Testes de Hipóteses I

Testes para uma amostra

Felipe Figueiredo

Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia

Sumário

Testes de Hipóteses

- Podemos tomar decisões baseado nos dados de um experimento (amostra).
- Para isto, precisamos de um critério sistemático e rigoroso que possa aferir o quanto os dados suportam esta decisão.
- Usando os conceitos de probabilidades, poderemos ainda calcular a probabilidade de que esta decisão esteja errada.

Testes de Hipóteses

Definition

Em Estatística, uma hipótese é uma afirmação sobre uma característica de uma população, tipicamente o valor de um parâmetro.

Definition

Um teste de hipótese (ou teste de significância) é um procedimento sistemático para testar uma afirmação sobre uma característica de uma população.

Componentes de um testes de hipóteses

São necessários para um teste de hipóteses:

- As hipóteses nula e alternativa
- O nível de significância
- A estatística de teste
- A região crítica
-

Identificando hipóteses

- Uma hipótese estatística deve ser testável frente a dados obtidos de um experimento.

Example

Um jornalista alega que a maior parte dos motoristas atravessa o sinal vermelho.

Example

Pesquisadores afirmam que a temperatura corporal média de adultos sadios não ultrapassa 37^oC.

Identificando hipóteses

- Para efetuar um teste de hipóteses é necessária a formulação de uma hipótese nula e uma hipótese alternativa.
- A hipótese nula (H_0) é uma hipótese que contém uma afirmação de igualdade.
- A hipótese alternativa (H_1 ou H_a) é o complementar da hipótese nula.

Identificando hipóteses

Roteiro

1. Identificar a afirmação a ser testada e expressá-la em forma simbólica
2. Expressar em forma simbólica a afirmação que deve ser verdadeira, caso a afirmação de interesse seja falsa
3. Das duas expressões obtidas, a hipótese H_0 será a que contém igualdade $=$, enquanto a H_1 será a que contém um sinal de $<$, $>$ ou $\neq$.

Identificando hipóteses

Example

Formulação verbal:
A proporção de motoristas que admitem atravessar o sinal vermelho é maior que 50%.

Formulação matemática:

$$H_0 : p = 0.5$$
$$H_1 : p > 0.5$$

Identificando hipóteses

Example

Formulação verbal:
A altura média de jogadores profissionais de basquete é de no máximo 2.20m.

Formulação matemática:

$$H_0 : \mu = 2.20$$
$$H_1 : \mu < 2.20$$

Identificando hipóteses

Example

Formulação verbal:
A dose média contida em um comprimido de paracetamol é de 750mg.

Formulação matemática:

$$H_0 : \mu = 750$$
$$H_1 : \mu \neq 750$$

Protótipo

Considere o seguinte exemplo:

Example

Uma empresa oferece um produto que afirma que “ser capaz de aumentar as chances de que o sexo do bebê de um casal seja um menino em até 85%, e uma menina em até 80%”. Você resolve testar o produto que confere maior chance de nascimento de meninas em 100 casais.

Há evidências para aceitar a alegação do produto, se forem observadas (em 100 nascimentos):

1. 52 meninas?
2. 97 meninas?

Protótipo

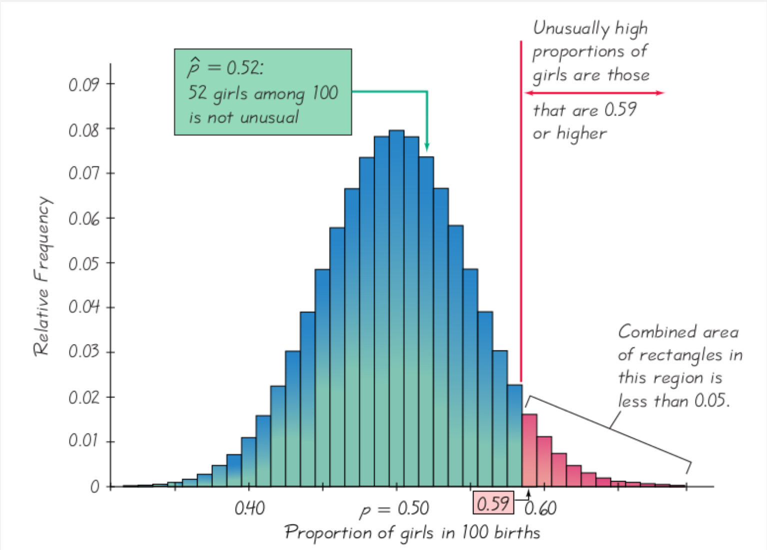
Example

1. Esperamos cerca de 50 meninas em 100 nascimentos (H_0). Como 52 é próximo de 50, não deveríamos concluir que o produto é eficaz.
2. É muito pouco provável o nascimento de 97 meninas em 100. Isso poderia ser explicado como (a) um evento *extremamente* raro ocorrer ao acaso ou (b) o produto é eficaz.

Protótipo

- No primeiro caso, dizemos que não há evidência de que o produto seja eficaz, e que no segundo caso há.
- Isso vale, mesmo considerando que em ambos os casos o resultado é acima da média.
- A diferença é que no segundo caso, o resultado é significativamente maior que o esperado ao acaso.

