

# Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

## Contents

<b>Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen</b>	<b>2</b>
planare Einbettung: . . . . .	2
Satz von Euler (1790): . . . . .	2
Dualität von Schnitten und Kreisen . . . . .	4
Minor bzw. Unterteilung . . . . .	4
Satz von Kuratowski (1930) . . . . .	4
Vorbereitung des Beweises . . . . .	4
<b>Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; “Listenfärbung” nicht im Skript, aber Folien)</b>	<b>5</b>
Färbungsproblem (k-Färbung) . . . . .	5
Listenfärbungsproblem . . . . .	5
Beweis der schärferen Behauptung per Induktion . . . . .	5
<b>Matching</b>	<b>6</b>
Matching-Algorithmus für pl. Graph $G = (V, E)$ . . . . .	8
Mixed-Max-Cut in pl. Graphen . . . . .	9
Beweis zu Folie (Kozykel und st-Schnitte) . . . . .	11
Beweis zu Folie “Betrachte Fluss von auf P” . . . . .	11
<b>Das Menger-Problem</b>	<b>11</b>
Satz von Menger . . . . .	12
Menger-Problem . . . . .	12
Menger-Problem in pl. Graphen; kantendisj. Variante . . . . .	12
zu Schritt 1 . . . . .	13
Zu Schritt 2 . . . . .	13
Konstruktion der Kreise $C_1 \dots C_l$ . . . . .	13

Zu Schritt 2 (Wdh) . . . . .	14
Zu Schritt 3 . . . . .	14
Das knotendisjunkte Menger-Problem . . . . .	15
<b>Das Problem von Okamura und Seymour</b>	<b>16</b>
Kantendisjunktes Wegpackungsproblem . . . . .	16

## Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

### planare Einbettung:

Graph  $G = (V, E)$  kann dargestellt werden indem man die Knoten aus  $V$  auf Punkte im  $\mathbb{R}^2$  und die Kanten aus  $E$  auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

$G$  heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge  $\mathcal{F}$ ,  $|\mathcal{F}| = f$

### Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph  $G = (V, E)$  gilt für jede planare Einbettung (geg. durch  $\mathcal{F}$ ), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei  $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$ )

**Beweis** per Induktion über  $m$ :

**IA:**  $m = 0$ , es ist  $n = 1, f = 1 \Rightarrow$  Beh.

Sei also  $m \geq 1$

*Fall 1:*  $G$  enthalte einen Kreis

$\Rightarrow$  es existiert  $l \in E$  so dass  $G' := G - e = (V, E \setminus e)$  ebenfalls zusammenhängend und  $e$  an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in  $G'$  werden.

$\Rightarrow f' \neq$  #Facetten von  $G'$  erfüllt

$$f' = f - 1 \xRightarrow{IV} n - (m - 1) + f' = 2$$

$$\Rightarrow n - m + f = 2$$

Fall 2: G enthält keinen Kreis, ist also Baum und  $|\mathcal{F}| = 1$ . Für beliebige  $e \in E$  zerfällt  $G' = G - e$  in zwei Zusammenhangskomponenten  $G_1 = (V_1, E_2)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1$$

$$\Rightarrow n - m + f = n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1 + 1 = (n_1 - m_1 + 1) + (n_2 - m_2 + 1) - 2 = 2$$

$\parallel$   
2
  $\parallel$   
2

### Folgerungen:

- #Facetten ist für jede planare Einbettung von G gleich
- #Kanten eines Baumes mit n Knoten ist n-1

*Lemma:* Ein planarer Graph mit n Knoten ( $n \geq 3$ ) hat höchstens  $3n - 6$  Kanten.

*Beweis:* o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

Bild

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$3f = 2m$$

$\stackrel{\text{mit Euler}}{=}$

$$3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$$

*Lemma:* Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten.  $d_{max}(G)$  bezeichne Maximalgrad in G,  $n_i$  #Knoten von Grad i.

Dann gilt:

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots + (d_{max}(G) - 6) \cdot n_{d_{max}(G)} + 12$$

*Beweis:* Es gilt  $n = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i$  und  $2m = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i$ .

