电动力学

桜井 雪子

這篇文章記錄一下我在電動力學課程進行的過程中做的事情，按道理講不算是一個 review，但是我尚無法想出一個更好的名字。

1 指标运算推导矢量微分学公式

由于电动力学一般都在三维欧氏空间讨论，故不区分上下指标，统一写成下指标。另外，我现在尚没有一个固定的习惯，有时我写具体指标，有时我写抽象指标。可以这么说，在这篇文章中，当我写的是具体指标时，我是抄的 知乎：東雲正樹；当我写抽象指标时，我是自己推的。（仅仅是因为我记不住希腊字母在具体指标中的顺序）

- 我现在还发现一个使用抽象指标的好处 —— 在打字的时候我可以少打一些。

为了正确地渲染公式，花了些力气，现在处于一个妥协的状态：对于行内公式，`$...$` 不能出现在空格后，但是那正是我写 LaTeX 时所习惯的。等等，似乎可以???

1.1 基本公式

- $$(\vec{a}\times\vec{b})_\rho = \varepsilon_{\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu$$
- $$\varepsilon_{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\tau} = \delta_{\nu\sigma}\delta_{\rho\tau} - \delta_{\nu\tau}\delta_{\rho\sigma}$$
- $$\varepsilon_{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\sigma\nu\rho} = 2\delta_{\mu\sigma}$$
- $$\varepsilon_{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\nu\rho} = 6$$

这里本应该有更多的，但是那些在下面用不到，详见知乎：東雲正樹的文章

提一句，我们学校使用的教材是郭硕鸿先生写的《电动力学》，很多时候我这里写的式子的形式都是按照他的书 📖，我看书比较杂，没有自己的特定习惯。

只要你自己足够强，就能用自己的符号！—— 温伯格

1.2 開始表述

1.2.1 混合积

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \varepsilon_{\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu c_\rho$$

1.2.2 三重积

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$\begin{aligned}
\text{left: } [\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})]_e &= \varepsilon_{cde}c_c(\vec{a}\times\vec{b})_d = \varepsilon_{cde}c_c\varepsilon_{abd}a_a b_b \\
&= \varepsilon_{dec}\varepsilon_{dab}a_a b_b c_c \\
&= (\delta_{ae}\delta_{bc} - \delta_{ac}\delta_{be})a_a b_b c_c \\
&= a_e b_b c_b - a_a b_e c_a \\
\text{right: } [(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]_e &= (\vec{c}\cdot\vec{b})a_e - (\vec{c}\cdot\vec{a})b_e \\
&= b_b c_b a_e - c_a a_a b_e \qquad \square
\end{aligned}$$

似乎这个字间距有些不够优雅了，先这样吧 :-)

- 推论：$\nabla\times(\nabla\times\vec{f}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{f}) - \nabla^2\vec{f}$

1.2.3 几个热身的例子

- $$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

  这个我觉得显然吧?

  $$[\nabla(\varphi\psi)]_a = \partial_a(\varphi\psi) = \varphi\partial_a(\psi) + \partial_a(\varphi)\psi = [\varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi]_a \qquad \square$$

- $$\nabla\cdot(\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi)\vec{f} + \varphi\nabla\cdot\vec{f}$$

  这个说实话我也觉得有点显然……

  $$\nabla\cdot(\varphi\vec{f}) = \partial_a(\varphi f_a) = \partial_a(\varphi)f_a + \varphi\partial_a(f_a) = (\nabla\varphi)\vec{f} + \varphi\nabla\cdot\vec{f} \qquad \square$$

- $$\nabla\times(\varphi\vec{f}) = (\nabla\varphi)\times\vec{f} + \varphi\nabla\times\vec{f}$$

  说实话这个跟上面那个差不多……

  $$\begin{aligned}
  \Big[\nabla\times(\varphi\vec{f})\Big]_c &= \varepsilon_{abc}\partial_a(\varphi f_b) \\
  &= \varepsilon_{abc}\partial_a(\varphi)f_b + \varphi\varepsilon_{abc}\partial_a(f_b) \\
  &= [(\nabla\varphi)\times\vec{f} + \varphi\nabla\times\vec{f}]_c \qquad \square
  \end{aligned}$$

1.2.4 真刀真枪

- $$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

  这个开始才有点用得上指标运算。

  $$\begin{aligned}
  \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= \partial_c [\vec{f} \times \vec{g}]_c = \partial_c [\varepsilon_{abc} f_a g_b] \\
  &= (\varepsilon_{abc} \partial_c f_a) g_b + f_a (\varepsilon_{abc} \partial_c g_b) \\
  &= (\varepsilon_{cab} \partial_c f_a) g_b - f_a (\varepsilon_{cba} \partial_c g_b) \\
  &= [\nabla \times \vec{f}]_b g_b - f_a [\nabla \times \vec{g}]_a \\
  &= (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \qquad \square
  \end{aligned}$$

