La fonction y(x) inverse de f(x) = x^x

par Pierre GERMAIN-LACOUR *

Résumé : Je me suis tout particulièrement intéressé à la fonction y(x) qui est l'inverse de la fonction f(x) = x^x. Après l'énoncé des principales propriétés de y(x), on montre son utilisation pour trouver les solutions de certaines équations particulières.

La fonction f(x) = x^x pour x ≥ 0 et sa fonction inverse : y(x).

Pour x ≥ 0 la valeur de f(x) est un nombre réel positif et on vérifie très facilement que pour x → 0 : f(x) → 1.

Par définition : f(y(x)) = x et y(f(x)) = x
f(0) = 1 f(1) = 1 f(2) = 4 f(3) = 27 f(4) = 256 etc.
y(1) = 1 y(4) = 2 y(27) = 3 y(256) = 4 etc.

On a : f(x) = x^x = e^(x*ln(x))
=> f'(x) = (e^(x*ln(x)))' = (e^(x*ln(x)))*(x*ln(x))'
f'(x) = (x^x)*(ln(x)+x*(1/x)) = (x^x)*(1+ln(x))

=> f'(0) = -infini   f'(x_m) = 0 pour x_m = 1/e = 0.3678794412   f'(1) = 1
et f_m = f(x_m) = (1/e)^(1/e) = e^((1/e)*(-1)) = e^(-1/e) = 0.6922006276

f''(x) = (x^x)'*(1+ln(x)) + (x^x)*(1+ln(x))'
= (x^x)*(1+ln(x))*(1+ln(x)) + (x^x)*(1/x)
= (x^x)*(1/x+1+2*ln(x)+ln(x)^2)

=> f''(0) = infini   f''(x_m) = f''(1/e) = 1.881596387   f''(1) = 2

La fonction y(x) inverse de f(x) est telle que : y^y = x.

Pour x dans l'intervalle : [f_m , 1] où : f_m = e^(-1/e) = 0.6922006276
il y a deux valeurs 0 < y_0(x) < x_m et y(x) > x_m de y telles que y^y = x.
D'où :
pour x < f_m = e^(-1/e) il n'y a aucune valeur de y(x)
pour x = f_m = 0.6922006276 on a une valeur double : y = x_m = 1/e = 0.3678794412
pour f_m < x < 1 on a les deux valeurs de y : y_0(x) et y(x)
pour x=1 on a y_0 = 0 et y = 1 (0^0=1 et 1^1=1)
pour x > 1 il y a une seule valeur de y(x) : y(4)=2 et y(27)=3 et y(256)=4 ...

Exemple : soient   x = 0.725   a = 0.1995   b = 0.5673
y_0(x) = y_0(0.725) voisin de a = 0.1995 car a^a = 0.7250010049 voisin de 0.725
y(x) = y(0.725) voisin de b = 0.5673 car b^b = 0.7249999759 voisin de 0.725

f(3) = 3^3 = 27 => y(27) = 3 => f(y(27)) = 27 => y(f(3)) = 3
f(1.8255) = 1.8255^1.8255 voisin de 3.00021646 => y(3) voisin de 1.8255

On a : y(2) = 1.559610470 et y(3) = 1.825455023 et y(5) = 2.129372482

Par définition de la fonction W(z) de Lambert : w = W(z) <==> z = w*e^w

Si y^y = x => ln(x) = y*ln(y) = e^(ln(y))*ln(y)   Soient w = ln(y) et z = ln(x)
ln(x) = ln(y)*e^(ln(y)) => z = w*e^w => w = W(z) => ln(y) = W(ln(x))
y(x) = ln(x)/ln(y) = ln(x)/W(ln(x)) = e^ln(y) = e^W(ln(x))

Soit a = e^x => y(a) = y(e^x) = ln(a)/W(ln(a)) = x/W(x) => W(x) = x/y(e^x)
Soit a = ln(x) => y(x) = y(e^a) = e^W(a) => W(a) = ln(y(e^a)) => W(x) = ln(y(e^x))

