risolutore del problema di Riemann a propagare correttamente l'informazione all'interno del dominio, escludendo ciò che non è necessario.

Un dettaglio riguardante le condizioni assorbenti e riflettenti: nel primo caso è sufficiente estrapolare la soluzione dal triangolo adiacente (tipicamente basta assegnare lo stesso valore), nel secondo invece affinché il problema di Riemann assegni effettivamente velocità nulla al bordo si deve fare in modo che si sviluppi un'onda di rarefazione passante per  $u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , quindi si pone nel triangolo fantasma  $u_B \cdot \hat{\mathbf{n}} = -u \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , e tutto il resto si conserva.

## 3 Equazioni di Eulero 2D

Le equazioni di Eulero si ottengono dalle equazioni di Navier-Stokes considerando un fluido inviscido: si eliminano così tutti i contributi relativi alla viscosità e il sistema di equazioni si semplifica

nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) = \rho f^V \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \rho r + \rho f^V \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido (non costante),  $f^V$  sono le forze di volume agenti sul fluido,  $e$  è l'energia specifica per unità di massa,  $h$  è l'entalpia specifica e  $r$  rappresenta un termine sorgente di calore per unità di massa e di tempo.

Definendo il vettore delle incognite  $\mathbf{q} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho e]^T$  il sistema (3.1) si può scrivere in forma compatta in questo modo:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{q})$$

in cui  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  rappresenta il vettore delle forzanti.

Tale relazione si può anche scrivere in forma quasi-lineare, il che permette di osservare nel nostro caso che si tratta di un problema *iperbolico*: se si proietta questa equazione lungo una direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  si ottiene una matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q}; \hat{\mathbf{n}})$  diagonalizzabile con tutti gli autovalori reali.

Nel caso di Eulero, gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{q}; \hat{\mathbf{n}})$  sono infatti:

$$\begin{cases} \lambda_{1,4} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \pm c \\ \lambda_{2,3} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases}$$

dove  $c$  è la velocità locale del suono definita da  $c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ . Possiamo osservare che l'autovalore  $\lambda_{2,3}$  è degenere con molteplicità algebrica 2; le onde associate agli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  sono onde sonore. Pertanto, alcune informazioni si propagano a velocità  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \pm c$  mentre altre sono trasportate dal flusso.

Al variare del *numero di Mach*, definito come  $\text{Ma} = |\mathbf{u}|/c$ , si possono avere regimi di moto diversi: se  $\text{Ma} > 1$  il regime è detto supersonico e gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  hanno segno positivo; nel caso di regime subsonico, ovvero per  $\text{Ma} < 1$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  invece hanno segno opposto. Il caso più interessante è quello in cui coesistono zone con  $\text{Ma} > 1$  e altre con  $\text{Ma} < 1$ : siamo in regime transonico e si generano onde di shock e rarefazione.

In generale, il problema di Eulero è un sistema di leggi di conservazione non lineare: si possono quindi avere soluzioni discontinue, caratterizzate dalla presenza di onde di shock, rarefazione o discontinuità di contatto.

Un'importante proprietà delle equazioni di Eulero è l'invarianza per rotazioni: detto  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  il flusso e  $\mathbf{R}$  la matrice di rotazione, vale la relazione  $\mathbf{T}\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{R}^T = \mathbf{F}(\mathbf{T}\mathbf{q})$ , dove con  $\mathbf{T}$  si è indicata la matrice di trasformazione totale (comprende anche i termini relativi a energia e densità, che però non sono influenzati dalla rotazione). Questo sta a indicare che applicare la trasformazione a  $\mathbf{F}$  o al suo argomento è del tutto ininfluente: il risultato è lo stesso. Ciò risulta particolarmente utile per studiare un problema di Eulero bidimensionale in cui l'unica direzione interessante è quella normale.



### 3.1 Analisi del problema di Riemann

L'obiettivo ora è quello di studiare la soluzione del problema di Riemann per il problema di Eulero lungo la direzione normale, ovvero un problema della forma (1.5).

Introduciamo la seguente definizione. Una coppia autovalore-autovettore  $(\lambda_p(\mathbf{q}), \mathbf{r}_p(\mathbf{q}))$  è detta:

- *genuinamente non lineare* se  $\nabla \lambda_p(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{q}) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{q}$ ;
- *linearmente degenera* se  $\nabla \lambda_p(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{q}) = 0$  per ogni  $\mathbf{q}$ .

$\lambda_p$  rappresenta la velocità con cui la discontinuità si propaga lungo la linea caratteristica: a seconda dell'andamento di tale autovalore posso avere onde di shock o di rarefazione. Inoltre, nel caso di una coppia linearmente degenera, la velocità di propagazione è costante: le linee caratteristiche non divergono né convergono, ma restano parallele. In questo caso si è in presenza di una discontinuità di contatto: nel caso del problema di Eulero attraverso tale discontinuità la velocità e la pressione sono continue, mentre la densità presenta un salto.

Consideriamo ora un autovalore genuinamente non lineare. Cerchiamo soluzioni del tipo  $\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{v}(w(x, t))$ , con  $w$  scalare.

In questo caso  $\mathbf{v}(w(x, t))$  può essere soluzione del problema di Riemann solo se gli stati  $\mathbf{q}_L$  e  $\mathbf{q}_R$  possono essere connessi da una curva nel piano delle fasi. In particolare, per avere un'onda di rarefazione si dovrà avere  $\lambda(\mathbf{v}(w)) > \lambda(\mathbf{v}(w_l))$  per ogni  $w_l < w < w_r$ . Questo vuol dire che la velocità di propagazione dell'informazione cresce lungo la curva caratteristica passando dal dato di sinistra a quello di destra. Ne consegue che non tutti gli stati possibili possono essere connessi da un'onda di rarefazione.

