

# Tópicos Avançados

## Comparação de 3 ou mais grupos - ANOVA e afins

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

- 1 Comparações múltiplas
- 2 Análise de Variância (ANOVA)
  - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
  - O teste F
  - Pós teste
  - Two-way ANOVA
- 3 Exercício
- 4 Encerramento

# Como comparar três ou mais grupos?

- “Comparar” é um termo vago - precisamos de um critério bem definido!

## Para comparar quanto às variâncias dos grupos

Podemos usar

- Teste de Levene
- Teste de Bartlett

## Para comparar quanto às médias dos grupos

*Pay attention*

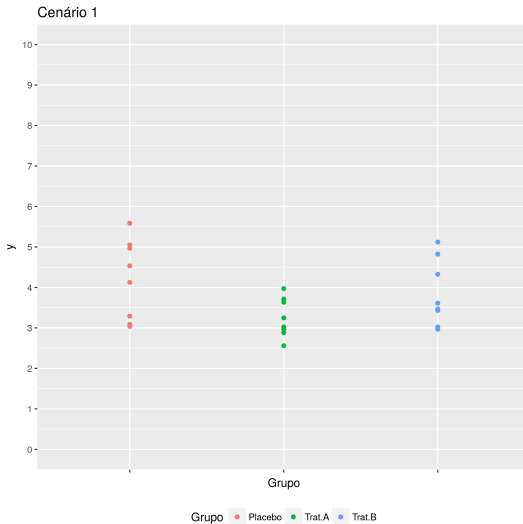
- Vimos que o **teste t** pode ser usado para comparar duas médias
- Assumindo que atendemos às premissas do teste t, precisamos levar em conta:
  - variabilidade dos grupos
  - tamanho do estudo (n)

Requisitos não óbvios (além das médias)

desvio padrão + n = erro padrão

O que é necessário para decidir se 3 (ou mais) grupos possuem médias diferentes?

