《微分幾何入門與廣義相對論》附錄 G“李群和李代數”習題解答

桜井 雪子

注：我開始使用 mathtype 進行公式的輸入，但是複製粘貼過來時，必須在公式前後加上 . . . ，否則相關的引擎不能正確排版——這不得不說是一個很大的遺憾。

0 （補）證明定理 G-1-1。

注：這道題是我自己加的，書中只說它是練習而沒有說是習題，但是考慮到它的“非常重要性”（是不是像梁老爺子的語氣了:)，這裏做一個簡單的證明。

(a)

$$\mu(eg)=\mu(e)\mu(g)=\mu(g),\ \mu(ge)=\mu(g)\mu(e)=\mu(g),\ \forall g\in G$$

故 $\mu(e)=e'$

(b)

$$\mu(gg^{-1})=\mu(e)=e'=\mu(g)\mu(g^{-1}),\ \mu(g^{-1}g)=\mu(e)=e'=\mu(g^{-1})\mu(g),\ \forall g\in G$$

故 $\mu(g^{-1})=\mu(g)^{-1}$

(c)

$$\mu(g_1g_2)=\mu(g_1g_2)=\mu(g_1)\mu(g_2)=\mu(g_2)\mu(g_1)$$

故當 G 是阿貝爾群時 $\mu[G]$ 是 G' 的阿貝爾子群。

1 驗證由式 (G-1-1) 定義的 $I_g:G\to G$ 確爲自同構映射。

(A) 證明是同態，即證 $I_g(h_1h_2)=I_g(h_1)I_g(h_2)$

$$I_g(h_1h_2)=g(h_1h_2)g^{-1}=(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-2})=I_g(h_1)I_g(h_2)$$

(B) 證明一一性，即證 $h_1\neq h_2\Rightarrow I_g(h_1)\neq I_g(h)2)$，反證：

若 $I_g(h_1)=I_g(h_2)$，則：$gh_1g^{-1}=gh_2g^{-1}$，$g^{-1}(gh_1g^{-1})g=g^{-1}(gh_2g^{-1})g$，i.e. $h_1=h_2$，矛盾。

(C) 證明到上性，即證 $\forall h'\in G$，$\exists h\in G$，s.t. $I_g(h)=h'$

令 $h=g^{-1}h'g$，則有 $I_g(h)=h'$。

2 ~ 證由式 (G-1-2) 定義的乘法滿足群乘法的要求。

(A)

$$[(g_1, g'_1)(g_2, g'_2)](g_3, g'_3) = (g_1, g'_1)[(g_2, g'_2)(g_3, g'_3)] = (g_1g_2g_3, g'_1g'_2g'_3)$$

(B) $G \times G'$ 的恆等元為 (e, e')，它是恆等元，因爲：

$$(e, e')(g, g') = (g, g')(e, e') = (g, g')$$

(C) (g, g') 的逆元為 (g^{-1}, g'^{-1})，它是逆元，因爲：

$$(g^{-1}, g'^{-1})(g, g') = (g, g')(g^{-1}, g'^{-1}) = (e, e')$$

3 驗證由 G.1 節定義 8 所定義的 $A(G)$ 是群。

(A)

$$[(\mu\nu)\sigma](g) = [\mu(\nu\sigma)](g) = \mu\{\nu[\sigma(g)]\},\ \forall g \in G,\ \mu, \nu, \sigma \in A(G)$$

(B) 恆等元 e： $e(g) = g,\ \forall g \in G$，它是恆等元，因爲：

$$(e\mu)(g) = e[\mu(g)] = \mu(h),\ (\mu e)(g) = \mu[e(g)] = \mu(g),\ \forall g \in G,\ \mu \in A(G)$$

(C) μ 的逆元即其逆映射（総存在，因爲同構映射一一到上），它是逆元，因爲：

$$(\mu^{-1}\mu)(g) = (\mu\mu^{-1})(g) = e(g) = g,\ \forall g \in G,\ \mu \in A(G)$$