Analogamente, se trattiamo il caso di un'onda di shock, gli stati  $\mathbf{q}_L$  e  $\mathbf{q}_R$  devono soddisfare le condizioni di Rankine-Hugoniot. Si nota allora che dato uno stato sinistro e il valore della pressione a destra, esiste un solo stato destro che può essere connesso con il sinistro tramite un'onda di shock.

Nel nostro caso, gli autovalori  $\lambda_{2,3}$  corrispondono a discontinuità di contatto, mentre  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  possono rappresentare onde di shock o di rarefazione.

### 3.2 Flusso approssimato alla Roe

Come accennato, utilizzare il metodo di Godunov esatto è computazionalmente molto oneroso. È per questo che spesso gli si preferisce uno schema approssimato. Tale classe di metodi prevede di sostituire, nel metodo di Godunov, la soluzione esatta del problema di Riemann (1.5) con una approssimata.

Questo è l'approccio generale: uno dei metodi più utilizzati è il *risolutore approssimato di Roe*: secondo tale schema si risolve un sistema lineare iperbolico in luogo del sistema non lineare.

Veniamo ora all'algoritmo di Roe. Da un punto di vista pratico quello che si fa è calcolare la matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  che descrive il sistema lineare che sostituisce quello non lineare. In particolare questa si ottiene a partire da  $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}})$ , dove  $\hat{\mathbf{q}}$  ha come componenti:

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \rho_{ave} \\ \rho_{ave} u_{ave} \\ \rho_{ave} v_{ave} \\ \rho_{ave} e_{ave} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Le singole componenti sono delle particolari medie pesate “alla Roe”, e dipendono da  $\mathbf{q}_L$  e  $\mathbf{q}_R$ . Il flusso finale si scrive come:

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_L) + \sum_{\hat{\lambda}_p \leq 0} \hat{\alpha}_p \hat{\lambda}_p \hat{\mathbf{r}}_p \quad \text{oppure} \quad \mathcal{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - \sum_{\hat{\lambda}_p \geq 0} \hat{\alpha}_p \hat{\lambda}_p \hat{\mathbf{r}}_p.$$

dove  $\hat{\lambda}_p$  e  $\hat{\mathbf{r}}_p$  sono rispettivamente autovalori e autovettori della matrice  $\hat{\mathbf{A}}$ , mentre gli  $\hat{\alpha}_p$  sono i coefficienti dello sviluppo di  $\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L$  nella base degli autovettori.

Volendo essere più precisi, la matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  deve soddisfare particolari proprietà:

1.  $\hat{\mathbf{A}}$  diagonalizzabile con autovalori reali, ovvero si richiede che il sistema sia iperbolico;
2.  $\hat{\mathbf{A}}(\bar{q}, \bar{q}) = \mathbf{F}'(\bar{q})$  (consistenza);
3.  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_L)$ .

La terza condizione in particolare permette al metodo di risolvere esattamente gli shock: supponiamo che  $(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$  siano collegati da una singola onda di shock. Allora, per la condizione di Rankine-Hugoniot si ha  $f(\mathbf{u}_R) - f(\mathbf{u}_L) = s(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$  ma, in virtù della condizione richiesta:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) = s(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L).$$

Quindi  $(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)$  è autovettore di  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$  con relativo autovalore  $s$ , ovvero risolve esattamente lo shock, determinando la soluzione discontinua che propaga a velocità esatta.

Nel caso però di onda transonica (ovvero di onda di rarefazione a cavallo dell’asse verticale) il metodo non funziona correttamente: al posto di un’onda di rarefazione la soluzione di Roe prevede un’onda di shock. Lo schema non è quindi in grado di determinare soluzioni entropiche. Per questo si modifica il metodo introducendo una correzione entropica: si sostituisce allo shock una coppia di onde che viaggiano in direzioni opposte.

Supponiamo che l’onda transonica sia causata dall’autovalore  $\hat{\lambda}_1 = u_{\text{ave}} - c_{\text{ave}}$ . Definiamo le velocità con cui propagano le due onde come  $\lambda_1^l = \mathbf{q}_L - c_L$  e  $\lambda_1^r = \mathbf{q}_L^* - c_L^*$ . Osserviamo che la correzione entropica va imposta solo nel caso in cui  $\lambda_1^l < 0 < \lambda_1^r$ . Per garantire il flusso all’interfaccia si pone:

$$\hat{\lambda}_1(\mathbf{q}_L^* - \mathbf{q}_L) = \lambda_1^l(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_L) + \lambda_1^r(\mathbf{q}_L^* - \mathbf{q}_m).$$

Dalla precedente relazione si ricava  $\mathbf{q}_m$  e quindi si modifica il flusso all’interfaccia come

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = f(\mathbf{q}_L) + \lambda_1^l(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_L).$$

Il caso in cui la rarefazione transonica sia dovuta all’autovalore  $\hat{\lambda} = u_{\text{ave}} + c_{\text{ave}}$  è del tutto analogo, ovviamente a ragionamento invertito.

## 4 Esempi numerici

Vengono di seguito presentati i casi test oggetto di studio per analizzare il funzionamento dei diversi schemi numerici.

## 4.1 Caso studio 1: Shock Reflection

Il problema che si intende studiare riguarda un gas in moto che urta contro una parete. Tale sistema si trova in condizioni diverse, quindi si genera una prima onda di shock che si propaga nel fluido fino a incontrare la parete, dove viene riflessa [BD07]. Questo caso è particolarmente interessante perché permette di mostrare quale schema numerico coglie meglio l'onda di shock. La simulazione ha utilizzato una griglia di 22016 triangoli e un intervallo temporale  $dt = 0.0014$ . Il dominio di calcolo è il rettangolo  $[0, 4] \times [0, 1]$ . Le specifiche della simulazione sono le seguenti:

