1 Bewegungsplanung bei unvollständiger Information

1.1 Ausweg aus einem Labyrinth

1.1.1 Pledge-Strategie

Input: polygonales Labyrinth L, Roboter R, Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$
Output: Ausweg aus Labyrinth falls möglich, ansonsten Endlosschleife

- While $R \in L$
  - gehe vorwärts, bis $R \notin L$ oder Wandkontakt
  - gehe links der Wand, bis $R \notin L$ oder $\varphi = 0$

1.2 Zum Ziel in unbekannter Umgebung

1.2.1 Wanze (Bug)

Input:

- $P_1, \dots, P_n$ disj. einf. zsh. endl. poly. Gebiete aus $\mathbb{R}^2$
- $\mathbf{s}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n P_i$
- R Roboter mit Position $\mathbf{r}$

Output:

- While $\mathbf{r} \neq \mathbf{z}$
  - laufe in Richtung $\mathbf{z}$ bis $\mathbf{r} = \mathbf{z}$ oder $\exists i : r \in P_i$
  - If $\mathbf{r} \neq \mathbf{z}$
    - umlaufe P_i und suche ein $\mathbf{q} \in \arg\min_{\mathbf{x} \in P_i} ||\mathbf{x} - \mathbf{z}||_2$
    - gehe zu $\mathbf{q}$

terminiert.
Universales Steuerwort: Führt für alle Startpunkte zum geg. Ziel. (ungültige Befehle werden ignoriert)

1.3 Behälterproblem (bin packing)

Maximale Füllmenge h, verteile Zahlenmenge auf möglichst wenige Behälter. NP-hart.

First fit ·

- $B_1, \dots, B_m \leftarrow \emptyset$
- For $i = 1, \dots, m$
  - Bestimme kleinstes j mit $b_i + \sum_{b \in B_j} b \leq h$
  - Füge b_i zu B_j hinzu

ist 2-kompetitiv.
Algorithmus A ist **c-kompetitiv** falls $k_A \leq a + ck_{min}$ für alle Eingaben

Türsuche ·

- Wähle Erkundungstiefen $f_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$
- For $i := 1$ to ∞ (stoppe, wenn Tür gefunden)
  - gehe f_i Meter die Wand entlang und zurück
  - wechsle Laufrichtung

$d := \text{dist}(\mathbf{s}, \text{Tür}) = f_n + \varepsilon \in (f_n, f_{n+1}]$
Legt $L = 2\sum_{i=0}^n f_i + d$ zurück (oder $^{n+1}$)
$L \in \Theta(n^2) = \Theta(d^2)$
Bestmöglich: 9-kompetetitiv (z.B. für $f_i = 2^i$)

1.4 Sternsuche

Gleich Türsuche, nur mit mehr als zwei Wänden (Halbgeraden).
Bestmöglich: Für $f_i = (\frac{m}{m-1})^i$ c-kompetitiv mit $c := 2m(\frac{m}{m-1})^{m-1} + 1 < 2me + 1$

1.5 Suche in Polygonen

Roboter R sucht Weg in polygonalem Gebiet P mit n Ecken von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{z}$.
Weglängen: gefunden: l, kürzest: d
Strategie existiert mit $\frac{l}{d} \in O(n)$
Baum der kürzesten Wege (BkW) (Blätter sind Polygonecken)

2 Konvexe Hüllen

2.1 Dualität

$\mathbf{x} := [\,1\ \bar{\mathbf{x}}\,]^t, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d$ bilden *affinen Raum* A^d.
$\mathbf{u}^t\mathbf{x} := [\,u_0\ u_1\ \dots\ u_d\,] \cdot [\,1\ x_1\ \vdots\ x_d\,]^t \geq 0$
$\mathbf{u}$ bezeichnet Halbraumvektor und $\mathbf{x}$ einen seiner Punkte
Nur betrachtet mit $(1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^t$ im Inneren, d.h. $u_0 > 0$, normiert $u_0 = 1$.
$\mathbf{u}^*$ ist *dual* zu $\mathbf{u}$ und bezeichnet den Halbraum.
$\mathbf{x} \in \mathbf{u}^* \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{x}^*$ (Dualität)

