# Análise Descritiva II

## Medidas sumárias

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia



## Sumário





## Medidas Sumárias

- Medidas sumárias resumem a informação contida nos dados em um pequeno conjunto de números.
- Medidas sumárias de populações se chamam parâmetros, e são representadas por letras gregas ($\mu$, $\sigma$, etc).
- Medidas sumárias de amostras se chamam estatísticas e são representadas por letras comuns ($\bar{x}$, $s$, etc).
- Geralmente trabalhamos com estatísticas descritivas.



## Média

- A média (aritmética) leva em conta todos os dados disponíveis, e indica (em muitas situações) o ponto de maior acumulação de dados.
- Notação: média populacional ($\mu$)

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j}{N}$$

- Notação: média amostral ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

- Nem sempre pertence ao dataset.

## Média

### Example

Foram observados os seguintes níveis de colesterol de uma amostra de pacientes. Qual é o nível médio de colesterol nestes pacientes?

$$x_1 = 142$$
$$x_2 = 144$$
$$x_3 = 176$$
$$x_4 = 203$$
$$x_5 = 134$$
$$x_6 = 191$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{990}{6} = 165$$



## Mediana

### Definition

A mediana é o dado que ocupa a posição central nos dados ordenados.

- Notação: $M_d$
- Divide o dataset ao meio
- Costuma pertencer ao dataset

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

## Mediana

- Para se calcular a mediana, deve-se ordenar os dados.
- Encontrar o valor do meio se $n$ for ímpar.
- Encontrar a média dos dois valores do meio se $n$ for par.

### Example

Conforme no exemplo anterior

$$x_5 = 134$$
$$x_1 = 142$$
$$x_2 = 144$$
$$x_3 = 176$$
$$x_6 = 191$$
$$x_4 = 203$$

$$M_d = \frac{144 + 176}{2} = 160$$

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

## Moda

### Definition

A moda é o dado que ocorre com maior frequência.

- Notação: $M_o$
- Sempre pertence ao dataset.
- Não é necessariamente única: o dataset pode ser bimodal, ou mesmo multimodal.
- Não necessariamente existe: amodal

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

# Moda

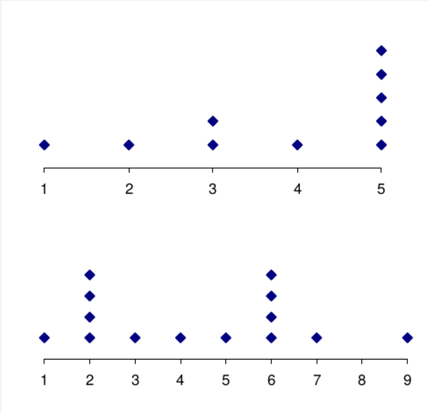



Figura: Diagrama de pontos para dados (a) unimodal, (b) bimodal (Fonte: Reis, Reis, 2002)

# Comparação entre as Medidas Centrais

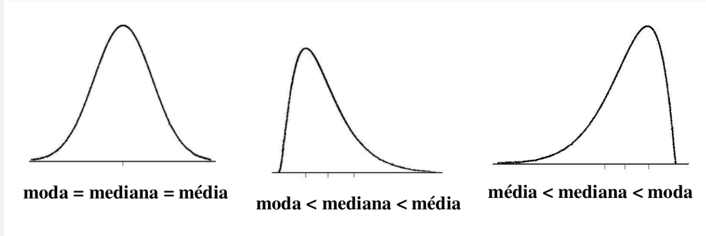



Figura: (a) Simétrica, (b) Assimétrica à esquerda, (c) Assimétrica à direita (Fonte: Reis, Reis 2002)

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Média
Mediana
Moda
Comparação
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

# Robustez da Média

- A média é mais usada, mas não é robusta.
- É distorcida na presença de *outliers* (valores discrepantes, extremos)

# Comparação entre as Medidas Centrais

**Example**

Considere o seguinte dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 7\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \dfrac{1+1+2+4+7}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