**Condizioni iniziali**  $\rho = 1.4$ ,  $u = 2.9$ ,  $v = 0.0$ ,  $p = 1.0$ ;

**Condizioni al bordo** Sui lati:

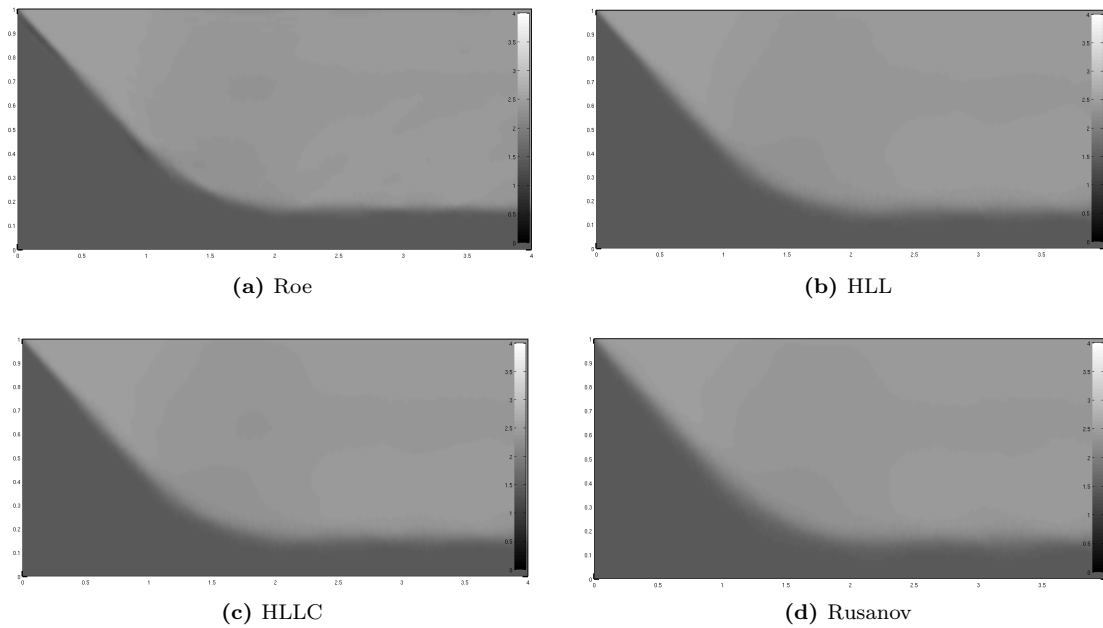
**inferiore** riflessione;

**destra** assorbimento;

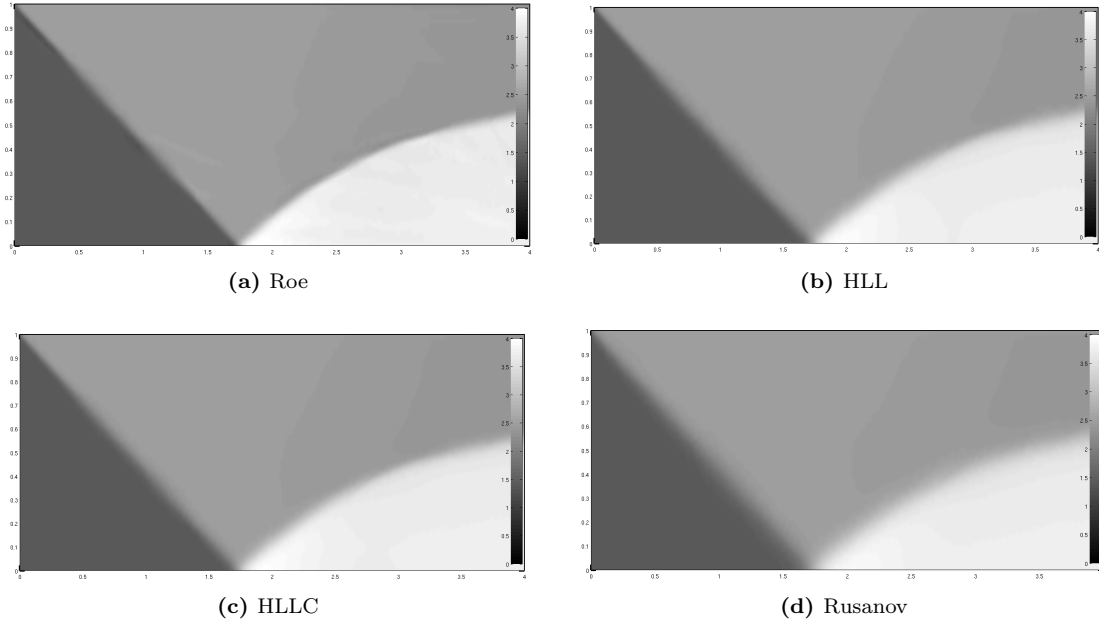
**superiore**  $\rho = 2.4739$ ,  $u = 2.5876$ ,  $v = -0.5438$ ,  $p = 2.2685$ ;

