

Comparações múltiplas e ANOVA

Teste paramétrico para vários grupos (desfecho quantitativo)

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 Análise de Variância (ANOVA)
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 Análise de Variância (ANOVA)
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Discussão da aula
passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Discussão da aula passada



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Discussão da aula
passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Discussão da leitura obrigatória da aula passada

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 **Comparações múltiplas**
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 **Exercício**
 - Exercício
- 5 **Aprofundamento**
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências
Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Exemplo 13.2

5 crianças de uma escola tiveram leucemia, ano passado.

- Isto é uma coincidência?
- Esse agrupamento de casos sugere a presença de toxina ou efeito ambiental que causou a doença?

Qual é a probabilidade de se observar 5 casos *nesta* escola, em um ano?

- Considerando a incidência de leucemia, isto parece ser um dado extraordinário
- Esta é a pergunta errada, *após* observar os casos nesta escola
- Se escola não é especial, é preciso considerar outras escolas
- Além disso, outras doenças (por ex., asma é um fator?)

Coincidências podem não ser tão raras assim



- ❶ Você formulou a hipótese após observar o agrupamento de casos
- ❷ Você só destacou a escola por causa do agrupamento
- ❸ Agrupamentos ocorrem ao acaso
- ❹ Definir população:
 - População de escolas (cidade, estado...?)
 - Tempo de observação (mês, ano, década...?)

Considerando o tempo, e o número de escolas da população...
... um agrupamento deste tamanho é realmente improvável?

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências
Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Exemplo 13.2

5 crianças de uma escola tiveram leucemia, ano passado.

- Isto é uma coincidência?
- Esse agrupamento de casos sugere a presença de toxina ou efeito ambiental que causou a doença?

~~Qual é a probabilidade de se observar 5 casos *nesta* escola, em um ano?~~

Pergunta correta

Qual é a probabilidade de se observar 5 casos *em alguma* escola, em um ano?

Coincidências podem ocorrer ao testar múltiplas hipóteses

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 **Comparações múltiplas**
 - O acaso prega peças
 - **Comparações múltiplas**
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 **Exercício**
 - Exercício
- 5 **Aprofundamento**
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Como comparar dois grupos?



“Comparar” é um termo vago...

... precisamos de um critério bem definido!

Para comparar quanto às variâncias dos grupos

Podemos usar

- Teste F

Para comparar quanto às médias dos grupos

Teste t

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Como comparar três ou mais grupos?

“Comparar” é um termo vago...

... precisamos de um critério bem definido!

Para comparar quanto às variâncias dos grupos

Podemos usar

- Teste de Levene
- Teste de Bartlett

Para comparar quanto às médias dos grupos

Teste ...

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Como comparar médias



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- Vimos que o **teste t** pode ser usado para comparar duas médias
- Assumindo que atendemos às premissas do teste t, consideramos:
 - variabilidade dos grupos¹
 - tamanho do estudo (n)²

Requisitos não óbvios (além das médias)

desvio padrão + n = erro padrão

¹Se possível, semelhantes. Caso contrário, correção de Welch.

²Componente do DP e do SEM. Usado como GL para o t crítico.

Exercício

Um cirurgião testa duas drogas para auxiliar a recuperação pós cirúrgica, e mensura a área cicatrizada (y) em uma semana.

São considerados os tratamentos A e B e um Placebo.

Foram selecionados 8 participantes para cada um dos três grupos.

Quais são as variáveis?



- Dependente:
 - numérica contínua
- Independentes:
 - grupo (categórica nominal – 3 níveis)

Esta relação pode ser expressa como

Área cicatrizada \sim Grupo de tratamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

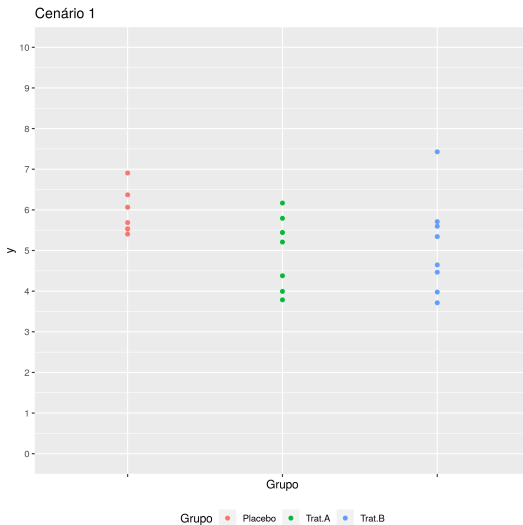
Exercício

Aprofundamento

Você consegue decidir **visualmente**...

... se 3 grupos têm médias diferentes?