# Esses 3 grupos têm médias diferentes?



# Médias: Placebo: 4.210, Tratamento A: 3.250, Tratamento B: 3.845



Tópicos  
Avançados

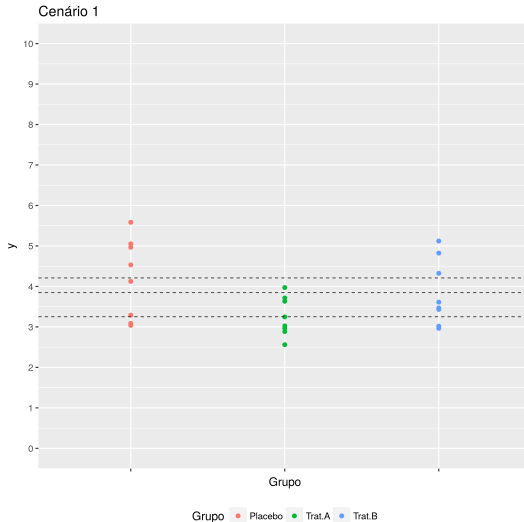
Felipe  
Figueiredo

Comparações  
múltiplas

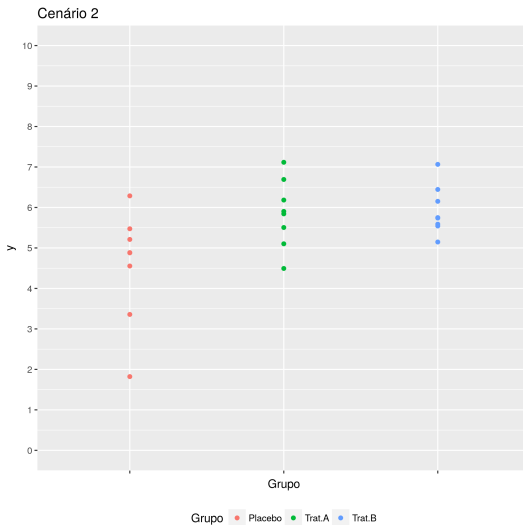
ANOVA

Exercício

Encerramento



# E estes 3 grupos?





# Médias: Placebo: 4.559, Tratamento A: 5.855, Tratamento B: 5.928



Tópicos  
Avançados

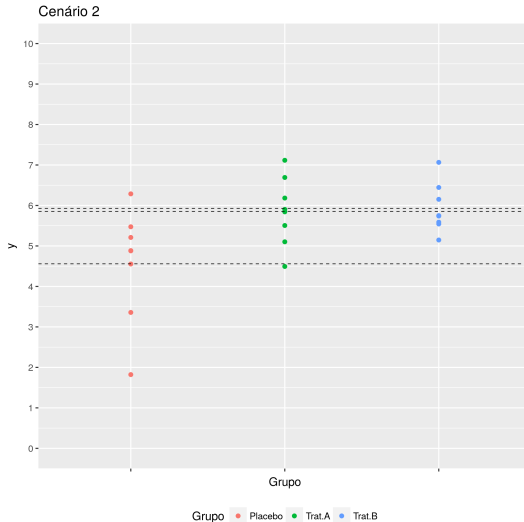
Felipe  
Figueiredo

Comparações  
múltiplas

ANOVA

Exercício

Encerramento



# Comparação entre 3 (ou mais) grupos



Tópicos  
Avançados

Felipe  
Figueiredo

Comparações  
múltiplas

ANOVA

Exercício

Encerramento

## Abordagem mais simples

Uma ideia seria usar o teste t três vezes, comparando os grupos aos pares.

Testar se há diferenças significativas, e seus respectivos tamanhos.

## Exemplo

- 1 Placebo x Tratamento A
- 2 Placebo x Tratamento B
- 3 Tratamento A x Tratamento B

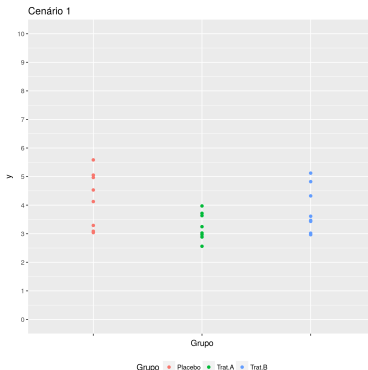
# Exemplo 1

## P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A  $\Rightarrow p = 0.02652$
- 2 Placebo x Trat. B  $\Rightarrow p = 0.4331$
- 3 Trat. A x Trat. B  $\Rightarrow p = 0.09686$

## Pergunta

Qual é a conclusão correta  
quanto à comparação destes  
grupos?



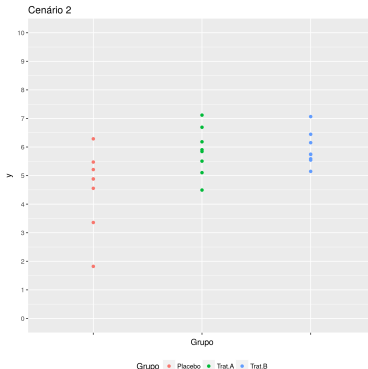
# Exemplo 2

## P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A  $\Rightarrow p = 0.0399$
- 2 Placebo x Trat. B  $\Rightarrow p = 0.02235$
- 3 Trat. A x Trat. B  $\Rightarrow p = 0.8432$

## Pergunta

E no segundo cenário?  
Os tratamentos são diferentes  
do placebo? E entre si?



Existe um problema oculto aí.

O problema é...

O problema é...

A conclusão de que no Exemplo 1 os 3 grupos são diferentes está **errada**!

---

<sup>1</sup>Leia várias vezes o Cap 13!

## O problema é...

A conclusão de que no Exemplo 1 os 3 grupos são diferentes está **errada!**

- O teste t permite a avaliação de **uma** hipótese
- Testamos simultaneamente várias <sup>1</sup>
- Isto aumenta a chance de cometermos um erro tipo I (falso positivo)
- Múltiplos testes superestimam o p-valor do método

<sup>1</sup> Leia várias vezes o Cap 13!



# Pensar é obrigatório



Tópicos  
Avançados

Felipe  
Figueiredo

Comparações  
múltiplas

ANOVA

Exercício

Encerramento

- Os testes estatísticos (e fórmulas) não “sabem” o que foi levado em conta no estudo.
- *Só o pesquisador sabe*
- A metodologia da análise precisa levar em conta todo o planejamento do estudo.

