

Correlação Linear

Associação de duas amostras (quantitativa)

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

- 1 Covariância
 - Covariância entre duas amostras
- 2 Correlação
 - Associação entre duas variáveis
 - Coeficiente de correlação de Pearson
 - Interpretação
- 3 Causalidade
- 4 Resumo

1 Covariância

- Covariância entre duas amostras

2 Correlação

- Associação entre duas variáveis
- Coeficiente de correlação de Pearson
- Interpretação

3 Causalidade

4 Resumo

- Relembrando: a variância (assim como o desvio-padrão) é uma medida da dispersão da amostra
- Medida sumária que resume o quanto os dados se desviam da média
- Podemos usar um raciocínio análogo para comparar quanto uma amostra se desvia em relação à outra

Interpretação

Quanto maior a variância, maior a dispersão em relação ao centro.

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

Visualização - Variância “pequena”



Correlação
Linear

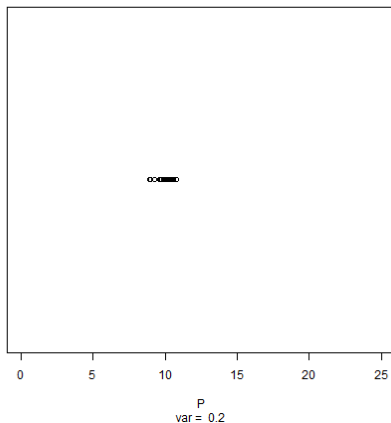
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Visualização - Variância “média”



Correlação
Linear

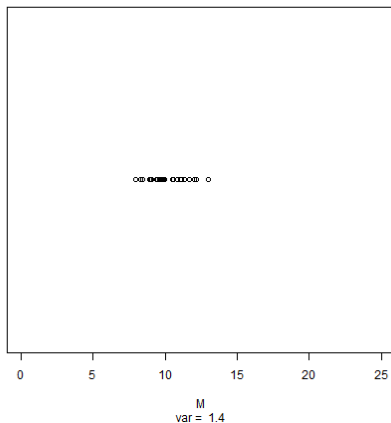
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

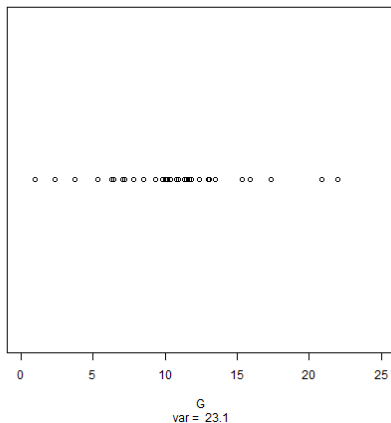
Correlação

Causalidade

Resumo



Visualização - Variância “grande”



Variância em cada eixo



Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

- Como vamos medir a variância **entre** duas variáveis, devemos considerar a variância de cada uma delas
- Exemplos anteriores, variância no eixo horizontal
- Vamos rever, agora na vertical
- (e aproveitar para incrementar a visualização de **uma** variância)

Visualização - Variância “pequena” - boxplot

Correlação
Linear

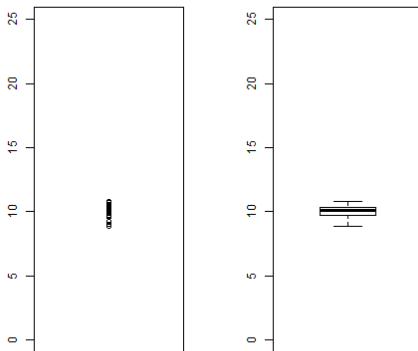
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Visualização - Variância “média” - boxplot

Correlação
Linear

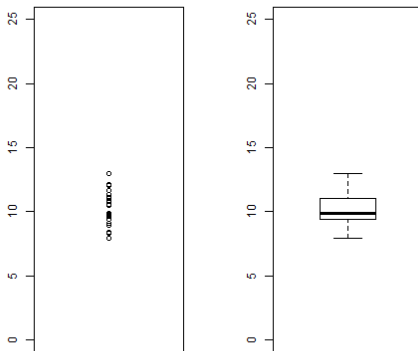
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Visualização - Variância “grande” - boxplot

