

# Testes de Hipóteses II

O p-valor, e testes com duas amostras

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

## Sumário

### 1 Testes com uma amostra

- Recapitulando
- O p-valor
- Resumo

### 2 Testes com duas amostras

## Recapitulando

Vimos como formular hipóteses estatísticas seguindo o procedimento abaixo:

### Teste de hipóteses

- 1 Formular as hipóteses nula e alternativa
- 2 Identificar a região crítica (região de rejeição)
- 3 Calcular a estatística de teste adequada
- 4 Rejeitar ou não a hipótese nula

- Este processo sistemático pode ser aplicado a diversos tipos de hipóteses em estudos com dados quantitativos.
- Atualmente tem se usado com mais frequência uma metodologia equivalente usando o **p-valor** (ou valor P).
- Diferença: ao invés de comparar diretamente os Z-escores (região crítica sob a curva), vamos comparar as probabilidades destes (significância)
- Envolve premissas sutis e a interpretação deve ser tomada cuidadosamente (veja artigos complementares no site).

# O p-valor



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

## Definition

Assumindo que a hipótese nula seja verdadeira, o **p-valor** de um teste de hipóteses é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com valores tão extremos, ou mais extremos que aquele observado.

O p-valor **é**:

- Uma estatística (i.e., depende da amostra - dados e tamanho)
- A probabilidade (condicional) de se observar o resultado ao acaso **dado que** a  $H_0$  é verdadeira.
- Uma medida da força da evidência contra a  $H_0$ .

# O p-valor



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

## Como utilizar

- Quanto menor o p-valor, mais evidências para rejeitar a hipótese nula.
- O ponto de corte mais utilizado é a significância de 5%
- Assim, qualquer  $p \leq 0.05$  é estatisticamente significativo.

# O p-valor



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

## Como calcular

- calcular a estatística de teste apropriada para a situação (teste Z, teste t, etc.)
- encontrar a probabilidade  $p$  correspondente a esta estatística (por exemplo, na tabela apropriada, ou com uma ferramenta computacional)
- comparar o p-valor encontrado com a significância do estudo

# O p-valor



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

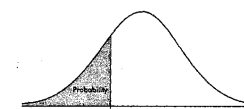


TABLE A: STANDARD NORMAL PROBABILITIES

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0001	.0003	.0005	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0021
-3.3	.0005	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026
-3.2	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028
-3.1	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030
-3.0	.0011	.0013	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032
-2.9	.0013	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034
-2.8	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036
-2.7	.0019	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038
-2.6	.0021	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040
-2.5	.0024	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042
-2.4	.0026	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044
-2.3	.0028	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046
-2.2	.0030	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048
-2.1	.0032	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050
-2.0	.0034	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052
-1.9	.0036	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054
-1.8	.0038	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056
-1.7	.0040	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058
-1.6	.0042	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060
-1.5	.0044	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062
-1.4	.0046	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064
-1.3	.0048	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066
-1.2	.0050	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068
-1.1	.0052	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070
-1.0	.0054	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072
-0.9	.0056	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074
-0.8	.0058	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076
-0.7	.0060	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078
-0.6	.0062	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080
-0.5	.0064	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082
-0.4	.0066	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084
-0.3	.0068	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086
-0.2	.0070	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088
-0.1	.0072	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090
0.0	.0074	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092
0.1	.0076	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094
0.2	.0078	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096
0.3	.0080	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098
0.4	.0082	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100
0.5	.0084	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102
0.6	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104
0.7	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106
0.8	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108
0.9	.0092	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110
1.0	.0094	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112
1.1	.0096	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114
1.2	.0098	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116
1.3	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118
1.4	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120
1.5	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122
1.6	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124
1.7	.0108	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126
1.8	.0110	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128
1.9	.0112	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130
2.0	.0114	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132
2.1	.0116	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134
2.2	.0118	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136
2.3	.0120	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138
2.4	.0122	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140
2.5	.0124	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142
2.6	.0126	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144
2.7	.0128	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146
2.8	.0130	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148
2.9	.0132	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150
3.0	.0134	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152
3.1	.0136	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154
3.2	.0138	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156
3.3	.0140	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158
3.4	.0142	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160
3.5	.0144	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162
3.6	.0146	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164
3.7	.0148	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166
3.8	.0150	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168
3.9	.0152	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170
4.0	.0154	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172
4.1	.0156	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174
4.2	.0158	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176
4.3	.0160	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178
4.4	.0162	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180
4.5	.0164	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182
4.6	.0166	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182	.0184
4.7	.0168	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182	.0184	.0186
4.8	.0170	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182	.0184	.0186	.0188
4.9	.0172	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182	.0184	.0186	.0188	.0190
5.0	.0174	.0176	.0178	.0180	.0182	.0184	.0186	.0188	.0190	.0192

## Exemplo



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

### Example

Um neurologista está testando o efeito de uma droga no tempo de resposta de um certo estímulo neurológico. Para isto, ele injeta uma dose da droga em 100 ratos, cria os estímulos neurológicos e observa o tempo de resposta em cada animal. O neurologista sabe que o tempo de resposta médio de ratos que não receberam a droga é de 1.2 segundos. O tempo de resposta médio dos ratos injetados foi de 1.05 segundos, com desvio padrão amostral de 0.5 segundos. Você acha que a droga tem efeito no tempo de resposta do estímulo?