## Exemplo 13.2

5 crianças de uma escola tiveram leucemia, ano passado.

- Isto é uma coincidência?
- Esse agrupamento de casos sugere a presença de toxina ou efeito ambiental que causou a doença?

**Qual é a probabilidade de se observar 5 casos  
*nesta* escola, em um ano?**

- Considerando a incidência de leucemia, isto parece ser um dado extraordinário
- Esta é a pergunta errada, *após* observar os casos nesta escola.
- Se escola não é especial, é preciso considerar outras escolas
- Além disso, outras doenças (por ex., asma é um fator?).

## Exemplo 13.2

5 crianças de uma escola tiveram leucemia, ano passado.

- Isto é uma coincidência?
- Esse agrupamento de casos sugere a presença de toxina ou efeito ambiental que causou a doença?

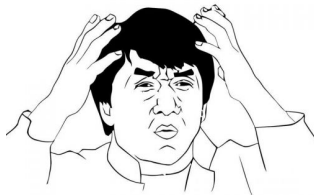
**Qual é a probabilidade de se observar 5 casos *nesta* escola, em um ano?**

## Pergunta correta

**Qual é a probabilidade de se observar 5 casos *em alguma* escola, em um ano?**

# E agora, José?

Como levar em conta as comparações múltiplas sem ser induzido ao erro, pelo teste t?



- Vimos que o **teste t** pode ser usado para comparar duas médias
- Assumindo que atendemos às premissas do teste t, precisamos levar em conta:
  - variabilidade dos grupos
  - tamanho do estudo (n)

Requisitos não óbvios (além das médias)

desvio padrão + n = erro padrão

## 1 Comparações múltiplas

## 2 Análise de Variância (ANOVA)

- ANOVA um fator (One-way ANOVA)
- O teste F
- Pós teste
- Two-way ANOVA

## 3 Exercício

## 4 Encerramento

## Exemplo 13.5

Hetland, et. al (1993) pesquisaram alterações hormonais em mulheres corredoras. Mediram o nível de hormônio luteinizante (LH) em três grupos:

- 1 sedentárias
- 2 corredoras recreacionais
- 3 corredoras de elite



## Exemplo 13.5

**Table 30.1.** LH Levels in Three Groups of Women

Group	$\log(\text{LH}) \pm \text{SEM}$	N
Nonrunners	$0.52 \pm 0.027$	88
Recreational runners	$0.38 \pm 0.034$	89
Elite runners	$0.40 \pm 0.049$	28

- Com estas informações, podemos construir uma tabela ANOVA
- $H_0$ : todas as médias são iguais

## Exemplo 13.5

Table 30.2. InStat Results for One-Way ANOVA

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatments (between groups)	2	0.92681	0.4634
Residuals (within groups)	202	16.450	0.0814
Total	204	17.377	

F = 5.690

The P value is 0.0039, considered very significant.

Variation among column means is significantly greater than expected by chance.

- A razão entre as Somas dos Quadrados:  
 $0.93/17.38 = 5.3\%$
- 5.3% da variabilidade pode ser explicada pelas diferenças *entre os grupos*
- (lembra do  $r^2$ ?)

- Este método é chamado one-way (ou 1-way) ANOVA, pois tem um fator categórico
- A premissa é que pode-se *modelar* a relação entre um desfecho quantitativo e um preditor categórico + um erro aleatório
- A variável dependente do exemplo é o LH
- A (única) variável independente é o Grupo

- Quando os grupos têm médias diferentes, parte da variabilidade total é devido a esta diferença
- O resto da variabilidade é devido apenas às variâncias intra-grupos
- A ANOVA tenta *desembaraçar* esta decomposição, assumindo a hipótese nula.