**sinistra**  $\rho = 1.4$ ,  $u = 2.9$ ,  $v = 0$ ,  $p = 1.0$ ;

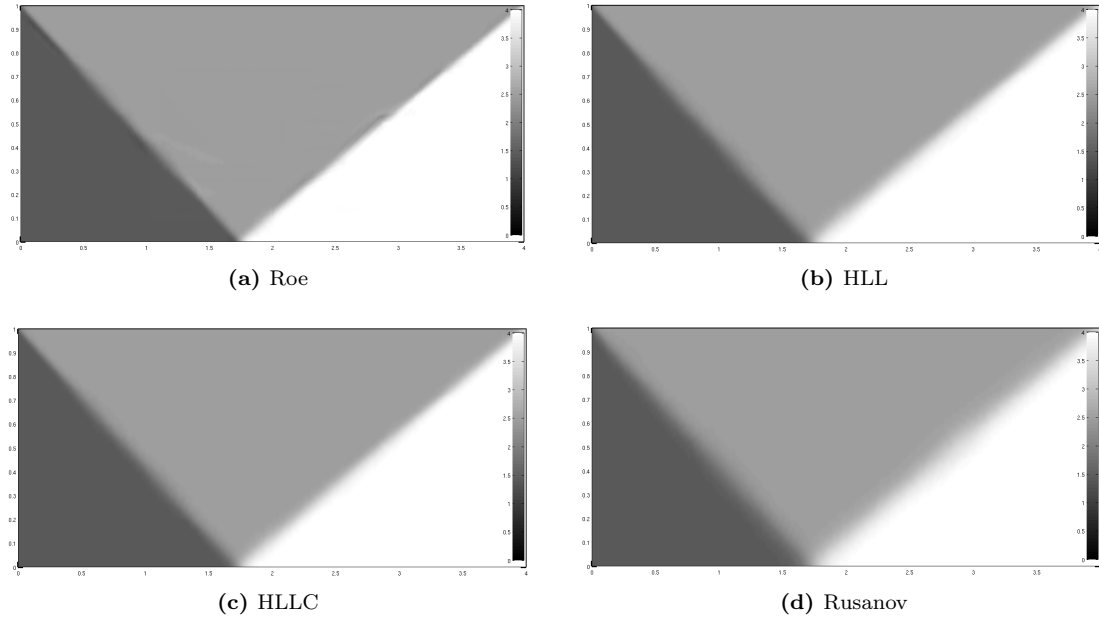
Di seguito sono riportati i risultati ottenuti con diversi metodi in tre istanti diversi della simulazione: prima che lo shock raggiunga la parete, subito dopo che lo shock viene riflesso e l'evoluzione dell'onda dopo la riflessione. Verranno messe a confronto le performances dei diversi metodi allo stesso istante. Si è scelto inoltre di rappresentare solo la densità in quanto sufficientemente rappresentativa dei fenomeni che si generano nel sistema.



**Figura 1:** Confronto tra i vari metodi prima della riflessione a  $t = 0.589$ .



**Figura 2:** Confronto tra i vari metodi subito dopo la riflessione a  $t = 1.33$ .



**Figura 3:** Confronto tra i vari metodi prima dopo la riflessione a  $t = 4.29$ .

Ciò che si osserva dalle simulazioni è che il metodo che coglie in modo migliore gli shocks è quello di Roe: tali onde sono infatti ben definite e circoscritte. HLL e HLLC danno risultati molto simili, anche se leggermente meno precisi di Roe. Lo schema di Rusanov, invece, è molto meno performante: legge gli shocks, ma in modo molto meno definiti rispetto a Roe.

Per quanto riguarda la riflessione in Figura 2 notiamo che qualitativamente i risultati sono molto simili, ma nel caso di Rusanov riusciamo a cogliere la diffusività del metodo: il bordo della zona riflessa è infatti molto meno definito rispetto a Roe, indice che la soluzione numerica è molto più regolare di quanto non lo sia in realtà.

Come ultima nota precisiamo che in questo caso il metodo di Roe è applicato senza fix entropico, in quanto non necessario.

## 4.2 Caso studio 2: Modified Sod Problem

L'analisi del Sod è particolarmente interessante perché è nota la soluzione esatta: questo ci permetterà di fare dei confronti tra la soluzione determinata numericamente e la soluzione esatta. Il sistema che si intende studiare è composto da due gas diversi inizialmente separati da una membrana; successivamente tale membrana viene tolta. L'obiettivo è quindi quello di studiare come propagano le discontinuità all'interno del sistema e verificare che si generano un'onda di shock e una di rarefazione, nonché una discontinuità di contatto [Tor97].

Il dominio di calcolo è il rettangolo  $[-1, 1] \times [0, 1]$ .

Le specifiche delle simulazioni sono le seguenti:

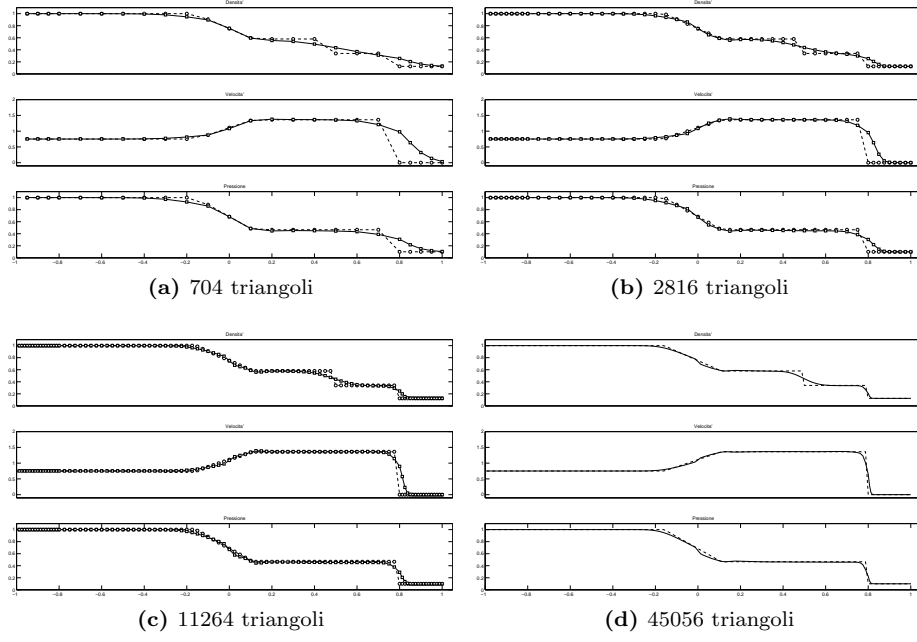
**Condizioni iniziali** Il dominio viene diviso in due zone, una a destra e una a sinistra (*Right e Left*), imponendo poi che  $\rho_L = 1$ ,  $\rho_R = 0.125$ ,  $u_L = 0.75$ ,  $u_R = 0.0$ ,  $v_L = v_R = 0.0$ ,  $p_L = 1$ ,  $p_R = 0.1$ ;