Correlação
Linear

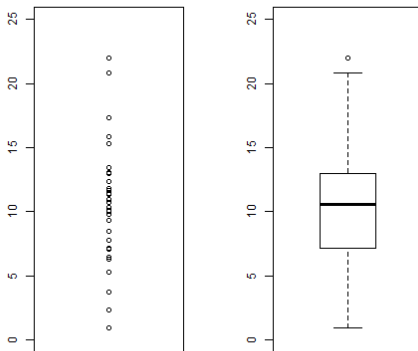
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Definition

A covariância entre duas variáveis X e Y é uma medida de quanto ambas variam juntas (uma em relação à outra).

- Um único número que representa a variação conjunta entre as duas variáveis
- Pode assumir qualquer valor (positivo, negativo, etc)
- Magnitude absoluta (desconsiderando o sinal) indica o grau de dependência
- Obs: duas variáveis independentes tem covariância igual a zero!

Covariância



Correlação
Linear

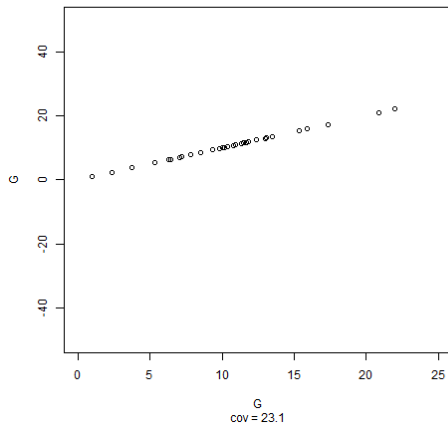
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Covariância



Correlação
Linear

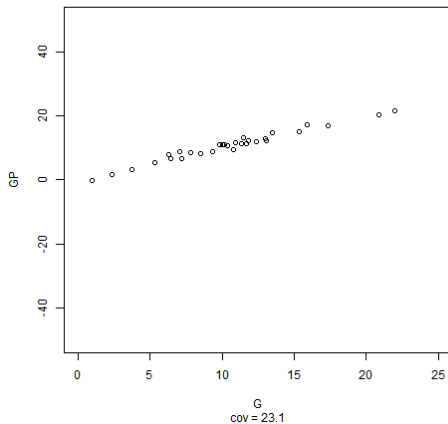
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Covariância



Correlação
Linear

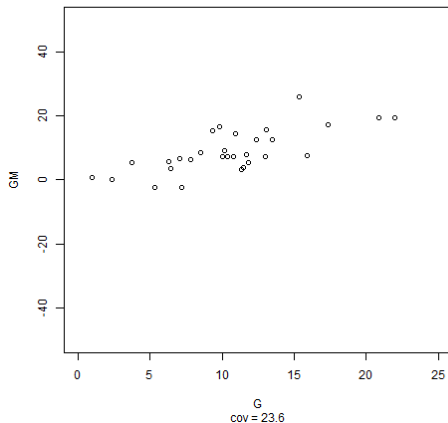
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo



Covariância



Correlação
Linear

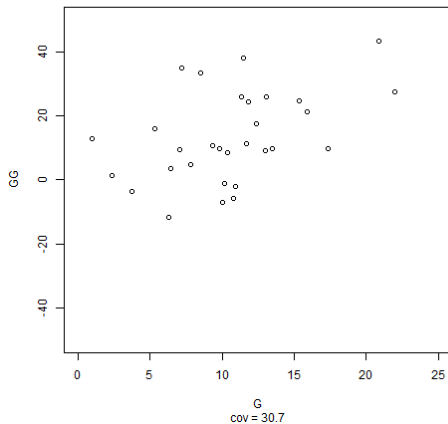
Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