- O nome *Análise de Variância* vem do critério usado para comparar as médias
- O teste de hipótese é baseado na comparação entre as variâncias intra- e inter grupos
- Estas variâncias aparecem na tabela como “Média dos Quadrados”
- Lembrete: a variância é a média dos desvios elevados ao quadrado

## 1 Comparações múltiplas

## 2 Análise de Variância (ANOVA)

- ANOVA um fator (One-way ANOVA)
- O teste F
- Pós teste
- Two-way ANOVA

## 3 Exercício

## 4 Encerramento

- Se as médias forem iguais, a variância intra-grupo deve ser “igual” à variância inter-grupo
- Calculando-se a *razão* entre a variância, esperamos que seja próximo de 1
- $$\text{razão} = F = \frac{\text{Entre grupos}}{\text{Intra grupos}}$$
- Uma razão muito maior que 1 indica que há mais variância entre os grupos do que o esperado
- Obs: o teste leva em conta os graus de liberdade do numerador e denominador

## Exemplo 13.5

Table 30.2. InStat Results for One-Way ANOVA

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatments (between groups)	2	0.9268	0.4634
Residuals (within groups)	202	16.450	0.0814
Total	204	17.377	

$F = 5.690$

The P value is 0.0039, considered very significant.  
Variation among column means is significantly greater than expected by chance.

- Razão entre as variâncias:

$$F = 0.4634 / 0.0814 = 5.69 \gg 1 \text{ (mesmo considerando o } n \text{ de cada grupo)}$$

- $p = 0.0039$

- Pergunta: Como você redigiria este resultado?



## Resposta

Sabemos apenas que pelo menos um dos grupos é diferente dos outros. Mas qual(is)?

Ainda não estamos prontos para redigir o resultado!

## 1 Comparações múltiplas

## 2 Análise de Variância (ANOVA)

- ANOVA um fator (One-way ANOVA)
- O teste F
- **Pós teste**
- Two-way ANOVA

## 3 Exercício

## 4 Encerramento

- O teste de ANOVA é apenas a primeira parte!<sup>2</sup>
- O p-valor do teste F indica o quão raro é encontrar uma discrepância tão grande (ou maior) entre as médias dos grupos, ao acaso
- Mas isso não nos ajuda a saber qual grupo é diferente dos outros.
- Para esta outra pergunta, precisamos de outro método

---

<sup>2</sup>Está com saudade do teste t?

- Como vimos, não podemos simplesmente fazer vários testes t
- Mas podemos *ajustar* os p-valores destes testes, para compensar a *inflação* destes resultados
- Isso pode ser feito de várias maneiras

- **Correção de Bonferroni**
- Correção para tendências
- **Teste “honesto” das diferenças, de Tukey (HSD)**
- Método de Scheffe
- Teste de Dunnet

- Os dois mais usados são Bonferroni e Tukey
- O teste de Bonferroni ajusta o p-valor dividindo pelo número de comparações, mas seus ICs são muito grandes
- O teste de Tukey é mais conservador, mas pode acusar diferenças significativas com mais frequência
- Infelizmente não há consenso sobre critérios de escolha

## Exemplo 13.5

**Table 30.3.** InStat Results for Tukey's Post Test

Comparison	Mean Difference	q	P Value
Nonrunners vs Recreational	0.1400	2.741	** P < 0.01
Nonrunners vs Elite	0.1200	2.741	ns P > 0.05
Recreational vs Elite	-0.02000	0.4574	ns P > 0.05

Difference	Mean Difference	Lower 95% CI	Upper 95% CI
Nonrunners — Recreational	0.1400	0.03823	0.2418
Nonrunners — Elite	0.1200	-0.02688	0.2669
Recreational — Elite	-0.02000	-0.1667	0.1267

- Pergunta: Como você redigiria este resultado?

## 1 Comparações múltiplas

## 2 Análise de Variância (ANOVA)

- ANOVA um fator (One-way ANOVA)
- O teste F
- Pós teste
- Two-way ANOVA

## 3 Exercício

## 4 Encerramento



# ANOVA dois parâmetros



Tópicos  
Avançados

Felipe  
Figueiredo

Comparações  
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator  
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

