



Comparação de dois grupos (qualitativo)

Testes para proporções

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Aprofundamento

Sumário

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Observação x expectativa (1 amostra)
 - Objetivo da aula
 - Analisando dados de contagens
- 3 Testes para 2 amostras
 - Tabelas 2x2
 - Tabelas maiores
 - Na prática
 - Resumo
- 4 Aprofundamento
 - Aprofundamento



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Aprofundamento

Discussão da aula passada



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Discussão da aula
passada

1 amostra

2 amostras

Aprofundamento

Discussão da leitura obrigatória da aula passada

Dados categóricos



- Vamos analisar contagens de dados categóricos (ou nominais)
- Para estas variáveis qualitativas não existe ordenação interente
- Observamos apenas as contagens e frequências destes dados em uma amostra.

Exemplo

doente/sadio, fumante/não fumante, masculino/feminino, olhos castanhos/olhos azuis/olhos verdes, etc.

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de
contagens

2 amostras

Aprofundamento

Objetivo



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de
contagens

2 amostras

Aprofundamento

Considere a seguinte tabela:

Exemplo

	Lesão	Não tem lesão
Alongou-se	18	22
Não se alongou	211	189

(Fonte: Larson & Farber 2013)

Pergunta

Como determinar se existe alguma relação entre as variáveis?

Isto é: o desfecho é independente da exposição?

Quais são as variáveis?



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de
contagens

2 amostras

Aprofundamento

- Dependente: desfecho (categórica)
- Independente: exposição (categórica)

Esta relação pode ser expressa como

desfecho \sim exposição

Exemplo



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de
contagens

2 amostras

Aprofundamento

Exemplo

Considere que 10% dos pacientes morrem após uma operação arriscada. Em uma amostra de 75 pacientes, observou-se que 16 pacientes morreram após a operação. Como comparar o número de óbitos observado e o número esperado?

Fonte: Motulsky, 1995

- O número observado de óbitos em 75 pacientes foi 16.
- O número esperado seria $75 \times 10\% = 7.5$
- A discrepância nos óbitos foi $16 - 7.5 = 8.5$

Mas antes vamos ver o caso de uma única variável.

Quais são as variáveis?



- Dependente: mortalidade (categórica)
- Independente: parâmetro fixo

Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de contagens

2 amostras

Aprofundamento

Esta relação pode ser expressa como

mortalidade \sim 10%

Questões



- Esse aumento reflete uma mudança real na mortalidade?
- Em uma amostra qualquer com 75 pacientes esperaríamos observar 7.5 óbitos
- Em uma amostra específica poderíamos observar mais ou menos que isso
- Provavelmente algo próximo de 7.5

Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de contagens

2 amostras

Aprofundamento

Pergunta

Se a mortalidade for 10%, qual é a probabilidade de se observar 16 ou mais óbitos em uma amostra de 75 pacientes?

Roteiro



- Podemos representar as contagens observadas e esperadas em uma tabela
- H_0 : observamos uma amostra de uma população com 10% de mortalidade.
- As diferenças entre os dados observados e os esperados tem distribuição aproximadamente χ^2 (qui-quadrado)

Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de contagens

2 amostras

Aprofundamento

Estatística de teste

$$\chi^2 = \frac{\sum(\text{observado} - \text{esperado})^2}{\text{esperado}}$$

Tabela de frequências



Exemplo

	Observado	Esperado
Óbito	16	7.5
Vivo	59	67.5
Total	75	75

Estatística de teste:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(16 - 7.5)^2}{7.5} + \frac{(59 - 67.5)^2}{67.5} = \\ &= \frac{(8.5)^2}{7.5} + \frac{(-8.5)^2}{67.5} \approx 10.70\end{aligned}$$

Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de contagens

2 amostras

Aprofundamento

Comparando as frequências



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

Objetivo da aula
Analisando dados de
contagens

2 amostras

Aprofundamento

- H_0 : não houve alteração da mortalidade do procedimento.
- Estatística de teste para a amostra: $\chi^2 = 10.7$.
- O teste χ^2 retorna $p = 0.0011$.

