

Medidas de associação II

Correlação e Regressão Linear Simples

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Sumário

- 1 **Correlação**
 - Associação entre duas variáveis
 - Covariância entre duas amostras
 - Coeficiente de correlação de Pearson
- 2 **Regressão Linear Simples**
 - Modelos estatísticos
 - A regressão
 - Coeficiente de Determinação r^2
- 3 **Interpretação**
- 4 **Causalidade**
- 5 **Resumo**

Tipos de variáveis envolvidas

- Considere duas amostras X e Y, de dados numéricos contínuos.
- Vamos representar os dados em pares ordenados (x,y) onde:
 - X: variável independente (ou variável explanatória)
 - Y: variável dependente (ou variável resposta)

Medidas de associação

- Como definir (e mensurar!) o grau de associação entre duas variáveis aleatórias (VAs)?
- Se uma VA é dependente de outra, é razoável assumir que isso possa ser observável por estatísticas sumárias
- Como resumir esta informação em uma única grandeza numérica?

Medidas de associação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão
Interpretação
Causalidade
Resumo

- Quando uma associação é forte, podemos identificá-la subjetivamente
- Para isto, analisamos o gráfico de dispersão dos pares (x,y)
- Um gráfico deste tipo é feito simplesmente plotando os pontos no plano cartesiano

Exemplo

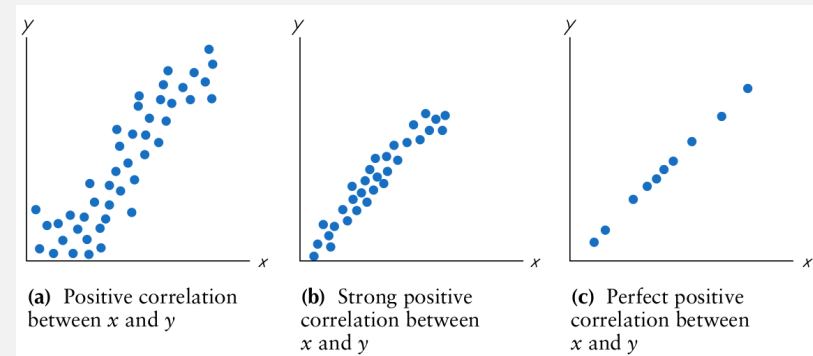


Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão
Interpretação
Causalidade
Resumo



(Fonte: Triola)

Exemplo

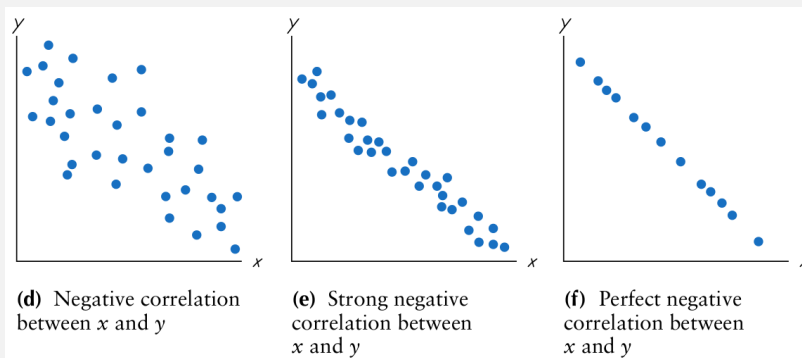


Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão
Interpretação
Causalidade
Resumo



(Fonte: Triola)

Exemplo

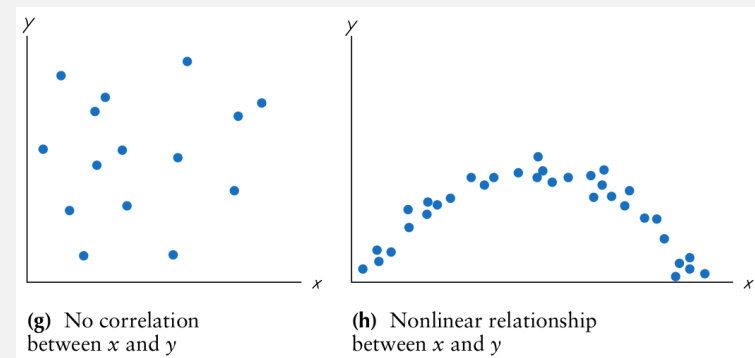


Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão
Interpretação
Causalidade
Resumo



(Fonte: Triola)

Variância



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Relembrando: a variância (assim como o desvio-padrão) é uma medida da dispersão da amostra
- Medida sumária que resume o quanto os dados se desviam da média
- Podemos usar um raciocínio análogo para comparar quanto uma amostra se desvia em relação à outra

Covariância entre duas amostras



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Definition

A covariância entre duas variáveis X e Y é uma medida de quanto ambas variam juntas (uma em relação à outra).