Cenário 1 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

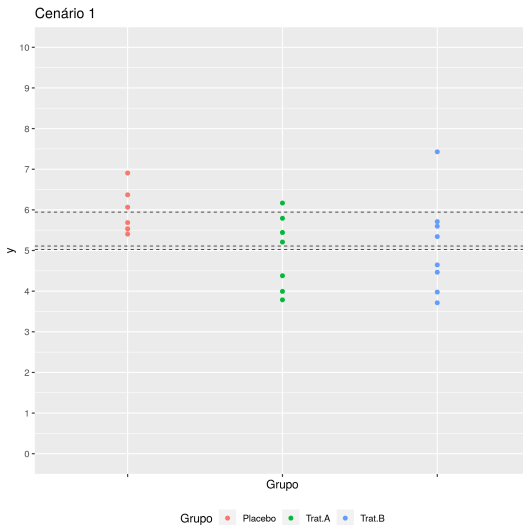
Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Médias: Placebo: 5.945, Tratamento A: 5.027, Tratamento B: 5.110



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

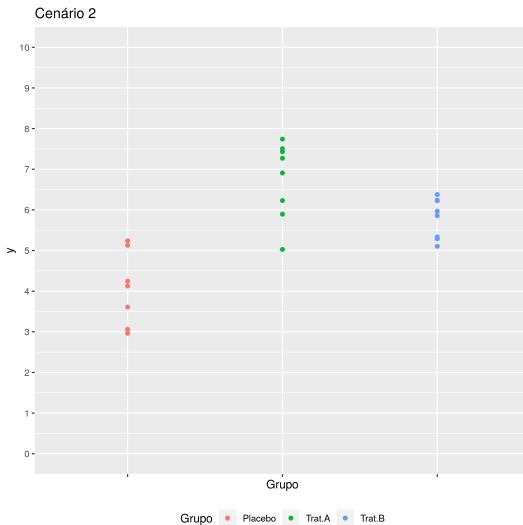
Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Cenário 2 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

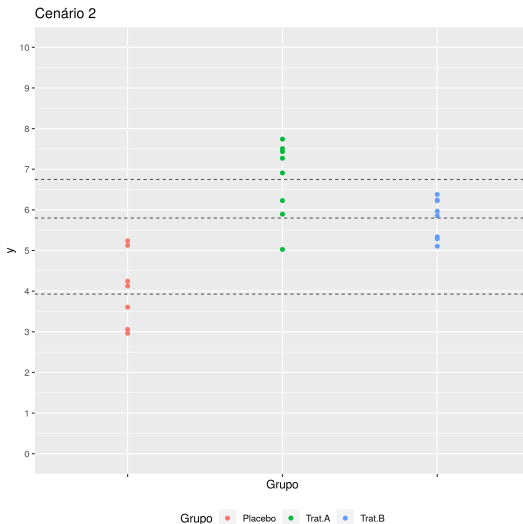
Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Médias: Placebo: 3.928, Tratamento A: 6.751, Tratamento B: 5.799



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Abordagem mais simples

Uma ideia seria usar o teste t três vezes...

... comparando os grupos, dois a dois.

Proposta

- 1 Placebo x Tratamento A
- 2 Placebo x Tratamento B
- 3 Tratamento A x Tratamento B

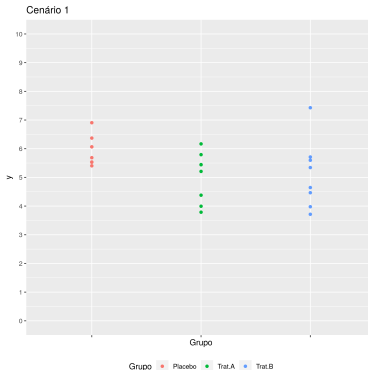
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p = 0.025$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.100$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.876$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes do placebo?

E entre si?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

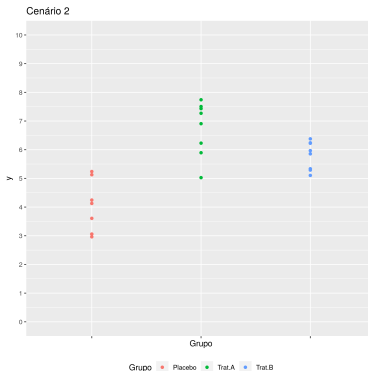
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p < 0.0001$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.00037$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.02943$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes do placebo?

E entre si?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Existe um problema oculto aí.

O problema é...

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Nível de significância de cada teste \neq nível de significância global.

³Leia várias vezes o Capítulo 13!

O problema é...

- A conclusão de que no Cenário 1 os 3 grupos são diferentes está **errada!**
- No Cenário 2, os 2 tratamentos **não são** diferentes entre si!

Nível de significância de cada teste \neq nível de significância global.

³Leia várias vezes o Capítulo 13!

O problema é...

- A conclusão de que no Cenário 1 os 3 grupos são diferentes está **errada!**
 - No Cenário 2, os 2 tratamentos **não são** diferentes entre si!
-
- O teste t permite a avaliação de **uma** hipótese
 - Testamos simultaneamente três³
 - Isto aumenta a chance de cometermos um erro tipo I (falso positivo)

Nível de significância de cada teste \neq nível de significância global.