Protótipo



Rejeitar hipóteses

- Ao executar um teste de hipóteses observamos se os dados indicam que se deve rejeitar a hipótese H_0.
- H_0 representa a possibilidade de observarmos o resultado ao acaso.
- Caso haja evidências para que H_0 seja rejeitada, "assumimos" que a H_1 deve ser verdadeira.
- Mas isso não significa que H_0 seja falsa e H_1 seja verdadeira!

Tipos de erros em testes de hipóteses

Felipe Figueiredo

Definition

Um erro do tipo I ocorre se a hipótese nula for rejeitada quando é verdadeira.

Definition

Um erro do tipo II ocorre se a hipótese não for rejeitada quando for falsa.

Tipos de erros em testes de hipóteses

Felipe Figueiredo

Decisão	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro do tipo II
Rejeitar H_0	Erro do tipo I	Decisão correta

Rejeitar hipóteses

Felipe Figueiredo

Importante

Observe que o teste de hipótese nunca deve aceitar uma hipótese nula, apenas rejeitá-la ou deixar de rejeitá-la.

Nível de significância

Felipe Figueiredo

Definition

O nível de significância de um teste de hipótese é sua probabilidade máxima admissível para cometer um erro do tipo I. Ele é denotado por α.

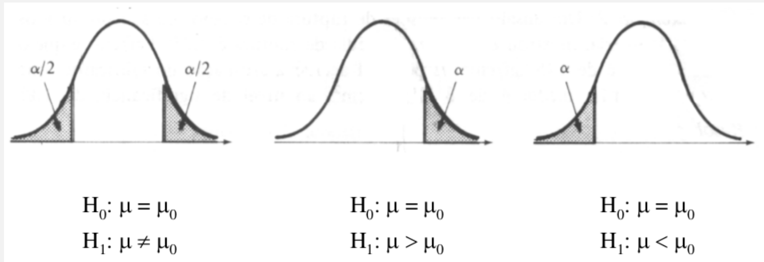
Definition

A probabilidade de se cometer um erro do tipo II é denotada por β.

Identificando a região crítica

- Para identificar a região crítica (ou região de rejeição) do teste, devemos observar se o teste é unicaudal (à esquerda ou à direita) ou bicaudal.
- Se H_1 é do tipo $\neq$, o teste é bicaudal (ou bilateral).
- Se H_1 é do tipo $<$, o teste é unicaudal (ou unilateral) à esquerda.
- Se H_1 é do tipo $>$, o teste é unicaudal à direita.

Identificando a região crítica



Decisão

- Veremos a seguir uma estatística de teste para cada tipo de teste.
- Calculamos a estatística de teste e verificamos se esta está dentro da região crítica
- Se a estatística de teste estiver dentro da região crítica, devemos rejeitar H_0
- Caso contrário, não devemos rejeitar H_0.

Estatística de teste

Em um teste de proporções, devemos considerar:

- n = tamanho da amostra
- $\hat{p}$ = proporção na amostra
- p = proporção na população
- $q = 1 - p$
- A estatística de teste para uma proporção é

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

Exemplo

Example

Estudos sobre mortalidade de homens com idade superior a 65 anos de uma cidade mostram que 4% deles morrem dentro de um ano. Num grupo de 1000 indivíduos selecionados dessa população, 60 morreram no período de um ano. Suspeita-se de que houve um aumento da mortalidade anual nessa população.

Exemplo

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

Solução

- Hipóteses

$$H_0 : p = 0.04$$

$$H_1 : p > 0.04$$

- Região crítica: à direita de $z_{0.05} = 1.645$ (ou seja, qualquer $z > z_{0.05}$).
- Dados

$$n = 1000, \hat{p} = 0,06$$

- Estatística de teste

$$z = \frac{0.06 - 0.04}{\sqrt{\frac{0.04 \times (1 - 0.04)}{1000}}} = 3.32$$

Exemplo

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- Comparando z e $z_{0.05}$ observamos que $3.32 > 1.645$.
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a proporção de idosos que morrem por ano nessa cidade é igual a 4%, em favor da hipótese de que essa proporção é maior 4%, ao nível de significância de 5%

Estatística de teste

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

- Em um teste para a média μ, devemos observar o tamanho da amostra.
- Se a amostra é grande, fazemos o teste Z (valor crítico z_c) com a estatística de teste:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Se a amostra for pequena, fazemos o teste t (valor crítico $t_{(gl,\alpha)}$) com a estatística de teste:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Exemplo 1

Example

Um método padrão para identificação de bactérias em hemoculturas vem sendo utilizado há muitos anos e seu tempo médio de execução (desde a etapa de preparo das amostras até a identificação do gênero e espécie) é de 40.5 horas. Um microbiologista propôs uma nova técnica que ele afirma ter menor tempo de execução que o método padrão. A nova técnica foi aplicada em uma amostra de 18 hemoculturas e para cada uma mediu-se o tempo de execução. A média amostral foi 39.42 horas e o desvio padrão amostral foi 1,96 horas.

