Análise Descritiva II

Medidas sumárias

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Sumário

Medidas Sumárias

- Medidas sumárias resumem a informação contida nos dados em um pequeno conjunto de números.
- Medidas sumárias de populações se chamam parâmetros, e são representadas por letras gregas (μ, σ, etc).
- Medidas sumárias de amostras se chamam estatísticas e são representadas por letras comuns ($\bar{x}$, s, etc).
- Geralmente trabalhamos com estatísticas descritivas.

Média

- A média (aritmética) leva em conta todos os dados disponíveis, e indica (em muitas situações) o ponto de maior acumulação de dados.
- Notação: média populacional (μ)

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N}$$

- Notação: média amostral ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

- Nem sempre pertence ao dataset.

Média

Example

Foram observados os seguintes níveis de colesterol de uma amostra de pacientes. Qual é o nível médio de colesterol nestes pacientes?

$$\begin{aligned} x_1 &= 142 \\ x_2 &= 144 \\ x_3 &= 176 \\ x_4 &= 203 \\ x_5 &= 134 \\ x_6 &= 191 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{990}{6} = 165$$

Mediana

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Definition

A mediana é o dado que ocupa a posição central nos dados ordenados.

- Notação: M_d
- Divide o dataset ao meio
- Costuma pertencer ao dataset

Mediana

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

- Para se calcular a mediana, deve-se ordenar os dados.
- Encontrar o valor do meio se n for ímpar.
- Encontrar a média dos dois valores do meio se n for par.

Example

Conforme no exemplo anterior

$$\begin{aligned} x_5 &= 134 \\ x_1 &= 142 \\ x_2 &= 144 \\ x_3 &= 176 \\ x_6 &= 191 \\ x_4 &= 203 \end{aligned}$$

$$M_d = \frac{144 + 176}{2} = 160$$

Moda

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Definition

A moda é o dado que ocorre com maior frequência.

- Notação: M_o
- Sempre pertence ao dataset.
- Não é necessariamente única: o dataset pode ser bimodal, ou mesmo multimodal.
- Não necessariamente existe: amodal

Moda

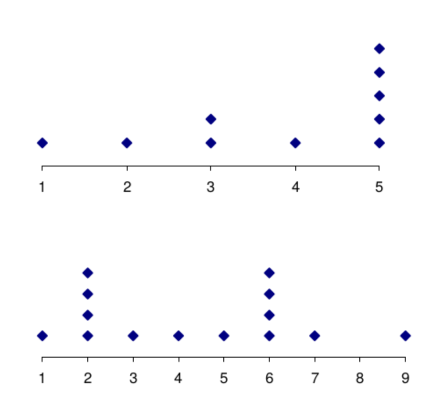


Figura: Diagrama de pontos para dados (a) unimodal, (b) bimodal (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Comparação entre as Medidas Centrais

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

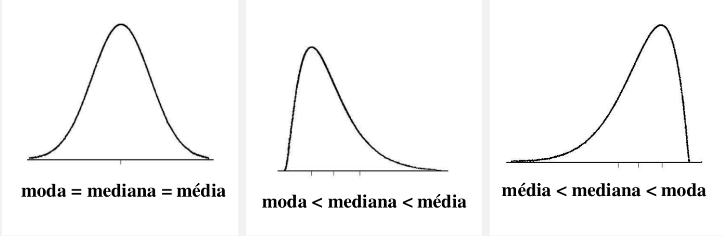


Figura: (a) Simétrica, (b) Assimétrica à esquerda, (c) Assimétrica à direita (Fonte: Reis, Reis 2002)

Robustez da Média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

- A média é mais usada, mas não é robusta.
- É distorcida na presença de *outliers* (valores discrepantes, extremos)

Comparação entre as Medidas Centrais

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Example

Considere o seguinte dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 7\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \dfrac{1+1+2+4+7}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

Comparação entre as Medidas Centrais

Example

Considere agora este outro dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 32\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \frac{1+1+2+4+32}{5} = \frac{40}{5} = 8$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

Exercícios

Exercício

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A média amostral ($\bar{x}$)
2. A mediana (M_d)
3. A moda (M_o)

Solução

1. $\bar{x} = \frac{35+33+37+33+34}{5} = 34.4$
2. $M_d = 34$
3. $M_o = 33$

Resumo

- Média mais usual
- Mediana na presença de *outliers*
- Moda quando a distribuição das frequências for bimodal ou multimodal.