³Leia várias vezes o Capítulo 13!

Os testes estatísticos (e fórmulas) não “sabem” o que foi levado em conta no estudo.

- *Só o pesquisador sabe.*
- A metodologia da análise precisa levar em conta todo o planejamento do estudo⁴.

Nível de significância de cada teste \neq nível de significância global.

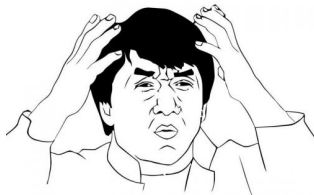
⁴Leia várias vezes o Capítulo 13!

- Ao testar uma hipótese, assumimos 5% de erro tipo I
- Mas se testarmos 100 hipóteses, o número esperado de falsos positivos é 5!
- Se os testes forem independentes, a probabilidade de **pelo menos 1** erro tipo I é 99.4%.⁵

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_comparisons_problem

E agora, José?

Como levar em conta as comparações múltiplas sem ser induzido ao erro, pelo teste t?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Como comparar médias



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

Coincidências

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- Vimos que o **teste t** pode ser usado para comparar duas médias
- Assumindo que atendemos às premissas do teste t, consideramos:
 - variabilidade dos grupos¹
 - tamanho do estudo (n)²

Requisitos não óbvios (além das médias)

desvio padrão + n = erro padrão

¹Se possível, semelhantes. Caso contrário, correção de Welch.

²Componente do DP e do SEM. Usado como GL para o t crítico.

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - **ANOVA um fator (One-way ANOVA)**
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Exemplo 13.5

Hetland, et. al (1993) pesquisaram alterações hormonais em mulheres corredoras. Mediram o nível de hormônio luteinizante (LH) em três grupos:

- 1 sedentárias
- 2 corredoras recreacionais
- 3 corredoras de elite

Quais são as variáveis?



- Dependente:
 - numérica contínua
- Independente:
 - grupo (categórica nominal – 3 níveis)

Esta relação pode ser expressa como

$LH \sim \text{Grupo}$

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Versão simplificada (apenas variáveis)

$$LH \sim \text{Grupo}$$

Modelo completo

$$LH = \text{média global} + \text{efeito do fator grupo} + \varepsilon$$

Hipótese: ε é um erro aleatório⁶ normalmente distribuído e centrado em zero – a incerteza que não pode ser controlada.

⁶residual – não é explicado pela relação entre as variáveis do modelo

Exemplo 13.5

Table 30.1. LH Levels in Three Groups of Women

Group	$\log(\text{LH}) \pm \text{SEM}$	N
Nonrunners	0.52 ± 0.027	88
Recreational runners	0.38 ± 0.034	89
Elite runners	0.40 ± 0.049	28

- Com estas informações, podemos construir uma tabela ANOVA
- H_0 : todas as médias são iguais

Exemplo 13.5

Table 30.2. InStat Results for One-Way ANOVA

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatments (between groups)	2	0.9268	0.4634
Residuals (within groups)	202	16.450	0.0814
Total	204	17.377	

F = 5.690

The P value is 0.0039, considered very significant.

Variation among column means is significantly greater than expected by chance.

- A razão entre as Somas dos Quadrados: $0.93/17.38 = 5.3\%$
- 5.3% da variabilidade pode ser explicada pelas diferenças *entre os grupos*
- (lembra do r^2 ?)

Comparações múltiplas e ANOVA

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

Comparações múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator (One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

One-way ANOVA



- Este método é chamado One-way (ou 1-way) ANOVA, pois tem um fator categórico
- A premissa é que pode-se *modelar* a relação entre um desfecho quantitativo e um preditor categórico + um erro aleatório
- A variável dependente do exemplo é o LH
- A (única) variável independente é o Grupo

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

A ideia básica



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- Quando os grupos têm médias diferentes, parte da variabilidade total é devido a esta diferença
- O resto da variabilidade é devido apenas às variâncias intragrupos
- A ANOVA tenta *desembaraçar* esta decomposição, assumindo a hipótese nula.

A ideia básica



- O nome *Análise de Variância* vem do critério usado para comparar as médias
- O teste é baseado na razão entre as variâncias intra e inter grupos
- Estas variâncias aparecem na tabela como “Média dos Quadrados”
- Lembrete: a variância é a média dos desvios elevados ao quadrado

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - **O teste F**
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Expectativa x realidade⁷ – O teste F⁸



Se as médias forem iguais, a variância intragrupo deve ser “igual” à variância intergrupo...

... nesse caso a *razão* entre as variâncias deve ser próxima de 1

$$F = \frac{\text{variância intergrupos}}{\text{variância intragrupos}}$$

Interpretação da estatística *F*

Uma razão muito maior que 1 indica que há mais variância entre os grupos do que o esperado

⁷ Mesma ideia do qui-quadrado.