Exemplo 1

- Para testar essa hipótese usaremos o teste t pois a amostra é pequena ($n = 18$) com $gl = 17$ graus de liberdade.
- Como o teste é unicaudal (à esquerda), consultamos a significância $\alpha = 0.05$.
- Consultando a tabela t, encontramos o valor crítico $t_{(17,0.05)} = 1.74$.
- Após calcular a estatística de teste, devemos comparar com o valor crítico t_c para verificar se ela está contida na região de rejeição.

Exemplo 1

Solução

- Hipóteses
$$H_0 : \mu = 40.5$$
$$H_1 : \mu < 40.5$$
- Região crítica: $t < -t_{(17,0.05)}$(ou seja, qualquer $t < -1.74$).
- Dados
$$n = 18, \bar{x} = 39.42, s = 1.96$$
- Estatística de teste
$$t = \frac{39.42 - 40.5}{\frac{1.96}{\sqrt{18}}} = -2.34$$

Exemplo 1

- O valor $t = -2.34$ está dentro da região crítica ($t = -2.34 < -1.74$).
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: Rejeita-se a hipótese de que o tempo médio de execução do novo método é igual a 40.5 horas, em favor da hipótese de que ele é menor do que 40.5 horas, ao nível de significância de 5%

Exemplo 2

Example

Uma indústria farmacêutica especifica que em certo analgésico a quantidade média de ácido acetil salicílico deve ser 5.5 gramas por comprimido. A indústria suspeita que houve problemas na produção de um determinado lote e que, nesse lote, a quantidade média dessa substância está diferente da especificada. Para verificar essa suspeita, a indústria selecionou uma amostra aleatória de 40 comprimidos desse lote, observando uma quantidade média de ácido acetil salicílico igual a 5.2 gramas e um desvio padrão de 0.7 gramas.

Exemplo 2

- Para testar essa hipótese usaremos o teste Z pois a amostra é grande ($n = 40$).
- O teste é bicaudal, portanto consultamos a significância $\frac{\alpha}{2} = 0.025$.
- Consultando a tabela Z, encontramos o valor crítico $z_{0.025} = 1.96$.
- Após calcular a estatística de teste, devemos comparar com o valor crítico z_c para verificar se ela está contida na região de rejeição.

Exemplo 2

Solução

- Hipóteses

$$H_0 : \mu = 5.5$$

$$H_1 : \mu \neq 5.5$$

- Região crítica: $z < -z_{0.025}$ ou $z > z_{0.025}$ (ou seja, $z < -1.96$ ou $z > 1.96$).
- Dados

$$n = 40, \bar{x} = 5.2, s = 0.7$$

- Estatística de teste

$$z = \frac{5.2 - 5.5}{\frac{0.7}{\sqrt{1000}}} = -2.71$$

Exemplo 2

- O valor $z = -2.71$ está dentro da região crítica ($z = -2.71 < -1.96$).
- Como a estatística de teste está dentro da região crítica, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a quantidade média de ácido acetil salicílico (gramas por comprimido) de certo analgésico é igual a 5.5 gramas ao nível de significância de 5%

Bônus: Intervalo de Confiança

- Nessa situação, podemos usar o intervalo de confiança para realizar o teste de hipóteses, pois a hipótese alternativa é bilateral.
- Como queremos um teste a 5% de significância, calcularemos um intervalo de 95% de confiança para a quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido.

Exemplo 2 (a revanche)

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

Example

- $IC_{0.95} = (\bar{x} \pm E)$
- $1 - \alpha = 0.95$
- $\alpha = 0.05$
- $\frac{\alpha}{2} = 0.025$
- $z_c = z_{0.025} = 1.96$
- $IC_{0.95} = (5.2 \pm 1.96 \times \frac{0.7}{\sqrt{40}})$
- $IC_{0.95} = (5.2 \pm 0.2)$
- $IC_{0.95} = (5.0, 5.4)$

Lembrete da margem de erro: $E = z_c \times \frac{s}{\sqrt{n}}$

Interpretação do IC

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

Interpretação

A quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido, está entre 5,0 e 5,4 gramas, com 95% de confiança.

- Teste de hipóteses baseado no intervalo de confiança: o valor 5.5 não pertence ao intervalo de 95% de confiança para a quantidade média de ácido acetil salicílico, por comprimido.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese de que a quantidade média de ácido acetil salicílico de certo analgésico é igual a 5.5 gramas ao nível de significância de 5%.

Resumo

Testes de Hipóteses I

Felipe Figueiredo

Para executar um teste de hipóteses, é necessário:

1. Formular a hipótese a ser testada e a hipótese nula, e escrevê-las em linguagem simbólica (H_0 e H_1)
2. Decidir qual o tipo de teste (unicaudal à esquerda, unicaudal à direita ou bicaudal)
3. Determinar a distribuição a ser usada e calcular a estatística de teste
4. Verificar se esta está contida na região de rejeição e decidir se há evidências para rejeitar a hippótese H_0.