4 ~ 證定理 G-1-2，即 $A_I(G)$ 是群 $A(G)$ 的正規子群。

(A) 證明是子群，即證 $A_I(G)$ 在 $A(G)$ 的群乘法（複合映射）下構成群。

(a)

$$[(I_{g_1}I_{g_2})I_{g_3}](h) = [I_{g_1}(I_{g_2}I_{g_3})](h),\ \forall h, g_1, g_2, g_3 \in G$$

(b) 恆等元：I_e，它是恆等元，因爲：

$$(I_eI_g)(h) = I_e[I_g(h)] = e(ghg^{-1})e^{-1} = ghg^{-1} = I_g(h)$$
$$(I_gI_e)(h) = I_g[I_e(h)] = g(ehe^{-1})g^{-1} = ghg^{-1} = I_g(h)$$

(c) I_g 的逆元：$I_{g^{-1}}$，它是逆元，因爲：

$$(I_g^{-1}I_g)(h) = I_{g^{-1}}[I_g(h)] = g^{-1}(ghg^{-1})(g^{-1})^{-1} = h$$
$$(I_gI_{g^{-1}})(h) = I_g[I_{g^{-1}}(h)] = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$$

(B) 證明是正規子群，即證 $\mu I_g \mu^{-1} \in A_I(G)$，$\forall g \in G, \mu \in A(G)$

$$\begin{aligned}
&\forall g, h \in G, \mu \in A(G) \\
\left(\mu I_g \mu^{-1}\right)(h) =& \mu\left\{I_g\left[\mu^{-1}(h)\right]\right\} = \mu\left[g\mu^{-1}(h)\, g^{-1}\right] \\
=& \mu(g)\,\mu\left[\mu^{-1}(h)\right]\mu\left(g^{-1}\right) = \mu(g)\, h\mu\left(g^{-1}\right) \\
=& \mu(g)\, h\mu(g)^{-1} = I_{\mu(g)}(h)
\end{aligned}$$

i.e. $\mu I_g \mu^{-1} = I_{\mu(g)} \in A_I(G)$

5 驗證由 G.1 節定義 9 所定義的 $H \otimes_S K$ 是群。

(A)

$$\begin{aligned}
\left[(h,k)\left(h',k'\right)\right]\left(h'',k''\right) &= \left(h\mu_k\left(h'\right), kk'\right)\left(h'',k''\right) = \left(h\mu_k\left(h'\right)\mu_{kk'}\left(h''\right), kk'k''\right) \\
(h,k)\left[\left(h',k'\right)\left(h'',k''\right)\right] &= (h,k)\left(h'\mu_{k'}\left(h''\right), k'k''\right) = \left(h\mu_k\left(h'\mu_{k'}\left(h''\right)\right), kk'k''\right)
\end{aligned}$$

而:

$$h\mu_k\left(h'\right)\mu_{kk'}\left(h''\right) = h\mu_k\left(h'\right)\mu_{kk'}\left(h''\right) = h\mu_k\left(h'\right)\mu_k\mu_{k'}\left(h''\right) = h\mu_k\left(h'\mu_{k'}\left(h''\right)\right)$$

i.e. $\left[(h,k)\left(h',k'\right)\right]\left(h'',k''\right) = (h,k)\left[\left(h',k'\right)\left(h'',k''\right)\right]$

恆等元即 (e_H, e_K)，它是恆等元，因爲:

$$\begin{aligned}
(e_H,e_K)(h,k) &= \left(e_H\mu_{e_K}(h), e_K k\right) = \left(\mu_{e_K}(h), k\right) = \left(e_{A(H)}(h), k\right) = (h,k) \\
(h,k)(e_H,e_K) &= \left(h\mu_k(e_H), ke_K\right) = (he_H, k) = (h,k)
\end{aligned}$$

設 (h,k) 的逆元為 $\left(\bar{h},\bar{k}\right)$，則:

$$\begin{aligned}
(e_H,e_K) &= \left(\bar{h},\bar{k}\right)(h,k) = \left(\bar{h},\mu_{\bar{k}}(h), \bar{k}k\right) \\
&= (h,k)\left(\bar{h},\bar{k}\right) = \left(h\mu_k\left(\bar{h}\right), k\bar{k}\right)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} e_H = \bar{h}\mu_{\bar{k}}(h) = h\mu_k(h) \\ e_K = \bar{k}k = k\bar{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{h} = \mu_{\bar{k}}(h)^{-1} = \mu_{k^{-1}}\left(h^{-1}\right) \\ \bar{k} = k^{-1} \end{cases}$$

