Cálculo Numérico: Notas de Aula: Fatoração LU

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20150511

3.2.3 Fatoração LU

Cálculo dos Fatores L e U

A matriz A antes de iniciar a eliminação de Gauss ("etapa 0"):

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Na etapa 1 são feitas as operações:
$L_2 = L_2 - m_{21}L_1$
$L_3 = L_3 - m_{31}L_1$
que resultam na matriz:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Na etapa 2 é feita a operação
$L_3 = L_3 - m_{32}L_1$
Ao final da etapa 2, temos uma matriz triangular superior:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Partindo da matriz $A^{(0)}$ até chegar na matriz $A^{(2)}$ utilizamos os multiplicadores m_{21}, m_{31} e m_{32}.

Podemos incorporar todos esses multiplicadores nas suas respectivas posições de uma matriz identidade, e obter uma matriz L que é triangular inferior com 1 na diagonal:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz U que é triangular superior é a etapa final da eliminação:

$$U = A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz original $A^{(0)}$ é o produto

$$A = LU$$

Resolução do Sistema Linear Ax=b Usando a Fatoração LU de A

$$Ax = b \iff (LU)x = b$$

Seja $y = Ux$.

$$Ax = b \iff (LU)x = b \iff L(Ux) = b \iff L(y) = b$$

Resolvendo da esquerda para a direita, temos:

1. $Ly = b$
2. $Ux = y$

Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Etapa 1

pivô : 3
multiplicadores
$m_{21} = \dfrac{1}{3}$
$m_{31} = \dfrac{4}{3}$
E transformamos $A^{(0)}$ na seguinte matriz $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{-10}{3} \end{bmatrix}$$

Etapa 2

pivô: $\dfrac{1}{3}$
multiplicador: $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$
E transformamos a matriz $A^{(1)}$ na matriz $A^{(2)}$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Os fatores L e U são:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & 1 & 0 \\ \dfrac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Resolvendo $L(Ux) = b$

1. $Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 & & & = & 1 \\ \frac{1}{3}y_1 & +y_2 & & = & 2 \\ \frac{4}{3}y_1 & +y_2 & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Solução: $y_1 = 1, y_2 = \frac{5}{3}, y_3 = 0$

2. $Ux = y$

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ & \frac{1}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & \frac{5}{3} \\ & & -4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Solução: $x_1 = -3, x_2 = 5, x_3 = 0$

Justificativa do método

As operações nas linhas da etapa 1 podem ser incorporadas em uma matriz $M^{(0)}$:

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a matriz $M^{(0)}$ é a identidade I com os multiplicadores da primeira etapa na primeira coluna em suas posições respectivas.

Assim,

$$M^{(0)}A^{(0)} = A^{(1)}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A segunda etapa pode ser incorporada analogamente:

$$M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Concluímos que o método de Eliminação de Gauss é equivalente a:

$$A = A^{(0)}$$

$$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$$

$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A$$

Assim, a matriz L, triangular inferior com 1 na diagonal é:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz U é a etapa final:

$$U = A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$