- Obs: duas variáveis independentes tem covariância igual a zero!

Correlação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Definition

A correlação é a associação estatística entre duas variáveis.

Para medir essa associação, calculamos o **coeficiente de correlação** r .

Coeficiente de correlação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Definition

O coeficiente de correlação r é a medida da direção e força da associação entre duas variáveis.

Propriedades:

- É um número entre -1 e 1 .
- Mede a associação **linear** entre duas variáveis.
 - Diretamente proporcional, inversamente proporcional, ou ausência de proporcionalidade.

Coeficiente de correlação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- O coeficiente de correlação de Pearson é a covariância normalizada
- Pode ser calculado para populações (ρ) ou amostras (r)
- População

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Utilizando uma fórmula semelhante, encontramos o coeficiente r para uma amostra

Correlação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Uma forte associação **positiva** corresponde a uma correlação próxima de **1**.
- Uma forte associação **negativa** corresponde a uma correlação próxima de **-1**.
- A **ausência** de associação corresponde a uma correlação próxima de **0**.



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Se tivéssemos os dados de toda a **população**, poderíamos calcular o **parâmetro** ρ
- Na prática, só podemos calcular a **estatística** r da **amostra**
- Utilizamos r como estimador para ρ , e testamos a significância estatística da forma usual

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Example

Pesquisadores queriam entender por que a insulina varia tanto entre indivíduos. Imaginaram que a **composição lipídica** das células do músculo afetam a **sensibilidade do músculo para a insulina**. Para isto, eles injetaram insulina em 13 jovens adultos, e determinaram quanta glicose eles precisariam injetar nos sujeitos para manter o nível de glicose sanguínea constante. A quantidade de glicose injetada para manter o nível sanguíneo constante é, então, uma medida da sensibilidade à insulina.
(Fonte: Motulsky, 1995)

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Example

Os pesquisadores fizeram uma pequena biópsia nos músculos para aferir a fração de ácidos graxos poli-insaturados que tem entre 20 e 22 carbonos (%C20-22). Como variável resposta, mediram o índice de sensibilidade à insulina.

Valores tabelados a seguir.

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Table 17.1. Correlation Between %C20-22 and Insulin Sensitivity

% C20-22 Polyunsaturated Fatty Acids	Insulin Sensitivity (mg/m ² /min)
17.9	250
18.3	220
18.3	145
18.4	115
18.4	230
20.2	200
20.3	330
21.8	400
21.9	370
22.1	260
23.1	270
24.2	530
24.4	375

Exemplo: Diagrama de dispersão dos dados



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

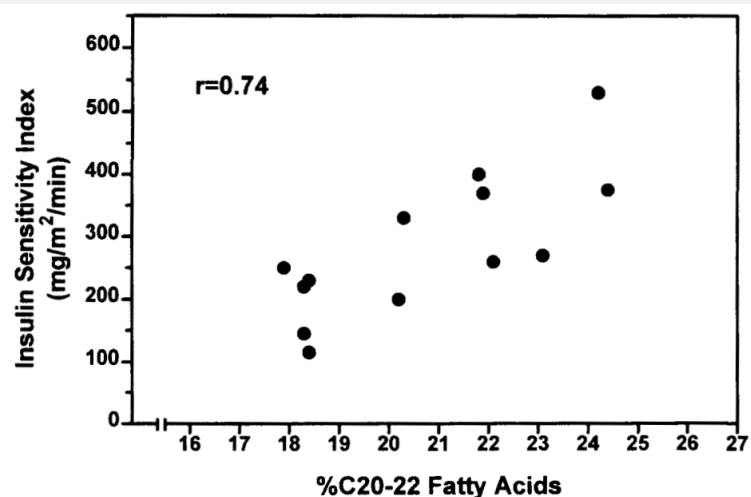
Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo



Obs: na verdade, $r = 0.77$.