Fonte: Khan Academy

## Exemplo



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

### Example

- Dados:  $\mu = 1.2$ ,  $\bar{x} = 1.05$ ,  $s = 0.5$ ,  $n = 100$
- $H_0 : \mu = 1.2$ ,  $H_1 : \mu < 1.2$  (teste unicaudal à esquerda)
- $n$  é grande ( $n > 30$ ), então usamos  $\sigma \approx s$ , e fazemos o teste Z:
- $Z = \frac{1.05 - 1.2}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} = -3$
- Consultando a tabela Z, observamos que este Z-escore corresponde à probabilidade  $p = 0.0013$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## O p-valor



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

Cuidado! O p-valor não é:

- a probabilidade de que a hipótese nula seja verdadeira
- a probabilidade de que a diferença observada seja devido ao acaso

Estes são erros comuns de interpretação.

O p-valor assume que (1) a hipótese é verdadeira, e (2) que a única causa da diferença é devida ao acaso, portanto não pode ser usado para concluir suas próprias premissas.

“The concept of a p value is not simple and any statements associated with it must be considered cautiously.”

Dorey, F. 2010 Clin Orthop Relat Res.

## Resumo



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra  
Recapitulando  
O p-valor  
Resumo

Testes com duas amostras

### Interpretação do p-valor

- Um valor pequeno para o p-valor (tipicamente  $p \leq 0.05$ ) representa forte evidência para rejeitar a hipótese nula, então deve-se rejeitá-la.
- Um valor alto para o p-valor (tipicamente  $p \geq 0.05$ ) representa pouca evidência contra a hipótese nula, então não se deve rejeitá-la
- Um valor próximo do ponto de corte (0.05) é considerado marginal, portanto “qualquer decisão pode ser tomada”. Sempre apresente seu p-valor para que o leitor possa tirar suas próprias conclusões.

Fonte: Rumsey, D. (Statistics for Dummies, 2nd ed.)

## Testes com duas amostras



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra

Testes com duas amostras

- Frequentemente precisamos dividir os dados em dois grupos e comparar as médias.
- Isto pode ser usado para se estudar o efeito de um tratamento em relação a um grupo controle
- ou mesmo para se comparar dois tratamentos diferentes.

## Testes com duas amostras



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra

Testes com duas amostras

- Para testar a hipótese de que duas médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  são diferentes, consideramos a diferença  $\mu_X - \mu_Y$
- Raciocínio: se as médias forem aproximadamente iguais, a diferença será aproximadamente zero
- Procedemos com o teste de hipótese adequado para a situação

## Testes com duas amostras



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra

Testes com duas amostras

Lembre-se que para uma amostra usamos a seguinte estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Para duas amostras, é razoável usarmos as estatísticas tanto do grupo 1 quanto do grupo 2.

## Testes com duas amostras



Testes de Hipóteses II

Felipe Figueiredo

Testes com uma amostra

Testes com duas amostras

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

onde

$$\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Mas usaremos uma versão simplificada. . .

Assumindo que  $H_0$  é verdadeira, temos que  $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$ , portanto a estatística de teste que usaremos será:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

## Example

Queremos avaliar a eficiência de uma nova dieta reduzida em gordura no tratamento de obesidade. Seleccionamos aleatoriamente 100 pessoas obesas para o grupo 1, que receberão a dieta com pouca gordura. Seleccionamos outras 100 pessoas obesas para o grupo 2 que receberão a mesma quantidade de comida, com proporção normal de gordura. Após 4 meses, a perda de peso média no grupo 1 foi de 9.31 lbs ( $s=4.67$ ) e no grupo 2 foi de 7.40 lbs ( $s=4.04$ ). Você acha que essa nova dieta é eficaz na perda de peso?

Fonte: Khan Academy

## Example

- Dados:  $\bar{x}_1 = 9.31, s_1 = 4.67, \bar{x}_2 = 7.40, s_2 = 4.04$
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_{(x_1 - x_2)} = 0$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$  (teste unicaudal à direita)
- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.91$
- $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4.67^2}{100} + \frac{4.04^2}{100}} \approx 0.617$
- Estatística de teste

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1.91}{0.617} \approx 3.09$$

## Example

- Encontramos a estatística de teste  $z = 3.09$
- Consultando a tabela Z, a probabilidade correspondente é  $p = 0.001$
- Como  $p < 0.05$ , concluímos que há evidências para rejeitar  $H_0$
- Assim, há evidências de que a nova dieta resulta em perda de peso