

# Probabilidades II

## Distribuições de Probabilidades

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

## 1 Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis
- Variáveis Discretas
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

## 1 Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis
- Variáveis Discretas
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

## Definition

Uma **variável aleatória** é uma variável (tipicamente representada por  $x$ ) que tem um único valor numérico associada a um experimento aleatório

- Discretas
- Contínuas

## Definition

Uma **variável aleatória** é uma variável (tipicamente representada por  $x$ ) que tem um único valor numérico associada a um experimento aleatório

- Discretas
- Contínuas

## Definition

Uma **variável aleatória** é uma variável (tipicamente representada por  $x$ ) que tem um único valor numérico associada a um experimento aleatório

- Discretas
- Contínuas

## 1 Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis
- **Variáveis Discretas**
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

## Definition

Uma variável aleatória **discreta** pode assumir uma quantidade contável de valores

## Example

- Número de filhos em uma família
- Quantidade de pacientes em um dia no consultório



## Definition

Uma variável aleatória **discreta** pode assumir uma quantidade contável de valores

## Example

- Número de filhos em uma família
- Quantidade de pacientes em um dia no consultório

## Definition

Uma variável aleatória **discreta** pode assumir uma quantidade contável de valores

## Example

- Número de filhos em uma família
- Quantidade de pacientes em um dia no consultório

## Definition

Uma variável aleatória **discreta** pode assumir uma quantidade contável de valores

## Example

- Número de filhos em uma família
- Quantidade de pacientes em um dia no consultório

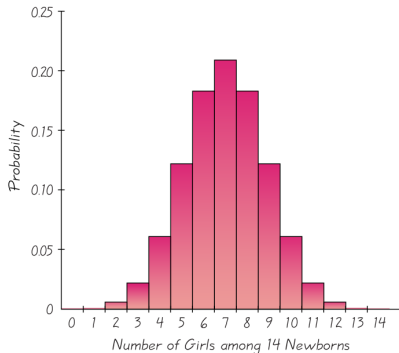
## Example

Seja  $x$  o número de filhos em uma família.

$x$	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.15	0.30	0.40	0.10	0.05

O valor esperado  $E[x]$  (de filhos por família) é:

$$\sum xP(x) = 0 \times 0.15 + 1 \times 0.30 + 2 \times 0.40 \dots = 1.6$$



**Figura:** A distribuição de uma variável discreta (Fonte: Triola, 2004)

## 1 Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis
- Variáveis Discretas
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

## Definition

Uma variável aleatória **contínua** pode ser associada a medições em uma escala contínua (e infinita) de valores

## Example

- Quantidade de leite produzido por uma vaca em um dia
- Expectativa de vida de um paciente terminal

## Definition

Uma variável aleatória **contínua** pode ser associada a medições em uma escala contínua (e infinita) de valores

## Example

- Quantidade de leite produzido por uma vaca em um dia
- Expectativa de vida de um paciente terminal



## Definition

Uma variável aleatória **contínua** pode ser associada a medições em uma escala contínua (e infinita) de valores

## Example

- Quantidade de leite produzido por uma vaca em um dia
- Expectativa de vida de um paciente terminal

## Definition

Uma variável aleatória **contínua** pode ser associada a medições em uma escala contínua (e infinita) de valores

## Example

- Quantidade de leite produzido por uma vaca em um dia
- Expectativa de vida de um paciente terminal

## Definition

Uma **distribuição de probabilidade** é um gráfico, tabela ou fórmula que relaciona a cada valor que a variável aleatória pode assumir a sua probabilidade

Os pré-requisitos para uma função ser uma Função de Probabilidade são:

- $\sum P(x) = 1$ , onde  $x$  percorre todos os valores possíveis
- $0 \leq P(x) \leq 1$ , para todo  $x$

## Definition

Uma **distribuição de probabilidade** é um gráfico, tabela ou fórmula que relaciona a cada valor que a variável aleatória pode assumir a sua probabilidade

Os pré-requisitos para uma função ser uma Função de Probabilidade são:

- $\sum P(x) = 1$ , onde  $x$  percorre todos os valores possíveis
- $0 \leq P(x) \leq 1$ , para todo  $x$

## Definition

Uma **distribuição de probabilidade** é um gráfico, tabela ou fórmula que relaciona a cada valor que a variável aleatória pode assumir a sua probabilidade

Os pré-requisitos para uma função ser uma Função de Probabilidade são:

- $\sum P(x) = 1$ , onde  $x$  percorre todos os valores possíveis
- $0 \leq P(x) \leq 1$ , para todo  $x$

## 1 Variáveis Aleatórias

- Tipos de Variáveis
- Variáveis Discretas
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

# A distribuição de Bernoulli



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Um ensaio de Bernoulli é teste com desfecho 0 ou 1 (negativo ou positivo)
- Probabilidade de sucesso  $p$
- Probabilidade de fracasso  $1 - p$
- Notação:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- Valor esperado:  $E[x] = p$

