

Probabilidades I

Probabilidades básicas

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Sumário

Definições

Definition

Experimento aleatório é um experimento no qual se conhece os resultados possíveis, mas não se pode saber qual ocorrerá.

- Caso repetido em condições idênticas, o resultado geralmente é diferente.
- Formulam-se esses problemas de acordo com alguns conjuntos típicos.

Definições

Definition

Espaço amostral (S) é o conjunto de todos os resultados possíveis no problema.

Definition

Evento (E) é o conjunto dos resultados favoráveis no problema. Qualquer subconjunto do espaço amostral.

- De quantas maneiras um evento pode ocorrer?
- Contar a quantidade (tamanho do conjunto) e dividir pela quantidade total de possibilidades

Definições



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Definition

A **probabilidade** $P(E)$ do evento E é a razão entre o número de elementos do evento E e do espaço amostral S . Entende-se pela **frequência** de ocorrência do evento E .

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S}$$

Example

Para se determinar a probabilidade de uma pessoa estar infectada com o Dengue em uma amostra pode-se considerar a frequência relativa do número de infectados em relação ao total da amostra.

Propriedades das probabilidades



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Evento impossível: $P(\emptyset) = 0$
- Evento certo: $P(S) = 1$
- $0 \leq P(E) \leq 1 (= 100\%)$

Example

Probabilidade de observar cara em uma moeda:

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$$

Example

Probabilidade de observar um número par num dado

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Example

Probabilidade de sortear um ás no baralho

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Example

Um casal tem três filhos. Qual é a probabilidade de que duas das três crianças sejam meninos?

menino-menina-menina
menino-menina-menino
menino-menino-menina
menino-menino-menino
menina-menino-menina
menina-menino-menino
menina-menina-menina
menina-menina-menino

- 3 casos no evento
- **MFM, MMF, FMM**
- 8 possibilidades (**total**)
- $P(\text{dois meninos}) = \frac{3}{8}$

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Exercício

De acordo com o problema anterior, qual é a probabilidade de

- 1 Exatamente uma menina?
- 2 Exatamente duas meninas?
- 3 Três meninas?

Solução

- 1 $\frac{3}{8}$ (MMF, MFM, FMM)
- 2 $\frac{3}{8}$ (MFF, FMF, FFM)
- 3 $\frac{1}{8}$ (FFF)

Definições



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Definition

O **complemento** \bar{E} (ou E^c) de um evento E consiste em todas as possibilidades em que o evento E **não** ocorre.

Definition

Probabilidade complementar $P(\bar{E})$ (ou $P(E^c)$) de um evento E é a probabilidade do evento E **não** ocorrer.

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Exercício

Qual é a probabilidade de se observar um número ímpar no dado?

Solução

$$P(\text{ímpar}) = 1 - P(\text{par}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercício

Qual é a probabilidade de se sortear uma carta no baralho que não seja um ás?

Solução

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

Até aqui...



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Até aqui vimos a probabilidade de **um** evento E.
- Normalmente precisamos cruzar informações de **vários** eventos.
- Nesses casos, precisamos de dois conceitos fundamentais para o futuro ...

Um novo tipo de pergunta (1)



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

- Considere 4 tipos de sintomas (S) e dois estágios de doença: terminal (T) e não terminal (N).
- Qual é a probabilidade de um paciente ter o sintoma 3 **ou** ser um paciente terminal?

Para construirmos a resolução deste tipo de pergunta, precisamos entender o que são eventos mutuamente exclusivos.

Eventos compostos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

Quantas ervilhas têm caule verde **ou** flor roxa?

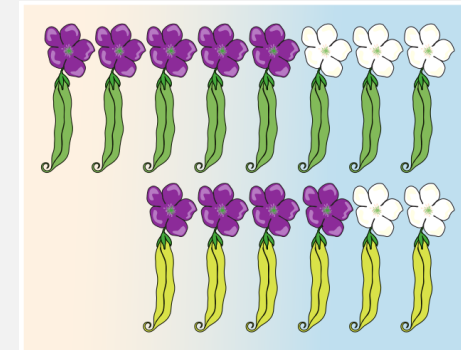


Figura: Fonte: Triola, 2004.

