

Cálculo Numérico: Notas de Aula: Exercício de Eliminação de Gauss

Prof: Felipe Figueiredo

<http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo>

Versão: 20150510

1 Exercício

Resolva o sistema linear utilizando o método de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1.1 Frações

Caso o aluno opte por resolver usando frações:

1.1.1 Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 12 \end{array} \right]$$

1.1.2 Etapa 1

- pivô: $a_{11} = 2$
- multiplicadores:

$$m_{21} = \frac{1}{2}$$

$$m_{31} = \frac{3}{2}$$

$$m_{41} = 2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & -1 & \frac{-9}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-13}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

1.1.3 Etapa 2

- pivô: $a_{22} = -2$

- multiplicadores:

$$m_{32} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{42} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-21}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{-21}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \end{array} \right]$$

1.1.4 Etapa 3

- pivô: $a_{33} = \frac{-21}{4}$

- multiplicador: $m_{43} = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{-21}{4}} = \frac{-3}{-21} = \frac{1}{7}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-21}{4} & \frac{-11}{4} & \frac{-21}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right]$$

1.1.5 Resolução

Sistema escalonado equivalente ao original:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & - & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & = & \frac{-5}{2} \\ & & & & - & \frac{21}{4}x_3 & - & \frac{11}{4}x_4 & = & \frac{-21}{4} \\ & & & & & & \frac{1}{7}x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de “substituição para trás”, encontramos:

$$\frac{1}{7}x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$\frac{-21}{4}x_3 + (0) = \frac{-21}{4} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-2x_2 + \frac{3}{2}(1) + (0) = \frac{-5}{2} \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2(2) + (1) + (0) = 7 \Rightarrow x_1 = 1$$

1.2 Calculadora

Caso o aluno opte por resolver usando a calculadora, consultar os pivôs e multiplicadores acima, e conferir as matrizes em cada etapa conforme abaixo.

Obs: Os cálculos a seguir foram feitos usando o software livre Octave, semelhante ao Matlab.

1.2.1 Matriz aumentada

A0 =

2	2	1	1	7
1	-1	2	-1	1
3	2	-3	-2	4
4	3	2	1	12

1.2.2 Etapa 1

A1 =

2.00000	2.00000	1.00000	1.00000	7.00000
0.00000	-2.00000	1.50000	-1.50000	-2.50000
0.00000	-1.00000	-4.50000	-3.50000	-6.50000
0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	-2.00000

1.2.3 Etapa 2

A2 =

2.00000	2.00000	1.00000	1.00000	7.00000
0.00000	-2.00000	1.50000	-1.50000	-2.50000
0.00000	0.00000	-5.25000	-2.75000	-5.25000
0.00000	0.00000	-0.75000	-0.25000	-0.75000

1.2.4 Etapa 3

A3 =

2.00000	2.00000	1.00000	1.00000	7.00000
0.00000	-2.00000	1.50000	-1.50000	-2.50000
0.00000	0.00000	-5.25000	-2.75000	-5.25000
0.00000	0.00000	0.00000	0.14286	0.00000