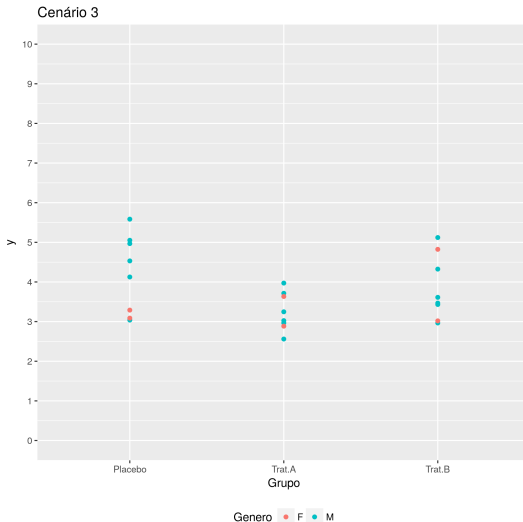
Two-way ANOVA

Exercício

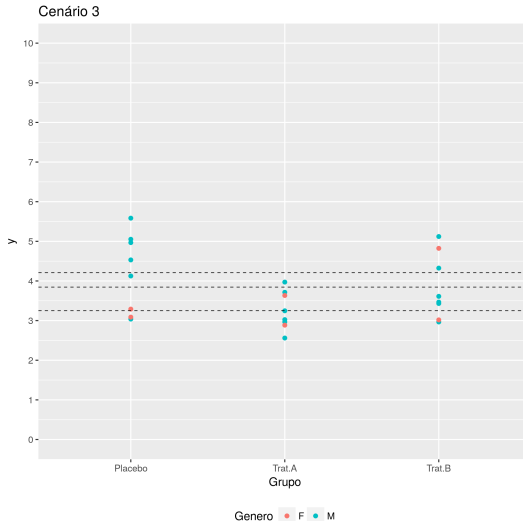
Encerramento

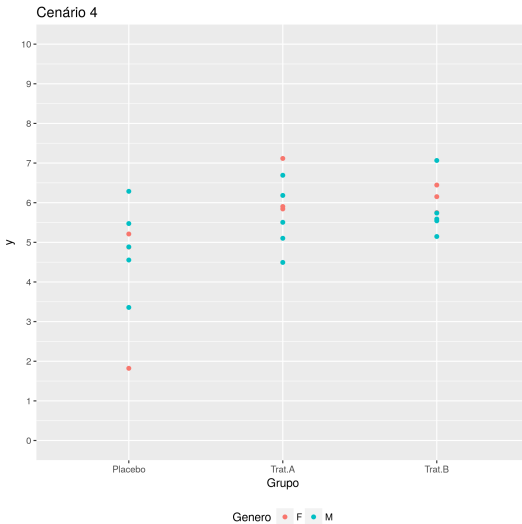
- Nas seções anteriores vimos como executar o ANOVA com uma var. independente categórica
- O teste ANOVA permite qualquer quantidade de variáveis independentes!
- Vejamos o exemplo inicial da aula, com duas: incluindo o Gênero
- Agora a pergunta é dupla: as médias são diferentes, quando estratificamos por uma segunda var. categórica?

# Esses 3 grupos têm médias diferentes, controlando por Gênero?

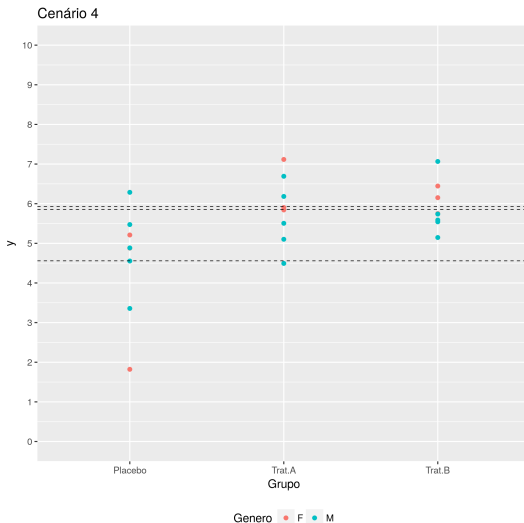


# Esses 3 grupos têm médias diferentes, controlando por Gênero?



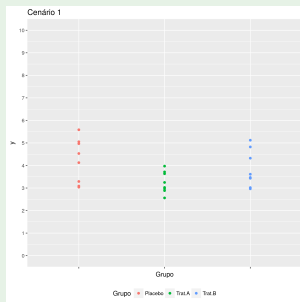


# E estes 3 grupos?



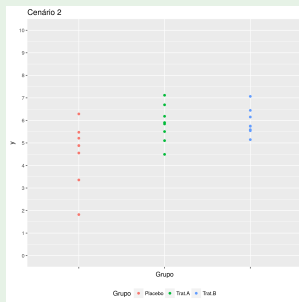
## Cenário 1 - ANOVA one-way

```
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Grupo      2   3.753   1.8763    3.025 0.0701 .
Residuals 21 13.026   0.6203
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



## Cenário 2 - ANOVA one-way

