

# Testes de Hipóteses II

O p-valor, e testes com duas amostras

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

- 1 Testes com uma amostra
  - Recapitulando
  - O p-valor
  - Resumo
  
- 2 Testes com duas amostras

## 1 Testes com uma amostra

- Recapitulando
- O p-valor
- Resumo

## 2 Testes com duas amostras

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

## Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

## Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

## Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

## Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

## Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula



- Este processo sistemático pode ser aplicado a diversos tipos de hipóteses em estudos com dados quantitativos.
- Atualmente tem se usado com mais frequência uma metodologia equivalente usando o **p-valor** (ou valor P).
- Diferença: ao invés de comparar diretamente os Z-escores (região crítica sob a curva), vamos comparar as probabilidades destes (significância)
- Envolve premissas sutis e a interpretação deve ser tomada cuidadosamente (veja artigos complementares no site).

- Este processo sistemático pode ser aplicado a diversos tipos de hipóteses em estudos com dados quantitativos.
- Atualmente tem se usado com mais frequência uma metodologia equivalente usando o **p-valor** (ou valor P).
- Diferença: ao invés de comparar diretamente os Z-escores (região crítica sob a curva), vamos comparar as probabilidades destes (significância)
- Envolve premissas sutis e a interpretação deve ser tomada cuidadosamente (veja artigos complementares no site).

- Este processo sistemático pode ser aplicado a diversos tipos de hipóteses em estudos com dados quantitativos.
- Atualmente tem se usado com mais frequência uma metodologia equivalente usando o **p-valor** (ou valor P).
- Diferença: ao invés de comparar diretamente os Z-escores (região crítica sob a curva), vamos comparar as probabilidades destes (significância)
- Envolve premissas sutis e a interpretação deve ser tomada cuidadosamente (veja artigos complementares no site).

- Este processo sistemático pode ser aplicado a diversos tipos de hipóteses em estudos com dados quantitativos.
- Atualmente tem se usado com mais frequência uma metodologia equivalente usando o **p-valor** (ou valor P).
- Diferença: ao invés de comparar diretamente os Z-escores (região crítica sob a curva), vamos comparar as probabilidades destes (significância)
- Envolve premissas sutis e a interpretação deve ser tomada cuidadosamente (veja artigos complementares no site).

## 1 Testes com uma amostra

- Recapitulando
- O p-valor
- Resumo

## 2 Testes com duas amostras

## Definition

Assumindo que a hipótese nula seja verdadeira, o **p-valor** de um teste de hipóteses é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com valores tão extremos, ou mais extremos que aquele observado.

O p-valor **é**:

- Uma estatística (i.e., depende da amostra - dados e tamanho)
- A probabilidade (condicional) de se observar o resultado ao acaso **dado que** a  $H_0$  é verdadeira.
- Uma medida da força da evidência contra a  $H_0$ .

## Definition

Assumindo que a hipótese nula seja verdadeira, o **p-valor** de um teste de hipóteses é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com valores tão extremos, ou mais extremos que aquele observado.

O p-valor **é**:

- Uma estatística (i.e., depende da amostra - dados e tamanho)
- A probabilidade (condicional) de se observar o resultado ao acaso **dado que** a  $H_0$  é verdadeira.
- Uma medida da força da evidência contra a  $H_0$ .

## Definition

Assumindo que a hipótese nula seja verdadeira, o **p-valor** de um teste de hipóteses é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com valores tão extremos, ou mais extremos que aquele observado.

O p-valor **é**:

- Uma estatística (i.e., depende da amostra - dados e tamanho)
- A probabilidade (condicional) de se observar o resultado ao acaso **dado que** a  $H_0$  é verdadeira.
- Uma medida da força da evidência contra a  $H_0$ .



## Definition

Assumindo que a hipótese nula seja verdadeira, o **p-valor** de um teste de hipóteses é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com valores tão extremos, ou mais extremos que aquele observado.

O p-valor **é**:

- Uma estatística (i.e., depende da amostra - dados e tamanho)
- A probabilidade (condicional) de se observar o resultado ao acaso **dado que** a  $H_0$  é verdadeira.
- Uma medida da força da evidência contra a  $H_0$ .

# O p-valor



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Recapitulando

O p-valor  
Resumo

Testes com  
duas  
amostras

## Como utilizar

- Quanto menor o p-valor, mais evidências para rejeitar a hipótese nula.
- O ponto de corte mais utilizado é a significância de 5%
- Assim, qualquer  $p \leq 0.05$  é estatisticamente significativa.

## Como utilizar

- Quanto menor o p-valor, mais evidências para rejeitar a hipótese nula.
- O ponto de corte mais utilizado é a significância de 5%
- Assim, qualquer  $p \leq 0.05$  é estatisticamente significativa.

## Como utilizar

- Quanto menor o p-valor, mais evidências para rejeitar a hipótese nula.
- O ponto de corte mais utilizado é a significância de 5%
- Assim, qualquer  $p \leq 0.05$  é estatisticamente significativa.