Da  $m \leq 3n - 6$  folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

*Folgerung:* Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit  $d(v) \leq 5$ .

## Dualität von Schnitten und Kreisen

Bild Dualgraph

Planarer Graph  $G$  mit Einbettung  $\mathcal{F}_i$  Dualgraph  $G^*$  dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in  $G$  ( $\hat{=}$  entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in  $G^*$  und umgekehrt.

## Minor bzw. Unterteilung

Bild  $G'$  Subgraph von  $G$

$G' = (V', E')$  heißt *Subgraph* von  $G = (V, E)$  wenn  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ .

$G' = (V', E')$  heißt *Unterteilung* von  $G = (V, E)$  wenn  $G'$  aus  $G$  entsteht indem man Kanten von  $G$  durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  wenn  $H$  aus  $G$  entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

$H$  ist *Minor* von  $G$  falls  $G$  eine Unterteilung von  $H$  als Subgraph enthält.

Bild  $G'$  Unterteilung von  $G$

Bild  $G'$  Minor von  $G$

## Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph  $G = (V, E)$  ist genau dann planar wenn er weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  als Minor enthält.

“ $\Rightarrow$ ” klar, da  $K_5$  und  $K_{3,3}$  nicht planar.

“ $\Leftarrow$ ”: Es ist also “nur” zu zeigen: Wenn  $G$  nicht planar, dann enthält  $G$  einen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor.

## Vorbereitung des Beweises

Bild  $K_{3,2}$

Nehme Graph der  $K_{3,2}$  als Minor enthält -Graph ( Minor von  $K_{3,2}$ )

(2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski\_slides.pdf)

(2014-04-29)

## Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; “Listenfärbung” nicht im Skript, aber Folien)

### Färbungsproblem (k-Färbung)

geg.  $G = (V, E)$ ,  $k$  Farben

**Problem** Existiert *korrekte* Färbung der Knoten aus  $V$  mit diesen  $k$  Farben, d.h. falls  $\{u, v\} \in E \implies \text{Farbe}(u) \neq \text{Farbe}(v)$

### Listenfärbungsproblem

geg.  $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$

**Problem** Gibt es für *jede* Zuordnung von Listen  $S_v$  zu Knoten  $v \in V$  mit  $|S_v| = k$  eine korrekte Färbung der Knoten bei der jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste enthält?

**Beobachtung** Listenfärbung ist Verallgemeinerung von Färbungsproblem.

**Satz** Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar.

**Beweis** Induktion über  $|V| = n$  (benutzen nicht, dass  $v$  exist. mit  $d(v) \leq 5$ ).

beweisen schärfere Behauptung:

Falls  $G$  planar und

- jede innere Facette Dreieck
- äußere Facette durch Kreis  $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$  begrenzt
- $v_1$  mit Farbe 1 gefärbt
- $v_2$  mit Farbe 2 gefärbt
- jeder Knoten mit Liste von mind. 3 Farben assoziiert
- jeder Knoten aus  $G - C$  mit Liste von mind. 5 Farben assoziiert

dann folgt:  $G$  korrekt färbbar

Offensichtlich folgt daraus 5-Listenfärbbarkeit.

### Beweis der schärferen Behauptung per Induktion

Falls  $G = (V, E)$  planar und  $|V| = 3$  trivial

**Induktionsschritt**  $G = (V, E)$  pl. und  $|V| \geq 4$ , Kreis  $C$  der äußeren Facette begrenzt

zwei Fälle:  $C$  enthält Sehne  $\{v, w\}$  im Inneren oder nicht

bild

**Fall 1: C enthält Sehne  $\{v, w\}$**   $\{v, w\}$  induziert eindeutig bestimmte Kreise  $C_1$  und  $C_2$  welche jeweils Subproblem  $G_1$  und  $G_2$  induzieren. o.B.d.A. enthalte  $C_1$  Kante  $\{v_1, v_2\}$  (und damit  $v_1, v_2$  nicht beide auf  $C_2$ . Wende IV auf  $C_1$  an und dann IV auf  $C_2$  wobei  $v$  und  $w$  Rolle von  $v_1, v_2$  spielen.  $\Rightarrow$  Färbung von  $G_1$  und  $G_2$  ind. korrekte Färbung von  $G$ .