# A distribuição de Bernoulli



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Um ensaio de Bernoulli é teste com desfecho 0 ou 1 (negativo ou positivo)
- Probabilidade de sucesso  $p$
- Probabilidade de fracasso  $1 - p$
- Notação:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- Valor esperado:  $E[x] = p$



# A distribuição de Bernoulli



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Um ensaio de Bernoulli é teste com desfecho 0 ou 1 (negativo ou positivo)
- Probabilidade de sucesso  $p$
- Probabilidade de fracasso  $1 - p$
- Notação:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- Valor esperado:  $E[x] = p$

# A distribuição de Bernoulli



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Um ensaio de Bernoulli é teste com desfecho 0 ou 1 (negativo ou positivo)
- Probabilidade de sucesso  $p$
- Probabilidade de fracasso  $1 - p$
- Notação:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- Valor esperado:  $E[x] = p$

# A distribuição de Bernoulli



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Um ensaio de Bernoulli é teste com desfecho 0 ou 1 (negativo ou positivo)
- Probabilidade de sucesso  $p$
- Probabilidade de fracasso  $1 - p$
- Notação:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- Valor esperado:  $E[x] = p$

# A distribuição Binomial



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Quando executamos  $n$  ensaios de Bernoulli **independentes**, encontramos a distribuição Binomial
- Com  $n$  ensaios (cada um com prob.  $p$ ), temos a contagem  $x$  de sucessos (desfecho = 1)
- Notação  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Valor esperado:  $E[x] = np$

# A distribuição Binomial



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Quando executamos  $n$  ensaios de Bernoulli **independentes**, encontramos a distribuição Binomial
- Com  $n$  ensaios (cada um com prob.  $p$ ), temos a contagem  $x$  de sucessos (desfecho = 1)
- Notação  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Valor esperado:  $E[x] = np$

# A distribuição Binomial



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Quando executamos  $n$  ensaios de Bernoulli **independentes**, encontramos a distribuição Binomial
- Com  $n$  ensaios (cada um com prob.  $p$ ), temos a contagem  $x$  de sucessos (desfecho = 1)
- Notação  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Valor esperado:  $E[x] = np$

# A distribuição Binomial



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

- Quando executamos  $n$  ensaios de Bernoulli **independentes**, encontramos a distribuição Binomial
- Com  $n$  ensaios (cada um com prob.  $p$ ), temos a contagem  $x$  de sucessos (desfecho = 1)
- Notação  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Valor esperado:  $E[x] = np$

# A distribuição Binomial



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

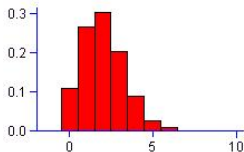
Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

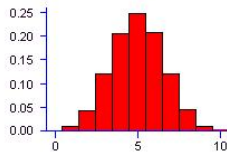
Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

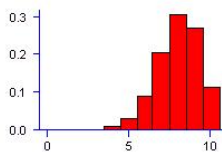
$n = 10, p = 0.2$



$n = 10, p = 0.5$



$n = 10, p = 0.8$

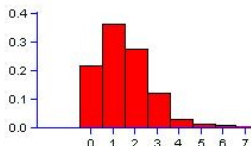




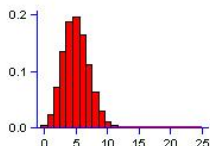
# Aumentando o tamanho da amostra

- Quanto maior o tamanho  $n$  da amostra, mais “suave” a distribuição binomial, e mais simétrica
- O histograma vai ficando cada vez mais parecido com uma curva

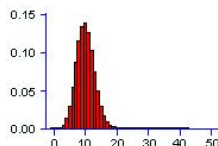
$n = 7, p = 0.2$



$n = 25, p = 0.2$



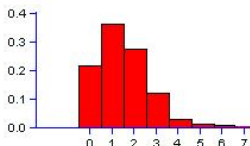
$n = 50, p = 0.2$



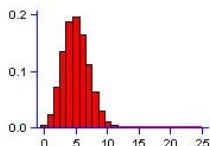
# Aumentando o tamanho da amostra

- Quanto maior o tamanho  $n$  da amostra, mais “suave” a distribuição binomial, e mais simétrica
- O histograma vai ficando cada vez mais parecido com uma curva