**Condizioni al bordo** Assorbenti.

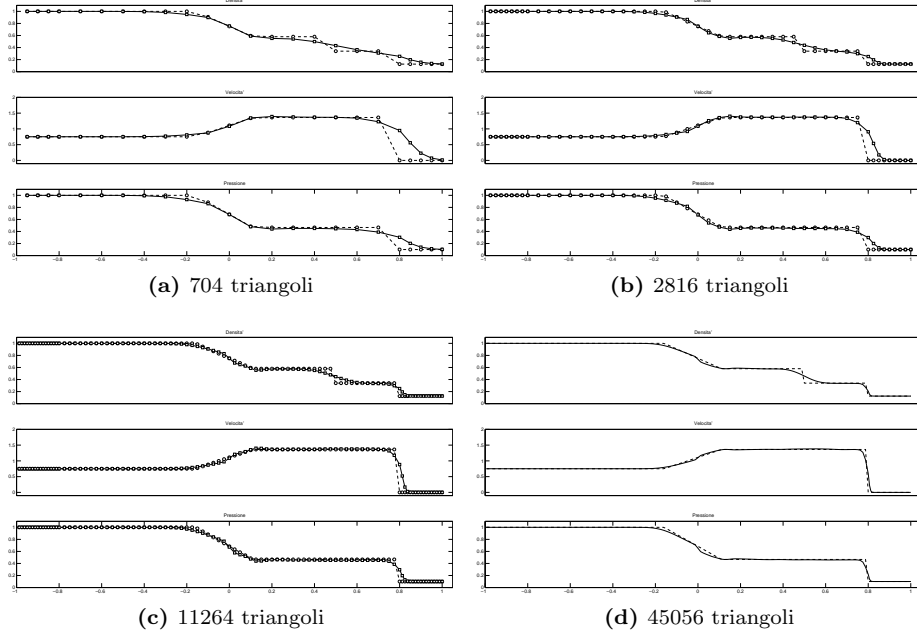
Il problema trattato è chiamato “Sod modificato”, in quanto rispetto all'originale presenta una velocità iniziale non nulla nella parte sinistra. Il test è molto interessante perché mette alla prova le capacità dei solutori approssimati di cogliere precisamente l'essenza del problema di Riemann. Le simulazioni mostrano l'andamento della soluzione lungo la sezione  $y = 0.5$ . Tale soluzione viene quindi confrontata con la soluzione esatta. I risultati dei test al variare del numero di elementi di griglia sono quelli mostrati in Figura 4, 5, 6 e 7: in particolare è rappresentata la soluzione al tempo  $T = 0.367$ , in linea continua quella approssimata, in linea tratteggiata quella esatta.

Possiamo notare che raffinando la griglia la soluzione numerica approssima ovviamente sempre meglio la soluzione esatta; inoltre i metodi HLL, HLLC e Roe con fix entropico colgono perfettamente l'onda di rarefazione. Tuttavia nessuno schema numerico è in grado di leggere la discontinuità di contatto: nella zona di discontinuità della densità infatti i vari metodi non hanno un salto netto, ma un declino dolce.

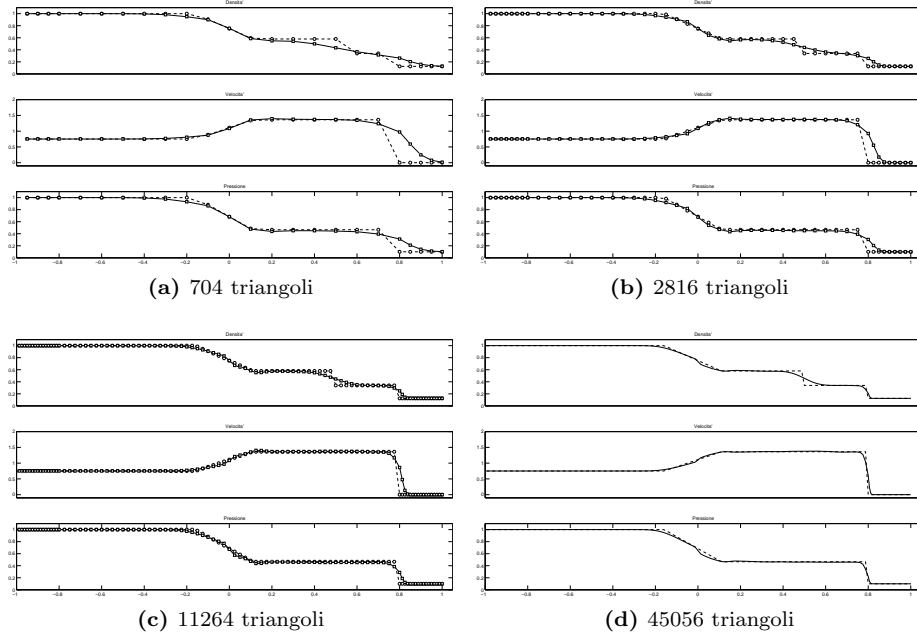
Molto interessante è confrontare la soluzione generata da Roe con e senza fix entropico. Sappiamo che il metodo di Roe presenta dei problemi nel trattare onde di rarefazione transoniche: è per questo che si è implementata la correzione di Roe con fix entropico. Confrontando le immagini 6 e 7 notiamo subito che l'imprecisione con cui Roe descrive l'onda di rarefazione a sinistra è corretta dall'introduzione del fix entropico. L'onda di rarefazione in questo secondo caso è molto più precisa e accurata.



