数学物理方法复习

桜井 雪子

1 复变函数

1.1 复变函数

- 区分：arg (主值) 和 Arg
- $\ln z = \ln \|z\| + \mathrm{i}\ \mathrm{Arg}\ z$
- C - R 条件：$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, & \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$
- 给实部求虚部
- Cauchy 定理：$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0$
- 一个重要的积分：$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z \begin{cases} 0, l \text{ 不包围}\alpha \\ 1, l \text{ 包围}\alpha \end{cases}$; $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0, n \neq -1$
- Cauchy 公式：$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}z$

1.2 幂级数展开

- 收敛半径：$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\|a_k\|}{\|a_{k+1}\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\|a_k\|}}$
- Taylor series: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$
- 上手实操

1.3 留数定理

- 留数定理：$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(b_j)$
- 求留数：$\begin{cases} \text{单极点：} & \mathrm{Res} f(z_0) = a_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \\ m\text{阶极点：} & \mathrm{Res} f(z_0) = a_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\{\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\} \end{cases}$
- 计算实变函数定积分：
  1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\{f(z)\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}$
  2. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{\|z\|=1} R(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}})\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$

3. $\begin{cases} \int_0^\infty F(x)\cos mx\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\times\{F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\} \\ \int_0^\infty G(x)\sin mx\mathrm{d}x = \pi\times\{G(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\} \end{cases}$

4. 实轴上有单极点：$+\pi\mathrm{i}\cdot$ 实轴上奇点留数之和

1.4 积分变换

1. 傅里叶级数（周期为 $2l$）

   - $$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$$
     $$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\mathrm{d}\xi, a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}\xi, b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}\xi$$
   - 奇函数，偶函数
   - $$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}, c_k = \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}\mathrm{d}\xi$$

2. 傅里叶变换

   - $$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega + \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega$$
     $$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} = f(\xi)\cos(\omega x)\mathrm{d}\xi, B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} = f(\xi)\sin(\omega x)\mathrm{d}\xi$$
   - 奇函数，偶函数
   - $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega, F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

3. δ 函数：$\mathscr{F}[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}, \mathscr{F}[\mathrm{H}(x)] = \frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathscr{P}\frac{1}{\omega}$

4. 拉普拉斯变换
   $$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

最重要的公式:
$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)] = \bar{f}(p+\lambda), \mathscr{L}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-pt_0}\bar{f}(p)$$
注意两种积分变换的卷积的不同：积分限、系数。

2 数理方程

2.1 数理方程入门

2.1.1 三类数学物理方程

- 振动方程：$u_{tt} - a^2\nabla^2 u = 0$

- 扩散方程：$u_t - a^2\nabla^2 u = 0$
- Laplace equation: $\nabla^2 u = 0$

2.1.2 三类定解条件

一定要自己回推导定解条件！

2.1.3 D 'Alembert formula

$$u * tt - a^2 u * xx = 0, u(x,t)\|_{t=0} = \varphi(x), u_t(x,t)\|_{t=0} = \psi(x)$$
$$u = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

类似问题的转化：

- 对于半无限长问题，对初始条件进行奇偶延拓
- 对微分算符进行因式分解
- 低阶问题转化成 D 'Alembert formula 问题形式

2.2 分离变数法

首先就是要注意 $n = 0$ 可不可取吧⋯⋯

- 两个初始条件都是 0 阶就不可取，其他好像都可取
- 柱坐标沿轴线不变的 Laplace equation 通解：

$$u(\rho,\varphi) = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)$$

2.2.1 特殊问题：

1. 方程非齐次、边界条件齐次
    - 模仿常数变易法
    - 这时候边界条件不为 0 时，可以分解方程为一个是方程非齐次、边界条件为 0，一个是方程齐次、边界条件不为 0
    - 冲量定理法
2. 方程齐次，边界条件非齐次
    - 先拆出来一个 $w(x,t)$ 把非齐次的边界条件顶住，得到一个关于 $v(x,t)$ 的边界条件其次的问题
    - 这个问题的方程可能就是非齐次的了，转化成了上面那种情况，可能需要再拆一次方程
3. 泊松方程
    - 先找一个特解把非齐次项顶住，得到一个 Laplace equation 问题
    - 再次转化为第一种情况的问题

2.3 二阶常微分方程级数解法

2.3.1 几个方程

- 球函数方程：$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1)Y$
- 连带勒让德方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}]+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]\Theta=0$
- 勒让德方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}]+l(l+1)\Theta=0$
- 贝塞尔方程:$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0,$虚宗量贝塞尔方程:$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-(x^2+m^2)R=0$
- 球贝塞尔方程：$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$，$l$ 阶球贝塞尔方程化为 $l+1/2$ 阶贝塞尔方程

关系:

- 球坐标 Laplace 方程 = 欧拉型方程 + 球函数方程 = 欧拉型方程 + （连带勒让德方程 + 谐振方程）
- 柱坐标 Laplace 方程 = 谐振方程 + 超谐振方程 + 贝塞尔方程/虚宗量贝塞尔方程
- 波动方程 = 超谐振方程 + 亥姆霍兹方程
- 输运方程 = 指数衰减方程 + 亥姆霍兹方程
- 球坐标亥姆霍兹方程 = l 阶球贝塞尔方程 + 连带勒让德方程 + 谐振方程
- 柱坐标亥姆霍兹方程 = m 阶贝塞尔方程 + 谐振方程 + 超谐振方程

复变函数的常微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0, w(z_0)=C_0, w'(z_0)=C_1$

2.3.2 常点邻域

- 常点：$p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 的邻域内解析
- 设 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$

2.3.3 正则奇点邻域

- 奇点：z_0 是 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的奇点
- 两个线性独立解:

$$w_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k}, w_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k} \text{ or } w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$$

- 正则奇点:

$$p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k, p(z)=\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k$$

- 正则奇点的两个线性独立解：

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k}, w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k} \text{ or } w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$$

$$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0, s_1>s_2$$

若 $s_1-s_2\neq$ 整数则取第一个 $w_2(z)$，否则取第二个

2.3.4 贝塞尔函数

1. ν 阶贝塞尔方程，ν 非整数
    - ν 阶贝塞尔函数：$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$
    - ν 阶诺伊曼函数：$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$
    - 通解：$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ 或 $y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$
2. 整数 m 阶贝塞尔方程
    - m 阶诺伊曼函数：$N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$
    - 通解：$y(x)=C_1J_m(x)+C_2N_m(x)$
3. $l+1/2$ 阶贝塞尔方程
    - 通解：$y(x)=C_1J_{l+1/2}(x)+C_2J_{-(l+1/2)}(x)$
    - $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, J_{-(1/2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$
4. $x=0$ 处的自然边界条件
    - 去掉 $N_0(x),N_m(x),N_\nu(x),J_{-\nu}(x)$，留下 $J_0(x),J_m(x),J_\nu(x)$
5. ν 阶虚宗量贝塞尔方程
    - 做变换：$x=-i\xi$

2.3.5 广义傅里叶级数

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x=N_m^2\delta_{mn}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_ny_n(x)$$

$$f_m=\frac{1}{N_m^2}\int_a^b\rho(\xi)y_m(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

2.4 球函数

2.4.1 勒让德多项式

1. 表达式

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}=\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\binom{l}{k}\binom{2l-2k}{l}x^{l-2k}$$

$$P_{2n+1}(0)=0,P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}$$

$$P_l(1)=1,P_l(-1)=(-1)^l$$

$$P_{2n}(-x)=P_{2n}(x),P_{2n+1}(-x)=-P_{2n+1}(x)$$

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

2. 微分式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

3. 积分式

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2^l}\oint\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z$$

4. 正交归一

$$\int_{-1}^{1}P_k(\xi)P_l(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$$

5. generalized Fourier series

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}f_lP_l(x)$$

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(x)f(x)\mathrm{d}x$$

6. 母函数

$$r<R,\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

$$r>R,\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{R^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

7. 递推关系

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$$

$$\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2(k+1)}{[2(k+1)+1](2k+1)}, & l=k+1\\ \frac{2k}{4k^2-1}, & l=k-1\end{cases}$$

2.4.2 轴对称球坐标 Laplace equation

- 特解：$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta)$
- 两个衔接条件：电势连续，无面电荷密度时电位移矢量法向分量连续
- 电像法

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}P_0(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

2.4.3 连带勒让德方程

连带勒让德方程做代换：$\Theta(x)=(1-x^2)^{m/2}y(x)$，则 $y(x)$ 满足逐项微分 m 次的勒让德方程

2.4.4 连带勒让德函数

1. 表达式
$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}P_l^{[m]}(x),\ m=0,1,2,\dots,l,\ l=0,1,2,\dots$$
2. 微分式
$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}P_l^{[m]}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l$$
3. 积分式
4. 正交归一
$$\int_{-1}^{1}P_l^m(\xi)P_k^m(x)\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$$
5. generalized Fourier series
$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty}f_l P_l^m(x)$$
$$f_l=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1}P_l^m(x)f(x)\mathrm{d}x$$

2.4.5 一般球坐标 Laplace equation

特解：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^l[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^{-(l+1)}[C_l^m\cos m\varphi+D_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta)$$

2.4.6 一般球函数

1. 表达式
   - $Y(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi),l=0,1,2,\dots,m=0,1,2,\dots,l$，$2l+1$ 个
   - 复数形式：$Y(\theta,\varphi)=P_l^{\|m\|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},l=0,1,2,\dots,m=0,1,2,\dots,l$
2. 正交归一