Variabilidade em Medições

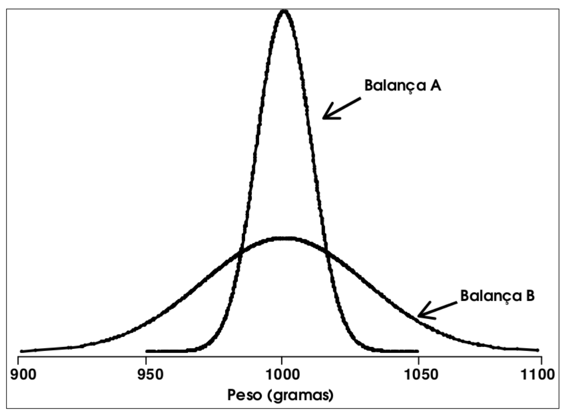


Figura: Variabilidade da medição de uma esfera metálica de 1000g. Balança A, “imprecisão” de 50g, balança B, “imprecisão” de 100g (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Amplitude

A amplitude dos dados identifica o intervalo de ocorrência de todos os dados observados

- $A = x_{max} - x_{min}$

Example

Seja o dataset

$$\{21, 12, 20, 4, 75, 40, 39, 63\}$$

Então, a amplitude é:

$$A = 75 - 4 = 71$$

Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

- Uma maneira de entender a variabilidade do dataset é analisar os desvios em relação à média.
- Cada desvio é a diferença entre o valor do dado e a média.

Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Mas os desvios...

1. são tão numerosos quanto os dados
2. têm sinal (direção do desvio)
3. têm soma nula

Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- $N = 5$
- $\bar{x} = 3$

1. $D_1 = 1 - 3 = -2$
2. $D_2 = 2 - 3 = -1$
3. $D_3 = 3 - 3 = 0$
4. $D_4 = 4 - 3 = 1$
5. $D_5 = 5 - 3 = 2$

Soma dos desvios

Example

Somando tudo:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 =$$

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$$

Como proceder?

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

- Como extrair alguma informação útil (e sumária!) dos desvios?
- Problema: sinais

Pergunta

Como tirar os sinais dos desvios?

Desvios absolutos

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Tomando-se o módulo dos desvios temos:

Definition

Desvio médio absoluto (MAD) é a média dos desvios absolutos

- É uma medida de dispersão robusta (pouco influenciada por outliers)
- Módulo não tem boas propriedades matemáticas (analíticas e algébricas).
- Pouco usado para inferência (apesar da robustez)

Desvio médio absoluto (MAD)

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

1. $|D_1| = |1 - 3| = 2$
2. $|D_2| = |2 - 3| = 1$
3. $|D_3| = |3 - 3| = 0$
4. $|D_4| = |4 - 3| = 1$
5. $|D_5| = |5 - 3| = 2$

$$\text{MAD} = \frac{\sum |D_i|}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Uma proposta “melhor”

- Uma outra maneira de eliminar os sinais é elevar ao quadrado cada desvio.
- Preserva boas propriedades matemáticas
- Calculando a média dos quadrados dos desvios (desvios quadráticos) temos ...

Variância

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo

Definition

A variância é a média dos desvios quadráticos.

- Variância populacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_j - \mu)^2}{N}$$

- Variância amostral

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Conveniente do ponto de vista matemático (boas propriedades algébricas e analíticas).
- Unidade quadrática, pouco intuitiva para interpretação de resultados.

Variância

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

1. $D_1^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4$
2. $D_2^2 = (2-3)^2 = (-1)^2 = 1$
3. $D_3^2 = (3-3)^2 = 0^2 = 0$
4. $D_4^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$
5. $D_5^2 = (5-3)^2 = 2^2 = 4$

$$s^2 = \frac{\sum D_i^2}{4} = 2.5$$

Desvio Padrão

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo

Definition

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

- Desvio padrão populacional

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}}$$

- Desvio padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Desvio Padrão

- É a medida mais usada, por estar na mesma escala (unidade) dos dados.
- Boas propriedades matemáticas
- Boas propriedades como estimador (Inferência)

Desvio Padrão

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

$$s^2 = 2.5$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

Exercícios

Exercício

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A variância amostral (s^2)
2. O desvio padrão amostral (s)

Formulário

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Exercícios

Exercício

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A variância amostral (s^2)
2. O desvio padrão amostral (s)

Solução

Como $\bar{x} = 34.4$, temos:

1. $$s^2 = \frac{(35 - 34.4)^2 + (33 - 34.4)^2 + \ldots}{5 - 1}$$
   $$= \frac{0.36 + 1.96 + 6.76 + 1.96 + 0.16}{4} = 2.8$$
2. $s = \sqrt{2.8} = 1.67$

Coeficiente de Variação

Definition

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Normaliza a variabilidade em relação à média
- Permite comparar a variabilidade de datasets não relacionados (mesmo que não usem a mesma unidade)
- Só deve ser usado para grandezas em escala (i.e. possui um “zero” não arbitrário, ou “zero absoluto”)

Coeficiente de Variação

Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

$x =$	$y =$
181.2	76.3
173.7	66.7
169.0	73.3
184.1	74.8
174.4	82.7
172.6	79.6

Qual das duas amostras tem maior variabilidade?

