



Anhanguera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

# Introdução à Engenharia

## Otimização

Felipe Figueiredo

Centro Universitário Anhanguera de Niterói

- 1 Otimização
  - Conceitos gerais
  - Métodos
- 2 Curiosidade
  - Otimização matemática



Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Conceitos gerais  
Métodos

Curiosidade

## 1 Otimização

- Conceitos gerais
- Métodos

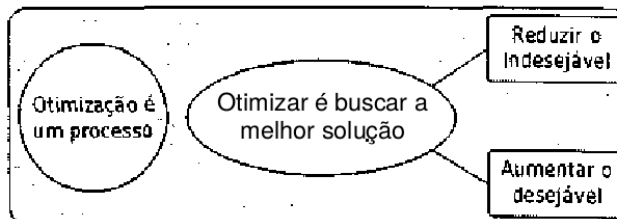
## 2 Curiosidade

- Otimização matemática

## Definition

O trabalho do engenheiro é uma incessante procura pela redução de peso, custo, consumo. . . e pelo aumento do rendimento de sistemas, da sua produtividade, utilidade. . .

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.



Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.



- Um problema pode ter várias soluções **viáveis**.
- Cada contexto tem um critério de comparação
- Soluções podem ser “melhores” que as outras, no contexto específico
- Uma solução é **ótima** quando é a **melhor solução viável**.

- Um problema pode ter várias soluções **viáveis**.
- Cada contexto tem um critério de comparação
- Soluções podem ser “melhores” que as outras, no contexto específico
- Uma solução é **ótima** quando é a **melhor solução viável**.

- Um problema pode ter várias soluções **viáveis**.
- Cada contexto tem um critério de comparação
- Soluções podem ser “melhores” que as outras, no contexto específico
- Uma solução é **ótima** quando é a **melhor solução viável**.



- Um problema pode ter várias soluções **viáveis**.
- Cada contexto tem um critério de comparação
- Soluções podem ser “melhores” que as outras, no contexto específico
- Uma solução é **ótima** quando é a **melhor solução viável**.

# Soluções ótimas

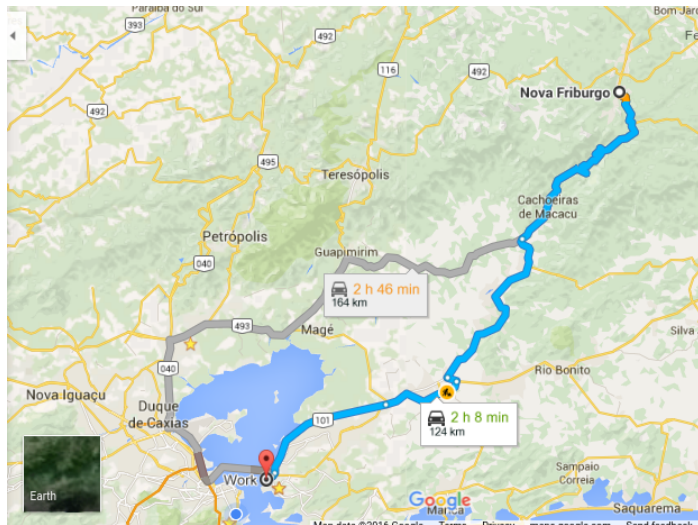
Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Conceitos gerais  
Métodos

Curiosidade



Dois critérios possíveis: tempo, ou distância (a minimizar).

- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)

- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)

# Exemplos

- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)

- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)

- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)



- rotas
- geladeira/ar condicionado
- panela de pressão
- processos de construção
- uso de matéria prima
- demanda e oferta (preços de venda)



# No dia a dia...

Melhorar a disposição dos livros numa prateleira			Arranjar fisicamente os móveis numa sala, de forma a sobrar o maior espaço livre possível
	Traçar o melhor caminho para chegar a um determinado local, pelas ruas da cidade		Ajustar a temperatura da água do chuveiro para tomar um banho
		Afinar um violão: através do comando de uma variável – o retesamento das cordas – procura-se um tom determinado	

Exemplos gerais de otimização do dia-a-dia

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## Exemplos de otimização em engenharia

### **Materiais em estruturas**

Escolha dos materiais mais adequados para cada tipo de aplicação, relativamente a cargas, temperatura, agressividade do meio ambiente, confiabilidade etc.