2.2 Konvexe Mengen

Verbindungsstrecke
$\mathbf{x} := \mathbf{a}(1-t) + \mathbf{b}t, \quad t \in [0,1]$ wird genannt $\mathbf{ab}$.
$M \subset A$ ist *konvex* wenn sie zu je zwei ihrer Punkte auch die Verbingungsstrecke enthält.
Konvexe Hülle $[M]$ von M ist Schnitt aller konvexen Obermengen.
Ist $M \subset A$ bilden alle Halbräume, die M enthalten, eine konvexe Menge im Dualraum.
Ist $M^* \subset A^*$ eine Halbraummenge, bilden alle Punkte, die in allen $m^* \in M^*$ enthalten sind, eine konvexe Menge im Primalraum A.

2.3 Konvexe Polyeder P

ist Schnitt endlich vieler Halbräume.
Rand ∂P; Facetten darauf.
Jede Facectte liegt auf Rand eines Halbraums (FHR)
P ist konvexe Hülle seiner Eckenmenge
Ist P ein konvexes Polyeder mit den Ecken $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_e$ und den FHRen $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_f^*$, hat die Menge $U^* := \{\mathbf{u}^* | \mathbf{u}^* \supset P\} \subset A^*$ die Ecken $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_f^*$ und die FHRe $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_e$.
Dual ausgedrückt heißt das, dass die Menge $U := \{\mathbf{u} | \mathbf{u}^* \supset P\} \subset A$ die Ecken $\mathbf{u}_i$ und die FHRe $\mathbf{p}_i^*$ hat.
Polyeder P und $U \subset A$ heißen dual zueinander.

2.4 Euler: Knoten, Kanten, Facetten

v Knoten, e Kanten, f Seiten
Eulers Formel: $v - e + f = 2$

2.5 Datenstruktur für Netze

Für jede Ecke $\mathbf{p}$:

- Koordinaten von $\mathbf{p}$
- Liste von Zeigerpaaren:
  - die ersten Zeiger im Gegenuhrzeigersinn auf alle Nachbarn von $\mathbf{p}$
  - Sind $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ im GUS geordnete Nachbarn einer Facette und weist der 1. Zeiger eines Paares auf $\mathbf{q}$, zeigt der 2. Zeiger indirekt auf $\mathbf{r}$. Er weist auf das Zeigerpaar von q

2.6 Konvexe Hülle

Input: $P := (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \subset A^3$
Output: $[P]$

1. Verschiebe P sodass Ursprung in P liegt
2. $U_4 \leftarrow \mathbf{p}_1^* \cap \dots \cap \mathbf{p}_4^*$
3. For $i = 5, \dots, n$
   - (falls $U_4 \subset \mathbf{p}_i^*$, markiere $\mathbf{p}_i$ als gelöscht
   - sonst verknüpfe $\mathbf{p}_i$ bidirektional mit einem Knoten von $U_4 \notin \mathbf{p}_i^*$
4. For $i = 5, \dots, n$
   - $U_i \leftarrow U_{i-1} \cap \mathbf{p}_i^*$
   - ...zeug
5. Dualisiere, verschiebe und gib $\bigcap_{\mathbf{u} \in U} \mathbf{u}^* - \mathbf{v}$ aus

3 Distanzprobleme

3.1 Voronoi-Gebiet

eines der Punkte $\mathbf{p}_i$ ist
$V_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \forall j = 1, \dots, n : ||\mathbf{x} - \mathbf{p}_i||_2 \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{p}_j||_2\}$
V_i ist konvex da Schnitt der Halbebenen.
Voroni-Kreis (Punkte des Schnitts von drei Voronoi-Gebieten) ist *leer*.