- 这里说的实数形式的模说的是 $Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)$
- $$\iint_s Y_l^m(\theta,\varphi)Y_l^{n^*}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi(1+\delta_{m0})}{2l+1}, & \text{实数形式}\\ \frac{(l+\|m\|)!}{(l-\|m\|)!}\frac{4\pi}{2l+1}, & \text{复数形式}\end{cases}$$

3. generalized Fourier series
   - 实数形式
   - 复数形式
4. 正交归一化球函数

2.5 柱函数

2.5.1 三类柱函数

1. 表达式
   - ν 阶贝塞尔函数：$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$
   - ν 阶诺伊曼函数：$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$
   - 两种汉克尔函数：$H^{(1,2)}(x)=J_\nu(x)(+,-)\mathrm{i}N_\nu(x)$
2. 自然边界条件
   - $x=0$（柱内）：去掉 $N_0(x),N_m(x),N_\nu(x),J_{-\nu}(x)$，留下 $J_0(x),J_m(x),J_\nu(x)$
   - $x=\infty$（柱外）：保留 $J_\nu(x)$ $N_\nu(x)$ 或 $H^{(1)}(x)$ $H^{(2)}(x)$
3. 递推关系
$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2Z'_\nu(x)$$
$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=2\nu\frac{Z_\nu(x)}{x}$$
4. 计算积分:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu J_\nu(x)]=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} J_\nu(x)]=-x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

2.5.2 贝塞尔方程

关于通解类型的选择:

- 柱侧的齐次边界条件：$\mu\geq 0$
- 上下底面的齐次边界条件：$\mu\leq 0$
- 原因：$\mu<0$ 时 $R(\rho)$ 恒不为 0

性质:

1. 三类齐次边界条件：$[\alpha\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\beta R(\rho)]\|_{\rho=a}=0$

- $R(\rho)\|_{\rho=a} = J_m(\sqrt{\mu}\rho)\|_{\rho=a} = 0 : \sqrt{\mu_n^{(m)}}a = x_n^{(m)}, \mu_n^{(m)} = (\frac{x_n^{(m)}}{a})^2, R(\rho) = J_m(\frac{x_n^{(m)}}{a}\rho)$
- $R'(\rho)\|_{\rho=a} = J'_m(\sqrt{\mu}\rho)\|_{\rho=a} = 0 : \sqrt{\mu_n^{(m)}}a = \tilde{x}_n^{(m)}, \mu_n^{(m)} = (\frac{\tilde{x}_n^{(m)}}{a})^2, R(\rho) = J_m(\frac{\tilde{x}_n^{(m)}}{a}\rho)$
- $[R(\rho) + HR'(\rho)]\|_{\rho=a} = [J_m(\sqrt{\mu}\rho) + H\sqrt{\mu}J'_m(\sqrt{\mu}\rho)]\|_{\rho=a} = 0$，利用递推关系导出：$J'_m(x) = m\frac{J_m(x)}{x} - J_{m+1}(x)$，进而有 $J_m(\sqrt{\mu}a) = \frac{H\sqrt{\mu}J_{m+1}(\sqrt{\mu}a)}{1+Hm/a}$，根为 $\hat{x}_n^{(m)}$，则 $\mu_n^{(m)} = (\frac{\hat{x}^{(m)}}{a})^2$

2. 正交

$$\int_0^a J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho\mathrm{d}\rho = 0, n \neq l$$

3. 三类边界条件下的模

$$\int_0^a [J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)]^2\rho\mathrm{d}\rho = [N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}})[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2 + \frac{1}{2}a^2[J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2$$

- 第一类边界条件下的：$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}a^2[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2$
- 第二类边界条件下的：$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}})[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2$
- 第三类边界条件下的：$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}(a^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} + \frac{a^2}{\mu_n^{(m)}H})[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2$

4. generalized Fourier series

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$$

$$f_n = \frac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\int_0^a f(\rho)J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

5. 母函数

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)z^m$$

6. 加法公式

$$J_m(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)J_{m-k}(b)$$

讲义上求解了一个问题，我觉得这部分还是要再看看书

2.5.3 虚宗量贝塞尔方程

2.5.4 球贝塞尔方程

$x = kr, R = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + [x^2 - (l+\frac{1}{2})^2]y = 0$$

1. 通解表达式

$$y(x) = A_l j_l(x) + B_l n_l(x), j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x), n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x)$$

2. 递推关系

3. 初等函数表示

4. $x \to 0, x \to \infty$ 的行为：$x \to 0, j_0(0) = 1, j_l(0) = 0(l \quad), n_l(0) \to \infty$

5. 本征值问题与 generalized Fourier series：模可以直接转化成 贝塞尔函数 的模