### **Circuitos de fluidos**

Projeto para as pressões envolvidas e escolha das velocidades adequadas, considerando as variações de seções com as rugosidades das superfícies, e as ondas de choque que poderão estar presentes na canalização

### **Processos**

#### **químicos**

Maximizar a razão da reação de produtos químicos, a transferência de calor, a temperatura e as pressões envolvidas; avaliar se, sob certas situações críticas, um produto adicional é necessário para que o processo se complete; otimizar matematicamente uma coluna de destilação

### **Circuitos elétrico**

Procedimentos de comutação, modulação ou controle devem ser feitos de forma a termos o menor gasto de energia possível

### **Conservação de energia**

No projeto do sistema de propulsão de um navio, um dos objetivos é minimizar a produção de ondas no seu rastro deixado nas águas, para que se tenha o menor gasto possível de combustível; determinar a potência adequada de refrigeração de um ambiente, considerando as diversas variáveis envolvidas, tais como isolamento térmico e fontes internas de calor

## Métodos

- Evolução
- Intuição
- Tentativa
- Gráfico
- Analítico

## Métodos

- Evolução
- Intuição
- Tentativa
- Gráfico
- Analítico

## Métodos

- Evolução
- Intuição
- Tentativa
- Gráfico
- Analítico

## Métodos

- Evolução
- Intuição
- Tentativa
- Gráfico
- Analítico

## Métodos

- Evolução
- Intuição
- Tentativa
- Gráfico
- Analítico

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Conceitos gerais  
Métodos

Curiosidade

- 1 Otimização
  - Conceitos gerais
  - Métodos

- 2 Curiosidade
  - Otimização matemática



## evolução

A otimização por evolução muitas vezes está relacionada com a evolução tecnológica. Ela acontece quando um sistema já existente é aperfeiçoado através de alterações e melhorias na sua concepção, processo de fabricação ou mesmo no aspecto estético. Com isso, ao longo do tempo, tem-se um sistema mais eficiente e moderno.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## intuição

O projeto em engenharia - que é um processo criativo - é altamente dependente da arte. Na área técnica, a arte está relacionada, por exemplo, com a habilidade para ter boas soluções ou para modelar sistemas - em forma física ou matemática -, mesmo que não conheçamos uma justificativa com base científica para explicar o problema.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## tentativa

O projeto [...] é um processo iterativo. É iniciado com um esboço preliminar da solução – que normalmente é pobre – e, através de refinamentos e novas definições, chega-se a um resultado final melhor que a proposta inicial.

Isso é normal num projeto, pois usualmente a primeira alternativa não é satisfatória, sendo necessárias novas tentativas para encontrar uma boa solução.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## tentativa

O projeto [...] é um processo iterativo. É iniciado com um esboço preliminar da solução – que normalmente é pobre – e, através de refinamentos e novas definições, chega-se a um resultado final melhor que a proposta inicial.

Isso é normal num projeto, pois usualmente a primeira alternativa não é satisfatória, sendo necessárias novas tentativas para encontrar uma boa solução.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## gráfica

A técnica de otimização gráfica consiste, basicamente, na utilização de esquemas ou desenhos de um sistema físico real na procura da melhor solução para o problema em análise.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## analítica

Esta é a área mais recente da otimização, sendo baseada no desenvolvimento matemático.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## uma variável

O caso mais simples de otimização ocorre quando temos apenas uma variável envolvida. Podemos [...] representar o sistema [...] por uma função que contém uma variável independente  $x$  e uma variável dependente  $y$ . Uma expressão matemática para isso pode ser:  $y = f(x) \dots$

$x$  é a variável independente, que pode assumir, em princípio, qualquer valor, e  $y$  é a variável dependente de  $x$ , ou seja, dependendo do valor que  $x$  assumir, teremos um valor específico para  $y$ .