## Comparação entre as Medidas Centrais



**Example**

Considere agora este outro dataset

$$\{1, 1, 2, 4, 32\}$$

- $N = 5$
- As medidas descritivas centrais para estes dados são:
- $\mu = \frac{1+1+2+4+32}{5} = \frac{40}{5} = 8$
- $M_d = 2$
- $M_o = 1$

## Exercícios



**Exercício**

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A média amostral ($\bar{x}$)
2. A mediana ($M_d$)
3. A moda ($M_o$)

**Solução**

1. $\bar{x} = \frac{35+33+37+33+34}{5} = 34.4$
2. $M_d = 34$
3. $M_o = 33$

## Resumo



- Média mais usual
- Mediana na presença de *outliers*
- Moda quando a distribuição das frequências for bimodal ou multimodal.

## Variabilidade em Medições



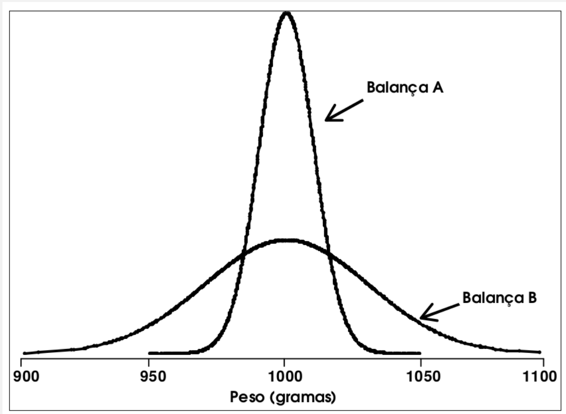



Figura: Variabilidade da medição de uma esfera metálica de 1000g. Balança A, “imprecisão” de 50g, balança B, “imprecisão” de 100g (Fonte: Reis, Reis, 2002)

## Amplitude



A amplitude dos dados identifica o intervalo de ocorrência de todos os dados observados

- $A = x_{max} - x_{min}$

**Example**

Seja o dataset

$$\{21, 12, 20, 4, 75, 40, 39, 63\}$$

Então, a amplitude é:

$$A = 75 - 4 = 71$$

## Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

- Uma maneira de entender a variabilidade do dataset é analisar os desvios em relação à média.
- Cada desvio é a diferença entre o valor do dado e a média.

## Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Mas os desvios...

1. são tão numerosos quanto os dados
2. têm sinal (direção do desvio)
3. têm soma nula

## Desvios em relação à média

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

**Example**

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- $N = 5$
- $\bar{x} = 3$

1. $D_1 = 1 - 3 = -2$
2. $D_2 = 2 - 3 = -1$
3. $D_3 = 3 - 3 = 0$
4. $D_4 = 4 - 3 = 1$
5. $D_5 = 5 - 3 = 2$

## Soma dos desvios



**Example**

Somando tudo:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 =$$

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$$

## Como proceder?

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

- Como extrair alguma informação útil (e sumária!) dos desvios?
- Problema: sinais

**Pergunta**

Como tirar os sinais dos desvios?

## Desvios absolutos

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

Tomando-se o módulo dos desvios temos:

**Definition**

Desvio médio absoluto (MAD) é a média dos desvios absolutos

- É uma medida de dispersão robusta (pouco influenciada por outliers)
- Módulo não tem boas propriedades matemáticas (analíticas e algébricas).
- Pouco usado para inferência (apesar da robustez)

## Desvio médio absoluto (MAD)

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

**Example**

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

1. $|D_1| = |1 - 3| = 2$
2. $|D_2| = |2 - 3| = 1$
3. $|D_3| = |3 - 3| = 0$
4. $|D_4| = |4 - 3| = 1$
5. $|D_5| = |5 - 3| = 2$

$$\mathrm{MAD} = \frac{\sum |D_i|}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

## Uma proposta “melhor”

- Uma outra maneira de eliminar os sinais é elevar ao quadrado cada desvio.
- Preserva boas propriedades matemáticas
- Calculando a média dos quadrados dos desvios (desvios quadráticos) temos . . .



## Variância

**Definition**

A variância é a média dos desvios quadráticos.

