

# Testes de Hipóteses I

## Testes para uma amostra

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

## Sumário

## Testes de Hipóteses

- Podemos tomar decisões baseado nos dados de um experimento (amostra).
- Para isto, precisamos de um critério sistemático e rigoroso que possa aferir o quanto os dados suportam esta decisão.
- Usando os conceitos de probabilidades, poderemos ainda calcular a probabilidade de que esta decisão esteja errada.

## Testes de Hipóteses

### Definition

Em Estatística, uma **hipótese** é uma afirmação sobre uma característica de uma população, tipicamente o valor de um parâmetro.

### Definition

Um **teste de hipótese** (ou teste de significância) é um procedimento sistemático para testar uma afirmação sobre uma característica de uma população.

## Componentes de um testes de hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

São necessários para um teste de hipóteses:

- As hipóteses nula e alternativa
- O nível de significância
- A estatística de teste
- A região crítica

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

- Uma hipótese estatística deve ser testável frente a dados obtidos de um experimento.

### Example

Um jornalista alega que a maior parte dos motoristas atravessa o sinal vermelho.

### Example

Pesquisadores afirmam que a temperatura corporal média de adultos sadios não ultrapassa 37°C.

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

- Para efetuar um teste de hipóteses é necessária a formulação de uma **hipótese nula** e uma **hipótese alternativa**.
- A hipótese nula ( $H_0$ ) é uma hipótese que contém uma afirmação de igualdade.
- A hipótese alternativa ( $H_1$  ou  $H_a$ ) é o complementar da hipótese nula.

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Atenção

A lógica do teste de hipóteses é o **inverso** do que se esperaria, ou seja, ao invés de testar a hipótese de interesse, vamos *testar a hipótese nula* – e tentar rejeitá-la.

**Mantenha isso em mente daqui a para a frente.**

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Roteiro

- 1 Identificar a afirmação a ser testada e expressá-la em forma simbólica
- 2 Expressar em forma simbólica a afirmação que deve ser verdadeira, caso a afirmação de interesse seja falsa
- 3 Das duas expressões obtidas, a hipótese  $H_0$  será a que contém igualdade  $=$ , enquanto a  $H_1$  será a que contém um sinal de  $<$ ,  $>$  ou  $\neq$ .

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Example

Formulação verbal:

A proporção de motoristas que admitem atravessar o sinal vermelho é maior que 50%.

Formulação matemática:

$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Example

Formulação verbal:

A altura média de jogadores profissionais de basquete é de no máximo 2.20m.

Formulação matemática:

$$H_0 : \mu = 2.20$$

$$H_1 : \mu < 2.20$$

## Identificando hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Example

Formulação verbal:

A dose média contida em um comprimido de paracetamol é de 750mg.

Formulação matemática:

$$H_0 : \mu = 750$$

$$H_1 : \mu \neq 750$$

Considere o seguinte exemplo:

## Example

Uma empresa oferece um produto que afirma que “ser capaz de aumentar as chances de que o sexo do bebê de um casal seja um menino em até 85%, e uma menina em até 80%”. Você resolve testar o produto que confere maior chance de nascimento de meninas em 100 casais.