**Fall 2: C enthält keine Sehne** Seien  $v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_l, v_1$  die Nachbarn von  $v_k$ . Da alle inneren Facetten Dreiecke ist  $v_{k-1}u_1 \dots u_lv_1$  Weg  $P$  und  $(C - v_k) \cup P = C'$  wird Kreis der äußere Facette begrenzt. "Reserviere" zwei Farben aus Liste von  $v_k$  und entferne diese ggf. aus Listen von  $u_1, \dots, u_l$ . Wende IV auf durch  $C'$  induz. Graph an. Höchstens eine der beiden reservierten Farben wird für  $v_{k-1}$  verwendet, die andere kann für  $v_k$  verwendet werden.

**Satz** Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

**Beweis** konst. Gegenbeispiel, d.h. planarer Graph mit Listenzuweisung mit Listen  $S_v, |S_v| = 4$ , so dass Graph nicht korrekt färbbar unter Berücksichtigung der  $S_v$ .

Kern der Konstruktion:

**bild**

hat "vis-à-vis-Eigenschaft", d.h. in korrekte Färbung müssen mind. zwei gegenüberliegende Eckknoten dieselbe Farben haben. (klar!)

---

2015-05-12

Bemerkung zu Planar Separator Theorem: Linearzeitimplementierung

PST: pl.  $G = (V, E)$ ; exist Separator  $S$  der  $G$  in  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$  trennt mit

1.  $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}n$
2.  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

## Matching

$G = (V, E)$ , ein Matching  $M \subseteq E$  sodass keine zwei Kanten aus  $M$  gemeinsame Endknoten haben.

$w : E \rightarrow \mathbb{R}$

- Finde  $M \subseteq E$  Matching mit max. Gewicht, wobei  $w(m) = \sum_{l \in m} w(l)$
- Finde  $M \subseteq E$  Matching mit max. Kardinalität, (Fall  $w(l) = 1$  f.a.  $l \in E$ )

Beide Probleme sind auch für bel. Graphen in P.

**bild**

alternierender Weg bzgl.  $M \rightarrow$  Vertauschen der Kanten auf Weg aus  $M$  mit Kanten auf Weg, die nicht in  $M$  sind resultiert in größerem Matching  $M^*$

- 
- Ein bezüglich einem Matching  $M$  *alternierender Weg* ist ein einfacher Weg oder einfach Kreis, dessen Kanten abwechselnd in  $M$  und  $E \setminus M$  sind.
  - Alternierender Weg  $P$  (bezeichne entsprechende Kantenmenge) ist *erhöhender Weg* falls

$$\sum_{l \in P, l \in E \setminus M} w(l) > \sum_{l \in P, l \in M} w(l)$$

und  $P$  entweder Kreis (gerader Länge) oder dessen erste und letzte Kante beide in  $M$  sind oder inzident zu einem ungematchten Knoten.

**Beobachtung**  $M$  Matching,  $P$  erhöhender Weg bzgl.  $M \Rightarrow M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$  wieder Matching mit  $w(M') > w(M)$ .

**Lemma**  $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}, M$  Matching in  $G$ . Dann ist  $w(M)$  maximal genau dann wenn es keinen erhöhenden Weg bzgl.  $M$  gibt.

**Beweis** “ $\Rightarrow$ ” klar

“ $\Leftarrow$ ” sei  $M$  nicht max. Matching in  $G$  und es existiert kein bzgl.  $M$  erhöhender Weg. Dann exist. Matching  $M^*$  mit  $w(M^*) > w(M)$ . Betrachte Subgraph  $G_{M^* \triangle M}$  von  $G$  der durch

$$M^* \triangle M = M \cup M^* \setminus (M \cap M^*)$$

induziert wird. In diesem Graph haben alle Knoten Grad 1 und Grad 2 und er besteht aus einfachen Wegen und Kreisen.

Falls kein Kreis in  $G_{M \triangle M^*}$  erhöhend bzgl.  $M$  so exist in  $G_{M \triangle M^*}$  ein inklusions-maximaler Weg, der Weg  $P$  in  $G$  induziert mit  $w(P \cap M^*) > w(P \cap M)$

$\Rightarrow$  beide Endkanten von  $P$  gehören zu  $M$  oder eine Endkante gehört nicht zu  $M$  und ist inzident zu einem Knoten  $v$ ,  $v$  nicht durch  $M$  gematcht.

$\Rightarrow P$  erhöhend bzgl.  $M$ . (widerspruch)

**Lemma**  $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}, v \in V, M$  Matching in  $G - v$  (Graph induziert durch  $V \setminus \{v\}$ )

Dann gilt:

1. Falls es keinen bzgl.  $M$  erhöhenden Weg in  $G$  gibt mit Endknoten  $v$ , so hat  $M$  auch in  $G$  max. Gewicht

2. Falls es bzgl.  $M$  erhöhenden Weg in  $G$  gibt mit Endknoten  $v$  und  $w(P \cap E \setminus M) - w(P \cap M)$  maximal unter allen solchen erhöhenden Wegen, so ist  $M^* = M \triangle P$  Matching maximalen Gewichts in  $G$ .

bild i) ii)

**Beweis** erhöhender Weg bzgl.  $M$  in  $G$  muss  $v$  als Endknoten haben. Sei  $M^*$  max. Matching in  $G \Rightarrow M \triangle M^*$  ist Menge von alternierenden Kreisen und Wegen bzgl.  $M$  bzw.  $M^*$  in  $G$

$P$  erhöhender Weg bzgl.  $M$  in  $G_{M \triangle M^*} \Rightarrow P$  erhöhender Weg bzgl.  $M$  in  $G$ .

Da  $G_{M \triangle M^*}$  höchstens bzgl.  $M$  erhöhender Weg  $P^*$  mit Endknoten  $v$  enthält gilt  $w(M) - w(P^* \cap M) = w(M^*) - w(P^* \cap M^*)$

Gewicht des Matching  $M'$ , das durch Erhöhen entlang  $P^*$  entsteht ist:

$$\begin{aligned} w(M') &= w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap E \setminus M) = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*) \\ &\Rightarrow \\ w(M') &= w(M^*) \end{aligned}$$

---

2015-05-20 14:10:24

## Matching-Algorithmus für pl. Graph $G = (V, E)$

1. Zerlege  $G$  in  $G_1, G_2$  durch Separator  $S$  entspr. Planar-Separator-Theorem und berechne rekursiv in  $G_1$  und  $G_2$  Matchings  $M_1$  bzw.  $M_2$  maximalen Gewichts; bezeichne  $M = M_1 \cup M_2$
2. Solange  $S \neq \emptyset$ 
  - wähle  $v \in S, S := S \setminus \{v\}$  und berechne mit Lemma aus  $M'$  matching max. Gewichts in  $G' + v$

---


$$t(n) = t(c_1 n) + t(c_2 n) + c_3 \cdot \sqrt{n} \cdot t'(n)$$

$t'(n)$  Laufzeit für Lemma,  $c_1, c_2, c_3$  Konstante;  $c_1, c_2 \leq \frac{2}{3}, c_1 + c_2 \leq 1$

Mit Master-Theorem kann  $t(n)$  abgeschätzt werden durch

$$t(n) \in O(n^{\frac{3}{2}}) \text{ falls } t'(n) \in O(n)$$

$$t(n) \in O(n^{\frac{3}{2}} \log n) \text{ falls } t'(n) \in O(n \log n)$$



## Mixed-Max-Cut in pl. Graphen

$G = (V, E)$ ,  $S \subseteq E$  *Schnitt* von  $G$  falls durch  $E \setminus S$  induz. Subgraph unzusammenhängend und für alle  $\{u, v\} \in S$   $u$  und  $v$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten dieses Subgraphs.

