

## La fonction $y(x)$ inverse de $f(x) = x^x$

par Pierre GERMAIN-LACOUR \*

**Résumé** : Je me suis tout particulièrement intéressé à la fonction  $y(x)$  qui est l'inverse de la fonction  $f(x) = x^x$ . Après l'énoncé des principales propriétés de  $y(x)$ , on montre son utilisation pour trouver les solutions de deux équations particulières.

### La fonction $f(x) = x^x$ pour $x \geq 0$ et sa fonction inverse : $y(x)$ .

Pour  $x \geq 0$  la valeur de  $f(x)$  est un nombre réel positif et on vérifie très facilement que pour  $x \rightarrow 0$  :  $f(x) \rightarrow 1$ .

Par définition :  $f(y(x)) = x$  et  $y(f(x)) = x$   
 $f(0) = 1$   $f(1) = 1$   $f(2) = 4$   $f(3) = 27$   $f(4) = 256$  etc.  
 $y(1) = 1$   $y(4) = 2$   $y(27) = 3$   $y(256) = 4$  etc.

On a :  $f(x) = x^x = e^{(x \ln(x))}$   
 $\Rightarrow f'(x) = (e^{(x \ln(x))})' = (e^{(x \ln(x))}) \cdot (x \ln(x))'$   
 $f'(x) = (x^x) \cdot (\ln(x) + x \cdot (1/x)) = (x^x) \cdot (1 + \ln(x))$

$\Rightarrow f'(0) = -\infty$   $f'(x_m) = 0$  pour  $x_m = 1/e = 0.3678794412$   $f'(1) = 1$   
et  $f_m = f(x_m) = (1/e)^{(1/e)} = e^{((1/e) \cdot (-1))} = e^{(-1/e)} = 0.6922006276$

$f''(x) = (x^x)' \cdot (1 + \ln(x)) + (x^x) \cdot (1 + \ln(x))'$   
 $= (x^x) \cdot (1 + \ln(x)) \cdot (1 + \ln(x)) + (x^x) \cdot (1/x)$   
 $= (x^x) \cdot (1/x + 1 + 2 \ln(x) + \ln(x)^2)$

$\Rightarrow f''(0) = \infty$   $f''(x_m) = f''(1/e) = 1.881596387$   $f''(1) = 2$

### La fonction $y(x)$ inverse de $f(x)$ est telle que : $y^y = x$ .

Pour  $x$  dans l'intervalle :  $[f_m, 1]$  où :  $f_m = e^{(-1/e)} = 0.6922006276$   
il y a deux valeurs  $0 < y_0(x) < x_m$  et  $y(x) > x_m$  de  $y$  telles que  $y^y = x$ .  
D'où :  
pour  $x < f_m = e^{(-1/e)}$  il n'y a aucune valeur de  $y(x)$   
pour  $x = f_m = 0.6922006276$  on a une valeur double :  $y = x_m = 1/e = 0.3678794412$   
pour  $x = 0.725$  on a deux valeurs de  $y$  voisines de  $a = 0.1995$  et  $b = 0.5673$   
pour  $x = 1$  on a  $y = 0$  et  $y = 1$  ( $0^0 = 1$  et  $1^1 = 1$ )  
pour  $x > 1$  il y a une seule valeur de  $y(x)$  :  $y(4) = 2$  et  $y(27) = 3$  et  $y(256) = 4$  ...

Soient :  $x = 0.725$   $a = 0.1995$   $b = 0.5673$   
 $y_0(x) = y_0(0.725)$  voisin de  $a = 0.1995$  car  $a^a = 0.7250010049$  voisin de  $0.725$   
 $y(x) = y(0.725)$  voisin de  $b = 0.5673$  car  $b^b = 0.7249999759$  voisin de  $0.725$

$f(3) = 3^3 = 27 \Rightarrow y(27) = 3 \Rightarrow f(y(27)) = 27 \Rightarrow y(f(3)) = 3$   
 $f(1.8255) = 1.8255^{1.8255}$  voisin de  $3.00021646 \Rightarrow y(3)$  voisin de  $1.8255$

On a :  $y(2) = 1.559610470$  et  $y(3) = 1.825455023$  et  $y(5) = 2.129372482$

Par définition de la fonction  $W(z)$  de Lambert :  $w = W(z) \Leftrightarrow z = w \cdot e^w$

Si  $y^y = x \Rightarrow \ln(x) = y \cdot \ln(y) = e^{(\ln(y))} \cdot \ln(y)$

Soient  $w = \ln(y)$  et  $z = \ln(x)$   
 $\Rightarrow \ln(x) = \ln(y) \cdot e^{(\ln(y))} \Rightarrow z = w \cdot e^w \Rightarrow w = W(z) \Rightarrow \ln(y) = W(\ln(x))$   
 $\Rightarrow y(x) = \ln(x) / \ln(y) = \ln(x) / W(\ln(x))$

Soit  $a = e^x \Rightarrow y(a) = y(e^x) = \ln(a) / W(\ln(a)) = x / W(x)$   
 $\Rightarrow W(x) = x / y(e^x)$