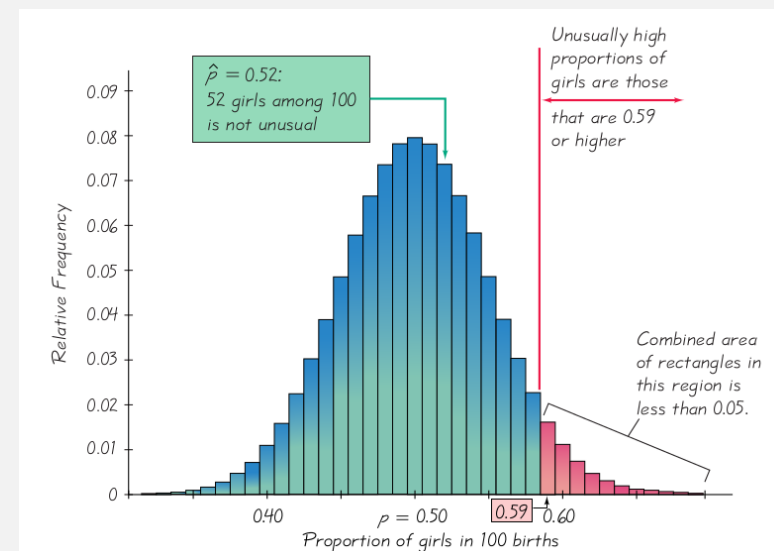
Há evidências para aceitar a alegação do produto, se forem observadas (em 100 nascimentos):

- 1 52 meninas?
- 2 97 meninas?

## Example

- 1 Esperamos cerca de 50 meninas em 100 nascimentos ( $H_0$ ). Como 52 é próximo de 50, não deveríamos concluir que o produto é eficaz.
- 2 É muito pouco provável o nascimento de 97 meninas em 100. Isso poderia ser explicado como
  - 1 um evento *extremamente* raro ocorrer ao acaso ou
  - 2 o produto é eficaz.

- No primeiro caso, dizemos que não há evidência de que o produto seja eficaz, e que no segundo caso há.
- Isso vale, mesmo considerando que em ambos os casos o resultado é acima da média.
- A diferença é que no segundo caso, o resultado é **significativamente** maior que o esperado ao acaso.



## Rejeitar hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

- Ao executar um teste de hipóteses observamos se os dados indicam que se deve rejeitar a hipótese  $H_0$ .
- $H_0$  representa a possibilidade de observarmos o resultado ao acaso.
- Caso haja evidências para que  $H_0$  seja rejeitada, “assumimos” que a  $H_1$  deve ser verdadeira.
- Mas isso não significa que  $H_0$  seja falsa e  $H_1$  seja verdadeira!

## Tipos de erros em testes de hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Definition

Um **erro do tipo I** ocorre se a hipótese nula for rejeitada quando é verdadeira.

### Definition

Um **erro do tipo II** ocorre se a hipótese não for rejeitada quando for falsa.

## Tipos de erros em testes de hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

Decisão	$H_0$ é verdadeira	$H_0$ é falsa
Não rejeitar $H_0$	Decisão correta	Erro do tipo II
Rejeitar $H_0$	Erro do tipo I	Decisão correta

## Rejeitar hipóteses



Testes de  
Hipóteses I

Felipe  
Figueiredo

### Importante

Observe que o teste de hipótese nunca deve **aceitar** uma hipótese nula, apenas rejeitá-la ou deixar de rejeitá-la.

## Nível de significância



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

### Definition

O **nível de significância** de um teste de hipótese é sua probabilidade máxima admissível para cometer um erro do tipo I. Ele é denotado por  $\alpha$ .

### Definition

A probabilidade de se cometer um erro do tipo II é denotada por  $\beta$ .

## Identificando a região crítica



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

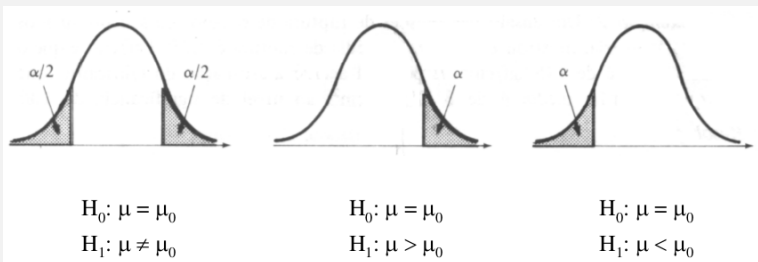
- Para identificar a região crítica (ou região de rejeição) do teste, devemos observar se o teste é unicaudal (à esquerda ou à direita) ou bicaudal.
- Se  $H_1$  é do tipo  $\neq$ , o teste é bicaudal (ou bilateral).
- Se  $H_1$  é do tipo  $<$ , o teste é unicaudal (ou unilateral) à esquerda.
- Se  $H_1$  é do tipo  $>$ , o teste é unicaudal à direita.