3.2 Delaunay-Triangulierung

Delaunay-Triangulierung $D(P)$ einer Punktemenge P hat Kantenmenge $\{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j | V_i \cap V_j$ ist Kante des Voronoi-Diagramms $V(P)\}$.
Ist der zu $V(P)$ duale Graph.
Die Gebiete von $D(P)$ sind disjunkte Dreiecke und zerlegen die konvexe Hülle $[P]$

3.2.1 Eigenschaften

Umkreise der Dreiecke sind leer
Paraboloid-Eigenschaft:
Sei $Z(x,y) = x^2 + y^2$.
Projiziert man den unteren Teil der konvexen Hülle
$[\{\begin{pmatrix}\mathbf{p}_i \\ Z(\mathbf{p}_i)\end{pmatrix} | i = 1, \dots, n\}]$ orthogonal auf die xy-Ebene, erhält man $D(P)$
D(P) kann mit *Konvexe Hülle* und mittlerem Aufwand $O(n \log n)$ berechnet werden
Kanten einer Triangulierung von Q sind konvex (Tal) oder konkav (Berg), ersetze sukzessiv in konkave durch konvexe Kanten
Winkeleigenschaft: Der kleinste Winkel in jedem Viereck ist größer bei DT als bei jeder anderen Triangulierung
jeder Punkt $\mathbf{p}_i$ ist mit nächstem Nachbarn durch Kante in $D(P)$ verbunden $\rightarrow$ nächste Nachbarn aller p_i können in $O(n)$ bestimmt werden
minimale Spannbäume von P liegen auf D(P) (findbar mit Kruskal (greedy))
Rundweg um minimalen Spannbaum ist 2-kompetitiv zu kürzestem Rundweg.

4 Stationäre Unterteilung für Kurven

4.1 Kardinale Splines

$$N^0(u) := \begin{cases} 1, & u \in [0,1) \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$N^n(u) := \int_{u-1}^u N^{n-1}(t)dt$$

$$N^n(u) \begin{cases} = 0, & u \notin [0, n+1) \\ > 0, & u \in (0, n+1) \end{cases}$$

4.2 Symbole

Dopplung: $\alpha_0(z) = 1 + z$
Mittelung: $\mu(z) = (1+z)/2$
Lane-Riesenfeld-Algorithmus:
$\alpha_n(z) = \frac{(1+z)^{n+1}}{2^n}$, Differenz: $\beta(z) = \alpha_{n-1}(z)/2$
Chaikin: $\alpha_1(z) = \frac{1}{4}(1+z)^3$
Unterteilungsgleichung:
$\alpha(z)c(z^2) = b(z)$
Differenzenschema zu einem $\alpha(z)$:
$\beta(z) = \frac{\alpha(z)}{1+z}$ (Polynomdivision).
Existiert nur wenn $\alpha(z)$ den Faktor (1+z) hat, bzw. wenn $\alpha(-1) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j+1} = 0$
Für konvergentes $\alpha(z)$ gilt $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j+1} = 1$
Ableitungsschema: $2\alpha(z)/(1+z)$
Existiert das r-te Ableitungsschema von α und ist konvergent, konvergieren alle durch α erzeugten Folgen $(c^m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen r-mal stetig differenzierbare Funktionen.
Unterteilungsschema konvergent $\leftrightarrow$ Differenzenschema Nullschema
konvergent: für jede Maske ist die Summe der Gewichte 1