- $$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g})\vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f})\vec{g}$$

  $$\begin{aligned}
  \text{left: } [\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g})]_e &= \varepsilon_{cde} \partial_c [\vec{f} \times \vec{g}]_d = \varepsilon_{cde} \partial_c (\varepsilon_{abd} f_a g_b) \\
  &= \varepsilon_{cde} \varepsilon_{abd} \partial_c (f_a g_b) = \varepsilon_{dec} \varepsilon_{dab} \partial_c (f_a g_b) \\
  &\overset{2.}{=\!=} (\delta_{ea}\delta_{cb} - \delta_{eb}\delta_{ca})[(\partial_c f_a) g_b + f_a (\partial_c g_b)] \\
  &= (\partial_b f_e) g_b + f_e (\partial_b g_b) - (\partial_a f_a) g_e - f_a (\partial_a g_e) \\
  \text{right: } [(\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g})\vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f})\vec{g}]_e &= (\vec{g} \cdot \nabla) f_e + (\nabla \cdot \vec{g}) f_e - (\vec{f} \cdot \nabla) g_e - (\nabla \cdot \vec{f}) g_e \\
  &= g_a (\partial_a f_e) + f_e (\partial_a g_a) - f_a (\partial_a g_e) - (\partial_a f_a) g_e
  \end{aligned}$$

- $$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + g \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}$$

  $$\begin{aligned}
  \text{left: } & [\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g})]_e \\
  =& \partial_e (f_a g_a) \\
  =& (\partial_e f_a) g_a + f_a (\partial_e g_a) \\
  \text{right: } & [\vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + g \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}]_e \\
  =& \varepsilon_{cde} f_c (\varepsilon_{abd} \partial_a g_b) + (f_a \partial_a) g_e + \varepsilon_{cde} g_c (\varepsilon_{abd} \partial_a f_b) + (g_a \partial_a) f_e \\
  =& (\varepsilon_{dec} \varepsilon_{dab}) f_c \partial_a g_b + (f_a \partial_a) g_e + (\varepsilon_{dec} \varepsilon_{dab}) g_c \partial_a f_b + (g_a \partial_a) f_e \\
  =& (\delta_{ea}\delta_{cb} - \delta_{eb}\delta_{ca}) f_c \partial_a g_b + (f_a \partial_a) g_e + (\delta_{ea}\delta_{cb} - \delta_{eb}\delta_{ca}) g_c \partial_a f_b + (g_a \partial_a) f_e \\
  =& f_b \partial_e g_b - \cancel{f_a \partial_a g_e} + \cancel{(f_a \partial_a) g_e} + g_b \partial_e f_b - \cancel{g_a \partial_a f_e} + \cancel{(g_a \partial_a) f_e} \\
  =& f_b \partial_e g_b + g_b \partial_e f_b \qquad \square
  \end{aligned}$$

- 多说一句，这个删除线的效果需要宏包 `cancel`

2 四維語言表述

from《微分幾何入門與廣義相對論》by 梁燦彬，使用几何高斯制。

2.1 电磁场张量 F_{ab}

2.1.1 电场：$E_a = F_{ab}Z^b$，磁场：$B_a = -^*F_{ab}Z^b = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}F^{cd}Z^b$

- $$\Rightarrow E_i = F_{i0},\ B_1 = F_{23},\ B_2 = F_{31},\ B_3 = F_{12}$$

- $$\begin{aligned} E_1' = E_1,\ E_2' &= \gamma(E_2 - vB_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + vB_2) \\ B_1' = B_1,\ B_2' &= \gamma(B_2 + vE_3), \quad E_3' = \gamma(B_3 + vE_2) \end{aligned}$$

2.1.2 4 电流密度：$J^a = \rho_0 U^a$

- $$J^a = \rho_0 U^a = \rho_0\gamma(Z^a + u^a) = \rho Z^a + j^a$$

2.1.3 Maxwell Eqns.

1. $$\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b$$

2. $$\partial_{[a}F_{bc]} = 0$$

- 从这里推回 3 维形式之后会补充（可能直接就鸽了 :）

2.1.4 4 维洛伦兹力：$F^a = qF^a{}_bU^b$，电荷运动方程：$qF^a{}_bU^b = U^b\partial_b P^a$。

2.1.5 能动张量：$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd}) = \frac{1}{8\pi}(F_{ac}F_b{}^c +^* F^*_{ac}F_b{}^c)$

2.1.6 势

- $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A} \Rightarrow F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$
- $A_a = -\phi(\mathrm{d}t)_a + a_a$
- 规范变换：$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}(\boldsymbol{A} + \mathrm{d}\chi)$
- Maxwell Eqns in one: $\partial^a\partial_a A_b = -4\pi J_b$

Loading...