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- O tamanho da amostra foi $n = 13$
- Consultamos o valor crítico de r na tabela a seguir
- Testamos a H_0 que não há relação entre as variáveis na população ($H_0 : \rho = 0$).

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

TABLE A-6 Critical Values of the Pearson Correlation Coefficient r		
n	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
4	.950	.999
5	.878	.959
6	.811	.917
7	.754	.875
8	.707	.834
9	.666	.798
10	.632	.765
11	.602	.735
12	.576	.708
13	.553	.684
14	.532	.661
15	.514	.641
16	.497	.623
17	.482	.606
18	.468	.590

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- O valor crítico da tabela para uma amostra de tamanho 13 é $r_c = 0.553$
- A correlação calculada para esta amostra foi $r = 0.77$
- Como a correlação é maior que o valor crítico, a relação é estatisticamente significativa
- Conclusão: há evidências para rejeitar a H_0 que não há relação entre as variáveis.

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Pode-se também calcular o p-valor para o coeficiente de correlação r .
- Para este exemplo, teríamos $p = 0.0021$.
- Interpretação: se não houver relação entre as variáveis (H_0), existe apenas 0.21% de chance de observarmos uma correlação tão forte com um estudo deste tamanho

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Por que as duas variáveis são tão correlacionadas?
Considere 4 possibilidades:

- 1 o conteúdo lipídico das membranas **determina** a sensibilidade à insulina
- 2 A sensibilidade à insulina de alguma forma afeta o conteúdo lipídico
- 3 tanto o conteúdo lipídico quanto a sensibilidade à insulina estão sob o efeito de **algum outro** fator (talvez algum hormônio)
- 4 as duas variáveis não são correlacionadas na população, e a estimativa observada nessa amostra é mera coincidência

Interpretando o r



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Nunca devemos ignorar a última possibilidade (erro tipo I)!
- o p-valor indica quão rara é essa coincidência
- neste caso, em apenas 0.21% dos experimentos não haveria uma correlação real, e estaríamos cometendo um erro de interpretação

Elevando o r ao quadrado



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Relembrando: calculamos a variância de uma amostra para saber a dispersão dos dados
- Sua interpretação é confusa, portanto preferimos usar o desvio-padrão
- No caso do r é o contrário: a interpretação de r^2 é mais simples
- Obs: o valor r^2 também é chamado **coeficiente de determinação**, como veremos a seguir.

Interpretando o r^2



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação
Associação
Covariância
Pearson

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- No exemplo anterior, $r^2 = 0.59$
- no caso, 59% da variabilidade da tolerância à insulina pode ser explicada pelo conteúdo lipídico
- Ou seja: conhecer o conteúdo lipídico permite explicar 59% da variância na sensibilidade à insulina
- Isto deixa 41% da variância que pode ser explicada por outros fatores ou erros de medição
- E este valor (r^2) também é utilizado na Regressão!

Modelos estatísticos



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão
Modelos estatísticos
A regressão
 R^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

Modelos servem para:

- representar de forma simplificada fenômenos, experimentos, dados, etc;
- possibilitar análise em cenários controlados, menos complexos que a realidade;
- extrapolar resultados e conclusões.

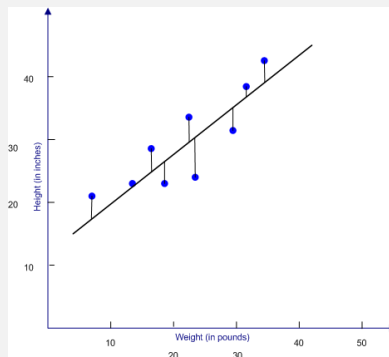
Ao ajustar um modelo aos dados, podemos:

- fazer previsões dentro do intervalo observado para dados que não foram obtidos (interpolação)
- fazer previsões fora do intervalo observado (extrapolação)

Definition

Uma **reta de regressão** (também chamada de reta de melhor ajuste) é a reta para a qual a soma dos erros quadráticos dos resíduos é o mínimo.

- É a reta que melhor se ajusta aos dados
- Minimiza os resíduos



Definition

Resíduos são a distância entre o dado observado e a reta estimada (modelo).