⁸ O teste leva em conta dois graus de liberdade: numerador e denominador ↻ 🔍 ↺

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Exemplo 13.5

Exemplo 13.5

Table 30.2. InStat Results for One-Way ANOVA

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatments (between groups)	2	0.9268	0.4634
Residuals (within groups)	202	16.450	0.0814
Total	204	17.377	

$F = 5.690$

The P value is 0.0039, considered very significant.

Variation among column means is significantly greater than expected by chance.

- Razão entre as variâncias: $F = 0.4634/0.0814 = 5.69 \gg 1$
(mesmo considerando o n de cada grupo)
- $p = 0.0039$

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Resposta

Sabemos apenas que pelo menos um dos grupos é diferente dos outros. Mas qual(is)?

Ainda não estamos prontos para redigir o resultado!

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - **Pós teste**
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- O teste de ANOVA é apenas a primeira parte!⁹

O p-valor do teste F indica o quão raro é encontrar uma discrepância tão grande (ou maior) entre as médias dos grupos, ao acaso

- Mas isso não nos ajuda a saber **qual** é o grupo discrepante
- Para esta outra pergunta, precisamos de outro método

⁹Está com saudade do teste t?

- Como vimos, não podemos simplesmente fazer vários testes t
- Mas podemos *ajustar* os p-valores destes testes, para compensar a *inflação* destes resultados
- Isso pode ser feito de várias maneiras

- **Correção de Bonferroni**
- Correção para tendências
- **Teste “honesto” das diferenças, de Tukey (HSD)**
- Método de Scheffe
- Teste de Dunnet
- etc.

Ajustando os p-valores



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

- Faremos os múltiplos testes t, com ajuste de p-valor
- Os dois mais usados são Bonferroni e Tukey
- O ajuste de Bonferroni multiplica o p-valor¹⁰ pelo número de comparações, mas seus IC são muito grandes
- O ajuste de Tukey é mais conservador, mas pode acusar diferenças significativas com mais frequência
- Infelizmente não há consenso sobre critérios de escolha

¹⁰ou, analogamente, divide o nível de significância

Interpretando o método de Bonferroni¹¹

Exemplo

García-Arenzana et al. (2014) testaram associação de 25 variáveis dietárias e a densidade mamográfica (relevante p/ câncer de mama).

5 das variáveis parecem significativas.

Bonferroni

Ao dividir 0.05 pelo número de comparações, obtemos $\alpha = 0.05/25 = 0.002$.

Conclusão

Após o ajuste, apenas 1 significativo.

p-valores não ajustados

Dietary variable	P value
Total calories	<0.001
Olive oil	0.008
Whole milk	0.039
White meat	0.041
Proteins	0.042
Nuts	0.06
Cereals and pasta	0.074
White fish	0.205
Butter	0.212
Vegetables	0.216
Skimmed milk	0.222
Red meat	0.251
Fruit	0.269
Eggs	0.275
Blue fish	0.34
Legumes	0.341
Carbohydrates	0.384
Potatoes	0.569
Bread	0.594
Fats	0.696
Sweets	0.762
Dairy products	0.94
Semi-skimmed milk	0.942
Total meat	0.975
Processed meat	0.986

Comparações múltiplas e ANOVA

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

Comparações múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator (One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

¹¹ <http://www.biostathandbook.com/multiplecomparisons.html>

Exemplo 13.5

Hetland, et. al (1993) pesquisaram alterações hormonais em mulheres corredoras. Mediram o nível de hormônio luteinizante (LH) em três grupos:

- 1 sedentárias
- 2 corredoras recreacionais
- 3 corredoras de elite

Exemplo 13.5

Table 30.1. LH Levels in Three Groups of Women

Group	$\log(\text{LH}) \pm \text{SEM}$	N
Nonrunners	0.52 ± 0.027	88
Recreational runners	0.38 ± 0.034	89
Elite runners	0.40 ± 0.049	28

- Com estas informações, podemos construir uma tabela ANOVA
- H_0 : todas as médias são iguais

Exemplo 13.5

Exemplo 13.5

Table 30.2. InStat Results for One-Way ANOVA

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Treatments (between groups)	2	0.9268	0.4634
Residuals (within groups)	202	16.450	0.0814
Total	204	17.377	

$$F = 5.690$$

The P value is 0.0039, considered very significant.

Variation among column means is significantly greater than expected by chance.

- Razão entre as variâncias: $F = 0.4634/0.0814 = 5.69 \gg 1$
(mesmo considerando o n de cada grupo)
- $p = 0.0039$

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Exemplo 13.5 – testes t com ajuste de Tukey

Exemplo 13.5

Table 30.3. InStat Results for Tukey's Post Test

Comparison	Mean Difference	q	P Value
Nonrunners vs Recreational	0.1400	2.741	** P < 0.01
Nonrunners vs Elite	0.1200	2.741	ns P > 0.05
Recreational vs Elite	-0.02000	0.4574	ns P > 0.05

Difference	Mean Difference	Lower 95% CI	Upper 95% CI
Nonrunners — Recreational	0.1400	0.03823	0.2418
Nonrunners — Elite	0.1200	-0.02688	0.2669
Recreational — Elite	-0.02000	-0.1667	0.1267

Comparações múltiplas e ANOVA

Felipe Figueiredo

Discussão da aula passada

Comparações múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator (One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Pergunta

Como você redigiria este resultado?