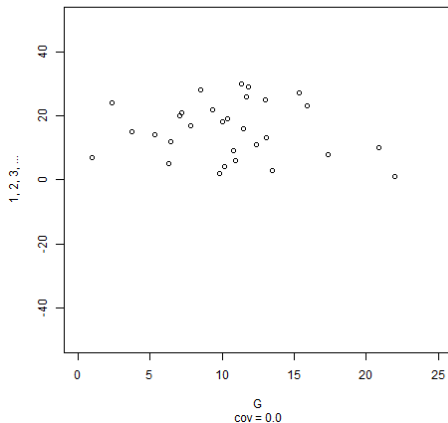
Correlação

Causalidade

Resumo



Covariância - amostras independentes



Luz.. Câmera... Ação!



Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

Teoria x Prática

A covariância é útil para entender a força (e direção) da associação entre duas variáveis, mas *o fato de ela não ter uma escala definida a torna difícil de usar na prática.*

Precisamos de uma medida semelhante de associação, mas que fique em uma escala restrita (digamos, sempre entre -1 e 1).

O nome desta solução é **coeficiente de correlação r** .

1 Covariância

- Covariância entre duas amostras

2 Correlação

- Associação entre duas variáveis
- Coeficiente de correlação de Pearson
- Interpretação

3 Causalidade

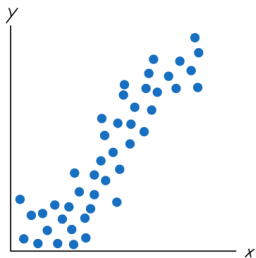
4 Resumo

- Considere duas amostras X e Y , de dados numéricos contínuos.
- Vamos representar os dados em pares ordenados (x,y) onde:
 - X : variável independente (ou variável explanatória)
 - Y : variável dependente (ou variável resposta)

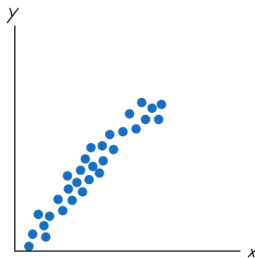
- Como definir (e mensurar!) o grau de associação entre duas amostras?
- Se uma amostra é dependente de outra, é razoável assumir que isso possa ser observável por estatísticas sumárias
- Como resumir esta informação em uma única grandeza numérica?

- Quando uma associação é forte, podemos identificá-la subjetivamente
- Para isto, analisamos o gráfico de dispersão dos pares (x,y)
- Um gráfico deste tipo é feito simplesmente plotando os pontos no plano cartesiano

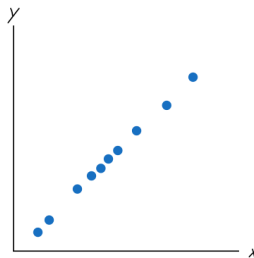
Exemplo



(a) Positive correlation between x and y



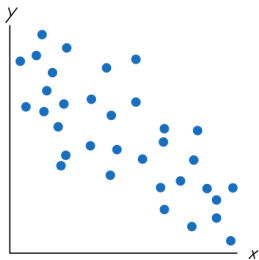
(b) Strong positive correlation between x and y



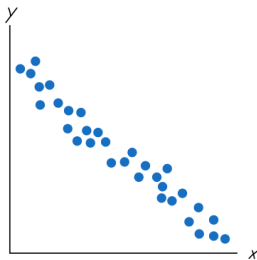
(c) Perfect positive correlation between x and y

(Fonte: Triola)

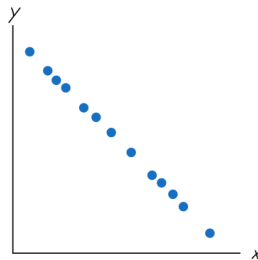
Exemplo



(d) Negative correlation between x and y



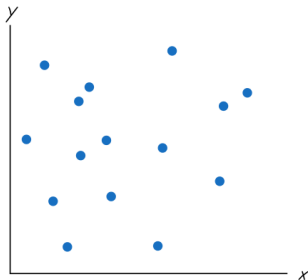
(e) Strong negative correlation between x and y