Kantengewichte  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

**Mixed-Max Cut** Finde Schnitt  $S$  mit  $w(s) = \sum_{l \in S} w(l)$  maximal.

Ist in bel. Graphen NP-schwer.

**Beobachtung** MIXED-MAX CUT Problem und MIXED-MIN CUT Problem äquivalent.

Spezialfall: MIN CUT Problem mit  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  ist auch für bel. Graphen in P  
polynomialer Algorithmus für MIXED-MAX CUT in pl. Graphen:

verwende:

- Dualität von Schnitten und Kreisen
- max. Matching bzw. Planar Separator Theorem

Laufzeit in  $O(n^{3/2} \log n)$ .

Es gilt:  $G$  enthält Euler-Kreis g.d.w.  $E$  kantendisjunkte Vereinigung einfacher Kreise g.d.w. für alle  $v \in V$  ist Knotengrad  $d(v)$  gerade.

Dualität von Schnitt in  $G$  und Menge von einf. Kreisen (= Kantenmenge, in der f.a. Knoten  $v$   $d(v)$  gerade (= gerade Menge)) in Dualgraph  $G^*$  (bzgl. bel. pl. Einbettung)

**bild gewichteter dualgraph**

Schritt 1 trianguliere  $G$  in  $O(n)$ ; zusätzliche Kanten erhalten Gewicht 0

Schritt 2 berechne in  $O(n)$  Dualgraph bzgl. bel. pl. Einbettung;  $G^*$  ist dann 3-regulär (d.h. für alle  $v$ :  $d(v) = 3$ )

Schritt 3 konstruiere zu  $G^*$  Graph  $G'$  so dass perfektes Matching min. Gewichts in  $G'$  eine gerade Menge (bzw. Menge von Kreisen) max. Gewichts in  $G^*$  induziert.

Schritt 4 berechne in  $O(n^{3/2} \log n)$  solch ein Matching bzw. gerade Menge

Schritt 5 falls diese gerade Menge nicht leer, gib entspr. Schnitt aus. Ansonsten "Sonderfall"

Matching  $M$  in  $G = (V, E)$  mit  $|V|$  gerade heißt perfekt falls  $|M| = \frac{|V|}{2}$

**zu Schritt 3** beachte dass  $G^*$  3-regulär, Matching ergibt zwei Fälle:

Dreieck mit kante an jeder Ecke

Fall 1: Alle drei äußeren Kanten gematcht Fall 2: Eine kante von dreieck, eine äußere bild

$G'$  entsteht aus  $G^*$  indem jeder Knoten durch Dreieck ersetzt wird. Sei  $m$  #Kanten in  $G^*$ ,  $n$  #Knoten in  $G^* \Rightarrow 3n = 2m \Rightarrow n$  gerade  $\Rightarrow$  #Knoten in  $G'$  gerade

**zu Schritt 4** konstruiere perfektes Matching min. Gewichts in  $G'$

**Beobachtung:**  $M$  perfektes Matching min. Gewichts in  $G = (V, E)$  mit  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  g.d.w.  $M$  perfektes Matching max. Gewichts bzgl. Gewichts fkt.  $\bar{w} : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\bar{w}(l) := W - w(l)$ ,  $W$  geeignet gewählte Konstante.

Erzwinge dass Matching max. Gewichts *perfekt* ist:

- zu  $M$  perfekt betrachte

$$\bar{w}(M) = \sum_{l \in M} \bar{w}(l) = \frac{n}{2}W - \sum_{l \in M} w(l) \geq \frac{n}{2} \cdot (W - w_{max})$$

, wobei  $w_{max} = \max_{l \in E} w(l)$

- zu  $M'$  nicht perfekt gilt

$$\bar{w}(M') \leq (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min}), w_{min} = \min_{l \in E} w(l)$$

Wähle also  $W$  so dass  $\frac{n}{2} \cdot (W - w_{max}) > (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min})$

**zu Schritt 5** Komplementmenge von perfekten Matching min. Gewichts in  $G'$  induziert gerade Menge max. Gewichts in  $G^*$  und damit max. Schnitt in  $G$ .