Resultado

(...) a mortalidade observada foi diferente de 10% ($p = 0.0011$).

Tabelas de Contingência



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Definição

Uma **tabela de contingência** mostra as frequências observadas para duas variáveis categóricas.

- Podemos calcular as frequências esperadas, baseado no tamanho das amostras
- Comparamos assim a frequência observada com a frequência esperada
- Obs: a tabela do exemplo anterior (óbitos) **não é** uma tabela de contingência! (Por que?)

Tabelas de Contingência 2x2



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Exemplo

Frequências observadas:

	doença progrediu	doença não progrediu
AZT	76	399
Placebo	129	332

- Existe relação entre o uso do AZT e a progressão da doença?
- Ou: nessa amostra o AZT foi mais eficiente que o placebo (rejeitar H_0)?

Quais são as variáveis?



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Dependente: desfecho (categórica)
- Independente: tratamento (categórica)

Esta relação pode ser expressa como

progressão ~ grupo

Tabelas de contingência 2x2



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- H_0 : o AZT não é mais eficaz que o placebo
- Pergunta: assumindo a H_0 , qual seria a frequência esperada para a progressão da doença?
- Em outras palavras: quantos pacientes tiveram progressão na doença, em relação ao total?

Vamos começar pela primeira célula da tabela



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Tabelas de contingência 2x2



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Exemplo

Frequências observadas:

	progrediu	não progrediu	total
AZT	76	399	475
Placebo	129	332	461
total	205	731	936

- Proporção esperada $E = \frac{205}{936} \approx 0.2190 = 21.90\%$
- Frequência esperada (número): $475 \times 0.2190 = 104.025 \approx 104.0$

Tabelas de contingência 2x2



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Se a H_0 fosse verdadeira, esperaríamos que 104.0 pacientes tivessem a progressão da doença, usando o AZT.
- Mas observamos 76.
- Discrepância $|104.0 - 76| = 28$ pacientes
- Faltam os 3 outros valores esperados e discrepâncias
- Para simplificar, podemos usar a seguinte fórmula:

$$E = \frac{\text{total por linha} \times \text{total por coluna}}{\text{total da tabela}}$$

Tabelas de contingência 2x2



Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Exemplo

Frequências observadas:

	progrediu	não progrediu	total
AZT	76	399	475
Placebo	129	332	461
total	205	731	936

- $AZT + Progressão = \frac{205 \times 475}{936} = 104.0$
- $AZT + Não progressão = \frac{731 \times 475}{936} = 371.0$
- $Placebo + Progressão = \frac{205 \times 461}{936} = 101.0$
- $Placebo + Não progressão = \frac{731 \times 461}{936} = 360.0$

Tabelas de contingência 2x2



Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Colocando os valores em uma tabela semelhante:

Exemplo

Frequências esperadas:

	progrediu	não progrediu	total
AZT	104.0	371.0	475.0
Placebo	101.0	360.0	461.0
total	205.0	731.0	936.0

Observe que os totais esperados devem ser iguais aos observados!

Teste de Hipótese



Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- H_0 : a progressão é independente do grupo de tratamento
- ou: não há relação entre o uso do AZT e a progressão da doença.
- Somamos as diferenças quadráticas entre o valor observado e o esperado

$$\chi^2 = \frac{\sum (\text{observado} - \text{esperado})^2}{\text{esperado}}$$

- Quanto maior o valor de χ^2 , maior a discrepância
- Fazemos o teste χ^2 e julgamos o p-valor

Teste de Hipótese



Comparação de dois grupos (qualitativo)