即 (h,k) 的逆元為 $\left(\mu_{k^{-1}}\left(h^{-1}\right), k^{-1}\right)$

6 設 $L_g : G \to G$ 是由 $g \in G$ 生成的左平移，L_g^{-1} 是 L_g 的逆映射，試證 $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}, \forall g \in G$。

$$\begin{aligned}
\forall g, h \in G, \left(L_{g^{-1}}L_g\right)(h) =& g^{-1}(gh) = h = L_e(h) \\
\left(L_g L_{g^{-1}}\right)(h) =& g\left(g^{-1}h\right) = h = L_e(h)
\end{aligned}$$

故 $L_{g^{-1}}L_g = L_g L_{g^{-1}} = L_e$，i.e. $L_{g^{-1}} = L_g$

7 $\underset{\sim}{\forall} g \in G$ 定義右平移 $R_g : h \mapsto hg$，$\forall h \in G$，試證 $R_{gh} = R_h \circ R_g$。

$$\forall i \in G, R_{gh}(i) = igh$$
$$(R_h \circ R_g)(i) = R_h(R_g(i)) = R_h(ig) = igh$$

故 $R_{gh} = R_h \circ R_g$。

8 ~ 證 $[\vec{v}, \vec{u}] := \vec{v} \times \vec{u}$，$\forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ 滿足李括號的條件（見 G.3 節例 1）。

(A) 雙綫性

$$\begin{aligned}[a\vec{w} + b\vec{x}, c\vec{y} + d\vec{z}] &= (a\vec{w} + b\vec{x}) \times (c\vec{y} + d\vec{z}) \\ &= ac(\vec{w} \times \vec{y}) + ad(\vec{w} \times \vec{z}) + bc(\vec{x} \times \vec{y}) + bd(\vec{x} \times \vec{z}) \\ &= ac[\vec{w}, \vec{y}] + ad[\vec{w}, \vec{z}] + bc[\vec{x}, \vec{y}] + bd[\vec{x}, \vec{z}]\end{aligned}$$

(B) 反稱

$$[\vec{v}, \vec{u}] = \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} = -[\vec{u}, \vec{v}]$$

(C) Jacobi

$$\begin{aligned}[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] + [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] &= \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) \\ &= ((\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}) + ((\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y}) + ((\vec{y} \cdot \vec{x})\vec{z} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

9 ~ 證 $[A, B] = AB - BA$ 滿足李括號的條件（見 G.3 節例 2）。

(A) 雙綫性

$$\begin{aligned}[aA + bB, cC + dD] &= (aA + bB)(cC + dD) - (cC + dD)(aA + bB) \\ &= ac(AC - CA) + ad(AD - DA) + bc(BC - CB) + bd(BD - DB) \\ &= ac[A, C] + ad[A, D] + bc[B, C] + bd[B, D]\end{aligned}$$

(B) 反稱

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

(C) Jacobi

$$
\begin{aligned}
&[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=[A,BC-CB]+[C,AB-BA]+[B,CA-AC]\\
=&(A(BC-CB)-(BC-CB)A)+(C(AB-BA)-(AB-BA)C)+(B(CA-AC)-(CA-AC)B)\\
=&0
\end{aligned}
$$

10 ~ $\mathscr{G}$ 和 $\hat{\mathscr{G}}$ 依次是李群 G 和 $\hat{G}$ 的李代數，$\rho_*:\mathscr{G}\to\hat{\mathscr{G}}$ 是同態映射 $\rho:G\to\hat{G}$ 在 $e\in G$ 誘導的推前映射，試證 $\rho(\exp A)=\exp(\rho_* A)\ \forall A\in\mathscr{G}$。提示：先用同態性證明 $\rho(\exp tA)$ 是單參子群。