## Como utilizar

- Quanto menor o p-valor, mais evidências para rejeitar a hipótese nula.
- O ponto de corte mais utilizado é a significância de 5%
- Assim, qualquer  $p \leq 0.05$  é estatisticamente significativa.

## Como calcular

- calcular a estatística de teste apropriada para a situação (teste Z, teste t, etc.)
- encontrar a probabilidade  $p$  correspondente a esta estatística (por exemplo, na tabela apropriada, ou com uma ferramenta computacional)
- comparar o p-valor encontrado com a significância do estudo

## Como calcular

- calcular a estatística de teste apropriada para a situação (teste Z, teste t, etc.)
- encontrar a probabilidade  $p$  correspondente a esta estatística (por exemplo, na tabela apropriada, ou com uma ferramenta computacional)
- comparar o p-valor encontrado com a significância do estudo

## Como calcular

- calcular a estatística de teste apropriada para a situação (teste Z, teste t, etc.)
- encontrar a probabilidade  $p$  correspondente a esta estatística (por exemplo, na tabela apropriada, ou com uma ferramenta computacional)
- comparar o p-valor encontrado com a significância do estudo



## Como calcular

- calcular a estatística de teste apropriada para a situação (teste Z, teste t, etc.)
- encontrar a probabilidade  $p$  correspondente a esta estatística (por exemplo, na tabela apropriada, ou com uma ferramenta computacional)
- comparar o p-valor encontrado com a significância do estudo

# O p-valor



## Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

### Testes com uma amostra

Recapitulando

O p-valor

Resumo

### Testes com duas amostras

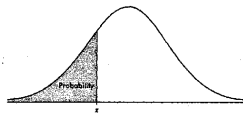


TABLE A: STANDARD NORMAL PROBABILITIES

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0015	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

# Exemplo



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Recapitulando

O p-valor

Resumo

Testes com  
duas  
amostras

## Example

Um neurologista está testando o efeito de uma droga no tempo de resposta de um certo estímulo neurológico. Para isto, ele injeta uma dose da droga em **100** ratos, cria os estímulos neurológicos e observa o tempo de resposta em cada animal. O neurologista sabe que o tempo de resposta médio de ratos que não receberam a droga é de **1.2 segundos**. O tempo de resposta médio dos ratos injetados foi de **1.05 segundos**, com desvio padrão amostral de **0.5 segundos**. Você acha que a droga tem efeito no tempo de resposta do estímulo?

Fonte: Khan Academy

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .



## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $$Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .



# O p-valor



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Recapitulando

O p-valor  
Resumo

Testes com  
duas  
amostras

Cuidado! O p-valor **não é**:

- a probabilidade de que a hipótese nula seja verdadeira
- a probabilidade de que a diferença observada seja devido ao acaso

Estes são erros comuns de interpretação.

O p-valor assume que (1) a hipótese é verdadeira, e (2) que a única causa da diferença é devida ao acaso, portanto não pode ser usado para concluir suas próprias premissas.

“The concept of a p value is not simple and any statements associated with it must be considered cautiously.”

Dorey, F. 2010 Clin Orthop Relat Res.

# O p-valor



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Recapitulando

O p-valor

Resumo

Testes com  
duas  
amostras

Cuidado! O p-valor **não é**:

- a probabilidade de que a hipótese nula seja verdadeira
- a probabilidade de que a diferença observada seja devido ao acaso

Estes são erros comuns de interpretação.

O p-valor assume que (1) a hipótese é verdadeira, e (2) que a única causa da diferença é devida ao acaso, portanto não pode ser usado para concluir suas próprias premissas.

“The concept of a p value is not simple and any statements associated with it must be considered cautiously.”

Dorey, F. 2010 Clin Orthop Relat Res.

# O p-valor



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Recapitulando

O p-valor

Resumo

Testes com  
duas  
amostras

Cuidado! O p-valor **não é**:

- a probabilidade de que a hipótese nula seja verdadeira
- a probabilidade de que a diferença observada seja devido ao acaso

Estes são erros comuns de interpretação.

O p-valor assume que (1) a hipótese é verdadeira, e (2) que a única causa da diferença é devida ao acaso, portanto não pode ser usado para concluir suas próprias premissas.

“The concept of a p value is not simple and any statements associated with it must be considered cautiously.”

Dorey, F. 2010 Clin Orthop Relat Res.

## 1 Testes com uma amostra

- Recapitulando
- O p-valor
- **Resumo**

## 2 Testes com duas amostras

## Interpretação do p-valor

- Um valor pequeno para o p-valor (tipicamente  $p \leq 0.05$ ) representa forte evidência para rejeitar a hipótese nula, então deve-se rejeitá-la.
- Um valor alto para o p-valor (tipicamente  $p \geq 0.05$ ) representa pouca evidência contra a hipótese nula, então não se deve rejeitá-la
- Um valor próximo do ponto de corte (0.05) é considerado marginal, portanto “qualquer decisão pode ser tomada”. Sempre apresente seu p-valor para que o leitor possa tirar suas próprias conclusões.

Fonte: Rumsey, D. (Statistics for Dummies, 2nd ed.)