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 **Análise de Variância (ANOVA)**
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - **Two-way ANOVA**
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

ANOVA dois parâmetros



- Vimos como usar o ANOVA com **uma** var. independente categórica
- O teste ANOVA permite qualquer quantidade de variáveis independentes! E de qualquer tipo¹²
- Vejamos o exemplo inicial da aula, com duas var. independentes

Nova pergunta

Os tratamentos são diferentes, mesmo controlando pelo Gênero?

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

¹²Na verdade, ANOVA e Regressão Linear são Múltiplas siameses

Quais são as variáveis?



- Dependente:
 - numérica contínua
- Independentes:
 - grupo (categórica nominal – 3 níveis)
 - gênero (categórica nominal binária)

Esta relação pode ser expressa como

Área cicatrizada \sim Grupo de tratamento + Gênero

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

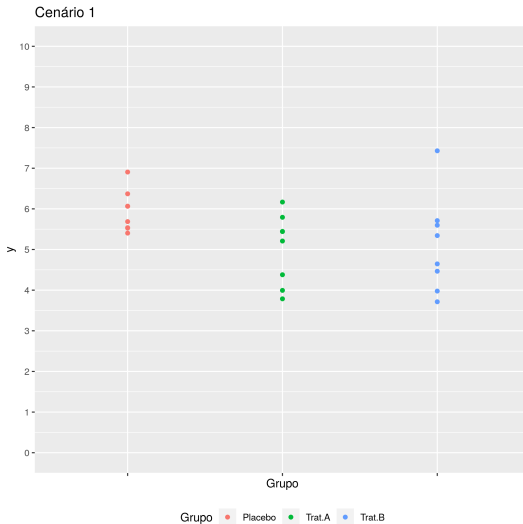
Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Você consegue decidir **visualmente**...
... se 3 grupos têm médias diferentes?

Cenário 1 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

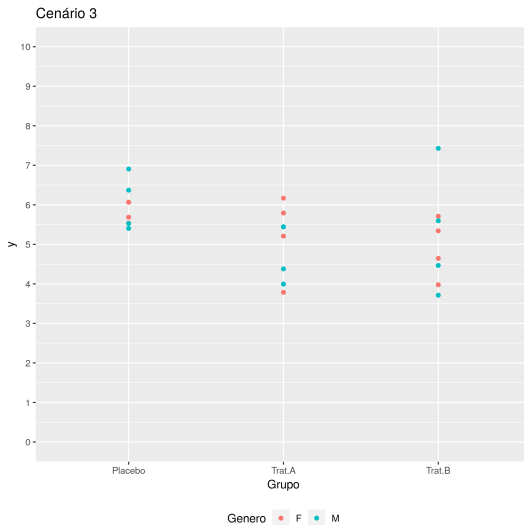
Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Cenário 3 = cenário 1 ajustando pelo Gênero



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

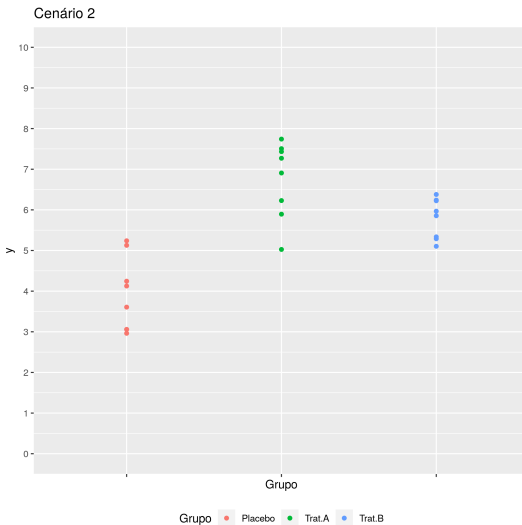
Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Cenário 2 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

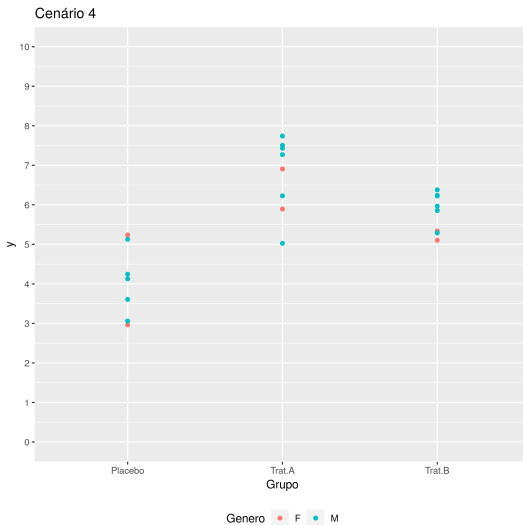
Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Cenário 4 = cenário 2 ajustando pelo Gênero