(A) 先證明 $\rho(\exp tA)$ 是單參子群，即證 $\rho\exp[(t+s)A]=[\rho\exp(tA)][\rho\exp(sA)]$

$\exp(tA)$，$\forall A\in\mathscr{G}$ 是單參子群，故 $\exp[(t+s)A]=\exp(tA)\exp(sA)$。由 ρ 的同態性，$\rho\{\exp[(t+s)A]\}=\rho[\exp(tA)\exp(sA)]=\rho[\exp(tA)]\rho[\exp(sA)]$，故 $\rho(\exp tA)$ 是單參子群。

(B)

$$\rho\exp(tA)|_{t=0}=\rho\exp(0)=\rho(e_G)=e_{\hat{G}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho\exp(tA)=\rho_*\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA)=\rho_* A\Rightarrow\rho\exp(tA)=\exp(t\rho_* A)$$

令 $t=1$，有 $\rho\exp(A)=\exp(\rho_* A)$。

11 ~ 證式 (G-5-10) 可由式 (G-5-10') 推出。提示：把式 (G-5-10) 的 v^a，u^a 之和作爲式 (G-5-10') 的 v^a。

注 🐷：這種操作似乎在 Griffith 的《量子力學概論》的一道習題中也用到了，對於證明某些向量的關係，算是比較常見的

$\forall v^a,u^a\in V$，令 $w^a=v^a+u^a$，則:

$$g_{ab}\left(Z^a{}_c w^c\right)\left(Z^b{}_d w^d\right)=g_{cd}w^c w^d$$

$$g_{ab}\left[Z^a{}_c\left(v^c+u^c\right)\right]\left[Z^b{}_d\left(v^d+u^d\right)\right]=g_{cd}\left(v^c+u^c\right)\left(v^d+u^d\right)$$

展開，將 $g_{ab}\left(Z^a{}_c v^c\right)\left(Z^b{}_d v^d\right)=g_{cd}v^c v^d, g_{ab}\left(Z^a{}_c u^c\right)\left(Z^b{}_d u^d\right)=g_{cd}u^c u^d$ 代入，得:

$$g_{ab}Z^a{}_c Z^b{}_d\left(v^c u^d+u^c v^d\right)=g_{cd}\left(v^c u^d+u^c v^d\right)$$

注意到：$g_{ab}\left(v^a u^b+u^a v^b\right)=2g_{ab}v^{(a}u^{b)}=2g_{(ab)}v^a u^b=2g_{ab}v^a u^b$，故上式可化爲:

$$g_{ab}Z^a{}_c Z^b{}_d v^c u^d=g_{cd}v^c v^d$$

i.e. $g_{ab}\left(Z^a{}_c v^c\right)\left(Z^b{}_d u^d\right)=g_{cd}v^c v^d$。

12 SO(2) 是阿貝爾群嗎？O(2) 是阿貝爾群嗎？

$$Z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, Z'(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$Z(\alpha)$ 是 SO(2) 的群元，而 $Z(\alpha)$ 和 $Z'(\alpha)$ 是 O(2) 的群元。發現有：

$$Z(\alpha)Z(\beta)=Z(\beta)Z(\alpha), Z'(\alpha)Z'(\beta)\neq Z'(\beta)Z'(\alpha)$$
$$Z(\alpha)Z'(\beta)\neq Z'(\beta)Z(\alpha), Z'(\alpha)Z(\beta)\neq Z(\beta)Z'(\alpha)$$

故 SO(2) 是阿貝爾群，而 O(2) 非。

13

~ 群 $\mathrm{SL}(m)$[$\mathrm{GL}(m)$ 滿足 $\det T=+1$ 的子群] 的李代數記作 $\mathscr{SL}(m)$，試證：

(a) $\mathscr{SL}(m)=\{m\times m$無跡實矩陣$\}$

(b) $\dim\mathrm{SL}(m)=m^2-1$。

仿照定理 G-5-13 證出。由引理 G-5-12：$\forall m\times m$ 矩陣 A，$\det[\mathrm{Exp}(tA)]=\mathrm{e}^{(\mathrm{tr}A)t}$。

(a)