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## uma variável

O caso mais simples de otimização ocorre quando temos apenas uma variável envolvida. Podemos [...] representar o sistema [...] por uma função que contém uma variável independente  $x$  e uma variável dependente  $y$ . Uma expressão matemática para isso pode ser:  $y = f(x) \dots$

$x$  é a variável independente, que pode assumir, em princípio, qualquer valor, e  $y$  é a variável dependente de  $x$ , ou seja, dependendo do valor que  $x$  assumir, teremos um valor específico para  $y$ .

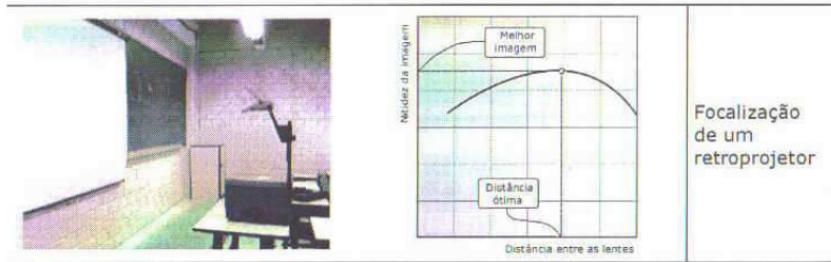
Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.



## uma variável

O processo de otimização, neste caso, resume-se a encontrar o valor limite de  $y$ , ou seja, o máximo valor de alguma quantidade desejável ou o mínimo valor de uma característica indesejável.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.



(Um ponto de máximo)

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

Um ponto de máximo local ocorre sempre que a função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

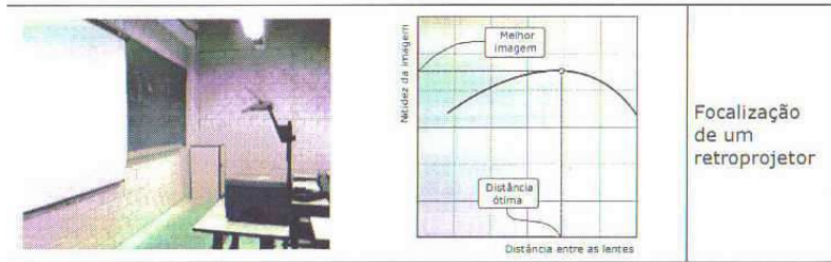
- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo

Um ponto de máximo local ocorre sempre que a função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo

Um ponto de máximo local ocorre sempre que a função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo



(Este ponto é um máximo local)

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## duas ou mais variáveis

Embora em vários casos [...] o comportamento de sistemas possa ser representado por uma curva semelhante à proposta para o caso do retroprojetor, a realidade é que, na maioria dos problemas, a situação [exige] representações matemáticas mais elaboradas.

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

# Otimização analítica

Critérios	Soluções						
	Peso	Carro A		Carro B		Carro C	
	N	N	PxN	N	PxN	N	PxN
Autonomia	1	4	4	4	4	2	2
Capacidade de carga	2	3	6	3	6	2	4
Consumo	3	1	3	3	9	4	12
Custo de aquisição	3	2	6	2	6	3	9
Desempenho	1	3	3	3	3	4	4
Estética	1	3	3	4	4	2	2
Manutenção	2	2	4	1	2	3	6
Totais	-	-	29	-	34	-	39

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.



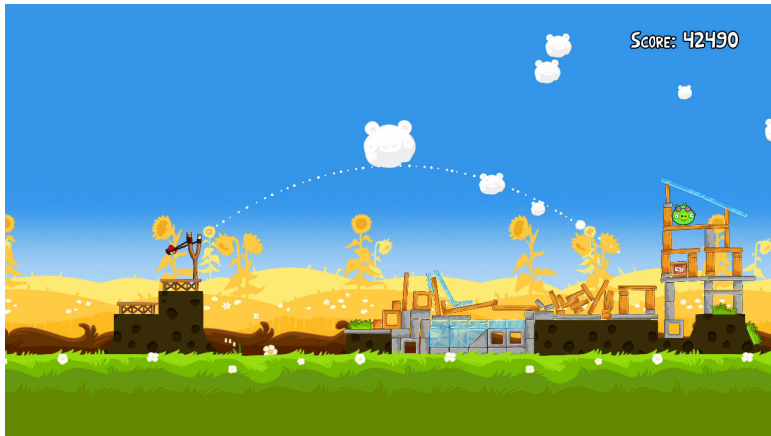
# Exemplo - Projétil

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização  
Conceitos gerais  
Métodos

Curiosidade



Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

## 1 Otimização

- Conceitos gerais
- Métodos

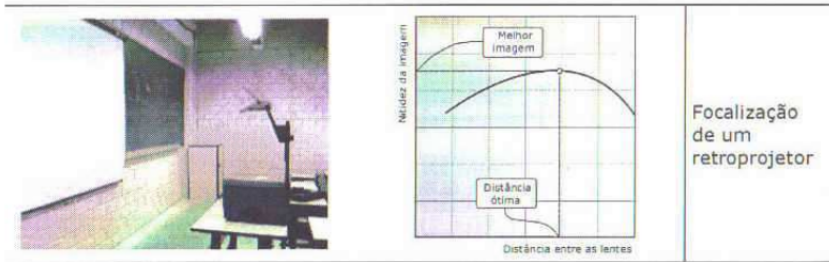
## 2 Curiosidade

- Otimização matemática

## Atenção

Esta seção da aula não faz parte da matéria, e será explorada nas disciplinas dos próximos semestres.

# Recapitulando



(O que podemos dizer sobre este ponto?)

Fonte: BAZZO & PEREIRA, 2006.

## Máximo local

Um ponto de máximo local ocorre sempre que o valor da função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo
- Observa-se quando ela **muda** a direção de crescimento
- Este é chamado um **ponto crítico**

## Máximo local

Um ponto de máximo local ocorre sempre que o valor da função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo
- Observa-se quando ela **muda** a direção de crescimento
- Este é chamado um **ponto crítico**

## Máximo local

Um ponto de máximo local ocorre sempre que o valor da função (i.e. o problema) é sempre menor que ele na região vizinha.

- Diversos métodos matemáticos analisam o comportamento local de funções
- Observa-se se a função está crescendo ou decrescendo
- Observa-se quando ela **muda** a direção de crescimento
- Este é chamado um **ponto crítico**

A matemática aplicada nos proporciona diversos métodos para encontrar soluções ótimas para problemas práticos:

- 1 Otimização linear com restrições
- 2 Otimização não-linear sem restrições
- 3 Otimização não-linear com restrições



A matemática aplicada nos proporciona diversos métodos para encontrar soluções ótimas para problemas práticos:

- 1 Otimização linear com restrições
- 2 Otimização não-linear sem restrições
- 3 Otimização não-linear com restrições

A matemática aplicada nos proporciona diversos métodos para encontrar soluções ótimas para problemas práticos:

- 1 Otimização linear com restrições
- 2 Otimização não-linear sem restrições
- 3 Otimização não-linear com restrições

A matemática aplicada nos proporciona diversos métodos para encontrar soluções ótimas para problemas práticos:

- 1 Otimização linear com restrições
- 2 Otimização não-linear sem restrições
- 3 Otimização não-linear com restrições



- Programação linear (pesquisa operacional)
- Algoritmo SIMPLEX
- O espaço de soluções viáveis é um polígono
- O algoritmo resolve um sistema de inequações lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

- Programação linear (pesquisa operacional)
- Algoritmo SIMPLEX
  - O espaço de soluções viáveis é um polígono
  - O algoritmo resolve um sistema de inequações lineares
  - A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

- Programação linear (pesquisa operacional)
- Algoritmo SIMPLEX
- O espaço de soluções viáveis é um polígono
- O algoritmo resolve um sistema de inequações lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