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

ANOVA um fator
(One-way ANOVA)

O teste F

Pós teste

Two-way ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Hora de testar seus conhecimentos

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 Análise de Variância (ANOVA)
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

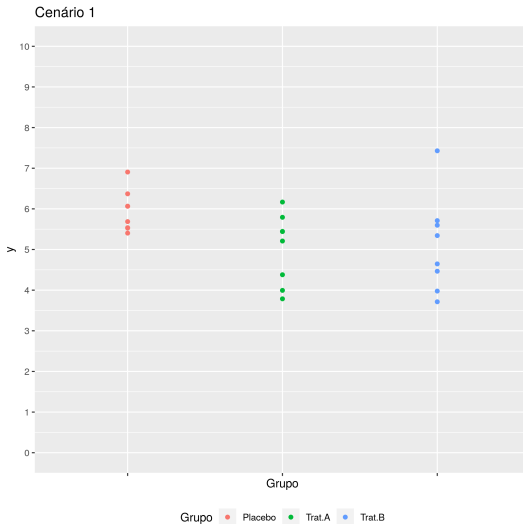
Exercício

Um cirurgião testa duas drogas para auxiliar a recuperação pós cirúrgica, e mensura a área cicatrizada (y) em uma semana.

São considerados os tratamentos A e B e um Placebo.

Foram selecionados 8 participantes para cada um dos três grupos.

Cenário 1 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

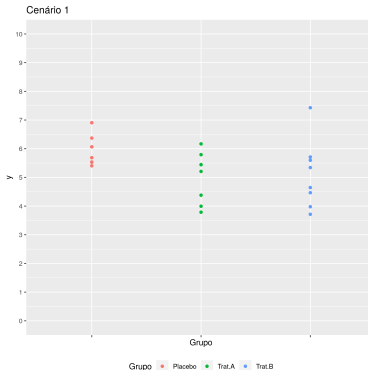
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p = 0.025$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.100$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.876$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes do placebo?

E entre si?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

Por que este resultado está errado?

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

Por que este resultado está errado?

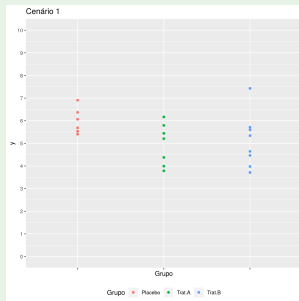
Resposta

Testamos simultaneamente **3** hipóteses...

... você foi levado ao engano: Placebo é diferente do trat. A

Cenário 1 – ANOVA One-way

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	4.124	2.0620	2.545	0.102
Residuals	21	17.018	0.8104		



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

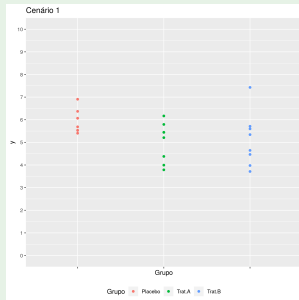
Exercício

Exercício

Aprofundamento

Cenário 1 – ANOVA One-way

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	4.124	2.0620	2.545	0.102
Residuals	21	17.018	0.8104		



Os 3 tratamentos não diferem além da expectativa ($p = 0.102$)

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

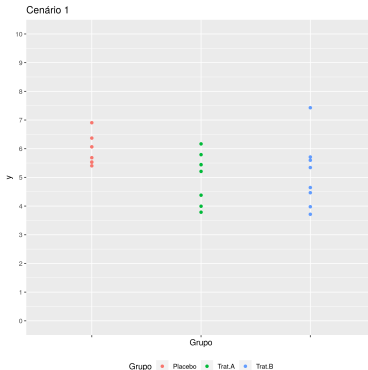
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p = 0.025$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.100$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.876$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes do placebo?

E entre si?



Cenário 1 – Bonferroni

Pairwise comparisons using t tests with non-pooled SD

data: y and Grupo

	Placebo	Trat.A
Trat.A	0.076	-
Trat.B	0.299	1.000

P value adjustment method: bonferroni

Os p-valores de Bonferroni são 3x maiores...