1. Calcular a média $\bar{x}$
2. Calcular a variância $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
3. Calcular o desvio padrão $s = \sqrt{s^2}$
4. $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

Coeficiente de Variação

Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

$x =$	$y =$
181.2	76.3
173.7	66.7
169.0	73.3
184.1	74.8
174.4	82.7
172.6	79.6

$\bar{x} = 175.8$ $s_x = 5.7$

$\bar{y} = 75.7$ $s_y = 5.5$

$CV_x = 3.24\%$

$CV_y = 7.27\%$

Resposta: O perímetro abdominal tem maior variabilidade que a altura.

Medidas de Posição

- Permitem estabelecer informações quantitativas relativas à ordem dos dados

Quartis

Definition

Dividem o dataset em quatro partes, cada uma com 25% dos dados

- Q_1, primeiro quartil, representa os primeiros 25% dos dados
- Q_2, segundo quartil, representa os primeiros 50% dos dados
- Q_3, terceiro quartil, representa os primeiros 75% dos dados

Pergunta

O que podemos dizer sobre o segundo quartil (Q_2)?

Quartis

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Example

Os pesos de 102 bebês nascidos em uma certa maternidade ao longo de um ano foram anotados e ordenados. Um certo bebê ocupa o Q_3 deste dataset.

- Isto significa que aproximadamente 75% dos bebês nascidos nesta maternidade tem peso menor ou igual a ele (Mazel Tov!).

Percentis e Decis

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Definition

O percentil de ordem k (onde k é qualquer valor entre 0 e 100), denotado por P_k , é o valor tal que $k\%$ dos valores do dataset são menores ou iguais a ele.

- Generalizam a idéia dos quartis
- Dividem o dataset em 100 partes
- Maior granularidade na ordem
- Decis: dividem o dataset em 10 partes

O Boxplot

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

- Gráfico que ilustra a dispersão dos dados pelos quartis
- Retângulo que representa a Amplitude Interquartílica ($AIQ = Q_3 - Q_1$)
- Barra interna que representa a mediana (Q_2)
- Limite superior (barra vertical): $Q_3 + 1.5 \times AIQ$
- Limite inferior (barra vertical): $Q_1 - 1.5 \times AIQ$
- Outliers como pontos, círculos ou estrelas, etc.
- Conveniente para comparar vários grupos ou amostras

O Boxplot

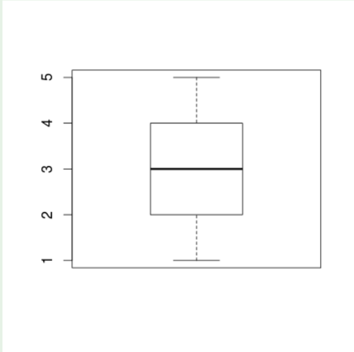
Example

Dataset

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\bar{x} = 3, M_d = 3$$

$$Q_1 = 2, Q_3 = 4$$



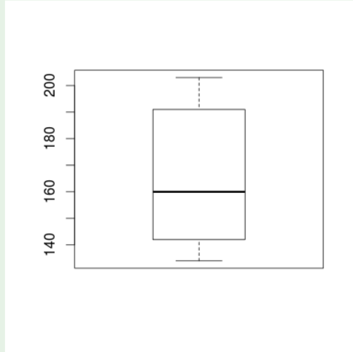
O Boxplot

Example

Exemplo do colesterol

$$\begin{aligned} x_1 &= 142 \\ x_2 &= 144 \\ x_3 &= 176 \\ x_4 &= 203 \\ x_5 &= 134 \\ x_6 &= 191 \end{aligned}$$

$\bar{x} = 165, M_d = 160$



Boxplot: duas amostras

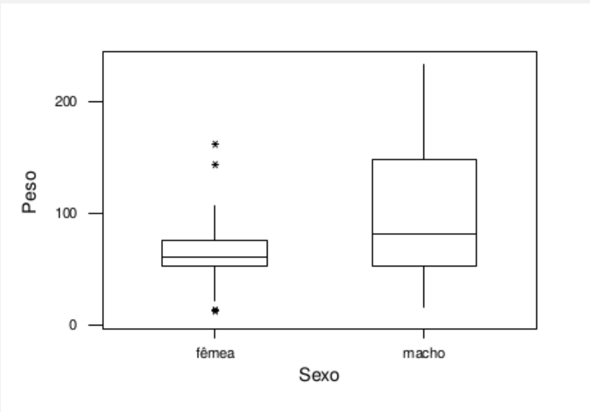


Figura: Boxplots para dois grupos de dados (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Análise Exploratória de Dados (EDA)

Ao iniciar sua Análise Exploratória de Dados (EDA), você pode visualizar sua amostra com:

1. Resumo dos cinco números
   - Valor mínimo
   - Primeiro quartil Q_1
   - Mediana (e/ou média)
   - Terceiro quartil Q_3
   - Valor máximo
2. Boxplot