Regra da Soma



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Definition

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

Interpretação

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \text{ ocorre ou } B \text{ ocorre ou ambos ocorrem})$$

- Atenção: não podemos contabilizar o evento $P(A \text{ e } B)$ duas vezes.

Eventos mutuamente exclusivos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Não podem ocorrer simultaneamente
- Eventos (conjuntos) disjuntos

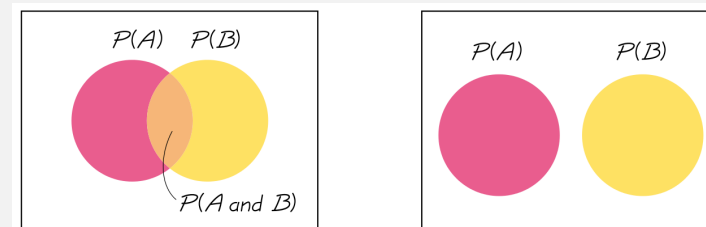


Figura: Fonte: Triola, 2004.

Eventos mutuamente exclusivos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Não são mutuamente exclusivos

Example

A = Escolher estudante
B = Escolher mulher

Example

A = Escolher mulher
B = Escolher tipo sanguíneo O+

Example

A = Escolher homem
B = Escolher olhos castanhos

Eventos mutuamente exclusivos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

São mutuamente exclusivos

Example

Sortear uma carta no baralho
A = Observar um valete
B = Observar um rei

Example

A = Estar grávida
B = Não estar grávida

Example

A = Tipo sanguíneo A
B = Tipo sanguíneo B

Eventos mutuamente exclusivos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A \text{ e } B) = 0$
- Nesse caso, $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Exercício

Você sorteia uma carta em um baralho comum. Qual é a probabilidade de se observar um valete ou um rei?

Solução

$$P(J \text{ ou } K) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

Pergunta 1 (lembra?)



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

4 sintomas e estágios
terminal e não terminal (T/N).

Qual é a probabilidade de
um paciente ter náusea **ou**
ser terminal?

Sintoma	T	N	total
febre	3	4	7
diarréia	5	0	5
náusea	4	8	12
vômito	0	12	12
total	12	24	36

Solução

A = náusea

B = terminal

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\bullet P(A \text{ e } B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\bullet P(A \text{ ou } B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Um novo tipo de pergunta (2)



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

- Pesquisadores querem cruzar duas informações ...
- ... contaram crianças que tem um certo gene G e aferiram seus QIs.
- Qual é a probabilidade de uma criança possuir QI elevado **dado que** ela tem o gene G?

Para construirmos a resolução deste tipo de pergunta, precisamos entender o que são eventos independentes.

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Exercício

	O	A	B	AB	total
Rh+	156	139	37	12	344
Rh-	28	25	8	4	65
total	184	164	45	16	409

- 1 Quantas pessoas tem sangue O ou A?
- 2 Quantas pessoas tem sangue B ou Rh-?

Solução

$$\textcircled{1} P(O \text{ ou } A) = \frac{184}{409} + \frac{164}{409} = \frac{348}{409} \approx 0.85$$

$$\textcircled{2} P(B \text{ ou } Rh-) = \frac{45}{409} + \frac{65}{409} - \frac{8}{409} = \frac{102}{409} \approx 0.25$$

Regra da Multiplicação



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Como determinar a probabilidade de dois eventos A e B ocorrerem simultaneamente?
- Para calcular isso, precisamos primeiro determinar se eles são **dependentes** ou **independentes**.
- Assim, podemos aplicar a Regra da Multiplicação.

Eventos dependentes



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Se você retirar duas ervilhas **sem reposição** dessa amostra, qual a probabilidade de a primeira ter caule verde, e a segunda ter caule amarelo?

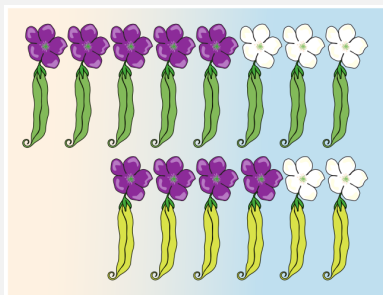


Figura: Fonte: Triola, 2004.

