Estatística Descritiva II

Medidas sumárias

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Sumário

Medidas Sumárias

- Medidas sumárias resumem a informação contida nos dados em um pequeno conjunto de números.
- Medidas sumárias de populações se chamam parâmetros, e são representadas por letras gregas (μ, σ, etc).
- Medidas sumárias de amostras se chamam estatísticas e são representadas por letras comuns ($\bar{x}$, s, etc).
- Geralmente trabalhamos com estatísticas descritivas.

Média

- A média (aritmética) leva em conta todos os dados disponíveis, e indica (em muitas situações) o ponto de maior acumulação de dados.
- Notação: média populacional (μ)

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N}$$

- Notação: média amostral ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

- Nem sempre pertence ao dataset.

Média

Example

Foram observados os seguintes níveis de colesterol de uma amostra de pacientes. Qual é o nível médio de colesterol nestes pacientes?

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 142 \\
x_2 &= 144 \\
x_3 &= 176 \\
x_4 &= 203 \\
x_5 &= 134 \\
x_6 &= 191
\end{aligned}
$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{990}{6} = 165$$

Mediana

Definition

A mediana é o dado que ocupa a posição central nos dados ordenados.

- Notação: M_d
- Divide o dataset ao meio
- Costuma pertencer ao dataset

Mediana

- Para se calcular a mediana, deve-se ordenar os dados.
- Encontrar o valor do meio se n for ímpar.
- Encontrar a média dos dois valores do meio se n for par.

Example

Conforme no exemplo anterior

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 134 \\
x_1 &= 142 \\
x_2 &= 144 \\
x_3 &= 176 \\
x_6 &= 191 \\
x_4 &= 203
\end{aligned}
$$

$$M_d = \frac{144 + 176}{2} = 160$$

Moda

Definition

A moda é o dado que ocorre com maior frequência.

- Notação: M_o
- Sempre pertence ao dataset.
- Não é necessariamente única: o dataset pode ser bimodal, ou mesmo multimodal.
- Não necessariamente existe: amodal

Moda

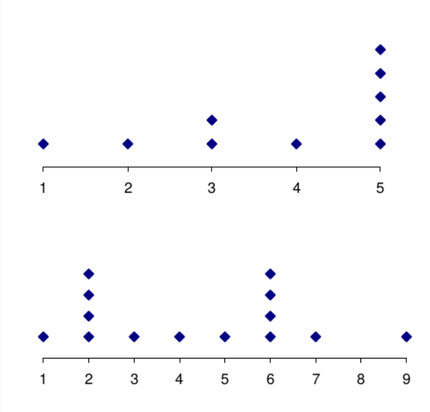


Figura: Diagrama de pontos para dados (a) unimodal, (b) bimodal (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Comparação entre as Medidas Centrais

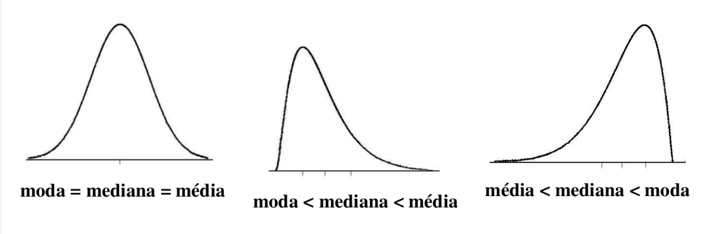


Figura: (a) Simétrica, (b) Assimétrica à esquerda, (c) Assimétrica à direita (Fonte: Reis, Reis 2002)

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Robustez da Média

- A média é mais usada, mas não é robusta.
- É distorcida na presença de *outliers* (valores discrepantes, extremos)

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Comparação entre as Medidas Centrais

Example

Considere o seguinte dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 7\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \frac{1+1+2+4+7}{5} = \frac{15}{5} = 3$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Comparação entre as Medidas Centrais

Example

Considere agora este outro dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 32\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \frac{1+1+2+4+32}{5} = \frac{40}{5} = 8$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

Exercícios

Exercício

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A média amostral ($\bar{x}$)
2. A mediana (M_d)
3. A moda (M_o)

Solução

1. $\bar{x} = \frac{35+33+37+33+34}{5} = 34.4$
2. $M_d = 34$
3. $M_o = 33$

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Resumo

- Média mais usual
- Mediana na presença de *outliers*
- Moda quando a distribuição das frequências for bimodal ou multimodal.