```
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Grupo      2   9.499   4.749   4.775 0.0195 *
Residuals 21  20.889   0.995
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



## Cenário 2 - Tukey

Tukey multiple comparisons of means  
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = y ~ Grupo, data = cenario2.long)

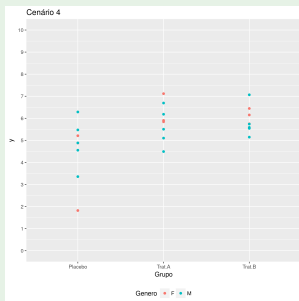
\$Grupo		diff	lwr	upr	p adj
Trat.A-Placebo	1.29615978	0.0392117	2.553108	0.0424949	
Trat.B-Placebo	1.36988994	0.1129419	2.626838	0.0311078	
Trat.B-Trat.A	0.07373016	-1.1832179	1.330678	0.9880276	



## Cenário 4 - ANOVA two-way (sem interações)

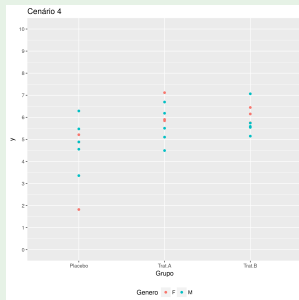
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	9.499	4.749	4.548	0.0236 *
Genero	1	0.002	0.002	0.002	0.9690
Residuals	20	20.887	1.044		

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



## Cenário 4 - ANOVA two-way (com interações)

```
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Grupo    2  20.001   10.000    9.935 0.00124 **
Genero    1    3.665    3.665    3.641 0.07246 .
Grupo:Genero  2    3.157    1.579    1.568 0.23557
Residuals 18  18.119    1.007
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



## Cenário 4 - ANOVA two-way (com interações)

Tukey multiple comparisons of means  
95% family-wise confidence level

```
Fit: aov(formula = y ~ Grupo * Genero, data = cenario2.long)
```

```
$Grupo
              diff            lwr            upr            p adj
Trat.A-Placebo 1.5514853  0.2712011  2.831770  0.0164455
Trat.B-Placebo 2.1703237  0.8900395  3.450608  0.0011265
Trat.B-Trat.A  0.6188384 -0.6614458  1.899123  0.4494538
```

```
$Genero
              diff            lwr            upr            p adj
M-F 0.8071626 -0.08158125  1.695906  0.0724633
```

```
$ 'Grupo:Genero'
              diff            lwr            upr            p adj
Trat.A:F-Placebo:F  2.1160544 -0.4873461  4.719455  0.1523427
Trat.B:F-Placebo:F  1.5879521 -1.0154484  4.191353  0.4122593
Placebo:M-Placebo:F  0.7976679 -1.5308843  3.126220  0.8795976
Trat.A:M-Placebo:F  2.0104118 -0.3181404  4.338964  0.1143524
Trat.B:M-Placebo:F  3.3174146  0.9888624  5.645967  0.0030192
Trat.B:F-Trat.A:F  -0.5281023 -3.1315028  2.075298  0.9857698
Placebo:M-Trat.A:F  -1.3183865 -3.6469387  1.010166  0.4902167
Trat.A:M-Trat.A:F  -0.1056426 -2.4341948  2.222910  0.9999896
Trat.B:M-Trat.A:F  1.2013602 -1.1271920  3.529912  0.5849474
Placebo:M-Trat.B:F  -0.7902842 -3.1188364  1.538268  0.8835616
Trat.A:M-Trat.B:F  0.4224597 -1.9060925  2.751012  0.9913898
Trat.B:M-Trat.B:F  1.7294625 -0.5990897  4.058015  0.2216761
```

## Leitura obrigatória

- Capítulo 13
- Capítulo 30

## Exercícios

Capítulo 13, problema: 1