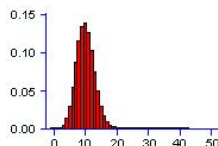
$n = 7, p = 0.2$



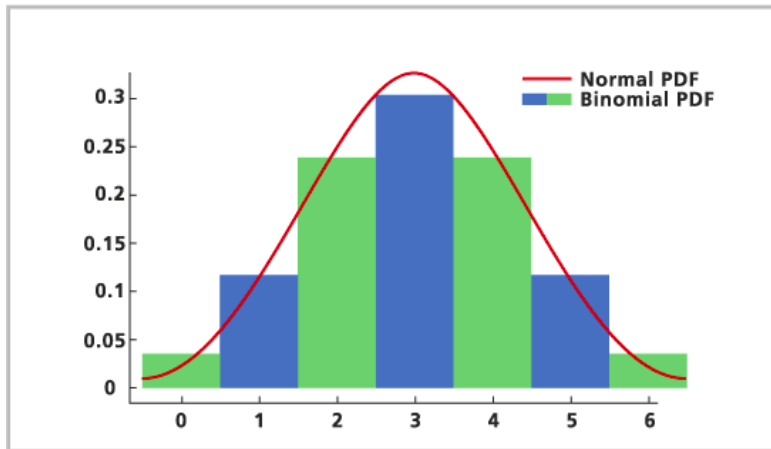
$n = 25, p = 0.2$



$n = 50, p = 0.2$



# Aumentando o tamanho da amostra



(Vídeos: Galton board e Galton machine)

## 1 Variáveis Aleatórias

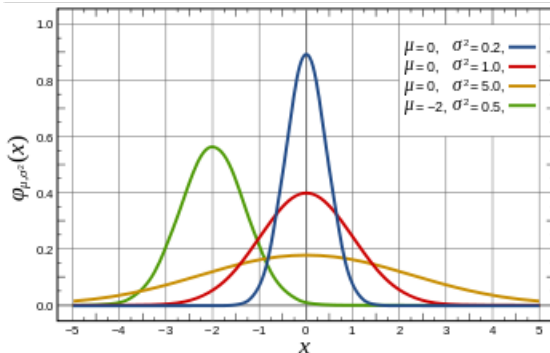
- Tipos de Variáveis
- Variáveis Discretas
- Variáveis Contínuas

## 2 Distribuições de Probabilidade

- Distribuições Discretas
- Distribuições Contínuas

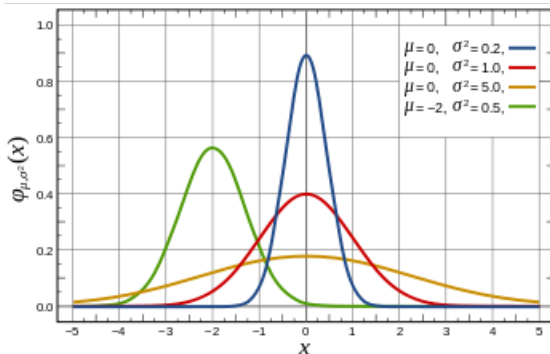
# A distribuição Normal

- Simétrica
- Forma de sino
- Assíntotas



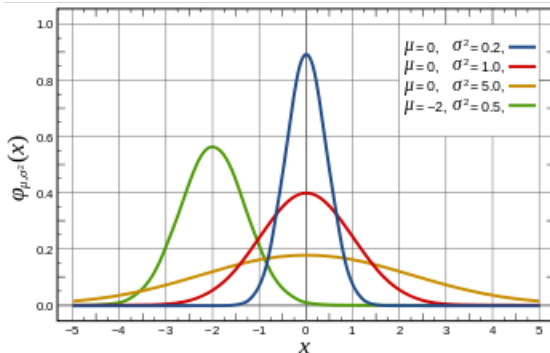
# A distribuição Normal

- Simétrica
- Forma de sino
- Assíntotas



# A distribuição Normal

- Simétrica
- Forma de sino
- Assíntotas



# A distribuição Normal Padrão



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , isto é,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

- Para simplificar as análises, trabalhamos com a normal padrão
- A normal padrão tem média 0 e desvio-padrão 1
- Padronização:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(0, 1)$
- Seus valores podem ser consultados em uma tabela



# A distribuição Normal Padrão



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , isto é,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

- Para simplificar as análises, trabalhamos com a normal padrão
- A normal padrão tem média 0 e desvio-padrão 1
- Padronização:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(0, 1)$
- Seus valores podem ser consultados em uma tabela

# A distribuição Normal Padrão



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , isto é,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

- Para simplificar as análises, trabalhamos com a normal padrão
- A normal padrão tem média 0 e desvio-padrão 1
- Padronização:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(0, 1)$
- Seus valores podem ser consultados em uma tabela

# A distribuição Normal Padrão



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , isto é,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

- Para simplificar as análises, trabalhamos com a normal padrão
- A normal padrão tem média 0 e desvio-padrão 1
- Padronização:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(0, 1)$
- Seus valores podem ser consultados em uma tabela

# A distribuição Normal Padrão



Probabilidades  
II

Felipe  
Figueiredo

Variáveis  
Aleatórias

Distribuições  
de  
Probabilidade

Distribuições  
Discretas

Distribuições  
Contínuas

Considere uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , isto é,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

- Para simplificar as análises, trabalhamos com a normal padrão
- A normal padrão tem média 0 e desvio-padrão 1
- Padronização:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $Z \sim N(0, 1)$
- Seus valores podem ser consultados em uma tabela