## Interpretação do p-valor

- Um valor pequeno para o p-valor (tipicamente  $p \leq 0.05$ ) representa forte evidência para rejeitar a hipótese nula, então deve-se rejeitá-la.
- Um valor alto para o p-valor (tipicamente  $p \geq 0.05$ ) representa pouca evidência contra a hipótese nula, então não se deve rejeitá-la
- Um valor próximo do ponto de corte (0.05) é considerado marginal, portanto “qualquer decisão pode ser tomada”. Sempre apresente seu p-valor para que o leitor possa tirar suas próprias conclusões.

Fonte: Rumsey, D. (Statistics for Dummies, 2nd ed.)

## Interpretação do p-valor

- Um valor pequeno para o p-valor (tipicamente  $p \leq 0.05$ ) representa forte evidência para rejeitar a hipótese nula, então deve-se rejeitá-la.
- Um valor alto para o p-valor (tipicamente  $p \geq 0.05$ ) representa pouca evidência contra a hipótese nula, então não se deve rejeitá-la
- Um valor próximo do ponto de corte (0.05) é considerado marginal, portanto “qualquer decisão pode ser tomada”. Sempre apresente seu p-valor para que o leitor possa tirar suas próprias conclusões.

Fonte: Rumsey, D. (Statistics for Dummies, 2nd ed.)

## Interpretação do p-valor

- Um valor pequeno para o p-valor (tipicamente  $p \leq 0.05$ ) representa forte evidência para rejeitar a hipótese nula, então deve-se rejeitá-la.
- Um valor alto para o p-valor (tipicamente  $p \geq 0.05$ ) representa pouca evidência contra a hipótese nula, então não se deve rejeitá-la
- Um valor próximo do ponto de corte (0.05) é considerado marginal, portanto “qualquer decisão pode ser tomada”. Sempre apresente seu p-valor para que o leitor possa tirar suas próprias conclusões.

Fonte: Rumsey, D. (Statistics for Dummies, 2nd ed.)

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Frequentemente precisamos dividir os dados em dois grupos e comparar as médias.
- Isto pode ser usado para se estudar o efeito de um tratamento em relação a um grupo controle
- ou mesmo para se comparar dois tratamentos diferentes.

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Frequentemente precisamos dividir os dados em dois grupos e comparar as médias.
- Isto pode ser usado para se estudar o efeito de um tratamento em relação a um grupo controle
- ou mesmo para se comparar dois tratamentos diferentes.

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Frequentemente precisamos dividir os dados em dois grupos e comparar as médias.
- Isto pode ser usado para se estudar o efeito de um tratamento em relação a um grupo controle
- ou mesmo para se comparar dois tratamentos diferentes.

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Para testar a hipótese de que duas médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  são diferentes, consideramos a diferença  $\mu_X - \mu_Y$
- Raciocínio: se as médias forem aproximadamente iguais, a diferença será aproximadamente zero
- Procedemos com o teste de hipótese adequado para a situação

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Para testar a hipótese de que duas médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  são diferentes, consideramos a diferença  $\mu_X - \mu_Y$
- Raciocínio: se as médias forem aproximadamente iguais, a diferença será aproximadamente zero
- Procedemos com o teste de hipótese adequado para a situação



# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

- Para testar a hipótese de que duas médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  são diferentes, consideramos a diferença  $\mu_X - \mu_Y$
- Raciocínio: se as médias forem aproximadamente iguais, a diferença será aproximadamente zero
- Procedemos com o teste de hipótese adequado para a situação

# Testes com duas amostras



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

Lembre-se que para uma amostra usamos a seguinte estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Para duas amostras, é razoável usarmos as estatísticas tanto do grupo 1 quanto do grupo 2.

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}}$$

onde

$$\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Mas usaremos uma versão simplificada...

Assumindo que  $H_0$  é verdadeira, temos que  $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$ , portanto a estatística de teste que usaremos será:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

# Exemplo



Testes de  
Hipóteses II

Felipe  
Figueiredo

Testes com  
uma amostra

Testes com  
duas  
amostras

## Example

Queremos avaliar a eficiência de uma nova dieta reduzida em gordura no tratamento de obesidade. Seleccionamos aleatoriamente 100 pessoas obesas para o grupo 1, que receberão a dieta com pouca gordura. Seleccionamos outras 100 pessoas obesas para o grupo 2 que receberão a mesma quantidade de comida, com proporção normal de gordura. Após 4 meses, a perda de peso média no grupo 1 foi de 9.31 lbs ( $s=4.67$ ) e no grupo 2 foi de 7.40 lbs ( $s=4.04$ ). Você acha que essa nova dieta é eficaz na perda de peso?

Fonte: Khan Academy

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$



## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)
- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31$ ,  $s_1 = 4.67$ ,  $\bar{x}_2 = 7.40$ ,  $s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31$ ,  $s_1 = 4.67$ ,  $\bar{x}_2 = 7.40$ ,  $s_2 = 4.04$

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$

- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$

- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso

## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso

## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso

## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso



## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso