

1 Bewegungsplanung bei unvollständiger Information

1.1 Ausweg aus einem Labyrinth

1.1.1 Pledge-Strategie

Input: polygonales Labyrinth L, Roboter R, Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$
Output: Ausweg aus Labyrinth falls möglich, ansonsten Endlosschleife

- While $R \in L$
 - gehe vorwärts, bis $R \notin L$ oder Wandkontakt
 - gehe links der Wand, bis $R \notin L$ oder $\varphi = 0$

1.2 Zum Ziel in unbekannter Umgebung

1.2.1 Wanze (Bug)

Input:

- P_1, \dots, P_n disj. einf. zsh. endl. poly. Gebiete aus \mathbb{R}^2
- $s, z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$
- R Roboter mit Position r

Output:

- While $r \neq z$
 - laufe in Richtung z bis $r = z$ oder $\exists i : r \in P_i$
 - If $r \neq z$
 - umlaufe P_i und suche ein $q \in \arg \min_{x \in P_i} \|x - z\|_2$
 - gehe zu q

terminiert.

Universales Steuerwort: Führt für alle Startpunkte zum geg. Ziel. (ungültige Befehle werden ignoriert)

1.3 Behälterproblem (bin packing)

Maximale Füllmenge h , verteile Zahlenmenge auf möglichst wenige Behälter. NP-hart.

First fit

- $B_1, \dots, B_m \leftarrow \emptyset$
- For $i = 1, \dots, m$
 - Bestimme kleinstes j mit $b_i + \sum_{b \in B_j} b \leq h$
 - Füge b_i zu B_j hinzu

2-kompetitiv
Falls $k_A \leq a + ck_{min}$ für alle Eingaben, heißt A c-kompetitiv.

Türsuche

- Wähle Erkundungstiefen $f_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$
- For $i := 1$ to ∞ (stoppe, wenn Tür gefunden)
 - gehe f_i Meter die Wand entlang und zurück
 - wechsle Laufrichtung

$d := \text{dist}(s, \text{Tür}) = f_n + \varepsilon \in (f_n, f_{n+1}]$
Legt $L = 2 \sum_{i=0}^n f_i + d$ zurück (oder $n+1$)
 $L \in \Theta(n^2) = \Theta(d^2)$
Bestmöglich: 9-kompetitiv (z.B. für $f_i = 2^i$)

1.4 Sternsuche

Gleich Türsuche, nur mit mehr als zwei Wänden (Halbgeraden).
Bestmöglich: Für $f_i = (\frac{m}{m-1})^i$ ist Sternsuche c-kompetitiv mit $c := 2m(\frac{m}{m-1})^{m-1} + 1 < 2me + 1$

1.5 Suche in Polygonen

Roboter R sucht Weg in polygonalem Gebiet P mit n Ecken von s nach z.
Weglängen: gefunden: l , kürzest: d
Strategie existiert mit $\frac{l}{d} \in O(n)$
Baum der kürzesten Wege (BkW) (Blätter sind Polygonecken)

2 Konvexe Hüllen

2.1 Dualität

$x := [1 \ x]^t, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$ bilden affinen Raum A^d .
 $u^t x := [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_d] \cdot [1 \ x_1 : x_d]^t \geq 0$
 u bezeichnet Halbraumvektor und x einen seiner Punkte
Nur betrachtet mit $(1 \ 0 \ \dots \ 0)^t$ im Inneren, d.h. $u_0 > 0$, normiert $u_0 = 1$.
 u^* ist dual zu u und bezeichnet den Halbraum.
 $x \in u^* \Leftrightarrow u \in x^*$ (Dualität)

2.2 Konvexe Mengen

Verbindungsstrecke
 $x := a(1 - t) + bt, \quad t \in [0, 1]$ wird genannt ab .
 $M \subset A$ ist konvex wenn sie zu je zwei ihrer Punkte auch die Verbingungsstrecke enthält.
Konvexe Hülle $[M]$ von M ist Schnitt aller konvexen Obermengen.
Ist $M \subset A$ bilden alle Halbräume, die M enthalten, eine konvexe Menge im Dualraum.
Ist $M^* \subset A^*$ eine Halbraummeng, bilden alle Punkte, die in allen $m^* \in M^*$ enthalten sind, eine konvexe Menge im Primalraum A .

2.3 Konvexe Polyeder P

ist Schnitt endlich vieler Halbräume.
Rand ∂P ; Facetten darauf.
Jede Facette liegt auf Rand eines Halbraums (FHR)
P ist konvexe Hülle seiner Eckenmenge
Ist P ein konvexes Polyeder mit den Ecken p_1, \dots, p_e und den FHREN u_1^*, \dots, u_f^* , hat die Menge $U^* := \{u^* | u^* \supset P\} \subset A^*$ die Ecken w_1^*, \dots, w_f^* und die FHRe p_1, \dots, p_e . Dual ausgedrückt heißt das, dass die Menge $U := \{u | u^* \supset P\} \subset A$ die Ecken w_i und die FHRe p_i^* hat.
Polyeder P und $U \subset A$ heißen dual zueinander.

2.4 Euler: Knoten, Kanten, Facetten

v Knoten, e Kanten, f Seiten
Eulers Formel: $v - e + f = 2$

2.5 Datenstruktur für Netze

Für jede Ecke p:

- Koordinaten von p
- Liste von Zeigerpaaren: die ersten Zeiger im Gegenuhrzeigersinn auf alle Nachbarn von p

Sind p, q, r im GUS geordnete Nachbarn einer Facette und weist der 1. Zeiger eines Paares auf q, zeigt der 2. Zeiger indirekt auf r. Er weist auf das Zeigerpaar von q

2.6 Konvexe Hülle

Input: $P := (p_1, \dots, p_n) \subset A^3$
Output: $[P]$

- Verschiebe P sodass Ursprung in P liegt
- $U_4 \leftarrow p_1^* \cap \dots \cap p_4^*$
- For $i = 5, \dots, n$
 - (falls $U_4 \subset p_i^*$, markiere p_i als gelöscht
 - sonst verknüpfe p_i bidirektional mit einem Knoten von $U_4 \notin p_i^*$
- For $i = 5, \dots, n$
 - $U_i \leftarrow U_{i-1} \cap p_i^*$
 - ...zeug
- Dualisiere, verschiebe und gib $\bigcap_{u \in U} u^* - v$ aus

3 Distanzprobleme

3.1 Voronoi-Gebiet

eines der Punkte p_i ist $V_i = \{x \in \mathbb{R}^2 | \forall j = 1, \dots, n : \|x - p_i\|_2 \leq \|x - p_j\|_2\}$
 V_i ist konvex da Schnitt der Halbebenen.
Voronoi-Kreis (Punkte des Schnitts von drei Voronoi-Gebieten) ist leer.

3.2 Delaunay-Triangulierung

Delaunay-Triangulierung $D(P)$ einer Punktmenge P hat Kantenmenge $\{p_i p_j | V_i \cap V_j \text{ ist Kante des Voronoi-Diagramms } V(P)\}$.
Ist der zu $V(P)$ duale Graph.
Die Gebiete von $D(P)$ sind disjunkte Dreiecke und zerlegen die konvexe Hülle $[P]$

3.2.1 Eigenschaften

Umkreise der Dreiecke sind leer
Paraboloid-Eigenschaft:
Sei $Z(x, y) = x^2 + y^2$.
Projiziert man den unteren Teil der konvexen Hülle $\{(\binom{p_i}{Z(p_i)}) | i = 1, \dots, n\}$ orthogonal auf die xy-Ebene, erhält man $D(P)$
 $D(P)$ kann mit Konvexe Hülle und mittlerem Aufwand $O(n \log n)$ berechnet werden
Kanten einer Triangulierung von Q sind konvex (Tal) oder konkav (Berg), ersetze sukzessiv in konkave durch konvexe Kanten
Winkeleigenschaft: Der kleinste Winkel in jedem Viereck ist größer bei DT als bei jeder anderen Triangulierung
jeder Punkt p_i ist mit nächstem Nachabarn durch Kante in $D(P)$ verbunden \rightarrow nächste Nachbarn aller p_i können in $O(n)$ bestimmt werden
minimale Spannbäume von P liegen auf $D(P)$ (findbar mit Kruskal (greedy))
Rundweg um minimalen Spannbaum ist 2-kompetitiv zu kürzestem Rundweg.

4 Stationäre Unterteilung für Kurven

4.1 Kardinale Splines

$N^0(u) := \begin{cases} 1, & u \in [0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
 $N^n(u) := \int_{u-1}^u N^{n-1}(t) dt$
 $N^n(u) \begin{cases} = 0, & u \notin [0, n+1) \\ > 0, & u \in (0, n+1) \end{cases}$

4.2 Symbole

Dopplungsmatrix: $\alpha_0(z) = 1 + z$
Mittelungsmatrix: $\mu(z) = (1 + z)/2$
Lane-Riesenfeld-Algorithmus:
 $\alpha_n(z) = \frac{(1+z)^{n+1}}{2^n}$, Differenz:
 $\beta(z) = \alpha_{n-1}(z)/2$
Chaikin: $\alpha_1(z) = \frac{1}{2}(1 + z)^2$
Unterteilungsgleichung:
 $\alpha(z)c(z^2) = b(z)$
Differenzenschema zu einem $\alpha(z)$:
 $\beta(z) = \frac{\alpha(z)}{1+z}$ (Polynomdivision).
Existiert nur wenn $\alpha(z)$ den Faktor $(1+z)$ hat, bzw. wenn $\alpha(-1) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j+1} = 0$
Für konvergentes $\alpha(z)$ gilt $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j+1} = 1$
Ableitungsschema: $2\alpha(z)/(1 + z)$
Existiert das r-te Ableitungsschema von α und ist konvergent, konvergieren alle durch α erzeugten Folgen $(c^m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen r-mal stetig differenzierbare Funktionen.
Unterteilungsschema konvergent \leftrightarrow Differenzenschema Nullschema
konvergent: für jede Maske ist die Summe der Gewichte 1

5 Unterteilung für Flächen

Matrix $C = c_{\mathbb{Z}^2}$ hat das Symbol $c(x) := c(x, y)$
 $:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{ij} x^i y^j$
 $:= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} c_i x^i$
Seien U, V
Unterteilungsalgorithmen mit Symbol $\alpha(x), \beta(x)$
Das Unterteilte Netz $B := b_{\mathbb{Z}^2} := UCV^t$ hat das Symbol $b(x, y) := \alpha(x)c(x^2, y^2)\beta(y)$
 $\gamma(x, y) := \alpha(x)\beta(y)$ ist das Symbol des $Tepus(U, V)$ mit der Unterteilungsgleichung $b(x) = \gamma(x)c(x^2) \quad b_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \gamma_{i-2k} c_k$
 $x^2 = (x^2, y^2)!$
Verfeinerungsschema (U_1, U_1) :
 $\gamma(x, y) :=$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

5.1 Wavelets 1D

geg: $s(u) = \sum_{i=0}^{2^m-1} c_i^m * N_i^0(2^m * u)$
oder $s = \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} (c_i^{m-1} B_i^{m-1} + d_i^{m-1} W_i^{m-1})$

Zerlegung

- For $k = m - 1, \dots, 0$
 - For $i = 0, \dots, 2^k - 1$
 - $c_i^k = 0.5(c_{2i}^{k+1} + c_{2i+1}^{k+1})$
 - $d_i^k = 0.5(c_{2i}^{k+1} - c_{2i+1}^{k+1})$

Ausgabe:

$$s = c_0^0 * B_0^0 + \sum_{i=0}^{2^0-1} d_i^0 * W_i^0 + \dots + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} d_i^{m-1} * W_i^{m-1}$$
$$B_i^k = N_i^0(2^k * u)$$

Rekonstruktion

- For $k = 0 \dots m-1$
 - For $i = 0 \dots 2^k - 1$
 - $c_{2i}^{k+1} = c_i^k + d_i^k$
 - $c_{2i+1}^{k+1} = c_i^k - d_i^k$

5.2 Wavelets 2D

$s(x, y) = \sum_{i,j=0}^{2^m-1} c_{ij}^m * B_i^m(x) * B_j^m(y)$

Zerlegung^2 (Spalte erster Index!)

- Für k = m-1...0
 - Für i,j = 0...2^k - 1
 - $c_{ij}^k = 0.25 * (c_{2i,2j}^{k+1} + c_{2i+1,2j}^{k+1} + c_{2i,2j+1}^{k+1} + c_{2i+1,2j+1}^{k+1})$
 - $d_{ij}^k = 0.25 * (+ - + -)$
 - $e_{ij}^k = 0.25 * (+ + - -)$
 - $f_{ij}^k = 0.25 * (+ - - +)$

Beachte auch: in der nächsten Matrix sind die c_{ij} nur in den 4er Feldern jeweils links oben! Rekonstruktion^2 analog zu Zerlegung^2, jedoch mit Faktor 4 statt 0.25 und c, d, e, f, ergeben jeweils (2i,2j), (2i+1,2j) usw.

6 Flussmaximierung

Flussnetzwerk $F := (G = (V, E), q \in V, s \in V, k : V^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$
Graph zusammenhängend (für jeden Knoten ex. Weg von q zu s), $|E| \geq |V| - 1$
Fluss $f : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq k$
 $\forall x, y \in V : f(x, y) = -f(y, x)$
 $\forall x \in V \setminus \{q, s\} : \sum f(x, V) := \sum_{y \in V} f(x, y) = 0$
Residualgraph $G_f := (V, E_f := \{e \in V^2 | f(e) < k(e)\})$
Residualnetz
 $F_f := (G_f, q, s, k_f := k - f)$

6.1 Methoden

6.1.1 Ford-Fulkerson (naiv)
solange es einen Weg $q \rightsquigarrow s$ in G_f gibt, erhöhe f maximal über diesen Weg.

6.1.2 Edmonds-Karp
=FF, erhöhen immer längs eines kürzesten Pfades in G_f

6.1.3 Präfluss-Pusch
Präfluss-Eigenschaft Fluss mit Rein-Raus ≥ 0
Höhenfunktion $h(q) = |V|$, $h(s) = 0$,
 $\forall (x, y) \in E_f : h(x) - h(y) \leq 1$
Push(x,y) schiebe maximal Mögliches (ü und k beachten!) über Kante
Pushbar(x,y) $x \in V \setminus \{q, s\}$ und $h(x) - h(y) = 1$ und $\ddot{u}(x) > 0$ und $(x, y) \in E_f$
Lift(x)
 $h(x) \leftarrow 1 + \min_{(x,y) \in E_f} h(y)$
Liftbar(x) $x \in V \setminus \{q, s\}$ und $\ddot{u}(x) > 0$ und $h(x) \leq \min_{(x,y) \in E_f} h(y)$

Präfluss-Push:

- $h(x) \leftarrow$ if $x = q$ then $|V|$ else 0
- $f(x, y) \leftarrow$ if $x = q$ then $k(x, y)$ else 0

6.1.4 An-Die-Spitze
Leere(x)

- while $\ddot{u}(x) > 0$
 - if $x \leq Grad(x)$
 - if pushbar($x, n_x(i_x)$) :
push($x, n_x(i_x)$)
sonst: $i_x += 1$
- else
Lift(x), $i_x \leftarrow 1$

L ist Liste aller $x \in V \setminus \{q, s\}$ mit x vor y falls pushbar(x,y)
 $n_x(i)$ ($1 \leq i \leq Grad(x)$) sind Nachbarn von x (auch Gegenrichtung)
 i_x ist Zähler (alle $n_x(i)$ mit $i \leq i_x$ nicht pushbar)

An die Spitze

- Initialisiere f und h wie bei *Präfluss-Push*
- $\forall x \in V : i_x \leftarrow 1$
- Generiere L
- $x \leftarrow Kopf(L)$
- while $x \neq NIL$
 - Leere(x)
Falls $h_{alt} < h(x)$, setze x an Spitze von L
 - $x \leftarrow$ Nachfolger von x in L