(A, $\Rightarrow$) 設 $A\in\mathscr{SL}(m)$，則 $\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SL}(m)$，故 $\mathrm{e}^{(\mathrm{tr}A)t}=\det[\mathrm{Exp}(tA)]=1$，$(\mathrm{tr}A)t=\mathrm{i}2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$，而 t 任意，故 $\mathrm{tr}A=0$，i.e. A 是無跡矩陣。又 $A\in\mathscr{SL}(m)\Rightarrow A\in\mathscr{GL}(m)$，故 A 是 $m\times m$ 無跡實矩陣。

(B, $\Leftarrow$) 設 A 為 $m\times m$ 無跡實矩陣，則 $\forall t\in\mathbb{R}$，tA 也是 $m\times m$ 無跡實矩陣，有 $tA\in\mathscr{GL}(m)$，$\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{GL}(m)$，而又 $\mathrm{tr}(tA)=0\Rightarrow\det(\mathrm{Exp}\ tA)=1$，故 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SL}(m)$，因此 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)=A\in\mathscr{SL}(m)$

(B) $A\in\mathscr{SL}(m)$ 對 A 的約束為 $A_{\mu\nu}\in\mathbb{R}$，$\mathrm{tr}(A)=0$，故

$$\dim\mathrm{SL}(m)=\dim\mathscr{SL}(m)=m^2-1$$

14

(1) 試證存在連續曲綫 $\mu:[0,1]\to\mathrm{GL}(2)$ 使 $\mu(0)=I$，$\mu(1)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

***(2)** 試證 $T\equiv\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}(2)$ 不屬於李群 GL(2) 的任一單參子群。提示：假定存在矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 使 $T=\mathrm{Exp}(A)$,

(a) 證明 $c\neq 0$,

(b) 把 $A^n \equiv \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$，證明 $\exists r_n \in \mathbb{R}$ 使 $b_n = br_n$，$c_n = cr_n$。

(c) 由 (b) 推出矛盾。

(1) 直接找出來一條即證畢。

對於 $\mu_{11}(0) = 1, \mu_{11}(1) = -1$，由連續函數的介值定理，$\exists x_0 \in (0,1)$，s.t. $\mu_{11}(x_0) = 0$，μ_{22} 同理，故 μ_{12}, μ_{21} 須隨 t 做某種變化以使得 $\det \neq 0$。取 $\mu_{12}(t) = t$，$\mu_{21} = -\sqrt{(1/2)^2 - (t-1/2)^2} = -\sqrt{t-t^2}$。此時，取 μ_{11} 與 μ_{22} 的綫性解 $1-2t$ 即可，故

$$\mu(t) = \begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -\sqrt{t-t^2} & 1-2t \end{bmatrix}$$

(2) 反證，設 T 屬於 GL(2) 的某一單參子群，則 $\exists A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，s.t. $T = \exp(A)$

(a) 反證

設 $c = 0$，則 $(A^n)_{11} = a^n$，$(A^n)_{22} = b^n$，

$$(T)_{11} = [\exp(A)]_{11} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A^n)_{11}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$$

不存在 $a \in \mathbb{R}$，s.t. $\mathrm{e}^a = -1$，矛盾。故 $c \neq 0$。

(b) 數學歸納法

(b.1)

對 $n = 1$，$b_1/c_1 = b/c$；若 $b_n/c_n = b/c$，則慾證 $b_{n+1}/c_{n+1} = b/c$。

$$\begin{aligned} a_{n+1} =& a \cdot a_n + b \cdot c_n = a \cdot a_n + bc \cdot r_n \\ b_{n+1} =& a \cdot b_n + b \cdot d_n = ab \cdot r_n + b \cdot d_n \\ c_{n+1} =& c \cdot a_n + d \cdot c_n = c \cdot a_n + cd \cdot r_n \\ d_{n+1} =& c \cdot b_n + d \cdot d_n = bc \cdot r_n + d \cdot d_n \end{aligned}$$

慾 $b_{n+1}/c_{n+1} = b/c$，需 $a \cdot r_n + d_n = a_n + d \cdot r_n = r_{n+1} (*)$

(b.2) 再次數學歸納法

$n = 1$，$a_1 = a$，$d_1 = d$，r_1，得 $r_2 = a + d$；

$n = 2$，$b_2 = ab + bd = b(a+d)$，確有 $r_2 = a + d$。

設對 n 成立 $a \cdot r_n + d_n = a_n + d \cdot r_n = r_{n+1}$，則:

$$\begin{aligned} a \cdot r_{n+1} + d_{n+1} =& a \cdot (a_n + d \cdot r_n) + (bc \cdot r_n + d \cdot d_n) \\ a_{n+1} + d \cdot r_{n+1} =& (a \cdot a_n + bc \cdot r_n) + d \cdot (a \cdot r_n + d_n) \end{aligned}$$

即 $a \cdot r_{n+1} + d_{n+1} = a_{n+1} + d \cdot r_{n+1}$ 成立。

故 $(*)$ 成立。

(b.3) 故確有 $b_n/c_n = b/c$，i.e. $\exists r_n \in \mathbb{R}$，s.t. $b_n = b \cdot r_n$，$c_n = c \cdot r_n$

(c) 而 $T = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n/n!$ 要求 $T_{12}/T_{21} = b/c = 1/0$，又 $c \neq 0$，矛盾。因此不存在 A，s.t. $T = \mathrm{Exp}(A)$，i.e. T 不屬於 GL(2) 的某一單參子群。

15　補証定理 G-5-11 證明中的等式 $D = \mathrm{Exp}(\mathrm{i}\varPhi)$。

$$
\begin{aligned}
&D = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_m}\right),\ \varPhi = \mathrm{diag}\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_m\right)\\
&\mathrm{Exp}\left(\mathrm{i}\varPhi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varPhi^n/n!\\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{diag}\left({\varphi_1}^n, \ldots, {\varphi_m}^n\right)/n!\\
&\qquad = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty} {\varphi_1}^n/n!, \ldots, \sum_{n=0}^{\infty} {\varphi_m}^n/n!\right)\\
&\qquad = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_m}\right) = D
\end{aligned}
$$

16　試用李括號所滿足的 Jacobi 恆等式證明定理 G-6-1 的 (b)。

欲證

$$0 = {C^c}_{a[b}{C^a}_{de]}$$

，即證：

$$
\begin{aligned}
0 =& {C^c}_{ab}{C^a}_{de} + {C^c}_{ae}{C^a}_{bd} + {C^c}_{ad}{C^a}_{eb} - {C^c}_{ab}{C^a}_{ed} - {C^c}_{ad}{C^a}_{be} - {C^c}_{ae}{C^a}_{db}\\
0 =& {C^c}_{ab}{C^a}_{de} + {C^c}_{ae}{C^a}_{bd} + {C^c}_{ad}{C^a}_{eb}
\end{aligned}
$$

得到此式應該有更簡便的辦法，即利用關於對稱和反稱的其他性質，可惜我現在還沒有想出來。

$$
\begin{aligned}
0 =& [u, [v, w]]^e + [w, [u, v]]^e + [v, [w, u]]^e\\
=& {C^e}_{cd}u^c\left({C^d}_{ab}v^a w^b\right) + {C^e}_{cd}w^c\left({C^d}_{ab}u^a v^b\right) + {C^e}_{cd}v^c\left({C^d}_{ab}w^a u^b\right)\\
=& {C^e}_{ad}{C^d}_{bc}u^a v^b w^c + {C^e}_{cd}{C^d}_{ab}u^a v^b w^c + {C^e}_{bd}{C^d}_{ca}u^a v^b w^c\\
=& \left({C^e}_{ad}{C^d}_{bc} + {C^e}_{cd}{C^d}_{ab} + {C^e}_{bd}{C^d}_{ca}\right)u^a v^b w^c\\
0 =& {C^e}_{ad}{C^d}_{bc} + {C^e}_{cd}{C^d}_{ab} + {C^e}_{bd}{C^d}_{ca}
\end{aligned}
$$

該式變換指標（並加一負號），此式即爲欲證式。

17　試證 G.6 節例 1 的中的 ① 和 ②。

①

過原點直綫：$\forall r \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (at, bt)$

$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$，故 $\gamma(t)$ 是單參子群。

②

$$A = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = (a, b)$$

$$\bar{A}_{(x,y)} = L_{(x,y)*}A = L_{(x,y)*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}L_{(x,y)}\gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(x,y)(at,bt) \equiv A$$

$$\partial_a \bar{A}^b = 0$$

18 試證 G.7 節例 4 的結論，即 $\bar{\xi} = -\bar{A}$。

我不知道我現在該説什麼，因爲有下面幾樣東西擺在我的腦子 🧠 裏:

- 我自己的想法整不出來這個結果;
- 某一個成文的參考答案裏證明出 $\bar{\xi} = \bar{A}$，我認爲這個證明沒有什么大問題;
- 在 bilibili 上有位 up 主發佈了自己站在黑板前一道一道把梁先生講李群李代數和纖維叢的兩個附錄中所有習題寫了出來。但是我認爲他對這道題的處理是有漏洞的，有對式子 $\sigma_p(g) = \sigma(g,p) = \sigma_g(p)$ 濫用的嫌疑;
- 我又實在不相信梁先生竟然會在書 📖 中出現筆誤。

我只好把這道題放在這裏……

19 設 G 是矩陣李群，試證 $\forall A \in \mathscr{G}$，$g \in G$ 有 $\mathscr{A}_g A = gAg^{-1}$。(右邊是 3 個矩陣的連乘積。黨 G 不是矩陣群時 gAg^{-1} 無意義，因爲李群元 g 與李代數元 B 之積沒有定義)

??? 小寫的字母怎麼打成圓體呢? `\mathscr{}`只能改變大寫，唉

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_g A =& I_{g*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tA) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} I_g\left(\exp(tA)\right) \\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g\left(\exp(tA)\right)g^{-1} \\ =& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}\left(tgAg^{-1}\right) = gAg^{-1}\end{aligned}$$

20 設 $\mathscr{G}$ 和 $\hat{\mathscr{G}}$ 依次是李群 G 和 G' 的李代數，$\rho_* : \mathscr{G} \to \hat{\mathscr{G}}$ 是同態映射 $\rho : G \to \hat{G}$ 在 $e \in G$ 誘導的推前映射，試證

(a)

$$\rho_* \mathscr{A}_g A = \mathscr{A}_{\rho(g)}\rho_* A,\ \forall g \in G,\ A \in \mathscr{G}$$

(b)

$$\rho_*(L_{g^{-1}*}X) = L_{\rho(g)^{-1}*}\rho_* X,\ \forall g \in G,\ X \in V_g(g\text{點的切空間}),\ L\text{代表左平移}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\rho_* \mathscr{A}_g A =& \rho_* I_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\left[g\exp(tA)g^{-1}\right] \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g)\rho\left[\exp(tA)\right]\rho(g^{\cancel{-1}})^{-1} \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} I_{\rho(g)}\rho\exp(tA) \\
=& I_{\rho(g)*}\rho_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA) = \mathscr{A}_{\rho(g)}\rho_* A
\end{aligned}$$

(b) 過 g 的單參微分同胚群：$\beta(t) = g\gamma(t) = g\exp(tA)$

$$X = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \beta(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} L_g \exp(tA) = L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA) = L_{g*}A$$

$$\begin{aligned}
\rho_*(L_{g^{-1}*}X) =& \rho_*\left(L_{g^{-1}*}L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA)\right) \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\left(L_{g^{-1}}L_g\exp(tA)\right) \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\left(\exp(tA)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\rho(g)^{-1}*}\rho_* X =& L_{\rho(g)^{-1}*}\rho_* L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tA) \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g)^{-1}\left[\rho(g\exp(tA))\right] \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(g)^{-1}\rho(g)\rho(\exp(tA)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\left(\exp(tA)\right)
\end{aligned}$$

證畢。

21 試證式 (G-8-14) 和 (G-8-16)。

(G-8-14)

$$\begin{aligned}
& \forall c \in G \\
\mathrm{ad}_{[A,B]}(C) =& [[A,B],C] = -[[C,A],B] - [[B,C],A] \\
=& [A,[B,C]] - [B,[A,C]] \\
=& \mathrm{ad}_A(\mathrm{ad}_B(C)) - \mathrm{ad}_B(\mathrm{ad}_A(C)) \\
=& (\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A)(C)
\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{ad}_{[A,B]} = \mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A$