- Variância populacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_j - \mu)^2}{N}$$

- Variância amostral

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Conveniente do ponto de vista matemático (boas propriedades algébricas e analíticas).
- Unidade quadrática, pouco intuitiva para interpretação de resultados.

INTO
Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

## Variância

**Example**

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

1. $D_1^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4$
2. $D_2^2 = (2-3)^2 = (-1)^2 = 1$
3. $D_3^2 = (3-3)^2 = 0^2 = 0$
4. $D_4^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$
5. $D_5^2 = (5-3)^2 = 2^2 = 4$

$$s^2 = \frac{\sum D_i^2}{4} = 2.5$$

INTO
Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

## Desvio Padrão

**Definition**

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

- Desvio padrão populacional

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

- Desvio padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

INTO
Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

## Desvio Padrão



- É a medida mais usada, por estar na mesma escala (unidade) dos dados.
- Boas propriedades matemáticas
- Boas propriedades como estimador (Inferência)

## Desvio Padrão

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

**Example**

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{x} = 3$$

$$s^2 = 2.5$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

## Exercícios

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

**Exercício**

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A variância amostral ($s^2$)
2. O desvio padrão amostral ($s$)

**Formulário**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

## Exercícios

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

**Exercício**

Um pesquisador observou as seguintes idades (anos) para uma amostra: 35, 33, 37, 33, 34.
Determine:

1. A variância amostral ($s^2$)
2. O desvio padrão amostral ($s$)

**Solução**

Como $\bar{x} = 34.4$, temos:

1. $$s^2 = \frac{(35 - 34.4)^2 + (33 - 34.4)^2 + \dots}{5 - 1} = \frac{0.36 + 1.96 + 6.76 + 1.96 + 0.16}{4} = 2.8$$
2. $s = \sqrt{2.8} = 1.67$

## Coeficiente de Variação



### Definition

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

- Normaliza a variabilidade em relação à média
- Permite comparar a variabilidade de datasets não relacionados (mesmo que não usem a mesma unidade)
- Só deve ser usado para grandezas em escala (i.e. possui um "zero" não arbitrário, ou "zero absoluto")

## Coeficiente de Variação

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

### Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

| $x =$ | $y =$ |
|---|---|
| 181.2 | 76.3 |
| 173.7 | 66.7 |
| 169.0 | 73.3 |
| 184.1 | 74.8 |
| 174.4 | 82.7 |
| 172.6 | 79.6 |

Qual das duas amostras tem maior variabilidade?

1. Calcular a média $\bar{x}$
2. Calcular a variância $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
3. Calcular o desvio padrão $s = \sqrt{s^2}$
4. $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

## Coeficiente de Variação

Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Amplitude
Desvios em relação à media
Variância
Desvio Padrão
Exercícios
Coeficiente de Variação
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

### Example

$x =$ Estatura e $y =$ Perímetro abdominal.

| $x =$ | $y =$ |
|---|---|
| 181.2 | 76.3 |
| 173.7 | 66.7 |
| 169.0 | 73.3 |
| 184.1 | 74.8 |
| 174.4 | 82.7 |
| 172.6 | 79.6 |

$\bar{x} = 175.8$ $s_x = 5.7$
$\bar{y} = 75.7$ $s_y = 5.5$
$CV_x = 3.24\%$
$CV_y = 7.27\%$
Resposta: O perímetro abdominal tem maior variabilidade que a altura.

## Medidas de Posição



- Permitem estabelecer informações quantitativas relativas à ordem dos dados

## Quartis



### Definition

Dividem o dataset em quatro partes, cada uma com 25% dos dados

- $Q_1$, primeiro quartil, representa os primeiros 25% dos dados
- $Q_2$, segundo quartil, representa os primeiros 50% dos dados
- $Q_3$, terceiro quartil, representa os primeiros 75% dos dados

### Pergunta

O que podemos dizer sobre o segundo quartil ($Q_2$)?

## Quartis

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Quartis
Percentis e Decis
Boxplot
Resumo

### Example

Os pesos de 102 bebês nascidos em uma certa maternidade ao longo de um ano foram anotados e ordenados. Um certo bebê ocupa o $Q_3$ deste dataset.