5 Unterteilung für Flächen

Matrix $C = \mathbf{c}_{\mathbb{Z}^2}$ hat das Symbol
$\mathbf{c}(\mathbf{x}) := \mathbf{c}(x,y)$
$:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{ij} x^i y^j$
$=: \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{c_i} \mathbf{x^i}$
Seien U,V Unterteilungsalgorithmen mit Symbol $\alpha(x), \beta(x)$
Das Unterteilte Netz
$B := \mathbf{b}_{\mathbb{Z}^2} := UCV^t$ hat das Symbol
$\mathbf{b}(x,y) := \alpha(x)\mathbf{c}(x^2,y^2)\beta(y)$
$\gamma(x,y) := \alpha(x)\beta(y)$ ist das Symbol des *Tepus(U,V)* mit der Unterteilungsgleichung $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x^2}) \quad \mathbf{b_i} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \gamma_{\mathbf{i}-2\mathbf{k}} \mathbf{c_k}$
$\mathbf{x^2} = (x^2, y^2)$!
Verfeinerungsschema (U_1, U_1):

$$\gamma(x,y) := \frac{1}{4}[1\, x\, x^2] \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \cdot [1\, 2\, 1] \begin{bmatrix}1\\y\\y^2\end{bmatrix}$$

5.1 Wavelets 1D

Grundfunktionen
$B_i^k := N_i^0(2^k u)$
Wavelets $W_i^k := B_{2i}^{k+1} - B_{2i}^{k+1}$
geg: $s(u) = \sum_{i=0}^{2^m-1} c_i^m N_i^0(2^m u)$ oder
$s = \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} (c_i^{m-1} B_i^{m-1} + d_i^{m-1} W_i^{m-1})$

Zerlegung ·

- For $k = m-1, \dots, 0$
  - For $i = 0, \dots, 2^k - 1$
    - $c_i^k = 0.5(c_{2i}^{k+1} + c_{2i+1}^{k+1})$
    - $d_i^k = 0.5(c_{2i}^{k+1} - c_{2i+1}^{k+1})$

Ausgabe: $s = c_0^0 B_0^0 + \sum_{i=0}^{2^0-1} d_i^0 W_i^0 + \dots + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} d_i^{m-1} W_i^{m-1}$

Rekonstruktion ·

- For k = 0...m-1
  - For i = 0...$2^k - 1$
    - $c_{2i}^{k+1} = c_i^k + d_i^k$
    - $c_{2i+1}^{k+1} = c_i^k - d_i^k$

5.2 Wavelets 2D

$s(x,y) = \sum_{i,j=0}^{2^m-1} c_{ij}^m B_i^m(x) B_j^m(y)$

Zerlegung^2 (Spalte erster Index!) ·

- Für k = m-1...0
  - Für i,j = 0...$2^k - 1$

- $c_{ij}^k = 0.25(c_{2i,2j}^{k+1} + c_{2i+1,2j}^{k+1} + c_{2i,2j+1}^{k+1} + c_{2i+1,2j+1}^{k+1})$
- $d_{ij}^k = 0.25(+ - + -)$
- $e_{ij}^k = 0.25(+ + - -)$
- $f_{ij}^k = 0.25(+ - - +)$

Beachte auch: in der nächsten Matrix sind die c_{ij} nur in den 4er Feldern jeweils links oben! Rekonstruktion^2 analog zu Zerlegung^2, jedoch mit Faktor 4 statt 0.25 und c, d, e, f, ergeben jeweils (2i,2j), (2i+1,2j) usw.

6 Flussmaximierung

Flussnetzwerk $F := (G = (V, E), q \in V, s \in V, k : V^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0})$
Graph zusammenhängend (für jeden Knoten ex. Weg von q zu s), $|E| \geq |V| - 1$
Fluss $f : V^2 \to \mathbb{R}$ mit
$f \leq k$
$\forall x, y \in V : f(x, y) = -f(y, x)$
$\forall x \in V \setminus \{q, s\} : \sum f(x, V) := \sum_{y \in V} f(x, y) = 0$
Residualgraph $G_f := (V, E_f := \{e \in V^2 | f(e) < k(e)\})$
Residualnetz $F_f := (G_f, q, s, k_f := k - f)$