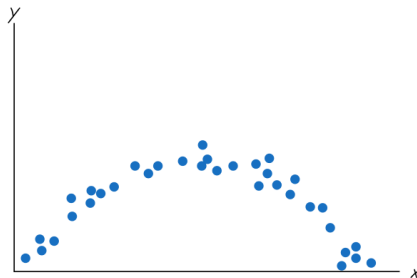
(f) Perfect negative correlation between x and y

(Fonte: Triola)

Exemplo



(g) No correlation
between x and y



(h) Nonlinear relationship
between x and y

(Fonte: Triola)

- 1 Covariância
 - Covariância entre duas amostras

- 2 Correlação
 - Associação entre duas variáveis
 - Coeficiente de correlação de Pearson
 - Interpretação

- 3 Causalidade

- 4 Resumo

Definition

O coeficiente de correlação r é a medida da direção e força da associação entre duas variáveis.

Propriedades:

- É um número entre -1 e 1 .
- Mede a associação **linear** entre duas variáveis.
 - Diretamente proporcional, inversamente proporcional, ou ausência de proporcionalidade.

- Uma forte associação positiva corresponde a uma correlação próxima de 1.
- Uma forte associação negativa corresponde a uma correlação próxima de -1.
- A ausência de associação corresponde a uma correlação próxima de 0.

- Uma forte associação **positiva** corresponde a uma correlação próxima de 1.
- Uma forte associação negativa corresponde a uma correlação próxima de -1.
- A ausência de associação corresponde a uma correlação próxima de 0.

- Uma forte associação positiva corresponde a uma correlação próxima de 1.
- Uma forte associação **negativa** corresponde a uma correlação próxima de -1.
- A ausência de associação corresponde a uma correlação próxima de 0.

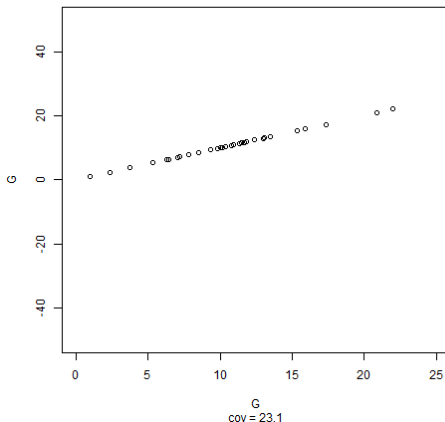
- Uma forte associação positiva corresponde a uma correlação próxima de 1.
- Uma forte associação negativa corresponde a uma correlação próxima de -1.
- A **ausência** de associação corresponde a uma correlação próxima de 0.

- Se tivéssemos os dados de toda a **população**, poderíamos calcular o **parâmetro** ρ
- Na prática, só podemos calcular a estatística r da amostra
- Utilizamos r como estimador para ρ , e testamos a significância estatística da forma usual

- Se tivéssemos os dados de toda a população, poderíamos calcular o parâmetro ρ
- Na prática, só podemos calcular a **estatística r da amostra**
- Utilizamos r como estimador para ρ , e testamos a significância estatística da forma usual

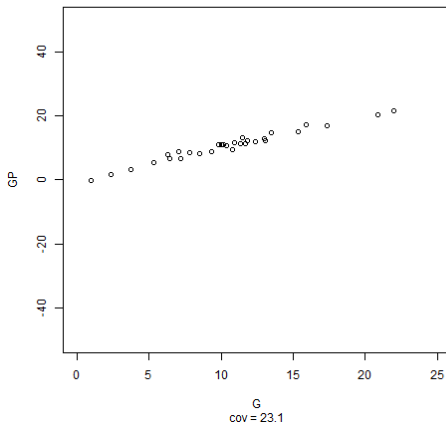
Exemplo

Pearson's product-moment correlation
data: G and G
 $t = 355110000$, $df = 28$, $p\text{-value} < 2.2e-16$
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
1 1
sample estimates:
cor
1