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Exemplo

- $AZT + P = \frac{(76 - 104.0)^2}{104.0} = \frac{28^2}{104.0} \approx 7.54$
- $AZT + NP = \frac{(399 - 371.0)^2}{371.0} = \frac{28^2}{371.0} \approx 2.11$
- $Placebo + P = \frac{(129 - 101.0)^2}{101.0} = \frac{28^2}{101.0} \approx 7.76$
- $Placebo + NP = \frac{(332 - 360.0)^2}{360.0} = \frac{28^2}{360.0} \approx 2.18$

$$\chi^2 = 7.54 + 2.11 + 7.76 + 2.18 = 19.59$$

O teste Qui-Quadrado



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Quanto **maior** for o valor da estatística de teste, **menor** será o p-valor.
- Calculamos a estatística de teste para a amostra e encontramos $\chi^2 = 19.59$
- O resultado deste teste é $p < 0.0001$.

O teste Qui-Quadrado



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Se a H_0 for verdadeira, temos uma chance menor que 0.01% de observar ao acaso uma discrepância tão grande entre os valores observados e os esperados.
- Resultado: devemos **rejeitar** a H_0

Interpretação

Rejeitamos a hipótese de que o AZT não é mais eficiente que o placebo.

O teste Qui-Quadrado



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- O teste χ^2 é apenas uma aproximação da distribuição dos dados, que pode ser usado para amostras grandes.
- Vantagem: simples
- Desvantagem: a aproximação é ruim para amostras pequenas
- Nunca usar se alguma célula da tabela tiver valor **< 5**

O teste indicado para este cenário é o **teste exato de Fisher**

O teste exato de Fisher



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Para as seguintes situações deve-se usar o teste exato de Fisher:
 - 1 Quando se tem amostras pequenas
 - 2 Quanto se tem amostras de tamanho moderado, e se tiver uma ferramenta computacional disponível
- Se sua amostra for enorme (milhares de dados), prefira o teste χ^2 , pois:
 - 1 o cálculo do teste exato de Fisher pode ser lento
 - 2 a aproximação será boa

Tabelas de Contingência maiores



- E quando temos mais do que duas categorias?

- Resposta: procedemos como no caso anterior, mas precisamos considerar os **graus de liberdade** do teste χ^2

$$gl = (l - 1)(c - 1) = (\text{linhas} - 1) \times (\text{colunas} - 1)$$

- Obs: no caso 2×2 temos $gl = (2 - 1) \times (2 - 1) = 1 \times 1 = 1$

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Tabelas de Contingência maiores



Exemplo

Em dois hospitais, os resultados de 575 autópsias foram comparados com as causas de morte listadas nos atestados. Um dos hospitais que participou do estudo era comunitário (A); o outro era universitário (B).

Hospital	Precisão confir- mada	Falta de informações	Recodificação incorreta
A	157	18	54
B	268	44	34

Os

resultados sugerem práticas diferentes no preenchimento de atestados de óbito nos dois hospitais?

Fonte: Aula Hacker & Simões (2008 - Fiocruz)

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Quais são as variáveis?



- Dependente: qualidade do preenchimento (categórica)
- Independente: hospital (categórica)

Esta relação pode ser expressa como

preenchimento \sim hospital

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Tabelas de Contingência maiores



- H_0 : Dentro de cada categoria do status do atestado, as proporções de atestados de óbitos no hospital A são idênticas ao hospital B.
- H_1 : As proporções não são idênticas
- Graus de liberdade:

$$(l - 1) \times (c - 1) = (2 - 1) \times (3 - 1) = 1 \times 2 = 2$$

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Tabelas de contingência maiores



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Preenchendo os totais por linha e coluna:

Exemplo

Hospital	Confirmada	Incompleta	Incorreta	total
A	157	18	54	229
B	268	44	34	346
total	425	62	88	575

Tabelas de contingência maiores



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Incluindo os valores esperados em parênteses temos:

Exemplo

Hospital	Confirmada	Incompleta	Incorreta	total
A	157 (169.3)	18 (24.7)	54 (35.0)	229
B	268 (255.7)	44 (37.3)	34 (53.0)	346
total	425	62	88	575

Tabelas de Contingência maiores



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Calculando a estatística de teste χ^2 :