Eventos dependentes



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Se você retirar duas ervilhas **sem reposição** dessa amostra, qual é a probabilidade de a primeira ter caule verde, e a segunda ter caule amarelo?

Solução

Primeira ervilha:

$$P(\text{verde}) = \frac{8}{14}$$

Segunda ervilha:

$$P(\text{amarelo}) = \frac{6}{13}$$

Eventos dependentes



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Observe que o segundo evento foi influenciado pelo primeiro!
- Isso modifica a probabilidade do segundo ocorrer **depois** do primeiro.
- Lê-se: probabilidade do segundo ocorrer **dado** que o primeiro ocorreu.

Probabilidade condicional



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Definition

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(A)}, \text{ se } P(A) > 0$$

Interpretação

$P(B|A)$ = Probabilidade de B ocorrer, **dado que** A ocorreu.

- Manipulando a fórmula, temos que
 $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ (regra da multiplicação)

Pergunta 2



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

Pesquisadores contaram crianças que tem um certo gene G e aferiram seus QIs

QI	possui o gene	não possui o gene	total
elevado	33	19	52
normal	39	11	50
total	72	30	102

Qual é a probabilidade de uma criança ter QI elevado, dado que ela possui o gene G?

Solução

$$P(\text{QI elevado} | G) = \frac{33}{72}$$

Mais exemplos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

QI	possui o gene	não possui o gene	total
elevado	33	19	52
normal	39	11	50
total	72	30	102

- 1 Qual é a probabilidade de uma criança não ter o gene?
- 2 Qual é a probabilidade de uma criança não ter o gene, dado que ela tem o QI normal?

Mais exemplos



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Example

QI	possui o gene	não possui o gene	total
elevado	33	19	52
normal	39	11	50
total	72	30	102

Solução

1 $P(\bar{G}) = \frac{30}{102}$

Logo:

2 $P(\bar{G} | N) = \frac{P(\bar{G} \text{ e } N)}{P(N)}$

- $P(\bar{G} \text{ e } N) = \frac{11}{102}$
- $P(N) = \frac{50}{102}$

$$P(\bar{G} | N) = \frac{\frac{11}{102}}{\frac{50}{102}} = \frac{11}{50}$$

Eventos Independentes



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Definition

$$P(B|A) = P(B)$$

Interpretação

Se dois eventos A e B são independentes a ocorrência de um não afeta a ocorrência do outro.

Regra da Multiplicação



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- No caso geral, a regra da multiplicação segue a fórmula $P(B \text{ e } A) = P(A)P(B|A)$
- Mas se A e B são independentes, então $P(B|A) = P(B)$
- Nesse caso, $P(B \text{ e } A) = P(A)P(B)$

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Exercício

Considere a tabela que relaciona resultados de teste de gravidez com o desfecho de estar ou não grávida

	teste positivo	teste negativo	total
grávida	80	5	85
não grávida	3	11	14
total	83	16	99

- 1 Determine a probabilidade de a mulher testar positivo, dado que ela está grávida
- 2 Determine a probabilidade de a mulher estar grávida, dado que ela testou positivo

Exercícios



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

Solução

	teste positivo	teste negativo	total
grávida	80	5	85
não grávida	3	11	14
total	83	16	99

- 1 $P(\text{positivo}|\text{grávida}) =$

$$\frac{\frac{80}{99}}{\frac{85}{99}} = \frac{80}{85} \approx 0.941$$

Alternativamente, apenas consultando a tabela:

$$P(\text{positivo}|\text{grávida}) = \frac{80}{85} \approx 0.941$$

- 2 $P(\text{grávida}|\text{positivo}) = \frac{80}{83} \approx 0.964$

Resumo



Probabilidades
|
Felipe
Figueiredo

- Para se determinar a probabilidade de um evento simples, basta considerar a frequência com que ele ocorre
- Para se calcular a probabilidade de um evento composto de um evento A **ou** um evento B usamos a regra da soma
- Para se calcular a probabilidade de um evento composto de um evento A **e** um evento B (simultaneamente) usamos a regra da multiplicação
- Em geral $P(A|B) \neq P(B|A)$