6.1 Methoden

6.1.1 Ford-Fulkerson (naiv)

solange es einen Weg $q \rightsquigarrow s$ in G_f gibt, erhöhe f maximal über diesen Weg. (Nur für $k \in \mathbb{Q}$)

6.1.2 Edmonds-Karp

=FF, erhöhen immer längs eines kürzesten Pfades in G_f. (für bel. $k \in \mathbb{R}$)

6.1.3 Präfluss-Pusch

Präfluss-Eigenschaft Fluss mit Rein-Raus >= 0
Höhenfunktion $h(q) = |V|$, h(s) = 0, $\forall (x, y) \in E_f : h(x) - h(y) <= 1$
Push(x,y) schiebe maximal Mögliches (ü und k beachten!) über Kante
Pushbar(x,y) $x \in V \setminus \{q, s\}$ und $h(x) - h(y) = 1$ und ü$(x) > 0$ und $(x, y) \in E_f$
Lift(x) $h(x) \leftarrow 1 + \min_{(x,y) \in E_f} h(y)$
Liftbar(x) $x \in V \setminus \{q, s\}$ und ü$(x) > 0$ und $h(x) \leq \min_{(x,y) \in E_f} h(y)$

Präfluss-Push:
- $h(x) \leftarrow$ if $x = q$ then $|V|$ else 0
- $f(x, y) \leftarrow$ if $x = q$ then $k(x, y)$ else 0

6.1.4 An-Die-Spitze

Leere(x)
- while ü$(x) > 0$
  - if $i_x \leq Grad(x)$
    - if pushbar$(x, n_x(i_x))$: push$(x, n_x(i_x))$
    - sonst: i_x += 1
  - else
    - Lift(x), $i_x \leftarrow 1$

L ist Liste aller $x \in V \setminus \{q, s\}$ mit x vor y falls pushbar(x,y)
$n_x(i) \quad (1 \leq i \leq Grad(x))$ sind Nachbarn von x (auch Gegenrichtung)
i_x ist Zähler (alle $n_x(i)$ mit $i \leq i_x$ nicht pushbar)

An die Spitze
- Initialisiere f und h wie bei *Präfluss-Push*
- $\forall x \in V : i_x \leftarrow 1$
- Generiere L
- $x \leftarrow$ Kopf(L)
- while $x \neq$ NIL
  - Leere(x)
  - Falls $h_{alt} < h(x)$, setze x an Spitze von L
  - $x \leftarrow$ Nachfolger von x in L

7 Zuordnungsprobleme

7.1 Paaren in allgemeinen Graphen

Alternierender Weg ist *maximal*, wenn er nicht Teil eines längeren alternierenden Weges ist.
$\to$ Maximale Paarung kann durch sukzessive Vergrößerung gefunden werden

7.2 Berechnung vergrößender Wege

Vergrößernder Weg
- Input: G und P, Output: Vergrößernder Weg für P
- $h(x) \leftarrow 0$ wenn x frei, -1 wenn x gebunden
- Solange kein vergrößernder Pfad gefunden und gibt unteruschte Kante $\langle x, y \rangle$ mit $h(x) \in 2\mathbb{N}_0$
- if $h(y) = -1$
  - $v(y) \leftarrow x, v(p(y)) \leftarrow y, h(y) \leftarrow h(x) + 1, h(p(y)) \leftarrow h(y) + 1$
- if $y = v^i(x)$ und $i \in 2\mathbb{N}_0$ schrumpfe die Blüte $x - v(x) - v^2(x) - \cdots - y - x$
- if $h(y) \in 2\mathbb{N}$ und $w_x := v^{h(x)}(x) \neq w_y := v^{h(y)}(y)$, ist ein vergrößernder Pfad $w_x \rightsquigarrow w_y$ über $\langle x, y \rangle$ gefunden