## Identificando a região crítica



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo



## Decisão



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- Veremos a seguir uma estatística de teste para cada tipo de teste.
- Calculamos a estatística de teste e verificamos se esta está dentro da região crítica
- Se a estatística de teste estiver dentro da região crítica, devemos rejeitar  $H_0$
- Caso contrário, não devemos rejeitar  $H_0$ .

Em um teste de proporções, devemos considerar:

- $n$  = tamanho da amostra
- $\hat{p}$  = proporção na amostra
- $p$  = proporção na população
- $q = 1 - p$
- A estatística de teste para uma proporção é

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

## Example

Estudos sobre mortalidade de homens com idade superior a 65 anos de uma cidade mostram que 4% deles morrem dentro de um ano. Num grupo de 1000 indivíduos selecionados dessa população, 60 morreram no período de um ano. Suspeita-se de que houve um aumento da mortalidade anual nessa população.

## Solução

- Hipóteses

$$H_0 : p = 0.04$$

$$H_1 : p > 0.04$$

- Região crítica: à direita de  $z_{0.05} = 1.645$  (ou seja, qualquer  $z > z_{0.05}$ ).

- Dados

$$n = 1000, \hat{p} = 0,06$$

- Estatística de teste

$$z = \frac{0.06 - 0.04}{\sqrt{\frac{0.04 \times (1 - 0.04)}{1000}}} = 3.32$$

- Comparando  $z$  e  $z_{0.05}$  observamos que  $3.32 > 1.645$ .
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a proporção de idosos que morrem por ano nessa cidade é igual a 4%, em favor da hipótese de que essa proporção é maior 4%, ao nível de significância de 5%

- Em um teste para a média  $\mu$ , devemos observar o tamanho da amostra.
- Se a amostra é grande, fazemos o teste Z (valor crítico  $z_c$ ) com a estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Se a amostra for pequena, fazemos o teste t (valor crítico  $t_{(gl, \alpha)}$ ) com a estatística de teste:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

## Example

Um método padrão para identificação de bactérias em hemoculturas vem sendo utilizado há muitos anos e seu tempo médio de execução (desde a etapa de preparo das amostras até a identificação do gênero e espécie) é de 40.5 horas. Um microbiologista propôs uma nova técnica que ele afirma ter menor tempo de execução que o método padrão. A nova técnica foi aplicada em uma amostra de 18 hemoculturas e para cada uma mediu-se o tempo de execução. A média amostral foi 39.42 horas e o desvio padrão amostral foi 1,96 horas.

- Para testar essa hipótese usaremos o teste t pois a amostra é pequena ( $n = 18$ ) com  $gl = 17$  graus de liberdade.
- Como o teste é unicaudal (à esquerda), consultamos a tabela para a significância  $\alpha = 0.05$ .
- Consultando a tabela t, encontramos o valor crítico  $t_{(17, 0.05)} = 1.74$ .
- Após calcular a estatística de teste, devemos comparar com o valor crítico  $t_c$  para verificar se ela está contida na região de rejeição.

## Solução

- Hipóteses

$$H_0 : \mu = 40.5$$

$$H_1 : \mu < 40.5$$

- Região crítica:  $t < -t_{(17, 0.05)}$  (ou seja, qualquer  $t < -1.74$ ).