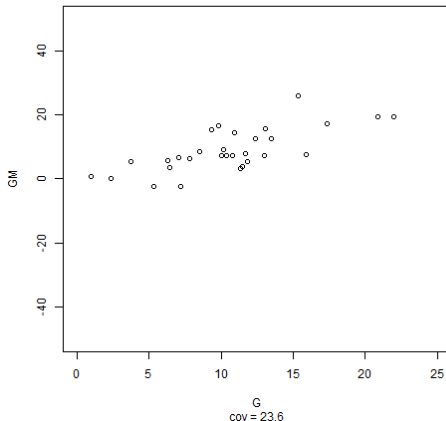
Exemplo

Pearson's product-moment correlation
data: G and GP
 $t = 28.803$, $df = 28$, $p\text{-value} < 2.2e-16$
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.9653236 0.992e2253
sample estimates:
cor
0.9835406



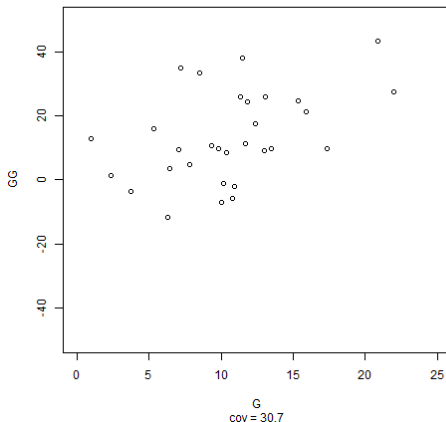
Exemplo

Pearson's product-moment correlation
data: G and GM
 $t = 5.6488$, $df = 28$, $p\text{-value} = 4.727e-06$
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.5013686 0.8631382
sample estimates:
cor
0.7298133



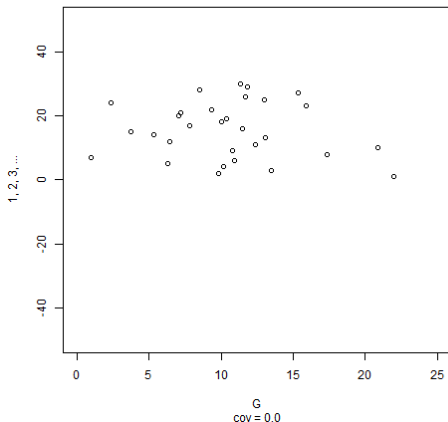
Exemplo

Pearson's product-moment correlation
data: G and GG
 $t = 2.6943$, $df = 28$, $p\text{-value} = 0.01179$
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.1117472 0.6996458
sample estimates:
cor
0.4537489



Exemplo - amostras independentes

Pearson's product-moment correlation
data: G and seq(1, 30)
 $t = -0.64301$, $df = 28$, $p\text{-value} = 0.5254$
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.4608704 0.2505266
sample estimates:
cor
-0.1206304



Example

Pesquisadores queriam entender por que a insulina varia tanto entre indivíduos. Imaginaram que a composição lipídica das células do músculo afetam a sensibilidade do músculo para a insulina. Para isto, eles injetaram insulina em 13 jovens adultos, e determinaram quanta glicose eles precisariam injetar nos sujeitos para manter o nível de glicose sanguínea constante. A quantidade de glicose injetada para manter o nível sanguíneo constante é, então, uma medida da sensibilidade à insulina.

(Fonte: Motulsky, 1995)

Example

Pesquisadores queriam entender por que a insulina varia tanto entre indivíduos. Imaginaram que a **composição lipídica** das células do músculo afetam a sensibilidade do músculo para a insulina. Para isto, eles injetaram insulina em 13 jovens adultos, e determinaram quanta glicose eles precisariam injetar nos sujeitos para manter o nível de glicose sanguínea constante. A quantidade de glicose injetada para manter o nível sanguíneo constante é, então, uma medida da sensibilidade à insulina.