7.3 Maximal gewichtete Paarungen

Berechnung möglich in $O(|V|^3)$ bzw. $O(|V| \cdot |E| \log |V|)$

8 Minimale Schnitte

Sei
- $\bar{G} := (V, \bar{E}), \bar{E} := \{(x, y) | \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle \in E\}$
- $k : V^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}, k(x, y) :=$ if $(\langle x, y \rangle \in E)$ then $\gamma(\langle x, y \rangle)$ else 0
- $x, z \in V$ beliebig

Berechne maximalen Fluss
$\to A := \{y \mid \exists$ Pfad $x \rightsquigarrow y$ in $\bar{G}_f\}$ und $B := V \setminus A$ bilden minimalen xz-Schnitt $(x \in A, z \in B)$
Gewicht des Schnitts = Wert des Flusses
kleinster xz-Schnitt in G lässt sich mit Flussmaximierung in $O(|V|^4)$ berechnen
(es existieren Algorithmen in $O(|V|^2 \log |V| + |V||E|))$

8.1 Zufällige Kontraktion

ggf. todo
Monte-Carlo-Algorithmus = stochastischer Algorithmus, kann falsche Ergebnisse Liefern
Las-Vegas-Algorithmus = stoch. Algo., immer richtig
IV Optimierungsalgorithmen

9 Kleinste Kugeln

Für jede Punktmenge P ist die kleinste Kugel $K(P) \supset P$ eindeutig.

9.1 Algorithmus von Welzl

$K(P, R)$ ist Kugel die P enthält und R auf der Oberfläche hat

Welzl
- Input: $P, R \subset \mathbb{R}^d$, $K(P, R)$ exist., P,R endlich
- if $P = \emptyset$ or $|R| = d + 1$
  - $C \leftarrow K(R)$
- else wähle $\mathbf{p} \in P$ zufällig
  - $C \leftarrow$ Welzl$(P \setminus \{\mathbf{p}\}, R)$
  - if $\mathbf{p} \notin C$
    - $C \leftarrow$ Welzl$(P \setminus \{\mathbf{p}\}, R \cup \{\mathbf{p}\})$
- Gib C aus

10 Lineare Programmierung

10.1 Lineare Programme

LP ist $z(\mathbf{x}) := \mathbf{zx} = \max!$, $A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{n \times d}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{zx} := \mathbf{z}^t\mathbf{x}$
d ist die Dimension des linearen Programms.
Die Ungleichungen $A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ repräsentieren den Schnitt S von n Halbräumen, der *Simplex* genannt wird.
Die Punkte $\mathbf{x} \in S$ heißen *zulässig.*
Die Ecken von S liegen je auf d Hyperebenen (d Gleichungen des Gleichungssystems).
- Simplexalgorithmus: Iterativ Ecken entlang gehen, bis z maximal.

10.2 Flussmaximierung als LP

maximiere Summe der ausgehenden Flüsse aus der Quelle.
Gleichungen zur Flusserhaltung (je eingehende Kanten - ausgehende Kanten = 0 ($\geq$ und $\leq$))
Gleichungen zur Kapazitätsbeschränkung (Fluss ≥ 0 und (Kapazität - Fluss) ≥ 0)
$f(a, b) = -f(b, a)$

10.3 Kürzester Weg als LP

Suche Weg $1 \rightsquigarrow 2$
$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}\gamma_{ij} = \min!$
$x_{ij} \geq 0, (i, j) \in E$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ -1 & i = 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

(Ausgehende Kanten = Eingehende Kanten außer für $i \neq 1, 2$)
negative Kreise $\Rightarrow$ keine endliche Lösung. Erzwingbar durch $x_{ij} \leq 1, (i, j) \in E$ (?)