Es kann sein, dass resultierende Menge leer ist! Passiert wenn max. Schnitt negatives Gewicht hat.

$\rightarrow$  *Sonderfall:* Wollen nichttrivialen Schnitt erzwingen.

betrachte wieder Schritt 3: erzwinge, dass in perfekten Matching minimalen Gewichts für mindestens ein Knoten  $v$  aus  $G^*$  Fall 2 eintritt.

*Vorgehensweise:* betrachte alle Knoten  $v$  aus  $G^*$  und  $G^* - v$  sowie durch perfektes Matching in  $G'$  induzierte Matching in  $G^* - v$  und berechne mit "Matching-Lemma" Matching in  $G^*$ .

Wähle  $M$  mit  $w(M) = \min_{v \in V^*} w(M_v)$

*Frage:* Wie kann man dabei Fall 2 an  $v$  erzwingen?

2015-05-26 14:42:21

## Beweis zu Folie (Kozykel und st-Schnitte)

- 1) s, t auf selber Seite von  $C^*$   $\Rightarrow$  P kreuzt  $C^*$  gleich oft in jeder Richtung  $\Rightarrow$  C enthält selbe Zahl von Kanten in P und  $\text{rev}(P) \Rightarrow \pi(C) = 0$
- 2) s rechts, t links  $\Rightarrow$  P kreuzt einmal mehr von rechts nach links  $\Rightarrow \pi(C) = 1$
- 3) analog  $\Rightarrow \pi(C) = -1$

C s, t-Schnitt  $\Rightarrow$  P kreuzt  $C^*$  von rechts nach links  $\Rightarrow \pi(C) = 1$ .  $\pi(C) = 1 \Rightarrow$  Fall 2; s rechts, t links.  $\Rightarrow$  C st-Schnitt.

## Beweis zu Folie "Betrachte Fluss von $\lambda$ auf P"

**Beweis:** " $\Rightarrow$ " Angenommen  $G_\lambda^*$  enthält neg. Kreis  $C^*$

$$0 > c(\lambda, C^*) = \sum_{e \in C^*} c(e) = \sum_{e \in C^*} c(e) - \lambda \sum_{e \in C^*} \pi(e) = \sum_{e \in C^*} \underbrace{c(e) - \lambda \pi(e)}_{\geq 0} \underset{>0}{> 0}$$

$$\Rightarrow \pi(C) = 1. \Rightarrow \text{C ist st-Schnitt}$$

Außerdem  $\sum_{e \in C^*} c(e) < \lambda \Rightarrow$  st-Schnitt mit Kap.  $< \lambda$ .

" $\Leftarrow$ ":  $G_\lambda^*$  enthält keinen neg. Kreis  $\Rightarrow$  kürzeste Wege wohldef.

Wähle o in  $G_\lambda^*$  bel. Ursprung.

$\text{dist}(\lambda, p)$ : Distanz von p zu o in  $G_\lambda^*$ .

Def:  $\phi(\lambda, e) := \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*)) - \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + \lambda \cdot \pi(e)$

Zeige:  $\phi$  ist gültiger st-Fluss.

- 1) Für  $v \in V$  gilt:  $\sum_w \phi(v \rightarrow w) = \sum_w \pi(v \rightarrow w)$   
 $\Rightarrow \phi(\lambda, \cdot)$  ist Fluss mit Wert  $\lambda$ .
- 2)  $\text{slack}(\lambda, e^*) := \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + c(\lambda, e) - \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*))$   
 Gilt:  $\text{slack}(\lambda, e) = c(e) - \phi(\lambda, e)$   
 $\phi(\lambda, e) \leq c(e) \Leftrightarrow \text{slack}(\lambda, e) \geq 0$ .  
 Wäre  $\text{slack}(\lambda, e) < 0 \Rightarrow \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*)) > \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + c(\lambda, e^*)$   
 (widerspruch)

Max  $\lambda$  sodass kein neg. Kreis in  $G_\lambda^*$  ist Länge eines kürzesten ts-Wege in  $G_\lambda^*$ .