- Isto significa que aproximadamente 75% dos bebês nascidos nesta maternidade tem peso menor ou igual a ele (Mazel Tov!).

## Percentis e Decis

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Quartis
Percentis e Decis
Boxplot
Resumo

### Definition

O percentil de ordem $k$ (onde $k$ é qualquer valor entre 0 e 100), denotado por $P_k$ , é o valor tal que $k$% dos valores do dataset são menores ou iguais a ele.

- Generalizam a idéia dos quartis
- Dividem o dataset em 100 partes
- Maior granularidade na ordem
- Decis: dividem o dataset em 10 partes

## O Boxplot

Análise Descritiva II

Felipe Figueiredo

Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo

- Gráfico que ilustra a dispersão dos dados pelos quartis
- Retângulo que representa a Amplitude Interquartílica ($AIQ = Q_3 - Q_1$)
- Barra interna que representa a mediana ($Q_2$)
- Limite superior (barra vertical): $Q_3 + 1.5 \times AIQ$
- Limite inferior (barra vertical): $Q_1 - 1.5 \times AIQ$
- Outliers como pontos, círculos ou estrelas, etc.
- Conveniente para comparar vários grupos ou amostras

## O Boxplot

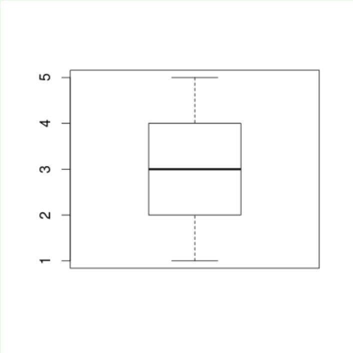
### Example

Dataset

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\bar{x} = 3, M_d = 3$$

$$Q_1 = 2, Q_3 = 4$$





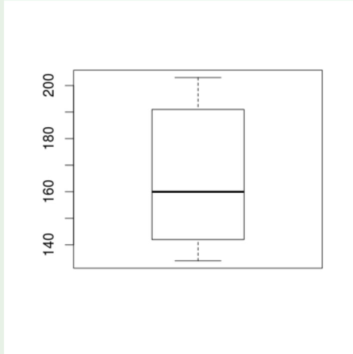

## O Boxplot

### Example

Exemplo do colesterol

$$\begin{aligned} x_1 &= 142 \\ x_2 &= 144 \\ x_3 &= 176 \\ x_4 &= 203 \\ x_5 &= 134 \\ x_6 &= 191 \end{aligned}$$

$\bar{x} = 165, M_d = 160$





Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo


## Boxplot: duas amostras

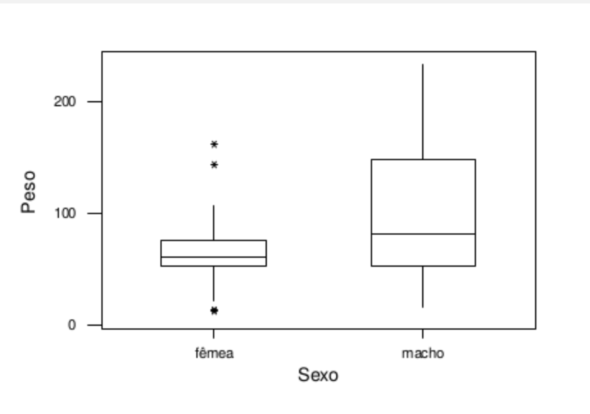



Figura: Boxplots para dois grupos de dados (Fonte: Reis, Reis, 2002)


Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo


## Análise Exploratória de Dados (EDA)

Ao iniciar sua Análise Exploratória de Dados (EDA), você pode visualizar sua amostra com:

1. Resumo dos cinco números
   - Valor mínimo
   - Primeiro quartil $Q_1$
   - Mediana (e/ou média)
   - Terceiro quartil $Q_3$
   - Valor máximo
2. Boxplot



Análise Descritiva II
Felipe Figueiredo
Medidas de Tendência Central
Medidas de Dispersão
Medidas de Posição
Boxplot
Resumo