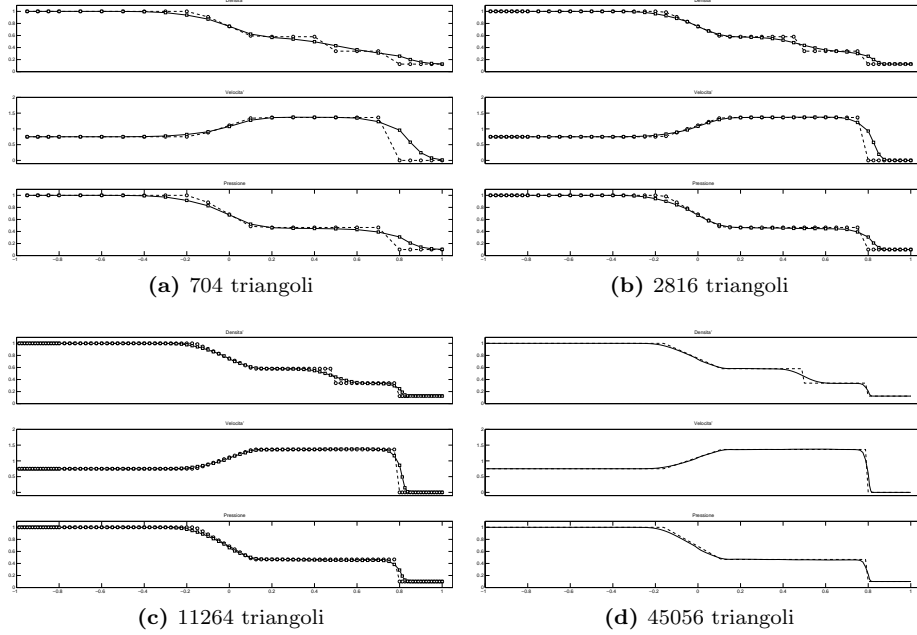
**Figura 4:** Soluzione con HLL.



**Figura 5:** Soluzione con HLLC.



**Figura 6:** Soluzione con ROE senza entropy fix.



**Figura 7:** Soluzione con ROE con entropy fix.

Stimiamo quindi gli ordini di convergenza della soluzione approssimata a quella esatta.

h	$\ \rho - \rho_h\ _{L^1}$	EOC	$\ u - u_h\ _{L^1}$	EOC	$\ p - p_h\ _{L^1}$	EOC
0.083	0.06	==	0.1894	==	0.0616	==
0.04167	0.0426	0.494	0.1011	0.91	0.0407	0.598
0.0208	0.03	0.506	0.0554	0.87	0.0263	0.63
0.0104	0.0201	0.578	0.0283	0.97	0.0169	0.64

(a) HLL

h	$\ \rho - \rho_h\ _{L^1}$	EOC	$\ u - u_h\ _{L^1}$	EOC	$\ p - p_h\ _{L^1}$	EOC
0.083	0.0574	==	0.1729	==	0.0601	==
0.04167	0.0414	0.471	0.0955	0.856	0.04	0.587
0.0208	0.0299	0.469	0.0558	0.775	0.0265	0.594
0.0104	0.0201	0.573	0.0276	1.015	0.0168	0.675

(b) HLLC

h	$\ \rho - \rho_h\ _{L^1}$	EOC	$\ u - u_h\ _{L^1}$	EOC	$\ p - p_h\ _{L^1}$	EOC
0.083	0.0644	==	0.1786	==	0.0614	==
0.04167	0.0424	0.603	0.0971	0.879	0.0404	0.604
0.0208	0.0302	0.490	0.0543	0.839	0.0264	0.614
0.0104	0.0202	0.580	0.0279	0.961	0.0167	0.661

(c) Roe senza entropy fix

h	$\ \rho - \rho_h\ _{L^1}$	EOC	$\ u - u_h\ _{L^1}$	EOC	$\ p - p_h\ _{L^1}$	EOC
0.083	0.0626	==	0.1815	==	0.0680	==
0.04167	0.0400	0.646	0.0941	0.948	0.0396	0.78
0.0208	0.0271	0.562	0.0498	0.918	0.0247	0.681
0.0104	0.0191	0.505	0.0234	1.09	0.0164	0.591