# Otimização linear com restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Programação linear (pesquisa operacional)
- Algoritmo SIMPLEX
- O espaço de soluções viáveis é um polígono
- O algoritmo resolve um sistema de inequações lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

# Otimização linear com restrições



Anhanguera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Programação linear (pesquisa operacional)
- Algoritmo SIMPLEX
- O espaço de soluções viáveis é um polígono
- O algoritmo resolve um sistema de inequações lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções



- Cálculo Diferencial de funções (Cálculo I)
- Derivada da função:  $\frac{df}{dx}(x)$
- A solução ótima está onde a derivada se anula

# Otimização não-linear sem restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial de funções (Cálculo I)
- Derivada da função:  $\frac{df}{dx}(x)$
- A solução ótima está onde a derivada se anula

# Otimização não-linear sem restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial de funções (Cálculo I)
- Derivada da função:  $\frac{df}{dx}(x)$
- A solução ótima está onde a derivada se anula

# Otimização não-linear sem restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial vetorial (Cálculo II)
- Vetor gradiente:  $\nabla f(x, y)$
- A solução ótima está onde o vetor gradiente se anula

# Otimização não-linear sem restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial vetorial (Cálculo II)
- Vetor gradiente:  $\nabla f(x, y)$
- A solução ótima está onde o vetor gradiente se anula

# Otimização não-linear sem restrições



Anhanguera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial vetorial (Cálculo II)
- Vetor gradiente:  $\nabla f(x, y)$
- A solução ótima está onde o vetor gradiente se anula

# Otimização não-linear com restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial Vetorial (Cálculo II)
- Multiplicadores de Lagrange
- Resolver um sistema de equações não-lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

# Otimização não-linear com restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial Vetorial (Cálculo II)
- Multiplicadores de Lagrange
- Resolver um sistema de equações não-lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções



# Otimização não-linear com restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial Vetorial (Cálculo II)
- Multiplicadores de Lagrange
- Resolver um sistema de equações não-lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

# Otimização não-linear com restrições



Anhangüera

Introdução à  
Engenharia

Felipe  
Figueiredo

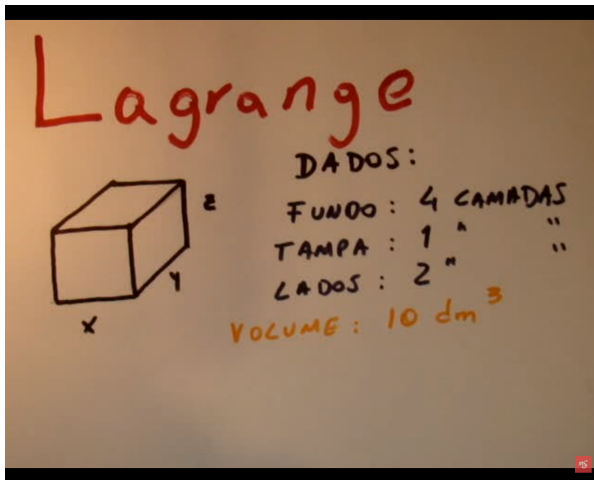
Otimização

Curiosidade

Otimização  
matemática

- Cálculo Diferencial Vetorial (Cálculo II)
- Multiplicadores de Lagrange
- Resolver um sistema de equações não-lineares
- A solução ótima está na fronteira do espaço de soluções

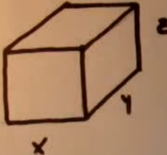
# Otimização não-linear com restrições



Fonte: MeSalva (Youtube)

# Otimização não-linear com restrições

**Lagrange**



**DADOS:**  
FUNDO : 4 CAMADAS  
TAMPA : 1 " "  
LADOS : 2 " "  
VOLUME : 10 dm<sup>3</sup>

$$V = 10 = x \cdot y \cdot z$$
$$Q = xy \cdot 4 + xy \cdot 1 + y \cdot z \cdot 2 \cdot 2 + x \cdot z \cdot 2 \cdot 2$$

Fonte: MeSalva (Youtube)