- Dados

$$n = 18, \bar{x} = 39.42, s = 1.96$$

- Estatística de teste

$$t = \frac{39.42 - 40.5}{\frac{1.96}{\sqrt{18}}} = -2.34$$



## Exemplo 1



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- O valor  $t = -2.34$  está dentro da região crítica ( $t = -2.34 < -1.74$ ).
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: Rejeita-se a hipótese de que o tempo médio de execução do novo método é igual a 40.5 horas, em favor da hipótese de que ele é menor do que 40.5 horas, ao nível de significância de 5%

## Exemplo 2



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

### Example

Uma indústria farmacêutica especifica que em certo analgésico a quantidade média de ácido acetil salicílico deve ser 5.5 gramas por comprimido. A indústria suspeita que houve problemas na produção de um determinado lote e que, nesse lote, a quantidade média dessa substância está diferente da especificada. Para verificar essa suspeita, a indústria selecionou uma amostra aleatória de 40 comprimidos desse lote, observando uma quantidade média de ácido acetil salicílico igual a 5.2 gramas e um desvio padrão de 0.7 gramas.

## Exemplo 2



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- Para testar essa hipótese usaremos o teste Z pois a amostra é grande ( $n = 40$ ).
- O teste é bicaudal, portanto consultamos a significância  $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ .
- Consultando a tabela Z, encontramos o valor crítico  $z_{0.025} = 1.96$ .
- Após calcular a estatística de teste, devemos comparar com o valor crítico  $z_c$  para verificar se ela está contida na região de rejeição.

## Exemplo 2



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

### Solução

- Hipóteses

$$H_0 : \mu = 5.5$$

$$H_1 : \mu \neq 5.5$$

- Região crítica:  $z < -z_{0.025}$  ou  $z > z_{0.025}$  (ou seja,  $z < -1.96$  ou  $z > 1.96$ ).

- Dados

$$n = 40, \bar{x} = 5.2, s = 0.7$$

- Estatística de teste

$$z = \frac{5.2 - 5.5}{\frac{0.7}{\sqrt{40}}} = -2.71$$

## Exemplo 2



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- O valor  $z = -2.71$  está dentro da região crítica ( $z = -2.71 < -1.96$ ).
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos  $H_0$  ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a quantidade média de ácido acetil salicílico (gramas por comprimido) de certo analgésico é igual a 5.5 gramas ao nível de significância de 5%

## Bônus: Intervalo de Confiança



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- Nessa situação, podemos usar o intervalo de confiança para realizar o teste de hipóteses, pois a hipótese alternativa é bilateral.
- Como queremos um teste a 5% de significância, calcularemos um intervalo de 95% de confiança para a quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido.

## Exemplo 2 (a revanche)



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

### Example

- $IC_{0.95} = (\bar{x} \pm E)$
- $1 - \alpha = 0.95$
- $\alpha = 0.05$
- $\frac{\alpha}{2} = 0.025$
- $z_c = z_{0.025} = 1.96$
- $IC_{0.95} = (5.2 \pm 1.96 \times \frac{0.7}{\sqrt{40}})$
- $IC_{0.95} = (5.2 \pm 0.2)$
- $IC_{0.95} = (5.0, 5.4)$

Lembrete da margem de erro:  $E = z_c \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

## Interpretação do IC



Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

### Interpretação

A quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido, está entre 5,0 e 5,4 gramas, com 95% de confiança.

- Teste de hipóteses baseado no intervalo de confiança: o valor 5.5 não pertence ao intervalo de 95% de confiança para a quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a quantidade média de ácido acetil salicílico de certo analgésico é igual a 5.5 gramas ao nível de significância de 5%.

Para executar um teste de hipóteses, é necessário:

- ① Formular a hipótese a ser testada e a hipótese nula, e escrevê-las em linguagem simbólica ( $H_0$  e  $H_1$ )
- ② Decidir qual o tipo de teste (unicaudal à esquerda, unicaudal à direita ou bicaudal)
- ③ Determinar a distribuição a ser usada e calcular a estatística de teste
- ④ Verificar se esta está contida na região de rejeição e decidir se há evidências para rejeitar a hipótese  $H_0$ .