(Fonte: Motulsky, 1995)

Example

Pesquisadores queriam entender por que a insulina varia tanto entre indivíduos. Imaginaram que a composição lipídica das células do músculo afetam a **sensibilidade do músculo para a insulina**. Para isto, eles injetaram insulina em 13 jovens adultos, e determinaram quanta glicose eles precisariam injetar nos sujeitos para manter o nível de glicose sanguínea constante. A quantidade de glicose injetada para manter o nível sanguíneo constante é, então, uma medida da sensibilidade à insulina.

(Fonte: Motulsky, 1995)

Example

Os pesquisadores fizeram uma pequena biópsia nos músculos para aferir a fração de ácidos graxos poli-insaturados que tem entre 20 e 22 carbonos (%C20-22). Como variável resposta, mediram o índice de sensibilidade à insulina.

Valores tabelados a seguir.

Table 17.1. Correlation Between %C20–22 and Insulin Sensitivity

% C20–22 Polyunsaturated Fatty Acids	Insulin Sensitivity (mg/m ² /min)
17.9	250
18.3	220
18.3	145
18.4	115
18.4	230
20.2	200
20.3	330
21.8	400
21.9	370
22.1	260
23.1	270
24.2	530
24.4	375

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância

Correlação

Associação

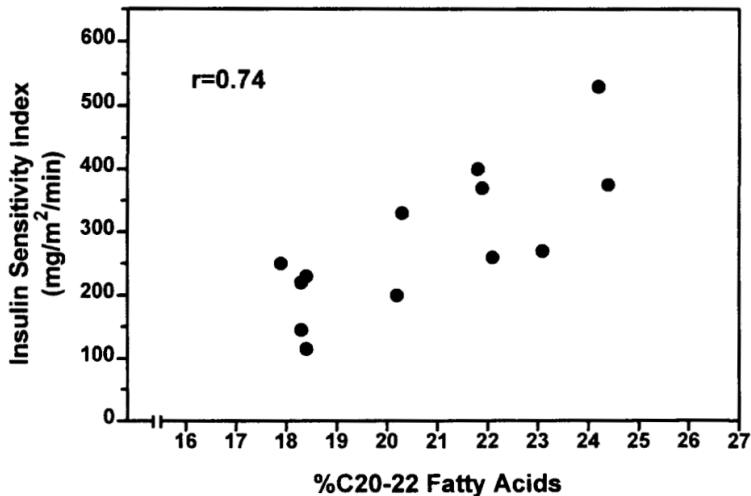
Pearson

Interpretação

Causalidade

Resumo

Exemplo: Diagrama de dispersão dos dados



Obs: na verdade, $r = 0.77$.

Exemplo

- O tamanho da amostra foi $n = 13$
- (Antigamente) consultávia-se o valor crítico de r na tabela
- H_0 : não há relação entre as variáveis na população ($H_0 : \rho = 0$).
- Observe: Quais são as informações necessárias para se consultar a tabela?

TABLE A-6		Critical Values of the Pearson Correlation Coefficient r	
n	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	
4	.950	.999	
5	.878	.959	
6	.811	.917	
7	.754	.875	
8	.707	.834	
9	.666	.798	
10	.632	.765	
11	.602	.735	
12	.576	.708	
13	.553	.684	
14	.532	.661	
15	.514	.641	
16	.497	.623	
17	.482	.606	
18	.468	.590	

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância

Correlação

Associação

Pearson

Interpretação

Causalidade

Resumo

- O valor crítico da tabela para uma amostra de tamanho 13 é $r_c = 0.553$
- A correlação calculada para esta amostra foi $r = 0.77$
- Como a correlação é maior que o valor crítico, a relação é estatisticamente significativa
- Conclusão: há evidências para rejeitar a H_0 que não há relação entre as variáveis.