Exemplo

Hospital	Confirmada	Incompleta	Incorreta	total
A	157 (169.3)	18 (24.7)	54 (35.0)	229
B	268 (255.7)	44 (37.3)	34 (53.0)	346
total	425	62	88	575

$$\bullet \chi^2 = \frac{(157 - 169.3)^2}{169.3} + \frac{(18 - 24.7)^2}{24.7} + \dots$$

$$\bullet \chi^2 = 21.62, p < 0.001$$

Tabelas de Contingência maiores



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- Calculamos a estatística de teste $\chi^2 = 21.62$
- Encontramos um p-valor $p < 0.001$ (valor fora da tabela)
- Rejeitamos H_0 ao nível de significância de $\alpha = 0.05$.
- Conclusão: Há associação entre o hospital e o status do atestado.
- Parece que o hospital A tem maior proporção de atestados incorretos.

Tabelas de Contingência 2x2



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Exemplo

Frequências observadas:

	doença progrediu	doença não progrediu
AZT	76	399
Placebo	129	332

- Existe relação entre o uso do AZT e a progressão da doença?
- Ou: nessa amostra o AZT foi mais eficiente que o placebo (rejeitar H_0)?

Saída típica de um programa



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Teste Qui-quadrado

Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

```
data: exemplo8.1
X-squared = 18.944, df = 1,
p-value = 1.346e-05
```

Saída típica de um programa



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Teste exato de Fisher

Fisher's Exact Test for Count Data

```
data: exemplo8.1
p-value = 9.24e-06
alternative hypothesis: true odds ratio
is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.3512693 0.6818650
sample estimates:
odds ratio
 0.4905877
```

Visualização - gráfico de barra



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

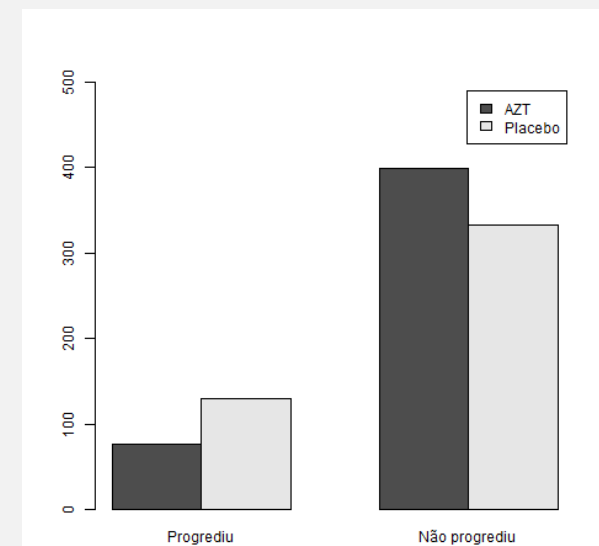
Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento



Visualização - pizza



Atenção

NÃO use gráfico de pizza!

- É uma visualização ineficiente
- Nosso olho é “bom” para julgar distâncias/comprimentos
- Nosso olho é ruim para julgar áreas
- Indicado **apenas** quando as categorias são muito discrepantes

Cleveland (1985)

“Data that can be shown by pie charts always can be shown by a dot chart.

This means that judgements of position along a common scale can be made instead of the less accurate angle judgements.”

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

Resumo



Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Tabelas 2x2

Tabelas maiores

Na prática

Resumo

Aprofundamento

- O teste exato de fisher é um teste de independência entre os grupos
- O teste Qui-quadrado é uma boa aproximação, para N grande

Aprofundamento



Leitura obrigatória

- Capítulo 26.
- Capítulo 27, pular a seção: Calculando o poder

Exercícios selecionados

Capítulo 26, problema 1

Leitura recomendada

Capítulo 29: Outros testes de tabelas de contingência

Comparação
de dois
grupos
(qualitativo)

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

1 amostra

2 amostras

Aprofundamento

Aprofundamento