$W'(x) = W(x)/(x*(1+W(x))) \Rightarrow y'(x) = 1/(x*(1+W(\ln(x))))$   
 $\Rightarrow y_0'(1) = 0$  et  $y_0'(f_m) = -\infty$  et  $y'(f_m) = \infty$  et  $y'(1) = 1$

### Calcul de la fonction $y'(x)$

Si  $x > 1$  :  $W'(x) = W(x)/(x*(1+W(x)))$   
 $y(x) = \ln(x)/W(\ln(x)) = (\ln(x))*(1/W(\ln(x)))$   
 $y'(x) = (\ln(x))'*(1/W(\ln(x))) + \ln(x)*(1/W(\ln(x)))'$   
 $y'(x) = (1/x)*(1/W(\ln(x))) + \ln(x)*(-1/((W(\ln(x))^2)*(W(\ln(x)))'$   
 $y'(x) = 1/(x*W(\ln(x))) - (\ln(x))/((W(\ln(x))^2)*(W(\ln(x)))'$   
 $y'(x) = 1/(x*W(\ln(x))) -$   
 $(\ln(x))/((W(\ln(x))^2)*(W(\ln(x)))/(\ln(x)*(1+W(\ln(x)))*(ln(x)))'$   
 $y'(x) = 1/(x*W(\ln(x))) - (\ln(x))/(W(\ln(x)))/((\ln(x)*(1+W(\ln(x)))*(ln(x)))'$   
 $y'(x) = 1/(x*W(\ln(x))) - 1/(W(\ln(x))*(1+W(\ln(x)))*(ln(x)))'$   
 $y'(x) = 1/(x*W(\ln(x))) - 1/(x*W(\ln(x))*(1+W(\ln(x))))$   
 $y'(x) = W(\ln(x))/(x*W(\ln(x))*(1+W(\ln(x))))$   
 $y'(x) = 1/(x*(1+W(\ln(x))))$

Vérification avec Maple V

```

> y:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(ln(x)));
> end;
    y := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(ln(x))) end
> yp:=proc(x)
> evalf(1/(x*(1+LambertW(ln(x)))));
> end;
    yp := proc(x) evalf(1/(x*(1 + LambertW(ln(x)))) end
> y(27);
    2.999999999
> yp(27);
    .01764834659
> evalf((y(27.1)-y(26.9))/0.2);
    .01764844

```

### Trouver la ou les solutions de l'équation numéro 1 : $3^x = 2x + 2$

Par définitions :  $w = W(z) \Leftrightarrow z = w*e^w$  et  $a = y(b) \Leftrightarrow b = a^a$   
 Quelque soit  $x$  :  $W(x) = x/y(e^x)$  et  $y(x) = \ln(x)/W(\ln(x))$

$3^x = 2x + 2$   
 $1 = (2x+2)/(3^x)$   
 $(x+1)*3^{(-x)} = 1/2$   
 $(x+1)*3^{(-x-1)} = 1/6$   
 $(-x-1)*3^{(-x-1)} = -1/6$   
 $\ln(3)*(-x-1)*3^{(-x-1)} = -\ln(3)/6$   
 $\ln(3)*(-x-1)*e^{(\ln(3)*(-x-1))} = -\ln(3)/6$   
 $W(-\ln(3)/6) = \ln(3)*(-x-1)$   
 $(x+1)*\ln(3) = -W(-\ln(3)/6)$   
 $x = -1 -W(-\ln(3)/6)/\ln(3)$   
 $x = -1 -(-\ln(3)/6)/y(e^{(-\ln(3)/6)})/\ln(3)$

Calcul :  $e^{(-\ln(3)/6)} = 0.8326831776$

Cette valeur est dans l'intervalle où  $y(x)$  a deux valeurs.

L'équation :  $3^x = 2x+2$  a donc deux solutions qui sont les suivantes.

$x = -1 -(-\ln(3)/6)/y(e^{(-\ln(3)/6)})/\ln(3) = -0.7901100111$   
 $x_0 = -1 -(-\ln(3)/6)/y_0(e^{(-\ln(3)/6)})/\ln(3) = 1.444561392$

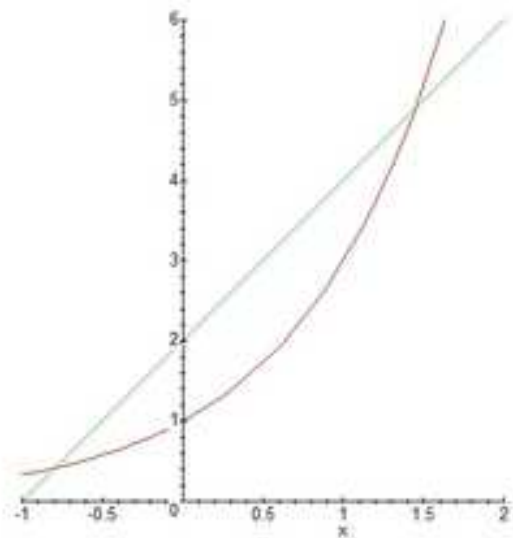
Vérifications avec Maple V

```

> y:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(ln(x)));
> end;
      y := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(ln(x))) end
> y0:=proc(x)
> evalf(ln(x)/LambertW(-1,ln(x)));
> end;
      y0 := proc(x) evalf(ln(x)/LambertW(-1, ln(x))) end
> evalf(exp(1)^(-ln(3)/6));
.8326831776
> y(0.8326831776);
.7940667757
> y0(0.8326831776);
.06817855640
> x := -1 -(-ln(3)/6)/y(exp(1)^(-ln(3)/6))/ln(3);
x := -.7901100111
> x0 := -1 -(-ln(3)/6)/y0(exp(1)^(-ln(3)/6))/ln(3);
x0 := 1.444561392
> evalf(3^x-(2*x+2));
0
> eval(3^x0-(2*x0+2));
-8
-.3 10

> plot({3^x,2*x+2},x=-1..2,0..6);