7 Zuordnungsprobleme
7.1 Paaren in allgemeinen Graphen

Alternierender Weg ist *maximal*, wenn er nicht Teil eines längeren alternierenden Weges ist.
→ Maximale Paarung kann durch sukzessive Vergrößerung gefunden werden

7.2 Berechnung vergrößernder Wege
Vergrößernder Weg

- Input: G und P, Output: Vergrößernder Weg für P
- $h(x) \leftarrow 0$ wenn x frei, -1 wenn x gebunden
- Solange kein vergrößernder Pfad gefunden und gibt ununtersuchte Kante $\langle x, y \rangle$ mit $h(x) \in 2\mathbb{N}_0$
- if $h(y) = -1$
- **unwichtig**

7.3 Maximal gewichtete Paarungen
Berechnung möglich in $O(|V|^3)$ bzw. $O(|V| \cdot |E| \log |V|)$

8 Minimale Schnitte
Sei

- $\bar{G} := (V, \bar{E}), \bar{E} := \{\langle x, y \rangle | \langle y, x \rangle \in E\}$
- $k : V^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, k(x, y) :=$ if $\langle x, y \rangle \in E$ then $\gamma(\langle x, y \rangle)$ else 0
- $x, z \in V$ beliebig

Berechne maximalen Fluss
→ $A := \{y | \exists \text{ Pfad } x \rightsquigarrow y \text{ in } \bar{G}_f\}$
und $B := V \setminus A$ bilden minimalen xz-Schnitt ($x \in A, z \in B$)
Gewicht des Schnitts = Wert des Flusses
kleinster xz-Schnitt in G lässt sich mit Flussmaximierung in $O(|V|^4)$ berechnen
(es existieren Algorithmen in $O(|V|^2 \log |V| + |V||E|)$)

8.1 Zufällige Kontraktion
ggf. todo
Monte-Carlo-Algorithmus = stochastischer Algorithmus, kann falsche Ergebnisse liefern
Las-Vegas-Algorithmus = stoch. Algo., immer richtig

8.2 Rekursive Kontraktion
IV Optimierungsalgorithmen

9 Kleinste Kugeln
Für jede Punktmenge P ist die kleinste Kugel $K(P) \supset P$ eindeutig.

9.1 Algorithmus von Welzl
 $K(P, R)$ ist Kugel die P enthält und R auf der Oberfläche hat

Welzl

- Input: $P, R \subset \mathbb{R}^d$, $K(P, R)$ exist., P,R endlich
- if $P = \emptyset$ or $|R| = d + 1$
 $C \leftarrow K(R)$
- else wähle **p** $\in P$ zufällig
 $C \leftarrow Welzl(P \setminus \{p\}, R)$
if **p** $\notin C$
 $C \leftarrow Welzl(P \setminus \{p\}, R \cup \{p\})$
- Gib C aus

10 Lineare Programmierung
10.1 Lineare Programme
LP ist $z(\mathbf{x}) := \mathbf{z}\mathbf{x} = \max!$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{z}\mathbf{x} := \mathbf{z}^t \mathbf{x}$
d ist die Dimension des linearen Programms.
Die Ungleichungen $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ repräsentieren den Schnitt S von n Halbräumen, der *Simplex* genannt wird.
Die Punkte $\mathbf{x} \in S$ heißen *zulässig*.
Die Ecken von S liegen je auf d Hyperebenen (d Gleichungen des Gleichungssystems).

- Simplexalgorithmus: Iterativ Ecken entlang gehen, bis z maximal.

10.2 Flussmaximierung als LP
maximiere Summe der ausgehenden Flüsse aus der Quelle.
Gleichungen zur Flusserhaltung (je eingehende Kanten - ausgehende Kanten = 0 (\geq und \leq))
Gleichungen zur Kapazitätsbeschränkung (Fluss ≥ 0 und (Kapazität - Fluss) ≥ 0)
 $f(a, b) = -f(b, a)$

10.3 Kürzester Weg als LP
Suche Weg $1 \rightsquigarrow 2$
 $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \gamma_{ij} = \min!$
 $x_{ij} \geq 0, (i, j) \in E$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Ausgehende Kanten = Eingehende Kanten außer für $i \neq 1, 2$)
negative Kreise \Rightarrow keine endliche Lösung. Erzwingbar durch $x_{ij} \leq 1, (i, j) \in E$ (?)