... o placebo não é diferente do tratamento A ($p = 0.076$)

Cenário 1 – Tukey

Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

```
Fit: aov(formula = y ~ Grupo, data = cenario1.long)
```

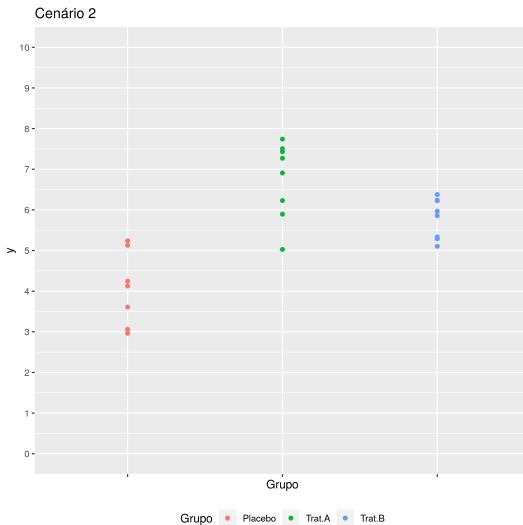
\$Grupo

	diff	lwr	upr	p adj
Trat.A-Placebo	-0.91797498	-2.052498	0.2165479	0.1274511
Trat.B-Placebo	-0.83482042	-1.969343	0.2997025	0.1767378
Trat.B-Trat.A	0.08315455	-1.051368	1.2176774	0.9813768

Os p-valores de Tukey são mais conservadores...

... o placebo não é diferente do tratamento A ($p = 0.12745$)

Cenário 2 – esses 3 grupos têm médias diferentes?



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

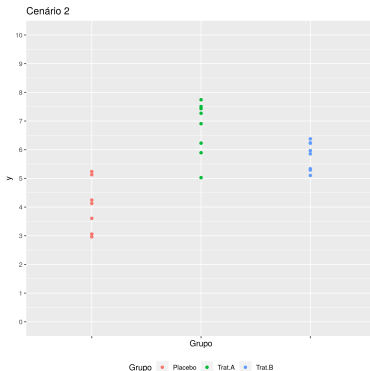
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p < 0.0001$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.00037$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.02943$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes
do placebo?

E entre si?



Por que este resultado está errado?

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

Por que este resultado está errado?

Resposta

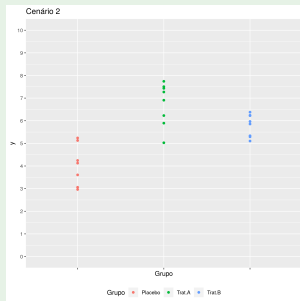
Testamos simultaneamente **3** hipóteses...

... você foi levado ao engano: trat. A é diferente do trat. B

Cenário 2 – ANOVA One-way

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	32.99	16.496	25.04	2.75e-06 ***
Residuals	21	13.83	0.659		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

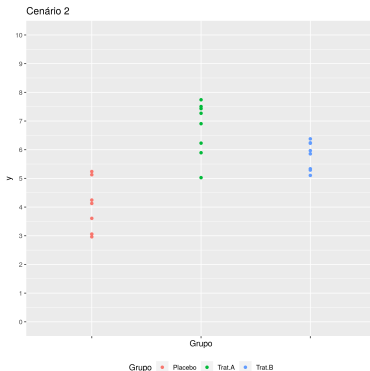
P-valores dos 3 testes t

- 1 Placebo x Trat. A $\Rightarrow p < 0.0001$
- 2 Placebo x Trat. B $\Rightarrow p = 0.00037$
- 3 Trat. A x Trat. B $\Rightarrow p = 0.02943$

Pergunta

Os tratamentos são diferentes
do placebo?

E entre si?



Cenário 2 – Bonferroni

Pairwise comparisons using t tests with non-pooled SD

data: y and Grupo

	Placebo	Trat.A
Trat.A	8.8e-05	-
Trat.B	0.0011	0.0883

P value adjustment method: bonferroni

Os p-valores de Bonferroni são 3x maiores...

... os tratamentos A e B não são diferentes entre si ($p = 0.0883$)

Cenário 2 – Tukey

Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = y ~ Grupo, data = cenario2.long)

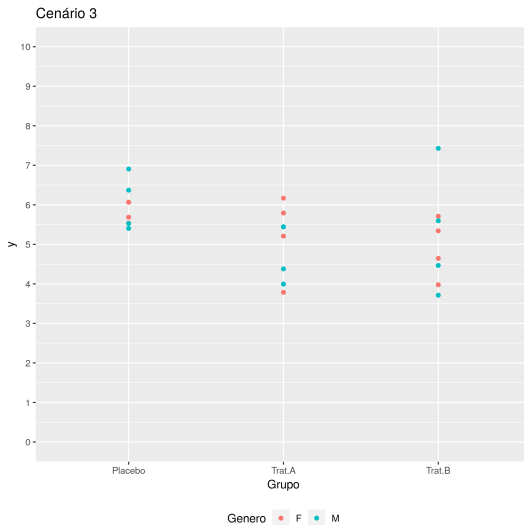
\$Grupo	diff	lwr	upr	p adj
Trat.A-Placebo	2.8224313	1.7995273	3.8453353	0.0000021
Trat.B-Placebo	1.8711918	0.8482877	2.8940958	0.0004262
Trat.B-Trat.A	-0.9512395	-1.9741435	0.0716645	0.0713859

Os p-valores de Tukey são mais conservadores...