```



**Trouver la ou les solutions de l'équation numéro 2 :  $2^x = 5x$**

Par définitions :  $w = W(z) \iff z = w \cdot e^w$  et  $a = y(b) \iff b = a^a$   
 Quelque soit  $x$  :  $W(x) = x/y(e^x)$  et  $y(x) = \ln(x)/W(\ln(x))$

```

2^x = 5*x
1 = 5*x/2^x
1/5 = x/2^x
ln(2)/5 = ln(2)*x/2^x
-ln(2)/5 = -ln(2)*x*2^(-x) = -ln(2)*x*e^(ln(2)*(-x))
-ln(2)/5 = -ln(2)*x*e^(-ln(2)*x)
-ln(2)*x = W(-ln(2)/5)
x = W(-ln(2)/5)/(-ln(2))
x = (-ln(2)/5)/y(e^(-ln(2)/5))/(-ln(2))

```

Calcul :  $e^{(-\ln(2)/5)} = 0.8705505633$

Cette valeur est dans l'intervalle où  $y(x)$  a deux valeurs.

L'équation :  $2^x = 5^x$  a donc deux solutions qui sont les suivantes.

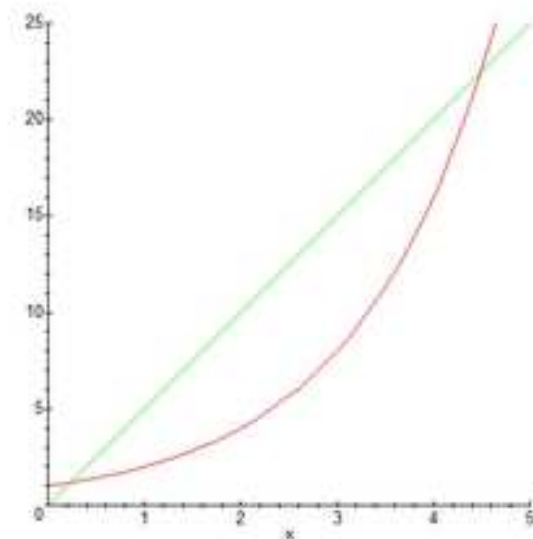
$$x = (-\ln(2)/5)/y(e^{(-\ln(2)/5)})/(-\ln(2)) = 0.2354557102$$

$$x_0 = (-\ln(2)/5)/y_0(e^{(-\ln(2)/5)})/(-\ln(2)) = 4.488001136$$

Vérifications avec Maple V

```
> evalf(exp(1)^(-ln(2)/5));
.8705505633
> x := (-ln(2)/5)/y(exp(1)^(-ln(2)/5))/(-ln(2));
x := .2354557102
> x0 := (-ln(2)/5)/y0(exp(1)^(-ln(2)/5))/(-ln(2));
x0 := 4.488001136
> evalf(2^x-5*x);
-.1*10^(-8)
> eval(2^x0-5*x0);
0

> plot({2^x,5*x},x=0..5,0..25);
```



## Conclusion

Le nom  $y(x)$  de cette fonction inverse de la fonction  $f(x) = x^x$  est provisoire. J'ai imaginé qu'on pourrait l'appeler  $L(x)$  parce que le logarithme est l'inverse de l'exponentiation ou mieux parce que  $y(x)$  est reliée à  $W(x)$  de Jean-Henri Lambert.

On sait que  $y(x) = \ln(x)/W(\ln(x))$ . Ce qui pourrait faire dire que la fonction  $y(x)$  est inutile puisqu'on peut la remplacer par  $\ln(x)/W(\ln(x))$ . Avec ce type d'affirmation, on pourrait aussi remplacer  $\cos(x)$  par  $\sin(x+\pi/2)$  et remplacer  $\tan(x)$  par  $\sin(x)/\sin(x+\pi/2)$ . Cependant il est injuste d'affirmer que les fonctions  $\cos(x)$  et  $\tan(x)$  sont inutiles. C'est pourquoi, à mon avis, il est juste d'affirmer que les fonctions  $W(x)$  et  $y(x)$  sont utiles toutes les deux. Mais la fonction  $W(x)$  est très connue et  $y(x)$  semblait inconnue.

\* <http://pgl10.chez.com/mathematiques.html>