Calcul de la fonction W'(x)

w = W(x) <==> x = w*e^w = W(x)*e^W(x) => e^W(x) = x/W(x)
W'(x)*e^W(x) + W(x)*e^W(x)*W'(x) = 1 => W'(x)*(x + e^W(x)) = 1
W'(x) = 1/(x + e^W(x)) = 1/(x + x/W(x)) = W(x)/(x + x*W(x)) = W(x)/(x*(1+W(x)))

Calcul de la fonction y'(x)

Si x > 1 : W'(x) = W(x)/(x*(1+W(x)))
y(x) = ln(x)/W(ln(x)) = e^W(ln(x))
y'(x) = e^W(ln(x))*(W(ln(x)))'
y'(x) = e^W(ln(x))*W(ln(x))/(ln(x)*(1+W(ln(x))))*ln(x)'
y'(x) = ln(x)/W(ln(x))*W(ln(x))/(ln(x)*(1+W(ln(x))))*ln(x)'
y'(x) = ln(x)/(ln(x)*(1+W(ln(x))))*ln(x)'
y'(x) = 1/((1+W(ln(x))))*ln(x)'
y'(x) = 1/((1+W(ln(x))))*(1/x)
y'(x) = 1/(x*(1+W(ln(x))))

Vérification avec Maple V de y'(x) = 1/(x*(1+W(ln(x))))

```
> y:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(ln(x)));
> end;
    y := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(ln(x))) end
> yp:=proc(x)
> evalf(1/(x*(1+LambertW(ln(x)))));
> end;
    yp := proc(x) evalf(1/(x*(1 + LambertW(ln(x))))) end
> y(27);
    2.999999999
> yp(27);
    .01764834659
> evalf((y(27.1)-y(26.9))/0.2);
    .01764844
```

D'où : y_0'(1) = 0 et y_0'(f_m) = -infini et y'(f_m) = infini et y'(1) = 1

Trouver la ou les solutions de l'équation numéro 1 : 3^x = 2x + 2

Par définitions : w = W(z) <==> z = w*e^w et a = y(b) <==> b = a^a
Quelque soit x : W(x) = x/y(e^x) et y(x) = ln(x)/W(ln(x))

    3^x = 2x + 2
    1 = (2x+2)/(3^x)
    (x+1)*3^(-x) = 1/2
    (x+1)*3^(-x-1) = 1/6
    (-x-1)*3^(-x-1) = -1/6
    ln(3)*(-x-1)*3^(-x-1) = -ln(3)/6
    ln(3)*(-x-1)*e^(ln(3)*(-x-1)) = -ln(3)/6
    W(-ln(3)/6) = ln(3)*(-x-1)
    (x+1)*ln(3) = -W(-ln(3)/6)
    x = -1 -W(-ln(3)/6)/ln(3)
    x = -1 -(-ln(3)/6)/y(e^(-ln(3)/6))/ln(3)

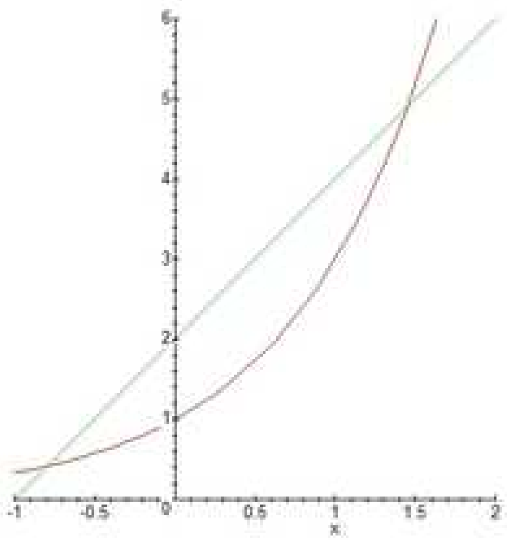
Calcul : e^(-ln(3)/6) = 0.8326831776
Cette valeur est dans l'intervalle où y(x) a deux valeurs.
L'équation : 3^x = 2*x+2 a donc deux solutions qui sont les suivantes.