(G-8-16)

$$K([A,B],C) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{[A,B]}\mathrm{ad}_C) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_A)\mathrm{ad}_C)$$

$$K(A,[B,C]) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A\mathrm{ad}_{[B,C]}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A(\mathrm{ad}_B\mathrm{ad}_C - \mathrm{ad}_C\mathrm{ad}_B))$$

又 $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(BCA)=\operatorname{tr}(CAB)$，故 $K([A,B],C)=K(A,[B,C])$

22 設 e 是李群 G 的恆等元，$g\in G$，則映射 $\mathscr{A}:V_e\to V_e$ 可延拓為

$$\mathscr{A}_g:\mathscr{F}_G(1,0)\to\mathscr{F}_G(1,0)\quad[\mathscr{F}_G(1,0)\text{代表}G\text{上光滑矢量場的集合}],$$

定義爲 $(\mathscr{A}_g\bar{A})_h:=I_{g*}(\bar{A}_{h'})\ \forall\bar{A}\in\mathscr{F}_G(1,0),h\in G$，其中 $h'=g^{-1}hg$。試證：若 $\bar{A}$ 是相應于 $A\in V_e$ 的左不變矢量場，則 $\mathscr{A}_g(\bar{A})$ 是相應于 $\mathscr{A}_g(A)\in V_e$ 的左不變矢量場。提示：只須証明 $(\mathscr{A}_g\bar{A})_h=L_{h*}(\mathscr{A}_gA)$, $\forall h\in G$，爲此可利用 $I_g=L_g\circ R_{g^{-1}}$，其中 R 代表右平移（見習題 7）。

注：這道題有那種數學專業代數書課後習題的感覺，不難，就是玩定義。

慾證 $\mathscr{A}_g\bar{A}$ 左不變，只需證 $(\mathscr{A}_g\bar{A})_h=L_{h*}(\mathscr{A}_gA)$。

$$(\mathscr{A}_g\bar{A})_h=I_{g*}(\bar{A}_{h'})=I_{g*}(L_{h'*}A)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}I_g(h'\exp(tA))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[gh'\exp(tA)g^{-1}]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[hg\exp(tA)g^{-1}]$$

$$L_{h*}(\mathscr{A}_gA)=L_{h*}(I_{g*}A)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[hg\exp(tA)g^{-1}]$$

證畢。

23 設 $\mathscr{G}$ 是李群 G 的李代數，$g\in G$，試證 $\mathscr{A}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是李代數同構。提示：$I_g:G\to G$ 是微分同胚保證 $\mathscr{A}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是矢量空間同構（見第 4 章習題 4），故只需補證 $\mathscr{A}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 保李括號，即 $\mathscr{A}_g[A,B]=[\mathscr{A}_gA,\mathscr{A}_gB]$。由第 4 章習題 6 可知 $\mathscr{A}_g[\bar{A},\bar{B}]=[\mathscr{A}_g\bar{A},\mathscr{A}_g\bar{B}]$，再用習題 22 的結論以及 $\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}\Rightarrow[\bar{A},\bar{B}]\in\mathscr{L}$ 便可。

$I_g:G\to G$ 是微分同胚 $\Rightarrow\mathscr{A}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是矢量空間同構，故只需證 $\mathscr{A}_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 保李括號，即 $\mathscr{A}_g[A,B]=[\mathscr{A}_gA,\mathscr{A}_gB]$。

$\forall A,B\in\mathscr{G}$，由上題，取 $h=e$，則 $(\mathscr{A}_g\bar{A})_e=\mathscr{A}_g\bar{A}_e=\mathscr{A}_gA$

$$\mathscr{A}_g[A,B]=\mathscr{A}_g[\bar{A},\bar{B}]_e=(\mathscr{A}_g[\bar{A},\bar{B}])_e=([\mathscr{A}_g\bar{A},\mathscr{A}_g\bar{B}])_e=[(\mathscr{A}_g\bar{A})_e,(\mathscr{A}_g\bar{B})_e]=[\mathscr{A}_gA,\mathscr{A}_gB]$$

24 纯计算

25 纯计算