10.4 Maximusnorm

geg: $r = A * a - c$ mit A Matrix wobei c konstanter Vektor und a Vektor aus Variablen. Dann LP mit $y_0 = 1/r, y_1 = a_1/r, y_2 = a_2/r, \ldots$
$y_0 = max!$

$$\begin{matrix} -c & A \\ c & -A \end{matrix} <= [1, 1, \ldots., 1]$$

10.5 Simplexalgorithmus

$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

wobei $n = d + 1$ und $x_n = 1$
Hyperebenen $H_i : y_i(\mathbf{x}) = 0$
Gegeben: $A = [a_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
Gesucht: $B = [b_{ij}]_{i,j=1,1}^{m,n}$
r=Pivotzeile, s=Pivotspalte

Austausch
- $b_{rs} \leftarrow \frac{1}{a_{rs}}$
- $b_{rj} \leftarrow -\frac{a_{rj}}{a_{rs}}$ (Pivotzeile, $j \neq s$)
- $b_{is} \leftarrow \frac{a_{is}}{a_{rs}}$ (Pivotspalte, $i \neq r$)
- $b_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$ $(i \neq r, j \neq s)$

10.6 Normalform

Jedes lin. Programm kann auf die Form
$\mathbf{zx} = \max!$
$A\mathbf{x} \geq 0$
mit $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_d \; 1]^t$ kann auf die Form
$[\mathbf{c}^t c]\mathbf{y} = \max!$
$\mathbf{y} \geq 0$
$[B\mathbf{b}]\mathbf{y} \geq 0$
mit $\mathbf{y} := [y_1 \ldots y_d \; 1]^t$ gebracht werden.
Notation:

$$\begin{array}{r|cc|l} & x_{0 \ldots d} & 1 & \\ \hline y_{d+1} = & & & \\ \vdots & B & \mathbf{b} & \geq 0 \\ y_m = & & & \\ \hline z = & \mathbf{c}^t & c & = \max! \\ \hline \end{array}$$

$\mathbf{b} \geq 0$, sonst Simplex leer.

10.7 Simplexalgorithmus

Simplex
- Input: $\bar{A}$ Normalformmatrix eines lin. Progr. $\bar{A} := \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{c}^t & c \end{bmatrix}$
- Solange ein $c_s > 0$
  - Falls alle $a_{is} \geq 0$: gib $c \leftarrow \infty$ aus; Ende
  - sonst
    - bestimme r so, dass
    - $\frac{a_r}{a_{rs}} = \max_{a_{is} < 0} \frac{a_i}{a_{is}}$
    - $\bar{A} \leftarrow$ Austausch$(\bar{A}, r, s)$
- Gib $\bar{A}$ aus

Die Lösung ist dann, dass alle y_i die oben an der Tabelle stehen = 0 sind.
(total) *unimodular* = quadratisch, $det A \in \{-1, 0, 1\}$ (+alle quad. Untermatrizen)

Util
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$

Laufzeiten

Kap.	Name	Laufzeit
2.6	Konvexe Hülle	erw: $O(n \log n)$, max: $O(n^2)$
6	Ford-Fulkerson	$O(\|E\| * W)$ (k Wert eines max. Flusses)
6	Edmonds-Karp	$O(\|E\|^2 * \|V\|)$
6	Präfluss-Push	$O(\|V\|^2 * \|E\|)$
6	An-Die-Spitze	$O(\|V\|^3)$
7	Paare	$O(\|E\| \cdot \min\{\|L\|, \|R\|\})$
7	Vergrößernder Weg	$O(\|V\| \cdot \|E\|)$
8.2	Schnitt	$O(\|V\|^2)$ gef. mit $P = 1 - 1/e^2$
8.3	Min Schnitt	$O(\|V\|^2 \log \|V\|)$ richtig mit $P \in \Theta(1/ \log \|V\|)$
9	Welzl	mittl: $O(n)$
10	Simplex	erw: $O(n^2 d)$, max: $\Omega(n^{d/2})$
10	Ellipsoid	polyn.; in praxis langsamer als Simplex
10	Innere Punkte	polyn.; in praxis fast so gut wie Simplex
10.5	Seidel	$O(d^3 d! + dnd!)$