x = -1 -(-ln(3)/6)/y(e^(-ln(3)/6))/ln(3) = -0.7901100111
x_0 = -1 -(-ln(3)/6)/y_0(e^(-ln(3)/6))/ln(3) = 1.444561392

Vérifications avec Maple V de x et x_0

```
> y:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(ln(x)));
> end;
      y := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(ln(x))) end
> y0:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(-1,ln(x)));
> end;
    y0 := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(-1, ln(x))) end
> evalf(exp(1)^(-ln(3)/6));
    .8326831776
> y(0.8326831776);
    .7940667757
> y0(0.8326831776);
    .06817855640
> x := -1 -(-ln(3)/6)/y(exp(1)^(-ln(3)/6))/ln(3);
    x := -.7901100111
> x0 := -1 -(-ln(3)/6)/y0(exp(1)^(-ln(3)/6))/ln(3);
    x0 := 1.444561392
> evalf(3^x-(2*x+2));
    0
> eval(3^x0-(2*x0+2));
          -8
    -.3 10

> plot({3^x,2*x+2},x=-1..2,0..6);
```



Trouver la ou les solutions de l'équation numéro 2 : 2^x = 5*x

Par définitions : w = W(z) <==> z = w*e^w et a = y(b) <==> b = a^a
Quelque soit x : W(x) = x/y(e^x) et y(x) = ln(x)/W(ln(x))

```
    2^x = 5*x
    1 = 5*x/2^x
    1/5 = x/2^x
    ln(2)/5 = ln(2)*x/2^x
    -ln(2)/5 = -ln(2)*x*2^(-x) = -ln(2)*x*e^(ln(2)*(-x))
    -ln(2)/5 = -ln(2)*x*e^(-ln(2)*x)
    -ln(2)*x = W(-ln(2)/5)
    x = W(-ln(2)/5)/(-ln(2))
```

x = (-ln(2)/5)/y(e^(-ln(2)/5))/(-ln(2))

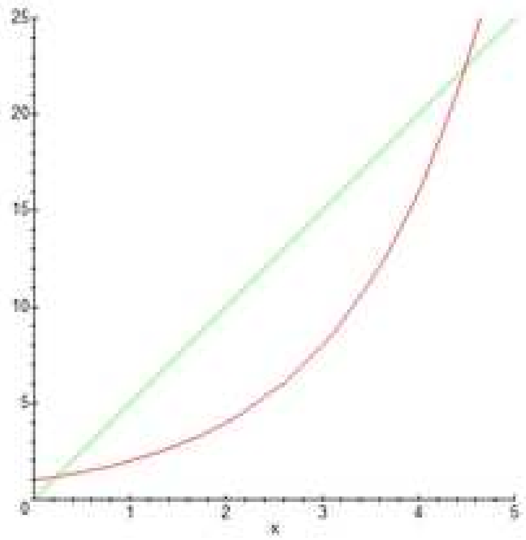
Calcul : e^(-ln(2)/5) = 0.8705505633
Cette valeur est dans l'intervalle où y(x) a deux valeurs.
L'équation : 2^x = 5*x a donc deux solutions qui sont les suivantes.

x = (-ln(2)/5)/y(e^(-ln(2)/5))/(-ln(2)) = 0.2354557102
x_0 = (-ln(2)/5)/y_0(e^(-ln(2)/5))/(-ln(2)) = 4.488001136

Vérifications avec Maple V de x et x_0

```
> evalf(exp(1)^(-ln(2)/5));
    .8705505633
> x := (-ln(2)/5)/y(exp(1)^(-ln(2)/5))/(-ln(2));
    x := .2354557102
> x0 := (-ln(2)/5)/y0(exp(1)^(-ln(2)/5))/(-ln(2));
    x0 := 4.488001136
> evalf(2^x-5*x);
          -8
    -.1*10
> eval(2^x0-5*x0);
    0

> plot({2^x,5*x},x=0..5,0..25);
```