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Variabilidade em Medições

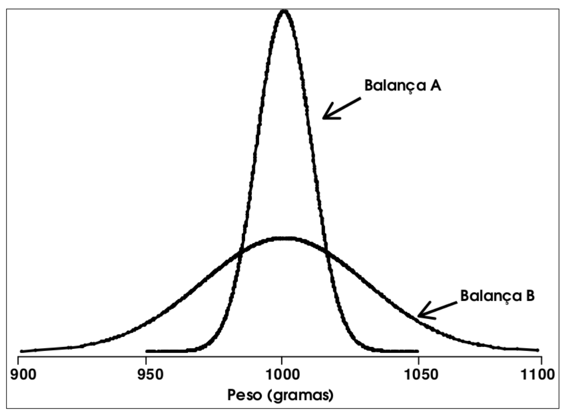


Figura: Variabilidade da medição de uma esfera metálica de 1000g. Balança A, “imprecisão” de 50g, balança B, “imprecisão” de 100g (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Amplitude

A amplitude dos dados identifica o intervalo de ocorrência de todos os dados observados

- $A = x_{max} - x_{min}$

Example

Seja o dataset

$$\{21, 12, 20, 4, 75, 40, 39, 63\}$$

Então, a amplitude é:

$$A = 75 - 4 = 71$$

Desvios em relação à média

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

- Uma maneira de entender a variabilidade do dataset é analisar os desvios em relação à média.
- Cada desvio é a diferença entre o valor do dado e a média.

Desvios em relação à média

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Mas os desvios...

1. são tão numerosos quanto os dados
2. têm sinal (direção do desvio)
3. têm soma nula

Desvios em relação à média

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- $N = 5$
- $\bar{x} = 3$

1. $D_1 = 1 - 3 = -2$
2. $D_2 = 2 - 3 = -1$
3. $D_3 = 3 - 3 = 0$
4. $D_4 = 4 - 3 = 1$
5. $D_5 = 5 - 3 = 2$

Soma dos desvios

Example

Somando tudo:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 =$$

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$$

Como proceder?

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

- Como extrair alguma informação útil (e sumária!) dos desvios?
- Problema: sinais

Pergunta

Como tirar os sinais dos desvios?

Desvios absolutos

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Tomando-se o módulo dos desvios temos:

Definition

Desvio médio absoluto (MAD) é a média dos desvios absolutos

- É uma medida de dispersão robusta (pouco influenciada por outliers)
- Módulo não tem boas propriedades matemáticas (analíticas e algébricas).
- Pouco usado para inferência (baixa eficiência)

Desvio médio absoluto (MAD)

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Example

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

1. $|D_1| = |1 - 3| = 2$
2. $|D_2| = |2 - 3| = 1$
3. $|D_3| = |3 - 3| = 0$
4. $|D_4| = |4 - 3| = 1$
5. $|D_5| = |5 - 3| = 2$

$$\text{MAD} = \frac{\sum D_i}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Uma proposta “melhor”

- Uma outra maneira de eliminar os sinais é elevar ao quadrado cada desvio.
- Preserva boas propriedades matemáticas
- Calculando a média dos quadrados dos desvios (desvios quadráticos) temos . . .

Variância

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Definition
A variância é a média dos desvios quadráticos.

- Variância populacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_j - \mu)^2}{N}$$

- Variância amostral

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Conveniente do ponto de vista matemático (boas propriedades algébricas e analíticas).
- Unidade quadrática, pouco intuitiva para interpretação de resultados.

Variância

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Example

$$\{1,2,3,4,5\}, \bar{x} = 3$$

1. $D_1^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4$
2. $D_2^2 = (2-3)^2 = (-1)^2 = 1$
3. $D_3^2 = (3-3)^2 = 0^2 = 0$
4. $D_4^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$
5. $D_5^2 = (5-3)^2 = 2^2 = 4$

$$s^2 = \frac{\sum D_i^2}{4} = 2.5$$

Desvio Padrão

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Definition
O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

- Desvio padrão populacional

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}}$$

- Desvio padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Desvio Padrão

- É a medida mais usada, por estar na mesma escala (unidade) dos dados.
- Boas propriedades matemáticas
- Boas propriedades como estimador (Inferência)

Desvio Padrão

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Example

$$\{1,2,3,4,5\}, \bar{x} = 3$$

$$s^2 = 2.5$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

Exercícios

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Exercício

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A variância amostral (s^2)
2. O desvio padrão amostral (s)

Solução

Lembrando que $\bar{x} = 34.4$, temos:

1. $$s^2 = \frac{(35-34.4)^2 + (33-34.4)^2 + \dots}{5-1}$$
   $$= \frac{0.36 + 1.96 + 6.76 + 1.96 + 0.16}{4} = 2.8$$
2. $s = \sqrt{2.8} = 1.67$

Coeficiente de Variação

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Definition

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Normaliza a variabilidade em relação à média
- Permite comparar a variabilidade de datasets não relacionados (mesmo que não usem a mesma unidade)
- Só deve ser usado para grandezas em escala (i.e. possui um “zero” não arbitrário, ou “zero absoluto”)

Coeficiente de Variação

Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

$x =$	$y =$
181.2	76.3
173.7	66.7
169.0	73.3
184.1	74.8
174.4	82.7
172.6	79.6

Qual das duas amostras tem maior variabilidade?