- Relembrando: a equação de uma reta é definida pela fórmula

$$\hat{y} = ax + b$$

- No caso da reta regressora:
 - y é a variável dependente
 - x é a variável independente
 - a é a inclinação
 - b é o intercepto
- Assim, o objetivo da análise de regressão é encontrar os valores a e b

Análise de Regressão



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

R^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

Para determinar a inclinação e o intercepto, usamos:

- as médias de X e Y
- as variâncias de X e Y
- o coeficiente de correlação r entre X e Y
- o tamanho da amostra n
- ... e algumas operações entre estes termos

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

R^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

Example

Voltemos ao exemplo de associar a composição lipídica com a sensibilidade à insulina.

Pergunta

Qual é o acréscimo na sensibilidade à insulina, para cada unidade aumentada na composição lipídica?

Exemplo



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

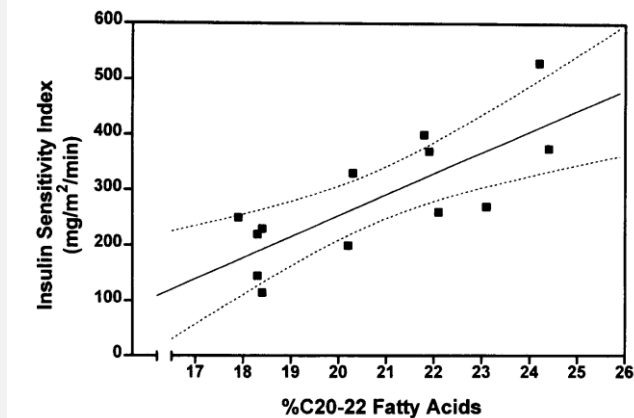
A regressão

R^2

Interpretação

Causalidade

Resumo



Fonte: Motulsky, 1995

Exemplo



Medidas de
associação II

Linear Regression				
Number of points = 13				
Parameter	Expected Value	Standard Error	Lower 95% CI	Upper 95% CI
Slope	37.208	9.296	16.747	57.668
Y intercept	-486.54	193.72	-912.91	-60.173
X intercept	13.076			
$r^2 = 0.5929$				
Standard deviation of residuals from line ($Sy.x$) = 75.895				
Test: Is the slope significantly different from zero?				
$F = 16.021$				
The P value is 0.0021, considered very significant.				

Interpretação



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

\hat{r}^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

- O p-valor é significativo.
- A inclinação é ≈ 37.2
- Isto significa que:

para cada unidade aumentada no %C20–22, teremos um aumento proporcional de aproximadamente 37.2 mg/m²/min na sensibilidade à insulina

Análise de Regressão



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

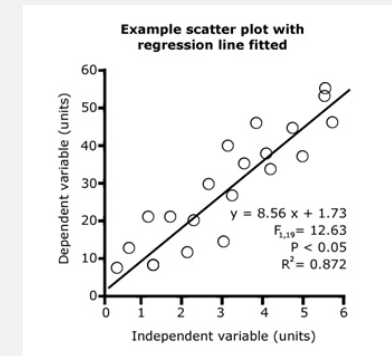
A regressão

\hat{r}^2

Interpretação

Causalidade

Resumo



- A qualidade do ajuste do modelo de regressão é determinado pelo **coeficiente de determinação r^2**

Coeficiente de Determinação r^2



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

\hat{r}^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

Definition

O **coeficiente de determinação r^2** é a relação da variação explicada com a variação total.

$$r^2 = \frac{\text{variação explicada}}{\text{variação total}}$$

- Lembrando: r^2 é o quadrado de r !

Coeficiente de Determinação r^2



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

\hat{r}^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Qual é a porcentagem da variação dos dados pode ser explicada pela reta regressora?
- O coeficiente r^2 é a fração da variância que é compartilhada entre X e Y.
- Como r está sempre entre -1 e 1, r^2 está sempre entre 0 e 1.

Coeficiente de Determinação r^2



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Modelos estatísticos

A regressão

R^2

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Além disso, $r^2 \leq |r|$
- Por que?

Compare os seguintes números entre 0 e 1:

$$\frac{1}{2} \text{ e } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \text{ e } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{3}$$

Interpretação



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Se a correlação é 0, então X e Y não variam juntos (independentes)
- Se a correlação é positiva, então quando uma aumenta, a outra aumenta em proporção direta (linear)
- Se a correlação é negativa, então quando uma aumenta, a outra diminui em proporção inversa (linear)

Cuidado!