Trouver les solutions des équations suivantes : z^x = x

Soit z un nombre tel que : 0.0000001 < z < e^(1/e) = 1.44466786
=> 1/z > e^(-1/e) Calculer le nombre x tel que : z^x = x

y(x) = e^W(ln(x)) = ln(x)/W(ln(x))
W(x) = x/y(e^x) = ln(y(e^x))
Soit a = 1/x <==> x = 1/a
y(x) = y(1/a) = e^W(ln(1/a)) = e^W(-ln(a))
y(x) = y(1/a) = ln(1/a)/W(ln(1/a)) = -ln(a)/W(-ln(a))

z^x = x
z = x^(1/x)
z^(-1) = x^(-1/x)
1/z = (1/x)^(1/x)
-ln(z) = (1/x)*ln(1/x)

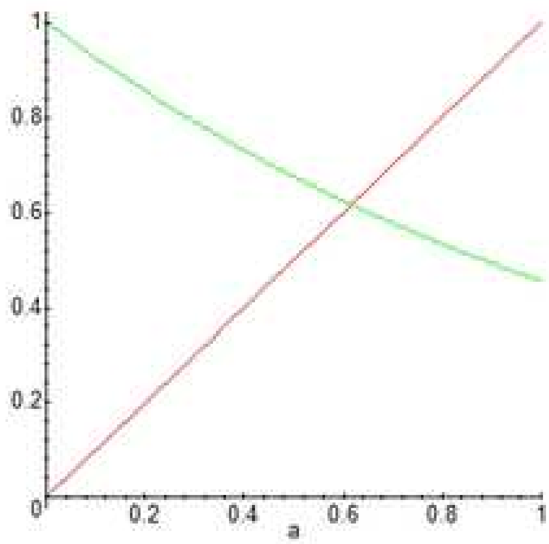
```
-ln(z) = e^(ln(1/x))*ln(1/x)
ln(1/x) = W(-ln(z))
1/x = e^W(-ln(z))
1/x = -ln(z)/W(-ln(z))
x = W(-ln(z))/(-ln(z))
x = (-ln(z))/y(e^(-ln(z)))/(-ln(z))
x = 1/y(e^(-ln(z)))
x = 1/y(1/z)
```

Pour chaque valeur admissible de z : x = 1/y(1/z) est tel que : z^x = x
Si 1 < z < e^(1/e) il y a une seconde solution : $x_0 = 1/y_0(1/z)$
Exemple pour $z = \sqrt{2}$ on obtient : x = 2 et $x_0 = 4$

Vérification avec Maple V d'un exemple où z = 0.456

```
> y := proc(x)
> evalf(fsolve(n^n=x));
> end;
               y := proc(x) evalf(fsolve(n^n = x)) end
> z := 0.456;
                              z := .456
> x := 1/y(1/z);
                           x := .6163266470
> z^x
                             .6163266470

> plot({a,0.456^a},a=0..1);
```



Ici on a une famille infinie d'équations selon la valeur admissible de z. La fonction y(x) est utilisable pour en trouver une solution. Et si 1 < z < e^(1/e) la fonction $y_0(x)$ est utilisable pour trouver la deuxième solution.

Conclusion

Le nom y(x) de cette fonction inverse de la fonction f(x) = x^x est provisoire. J'ai imaginé qu'on pourrait l'appeler L(x) parce que le logarithme est l'inverse de l'exponentiation ou mieux parce que y(x) est reliée à W(x) de Jean-Henri Lambert.

On sait que $y(x) = \ln(x)/W(\ln(x)) = e^{W(\ln(x))}$. Ceci montre qu'il est possible d'utiliser $\ln(x)/W(\ln(x))$ ou $e^{W(\ln(x))}$ en lieu et place de la fonction $y(x)$. Mais comme on l'a vu, l'utilisation directe de $y(x)$ est plus commode que celle de $\ln(x)/W(\ln(x))$ ou celle de $e^{W(\ln(x))}$. C'est pourquoi $y(x)$ est une fonction algébrique utilisable, quand c'est approprié, que l'on peut ranger et utiliser tout comme les autres fonctions algébriques habituelles. $W(x)$ est bien connue et $y(x)$ semblait inconnue.

* http://pgl10.chez.com/mathematiques.html