1. Calcular a média $\bar{x}$
2. Calcular a variância $s^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
3. Calcular o desvio padrão $s = \sqrt{s^2}$
4. $CV = \dfrac{s}{\bar{x}}$

Coeficiente de Variação

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

$x =$	$y =$
181.2	76.3
173.7	66.7
169.0	73.3
184.1	74.8
174.4	82.7
172.6	79.6

$\bar{x} = 175.8$ $s_x = 5.7$
$\bar{y} = 75.7$ $s_y = 5.5$
$CV_x = 3.24\%$
$CV_y = 7.27\%$
Resposta: O perímetro abdominal tem maior variabilidade que a altura.

Medidas de Posição

- Permitem estabelecer informações quantitativas relativas à ordem dos dados

Quartis

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Quartis
Percentis e Decis
Boxplot
Resumo

Definition

Dividem o dataset em quatro partes, cada uma com 25% dos dados

- Q_1, primeiro quartil, representa os primeiros 25% dos dados
- Q_2, segundo quartil, representa os primeiros 50% dos dados
- Q_3, terceiro quartil, representa os primeiros 75% dos dados

Pergunta

O que podemos dizer sobre o segundo quartil (Q_2)?

Quartis

Example

Os pesos de 102 bebês nascidos em uma certa maternidade ao longo de um ano foram anotados e ordenados. Um certo bebê ocupa o Q_3 deste dataset.

- Isto significa que aproximadamente 75% dos bebês nascidos nesta maternidade tem peso menor ou igual a ele (Mazel Tov!).

Percentis e Decis

Definition

O percentil de ordem k (onde k é qualquer valor entre 0 e 100), denotado por P_k , é o valor tal que k% dos valores do dataset são menores ou iguais a ele.

- Generalizam a idéia dos quartis
- Dividem o dataset em 100 partes
- Maior granularidade na ordem
- Decis: dividem o dataset em 10 partes

O Boxplot

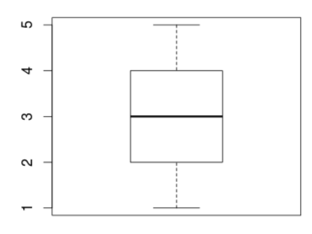
- Gráfico que ilustra a dispersão dos dados pelos quartis
- Retângulo que representa a Distância Interquartílica ($DQ = Q_3 - Q_1$)
- Barra interna que representa a mediana (Q_2)
- Limite superior (barra vertical): $Q_3 + 1.5 \cdot DQ$
- Limite inferior (barra vertical): $Q_1 - 1.5 \cdot DQ$
- Outliers como pontos, círculos ou estrelas
- Conveniente para comparar vários grupos ou amostras

O Boxplot

Example

Dataset

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\bar{x} = 3, M_d = 3$$
$$Q_1 = 2, Q_3 = 4$$



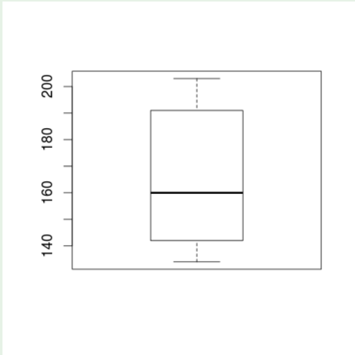
O Boxplot

Example

Exemplo do colesterol

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 142\\
x_2 &= 144\\
x_3 &= 176\\
x_4 &= 203\\
x_5 &= 134\\
x_6 &= 191
\end{aligned}
$$

$\bar{x} = 165$, $M_d = 160$



Boxplot: duas amostras

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

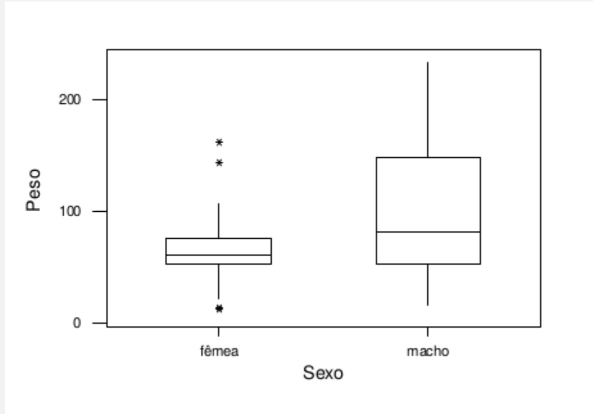


Figura: Boxplots para dois grupos de dados (Fonte: Reis, Reis, 2002)

Análise Exploratória de Dados (EDA)

Estatística Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Ao iniciar sua Análise Exploratória de Dados (EDA), você pode visualizar sua amostra com:

1. Resumo dos cinco números
   - Valor mínimo
   - Primeiro quartil Q_1
   - Mediana (e/ou média)
   - Terceiro quartil Q_3
   - Valor máximo
2. Boxplot