## Das Menger-Problem

Zur Erinnerung:  $S \subset V$  heißt *Separator* in  $G = (V, E)$ , falls  $G - S$  unzusammenhängend.  $S \subset E$  heißt *Schnitt* in  $G = (V, E)$  falls der durch  $E \setminus S$  induzierte Teilgraph von G unzusammenhängend.

Zu  $u, v \in V$  def:

$$K_G(u, v) := \begin{cases} |V| - 1 & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ \min_{S \subset V} |S| & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$K(G) := \min_{u, v \in V} K_G(u, v) = \min_{S \text{ Separator in } G} \{|S|, |V| - 1\}$$

$$\lambda_G(u, v) := \min_{S \subset E} |S|$$

$$\lambda(G) := \min_{u, v \in V} \lambda_G(u, v) = \min_{S \subset E, S \text{ Schnitt in } G} |S|$$

Zwei Wege heißen *kantendisjunkt*, wenn sie keine gemeinsame Kante enthalten und (intern) *knotendisjunkt* wenn sie (außer Anfangs- und Endknoten) keinen Knoten gemeinsam haben.

## Satz von Menger

Seien  $s$  und  $t$  Knoten in  $G = (V, E)$  ( $\{s, t\} \notin E$  bei knotendisj. Version)

- $K_G(s, t) \geq k$  g.d.w. es mind.  $k$  paarweise knotendisj.  $s$ - $t$ -Wege gibt
- $\lambda_G(s, t) \geq k$  g.d.w. es mind.  $k$  paarweise kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege gibt

## Menger-Problem

Zu  $G = (V, E)$ ,  $s, t \in V$  finde max. Anzahl knotendisj. bzw. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege.

### Menger-Problem in pl. Graphen; kantendisj. Variante

**Linearzeitalgorithmus basierend *Right-First-DFS*** *Spezialfall:*  $s$  und  $t$  liegen auf derselben Facette

**Bild**

RIGHT-FIRST  $\hat{=}$  im Gegenuhrzeigersinn nächste freie Kante in Adjazenzliste (relativ zur aktuellen eingehenden Kante)

---

Linearzeitalgorithmus bestehend aus 4 Schnitten;  $G = (V, E)$  planar eingebettet, o.B.d.A.  $t$  auf äußerer Facette.

**1. Schritt** ersetze  $G = (V, E)$  durch  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  indem  $\{u, v\} \in E$  durch  $(u, v)$  und  $(v, u)$  ersetzt wird. (In  $O(n)$ )

**2. Schritt** berechne in  $O(n)$  Menge gerichteter einfacher kantendisj. Kreise  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$  und konstruiere (in  $O(n)$ ) aus  $\vec{G}$  Graph  $\vec{G}_C = (V, \vec{E}_C)$ , der entsteht in dem alle Knoten auf den  $\vec{C}_i$  umgedreht werden.

**3. Schritt** berechne in  $\vec{G}_C$  in  $O(n)$  mittels RIGHT-FIRST-DFS eine max. Anzahl kantendisj. gerichteter s-t-Wege.

**4. Schritt** berechne aus dem in Schritt 3 gefundenen s-t-Wegen in  $\vec{G}_C$  gleiche Anzahl kantendisj. s-t-Wege in  $G$  in  $O(n)$ .

## zu Schritt 1

Bild

**Lemma:** Seien  $p_1, \dots, p_r$  kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in  $\vec{G}$ . Dann enthält  $P = \{\{u, v\} \in E : \text{genau eine der Kanten } (u, v) \text{ und } (v, u) \text{ liegt auf einem der } p_i\}$  gerade  $r$  kantendisjunkte s-t-Wege in  $G$ .