... os tratamentos A e B não são diferentes ($p = 0.0713859$)

Agora interprete cada um dos dois fatores

Cenário 3 = cenário 1 ajustando pelo Gênero



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

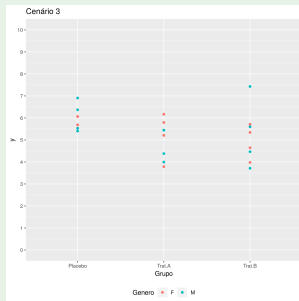
Exercício

Exercício

Aprofundamento

Cenário 3 – ANOVA Two-way

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	4.124	2.0620	2.426	0.114
Genero	1	0.020	0.0198	0.023	0.880
Residuals	20	16.998	0.8499		



Cenário 3 – Tukey

Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

```
Fit: aov(formula = y ~ Grupo + Genero, data = cenario1.long)
```

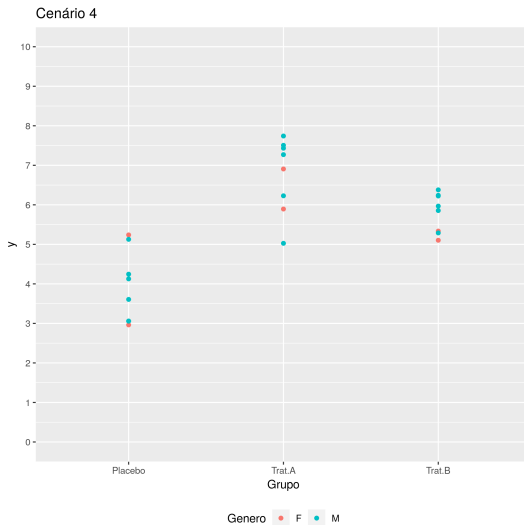
\$Grupo

	diff	lwr	upr	p adj
Trat.A-Placebo	-0.91797498	-2.084178	0.2482277	0.1402196
Trat.B-Placebo	-0.83482042	-2.001023	0.3313822	0.1915255
Trat.B-Trat.A	0.08315455	-1.083048	1.2493572	0.9822352

\$Genero

	diff	lwr	upr	p adj
M-F	0.05741033	-0.7276764	0.8424971	0.8802907

Cenário 4 = cenário 2 ajustando pelo Gênero



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

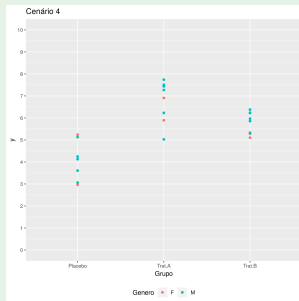
Exercício

Aprofundamento

Cenário 4 – ANOVA Two-way

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Grupo	2	32.99	16.496	24.760	3.88e-06 ***
Genero	1	0.51	0.509	0.764	0.393
Residuals	20	13.33	0.666		

 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

- Vimos o modelo **ANOVA com fatores fixos** para comparar médias
- Há também¹³
 - **ANOVA com interações entre os fatores**
 - **ANOVA com Medidas Repetidas** quando você mensura do participante em vários momentos diferentes (ex: baseline, pré-op imediato, pós-op imediato, e após 1 ano)
 - **ANOVA com fatores aleatórios** permite decompor as variâncias – contribuição de cada fator para a variância total
 - **ANOVA com fatores mistos** – fatores fixos E aleatórios
- ANOVA é a base para (livros de) Design of Experiments (DoE)
- Considere usar **desenhos balanceados**¹⁴ sempre que possível!

¹³Todos fora do escopo, RM ANOVA mencionado no livro

¹⁴Grupos com **mesmo tamanho**

Modelo ANOVA em geral – quais são as variáveis?

- Dependente (VD): **numérica**
 - discreta
 - contínua
- Independentes (VI):
 - categórica – 2+ níveis
 - numérica discreta
 - numérica contínua

Esta relação pode ser expressa como

$$VD \sim VI_1 + VI_2 + \dots$$

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Exercício

Aprofundamento

- 1 Discussão da aula passada
 - Discussão da aula passada
- 2 Comparações múltiplas
 - O acaso prega peças
 - Comparações múltiplas
- 3 Análise de Variância (ANOVA)
 - ANOVA um fator (One-way ANOVA)
 - O teste F
 - Pós teste
 - Two-way ANOVA
- 4 Exercício
 - Exercício
- 5 Aprofundamento
 - Aprofundamento

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento
Aprofundamento

Leitura obrigatória

- Capítulo 13
- Capítulo 30 (atenção às premissas!)

Exercícios selecionados

Capítulo 13, problema: 1

Leitura recomendada

Kim, Bang, 2016, Dent. Hypotheses. (editorial) (este link é clicável)

Comparações
múltiplas e
ANOVA

Felipe
Figueiredo

Discussão da
aula passada

Comparações
múltiplas

ANOVA

Exercício

Aprofundamento

Aprofundamento