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Duas variáveis podem **parecer** correlacionadas pois são influenciadas por uma terceira variável
- Ex: em alguns países a mortalidade infantil é negativamente correlacionada com o número de telefones per capita
- Mas comprar mais telefones não vai salvar crianças!
- Explicação alternativa: a melhoria da condições financeiras pode afetar ambas as variáveis

Causa x efeito



Medidas de
associação II

Felipe
Figueiredo

Correlação

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Se há uma relação de causalidade entre as duas variáveis, a correlação será não nula (positiva ou negativa)
- Quanto maior for a relação de dependência entre as variáveis, maior será o módulo da correlação.
- Se as variáveis não são relacionadas, a correlação será nula.

Causalidade?



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

- Mas não podemos inverter a afirmativa lógica do slide anterior!
- Isto é, ao observar uma forte correlação, gostaríamos de concluir que uma variável **causa** este efeito na outra
- Infelizmente isto não é possível!
- Lembre-se: a significância do teste indica a probabilidade de se cometer um erro do tipo I (falso positivo).

Repita várias vezes mentalmente

Correlação não implica em causalidade.

Exemplo



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

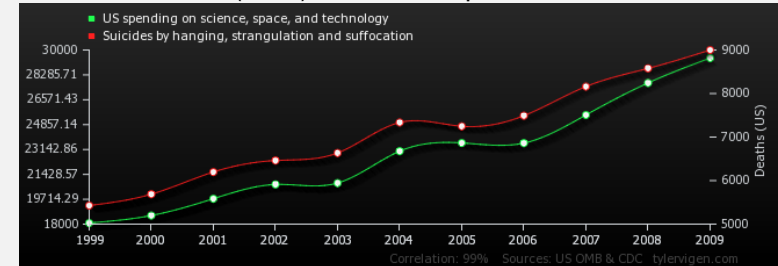
Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Gasto com C&T (EUA) x Suicídios por enforcamento



Correlação: 0.992082

(Fonte: Spurious correlations)

Exemplo



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

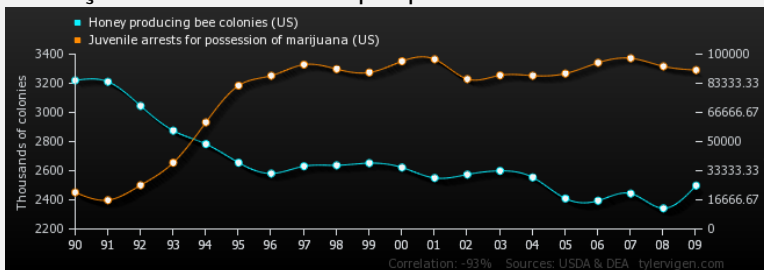
Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Produção de mel x Prisões por posse de maconha



Correlação: -0.933389

(Fonte: Spurious correlations)

Exemplo



Medidas de associação II

Felipe Figueiredo

Correlação

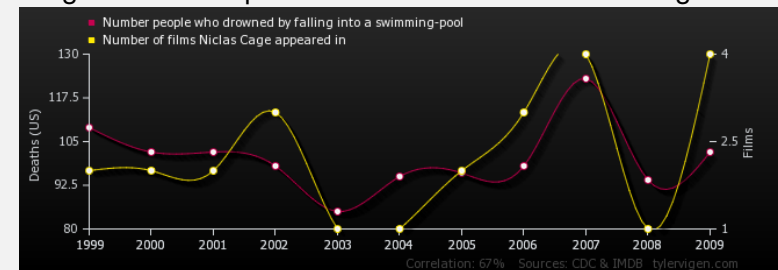
Regressão

Interpretação

Causalidade

Resumo

Afogamentos em piscina x Filmes com Nicholas Cage



Correlação: 0.666004

(Fonte: Spurious correlations)

Ao encontrar uma forte correlação, deve-se sempre se perguntar:

- ① Há uma relação direta de causa e efeito entre as variáveis? (X causa Y?)
- ② Há uma relação inversa de causa e efeito entre as variáveis? (Y causa X?)
- ③ É possível que a relação entre as variáveis possa ser causada por uma terceira variável (ou mais) que não foi analisada?
- ④ É possível que a relação entre duas variáveis seja uma coincidência?

- É necessário investigar a relação entre as variáveis!
- O que pode explicar a relação observada?
- Qual proporção (porcentagem) da variabilidade pode ser explicada pelas variáveis analisadas?
- Quão bem a reta regressora se ajusta aos dados?