- Pode-se também calcular o p-valor para o coeficiente de correlação r .
- Para este exemplo, teríamos $p = 0.0021$.
- Interpretação: se não houver relação entre as variáveis (H_0), existe apenas 0.21% de chance de observarmos uma correlação tão forte com um estudo deste tamanho

Por que as duas variáveis são tão correlacionadas?
Considere 4 possibilidades:

- 1 o conteúdo lipídico das membranas **determina** a sensibilidade à insulina
- 2 A sensibilidade à insulina de alguma forma afeta o conteúdo lipídico
- 3 tanto o conteúdo lipídico quanto a sensibilidade à insulina estão sob o efeito de algum outro fator (talvez algum hormônio)
- 4 as duas variáveis não são correlacionados na população, e a estimativa observada nessa amostra é mera coincidência

Por que as duas variáveis são tão correlacionadas?
Considere 4 possibilidades:

- 1 o conteúdo lipídico das membranas determina a sensibilidade à insulina
- 2 A sensibilidade à insulina de alguma forma **afeta** o conteúdo lipídico
- 3 tanto o conteúdo lipídico quanto a sensibilidade à insulina estão sob o efeito de algum outro fator (talvez algum hormônio)
- 4 as duas variáveis não são correlacionados na população, e a estimativa observada nessa amostra é mera coincidência

Por que as duas variáveis são tão correlacionadas?
Considere 4 possibilidades:

- 1 o conteúdo lipídico das membranas determina a sensibilidade à insulina
- 2 A sensibilidade à insulina de alguma forma afeta o conteúdo lipídico
- 3 tanto o conteúdo lipídico quanto a sensibilidade à insulina estão sob o efeito de **algum outro** fator (talvez algum hormônio)
- 4 as duas variáveis não são correlacionados na população, e a estimativa observada nessa amostra é mera coincidência

Por que as duas variáveis são tão correlacionadas?

Considere 4 possibilidades:

- 1 o conteúdo lipídico das membranas determina a sensibilidade à insulina
- 2 A sensibilidade à insulina de alguma forma afeta o conteúdo lipídico
- 3 tanto o conteúdo lipídico quanto a sensibilidade à insulina estão sob o efeito de algum outro fator (talvez algum hormônio)
- 4 as duas variáveis não são correlacionados na população, e a estimativa observada nessa amostra é **mera coincidência**

- Nunca devemos ignorar a última possibilidade (erro tipo I)!
- o p-valor indica quão rara é essa coincidência
- neste caso, em apenas 0.21% dos experimentos não haveria uma correlação real, e estaríamos cometendo um erro de interpretação

- 1 Covariância
 - Covariância entre duas amostras

- 2 Correlação
 - Associação entre duas variáveis
 - Coeficiente de correlação de Pearson
 - Interpretação

- 3 Causalidade

- 4 Resumo

- Se a correlação é 0, então X e Y não variam juntos (independentes)
- Se a correlação é positiva, então quando uma aumenta, a outra aumenta em proporção direta (linear)
- Se a correlação é negativa, então quando uma aumenta, a outra diminui em proporção inversa (linear)

- Duas variáveis podem **parecer** correlacionadas pois são influenciadas por uma terceira variável
- Ex: em alguns países a mortalidade infantil é negativamente correlacionada com o número de telefones per capita
- Mas comprar mais telefones não vai salvar crianças!
- Explicação alternativa: a melhoria da condições financeiras pode afetar ambas as variáveis

- Se há uma relação de causalidade entre as duas variáveis, a correlação será não nula (positiva ou negativa)
- Quanto maior for a relação de dependência entre as variáveis, maior será o módulo da correlação.
- Se as variáveis não são relacionadas, a correlação será nula.

- Mas não podemos inverter a afirmativa lógica do slide anterior!
- Isto é, ao observar uma forte correlação, gostaríamos de concluir que uma variável **causa** este efeito na outra
- Infelizmente isto não é possível!
- Lembre-se: a significância do teste indica a probabilidade de se cometer um erro do tipo I (falso positivo).