10.4 Maximusnorm
geg: $r = A * a - c$ mit A Matrix wobei c konstanter Vektor und a Vektor aus Variablen. Dann LP mit $y_0 = 1/r, y_1 = a_1/r, y_2 = a_2/r, \dots$
 $y_0 = \max!$
 $\begin{matrix} -c & A \\ c & -A \end{matrix} \leq [1, 1, \dots, 1]$

11 Simplexalgorithmus
 $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

wobei $n = d + 1$ und $x_n = 1$
Hyperebenen $H_i : y_i(\mathbf{x}) = 0$
Gegeben: $A = [a_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
Gesucht: $B = [b_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
r=Pivotzeile, s=Pivotspalte

Austausch

- $b_{rs} \leftarrow \frac{1}{a_{rs}}$

- $b_{rj} \leftarrow -\frac{a_{rj}}{a_{rs}}$ (Pivotzeile, $j \neq s$)
- $b_{is} \leftarrow \frac{a_{is}}{a_{rs}}$ (Pivotspalte, $i \neq r$)
- $b_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$ ($i \neq r, j \neq s$)

11.1 Normalform
Jedes lin. Programm kann auf die Form
 $\mathbf{z}\mathbf{x} = \max!$
 $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$
mit $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_d \ 1]^t$ kann auf die Form
 $[\mathbf{c}^t \mathbf{c}]\mathbf{y} = \max!$
 $\mathbf{y} \geq 0$
 $[B\mathbf{b}]\mathbf{y} \geq 0$
mit $\mathbf{y} := [y_1 \dots y_d \ 1]^t$ gebracht werden.
Notation:

$$\begin{matrix} y_{d+1} = \\ \vdots \\ y_m = \\ z = \end{matrix} \begin{bmatrix} x_0 \dots d & 1 \\ B & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t & c \end{bmatrix} \geq 0 = \max!$$

b ≥ 0 , sonst Simplex leer.

11.2 Simplexalgorithmus
Simplex

- Input: A Normalformmatrix eines lin. Progr. $\bar{A} := \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{c}^t & c \end{bmatrix}$
- Solange ein $c_s > 0$
 - Falls alle $a_{is} \geq 0$
gib $c \leftarrow \infty$ aus
Ende
 - sonst
bestimme r so, dass $\frac{a_r}{a_{rs}} = \max_{a_{is} < 0} \frac{a_i}{a_{is}}$
 $\bar{A} \leftarrow$ Austausch(\bar{A}, r, s)
- Gib A aus

Die Lösung ist dann, dass alle y_i die oben an der Tabelle stehen = 0 sind.

Util		
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$		
$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$		
Laufzeiten		
Kapi- tel	Name	Laufzeit
1.1	Pledge	
1.2	Wanze (Bug)	
2.6	Konvexe Hülle	erw: $O(n \log n)$, max: $O(n^2)$
6	Ford-Fulkerson	$O(E * W)$ (k Wert eines max. Flusses)
6	Edmonds-Karp	$O(E ^2 * V)$
6	Präfluss-Push	$O(V ^2 * E)$
6	An-Die-Spitze	$O(V ^3)$
7	Paare	$O(E \cdot \min\{ L , R \})$
7	Vergrößernder Weg	$O(V \cdot E)$
8.3	Min Schnitt	$O(V ^2 \log V)$ richtig mit $P \in \Theta(1/\log V)$
9	Welzl	mittl: $O(n)$
10	Simplex	erw: $O(n^2 d)$, max: $\Omega(n^{d/2})$
10	Ellipsoid	polyn.; in praxis langsamer als Simplex
10	Innere Punkte	polyn.; in praxis fast so gut wie Simplex
10.5	Seidel	$O(d^3 d! + dnd!)$