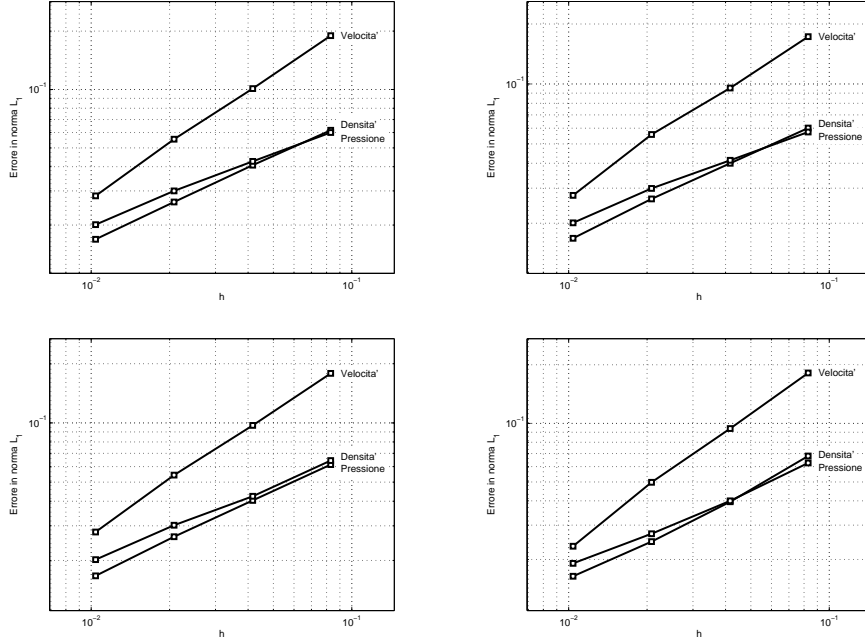
(d) Roe con entropy fix

**Tabella 1:** Errori e ordine di convergenza di Roe con entropy fix al variare di h al tempo  $T = 0.367$ .

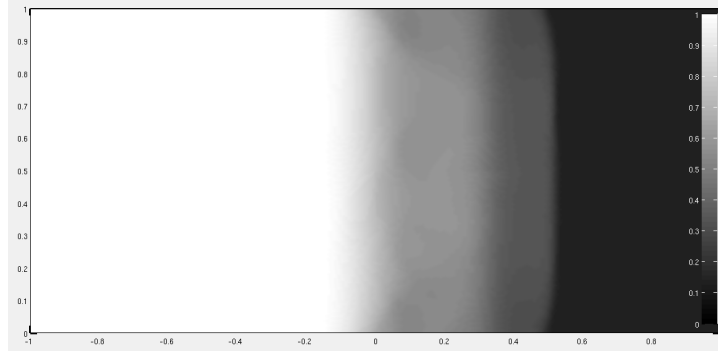
Ciò che si può osservare dalla stima degli ordini di convergenza è che la convergenza è sublineare: è esattamente quello che ci aspettavamo essendo gli schemi utilizzati monotoni e, quindi, al più del primo ordine. I quattro metodi però non presentano differenze sostanziali, danno risultati del tutto analoghi dal punto di vista dell'errore e della stima dell'ordine di convergenza.

Infine, per completezza mostriamo anche la soluzione del problema 2D (Figura 9) ottenuta utilizzando il metodo di Roe con entropy fix.





**Figura 8:** Convergenza di HLL, HLLC, Roe con e senza entropy fix per il problema Sod

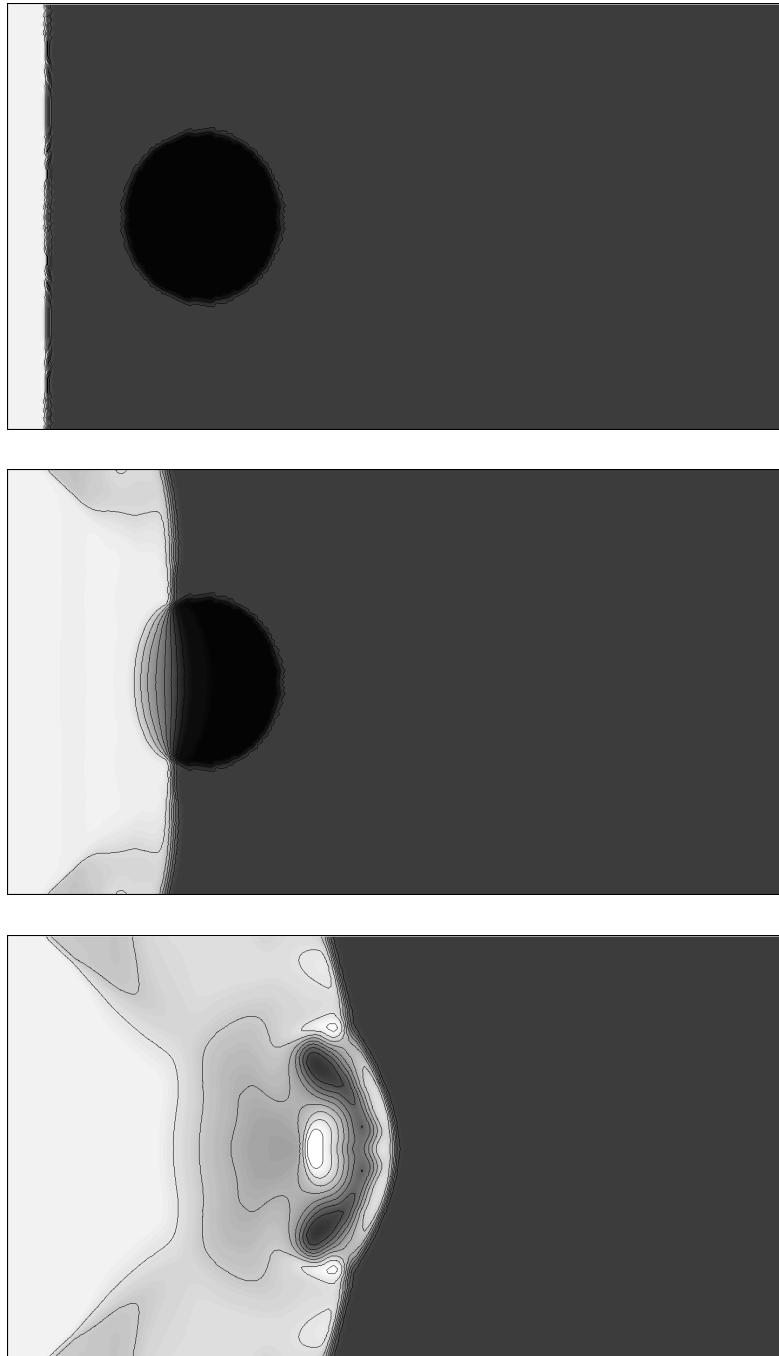


**Figura 9:** Soluzione 2D di Sod con Roe con entropy fix al tempo  $T=0.367$ .

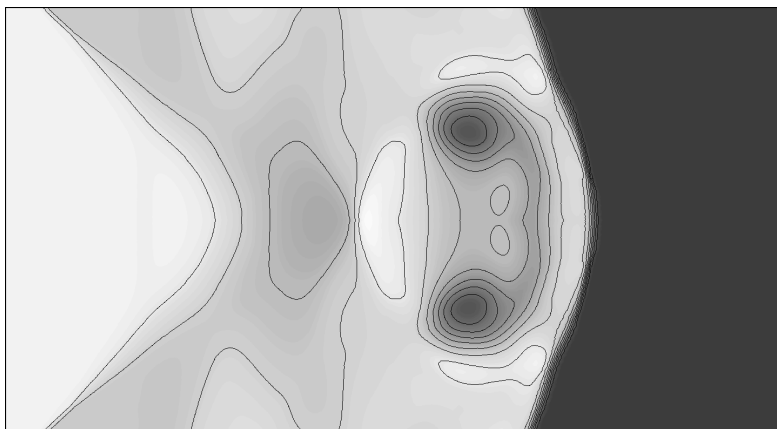
### 4.3 Un test più complesso: Shock Bubble

Presentiamo ora, senza entrare nel dettaglio ma solo a scopo applicativo, il caso dello shock bubble, ovvero uno shock che investe una bolla di gas a densità minore [LL97]. Lo schema numerico utilizzato è Roe con entropy fix. Viene mostrata la soluzione (solo la densità) in quattro istanti temporali successivi.