Repita várias vezes mentalmente

Correlação não implica em causalidade.

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

Exemplo

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

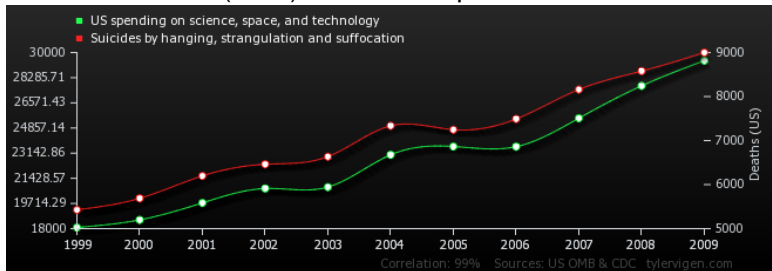
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

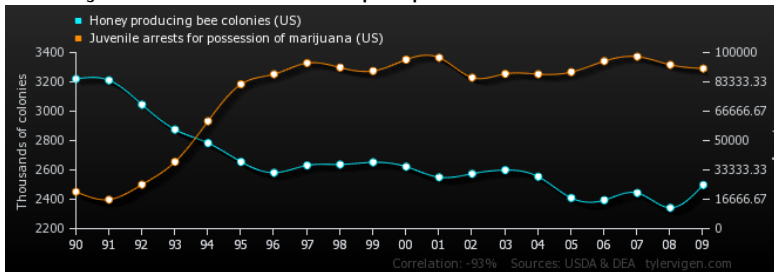
Gasto com C&T (EUA) x Suicídios por enforcamento



Correlação: 0.992082
(Fonte: Spurious correlations)

Exemplo

Produção de mel x Prisões por posse de maconha



Correlação: -0.933389
(Fonte: Spurious correlations)

Exemplo

Correlação
Linear

Felipe
Figueiredo

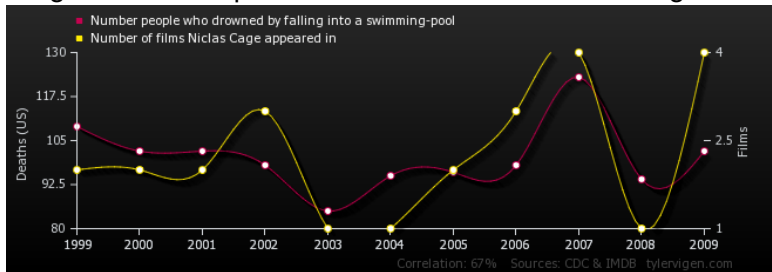
Covariância

Correlação

Causalidade

Resumo

Afogamentos em piscina x Filmes com Nicholas Cage



Correlação: 0.666004
(Fonte: Spurious correlations)

Ao encontrar uma forte correlação, deve-se sempre se perguntar:

- 1 Há uma relação direta de causa e efeito entre as variáveis? (X causa Y?)
- 2 Há uma relação inversa de causa e efeito entre as variáveis? (Y causa X?)
- 3 É possível que a relação entre as variáveis possa ser causada por uma terceira variável (ou mais) que não foi analisada?
- 4 É possível que a relação entre duas variáveis seja uma coincidência?

- É necessário investigar a relação entre as variáveis!
- O que pode explicar a relação observada?
- Qual proporção (porcentagem) da variabilidade pode ser explicada pelas variáveis analisadas?
- Quão bem a reta regressora se ajusta aos dados?

Leitura obrigatória

- Capítulo 17, pular as seções:
 - cálculo do r , do IC, do p -valor
 - correlação de Spearman, e seu cálculo
 - Interpretação do r^2

Exercícios

Capítulo 17, problemas **1**, **3** e **5**.

Problema **6**, usar:

$r = 0.8868$, $IC95\% = [0.4856, 0.9794]$, $p = 0.0033$. $r^2 = ?$

Leitura recomendada

Capítulo 17: Interpretação do r^2 e Correlação de Spearman