Cálculo Numérico: Notas de Aula: Eliminação de Gauss

Prof: Felipe Figueiredo
http://sites.google.com/site/proffelipefigueiredo
Versão: 20150503

3.2.2 Método da Eliminação de Gauss

Resolução de um Sistema Triangular Superior

Aula da semana anterior (revisão de Álgebra Linear)

Descrição do método da Eliminação de Gauss

Teorema 1

Seja $Ax = b$ um sistema linear. As seguintes operações resultam em um sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ equivalente (mesma solução x):

1. Trocar duas equações
2. multiplicar uma equação por uma constante não-nula
3. adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

Como resolver o sistema $Ax = b$?
Para cada etapa i, o pivô $a_{ii} \neq 0$

Etapa 1

A eliminação da variável x_1 nas equações 2 até n é feita usando um multiplicador m_{i1} que depende do termo a_{i1} e do pivô a_{11}.
Ex:
$m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, etc.
Após descobrir cada multiplicador, subtrair as linhas para eliminar os termos abaixo do pivô:
$L_2 = L_2 - m_{21}L_1$
$L_3 = L_3 - m_{31}L_1$
Assim eliminamos todos os elementos abaixo do pivô da primeira coluna.

Etapa 2

Para eliminarmos os elementos abaixo do pivô da segunda coluna, procedemos da mesma maneira como acima.
O pivô da segunda linha será o **novo** elemento a_{22}.
O multiplicador para a terceira linha dependerá do novo elemento a_{32} e o novo pivô a_{22}:
$m_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}}$
E a operação para eliminar o elemento da terceira linha será:
$L_3 = L_3 - m_{32}L_2$

Etapa (n-1)

Analogamente, procedemos em cada coluna, até a última, eliminando todos os termos abaixo de cada pivô, sempre assumindo que o pivô é diferente de 0.

Exemplo

Seja o Sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 4 & 3 & -2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Etapa 1: eliminar x_1 das equações 2 e 3:
Pivô: $a_{11} = 3$
$m_{21} = \frac{1}{3}$
$m_{31} = \frac{4}{3}$
$L_2 = L_2 - m_{21}L_1$
$L_3 = L_3 - m_{31}L_1$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-22}{3} & | & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Etapa 2: eliminar x_2 da equação 3:
Pivô: $a_{22} = \frac{1}{3}$
$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$
$L_3 = L_3 - m_{32}L_2$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & | & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -8 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, resolver o sistema $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ & \frac{1}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & \frac{5}{3} \\ & & -8x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Exercício

Resolva o sistema linear utilizando o método de Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 12 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{matrix} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & 0 \end{matrix}$$

Estratégias de Pivoteamento

Obs: Curiosidade, não será cobrado na P2. (Não há garantias quanto à P3).

Pivoteamento parcial: procurar o pivô com maior magnitude (maior módulo) na coluna, e trocar as linhas de modo que este seja o pivô da eliminação.

Pivoteamento total (ou completo): procurar o pivô com maior magnitude (maior módulo) entre as linhas e colunas, e trocar as linhas ou colunas de modo que este seja o pivô da eliminação.