La particolarità di questo esperimento (che alcuni ricercatori hanno anche eseguito realmente) è che la bolla una volta investita dallo shock si avvolge su se stessa formando un toro: le immagini in Figura 11 devono essere pensate come una sezione di un volume a simmetria di rotazione.



**Figura 10:** Soluzione di shock bubble con Roe con entropy fix.



**Figura 11:** Soluzione di shock bubble con Roe con entropy fix.

Lo scopo principale di quest'ultimo test numerico è quello di evidenziare come il metodo dei volumi finiti necessiti di griglie molto fitte per ottenere risultati di media qualità (in questo caso sono stati utilizzati quasi 100'000 triangoli).

## 5 Conclusioni

Lo schema a Volumi Finiti (2.2) presenta caratteristiche molto particolari rispetto, per esempio, ad uno schema ad Elementi Finiti per la risoluzione di problemi ellittici.

La struttura è molto semplice ed intuitiva, nonché di facile implementazione una volta a disposizione di un buon gestore della mesh. Inoltre l'estensione al caso multidimensionale è praticamente automatica, se non per alcuni dettagli riguardanti la geometria. Al contrario un codice FEM presenta certamente difficoltà aggiuntive dovute alla presenza di integrazione numerica, costruzione di matrici sparse, risoluzione di sistemi lineari, e via discorrendo.

Il problema principale però è che sistemi iperbolici tipo Eulero sono estremamente più complessi rispetto a problemi ellittici e parabolici, e tutta questa complessità si riflette poi nelle soluzioni approssimate dal metodo numerico.

Le soluzioni di sistemi iperbolici sono generalmente poco regolari, per via della presenza di discontinuità. Anche se non sono presenti in letteratura risultati sulla convergenza dei metodi utilizzati, ci siamo resi conto dalle simulazioni che effettivamente il metodo dei Volumi Finiti ha performance davvero scadenti: però ha dalla sua parte il fatto che riesce ad approssimare le discontinuità anche piuttosto bene, ove in ogni caso l'utilizzo di metodi di ordine più elevato non avrebbe molto senso.

Le qualità di approssimazione delle discontinuità si possono apprezzare nel problema Sod, dove confrontiamo differenti tipi di risolutori di problemi di Riemann approssimati. Il metodo di Roe con entropy fix è quello che si comporta meglio, anche se l'implementazione risulta leggermente più complessa rispetto agli altri. Anche con una griglia relativamente lasca riesce a catturare l'essenza del problema senza "diffondere" troppo le discontinuità.

Il metodo dei Volumi Finiti deve essere quindi visto come un trampolino di lancio per metodi più sofisticati. Tra le possibili estensioni abbiamo:

- L'*Adattività di griglia*, che permettere di concentrare i nostri sforzi computazionali solo vicino alle discontinuità. A questo proposito il caso test sulla riflessione dello shock è significativo: la soluzione è costante nelle tre zone divise dai due shock, i quali dovrebbero essere linee nette;
- I *Limitatori di pendenza*, dove attraverso particolari procedure (abbastanza complesse nel caso di griglie non strutturate) si ricostruisce una approssimazione lineare della soluzione in ogni elemento, e si utilizzano poi le tracce al bordo di quest'ultima per calcolare i flussi numerici. La particolarità è che per evitare eventuali oscillazioni spurie dovute alla ricostruzione di ordine più elevato si possono costruire limitatori di pendenza (del tutto analoghi al caso 1D) che attivano la ricostruzione solo se necessario. L'ordine di convergenza del metodo così ottenuto risulterà essere più elevato rispetto a quello originale, almeno lontano dalle discontinuità;
- Il *metodo Discontinuous Galerkin*, relativamente moderno, il quale cerca di conciliare i punti di forza del metodo dei Volumi Finiti con quello degli elementi Finiti. In questo caso la soluzione in ogni elemento è combinazione lineare di funzioni di base. Lo scopo di tutto ciò è quello di ottenere una approssimazione migliore utilizzando meno triangoli, soprattutto nelle zone regolari [HW08].

Il caso dello Shock Bubble, che chiude i casi test, aveva proprio lo scopo di mettere in difficoltà lo schema dei Volumi Finiti e ad evidenziare la necessità di modifiche come le precedenti elencate. Anche se la struttura corretta della soluzione è ben evidenziata, molti dettagli non sono visualizzabili a questa risoluzione, come la presenza di diverse riflessioni dello shock o di zone di ricircolo.

## Riferimenti bibliografici

- [AC97] K. Anastasiou and C. T. Chan, *Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes*, International Journal For Numerical Methods In Fluids **24** (1997), 1225–1245.
- [BD07] G. Ben-Dor, *Shock Wave Reflection Phenomena*, Springer-Verlang, 2007.
- [CM93] Alexandre J. Chorin and Jerrold E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlang, 1993.
- [Hir07] Charles Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, vol. 1, John Wiley & Sons, 2007.
- [HW08] Jan S. Hesthaven and Tim Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, Springer, 2008.
- [Krö97] Dietmar Kröner, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley Teubner, 1997.
- [LeV04] Randall J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2004.

- [LL97] J.O. Langseth and R.J. LeVeque, *A wave propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws*, <http://www.math.ntnu.no/conservation/1997/003.ps>, 1997.
- [Qua08] Alfio Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer-Verlang, 2008.
- [QV94] Alfio Quarteroni and Alberto Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlang, 1994.
- [Tor97] Eleuterio F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlang, 1997.
- [Wes01] Pieter Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlang, 2001.
- [Yan01] Daoqui Yang, *C++ and Object Oriented Numeric Computing for Scientists and Engineers*, Springer-Verlang, 2001.