**Beweis:** zwei Fälle Bilder

## Zu Schritt 2

$C_1, \dots, C_l$  in  $\vec{G}$  so dass 1.  $\vec{G}_C$  enthält keine Rechtskreise, d.h. keine Kreise deren Inneres rechts liegt. 2. Sei  $\vec{P}_C \subseteq \vec{E}_C$  Menge der Kanten auf kantendisjunkten s-t-Wegen in  $\vec{G}_C$  und  $\vec{P} \subseteq \vec{E}$  wobei

$$\vec{P} := (\vec{P}_C \cap \vec{E}) \cup \{(u, v) \in \vec{E} : (u, v) \text{ auf einem der } \vec{C}_i \text{ und } (v, u)' \notin \vec{P}_C\}$$

Dann induziert  $\vec{P}$   $k$  kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in  $\vec{G}$  g.d.w.  $\vec{P}_C$   $k$  kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in  $\vec{G}_C$  induziert.

## Konstruktion der Kreise $C_1 \dots C_l$

sei  $f$  Facette in  $G$  bzw.  $\vec{G}$ ; def. Abstand von  $f$  von äußerer Facette als

$dist(f) :=$  Länge eines kürzesten Weges von Dualknoten zu  $f$  zu Dualknoten zu äußerer Facette  $f_0$  in  $G^*$

def.  $C_i$  als Vereinigung der einfachen Kreise in  $G$  für die alle Facetten  $f$  im Inneren  $dist(f) \geq i$  erfüllen.  $\vec{C}_i$  sei entsprechend Rechtskreis in  $\vec{G}$ .

Drehe alle diese  $\vec{C}_i$  um  $\rightarrow \vec{G}_C$

2015-06-03 14:07:31

## Zu Schritt 2 (Wdh)

$C_1, \dots, C_l$  geeignete Kreise in  $G$ ;  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$  entsprechende Rechtskreise in  $\vec{G}$  drehe  $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$  um  $\sim \rightarrow \vec{G}_C$ ;  $\vec{G}_C$  enthält keine Rechtskreise, da für jeden Rechtskreis in  $\vec{G}$  beim Übergang zu  $\vec{G}_C$  mindestens eine Kante des Kreises umgedreht wird.

Sei  $\vec{P}_C \subset \vec{E}_C$  Kantenmenge zu  $k$  s-t-Wege in  $\vec{G}_C$ . Konstruiere dazu Kantenmenge  $\vec{P}$  in  $\vec{G}$

$\vec{P} :=$  siehe oben

Bild

## Zu Schritt 3

Berechnung einer max. Anzahl s-t-Wege in  $G_C$  in  $O(n)$

- Schleife über ausgehende Kanten aus  $s$ 
  - RIGHT-FIRST-DFS-Tiefensuche
  - Suchschritt: rechteste freie auslaufende Kante in Bezug auf Referenzkante
  - 2 Varianten welche “Referenzkante”
    - \* **Weihe**: aktuell einlaufende Kante
    - \* **Coupry**: erste einlaufende Kante

**Korrektheitsbeweis zu Schritt 3** Zu beweisen:  $\vec{P}_C$  enthält maximale Anzahl s-t-Wege. Benutze dazu gewichtete Variante des Satz von Menger, d.h. konstruiere s-t-Schnitt, der entsprechende Kapazität hat.

Schnitt  $A$  wird induziert durch geeigneten Kreis  $\vec{K}$  in  $\vec{G}_C$  mit folgenden Eigenschaften:

- i)  $s \in \text{Inneres}(\vec{K})$  oder auf  $\vec{K}$
- ii)  $t \in \text{Äußeres}(\vec{K})$
- iii)  $|A := \{(u, v) \in \vec{E}_C : u \text{ auf } \vec{K}, v \in \text{Äußeres}(\vec{K})\}|$  ist gleich #s-t-Wege in  $\vec{P}_C$

$\vec{K}$  wird mittels LEFT-FIRST Rückwärtssuche von  $s$  aus in  $\vec{P}_C$  konstruiert

Bild: Kreis mit  $t$  ausserhalb: Varianten wie  $K$  aussieht: 1.  $S$  liegt auf Kreis, 2.  $S$  liegt in Kreis

**Lemma** Betrachte  $\vec{G}_C = (V, \vec{E}_C)$  und  $\vec{K}$ , dann ist jede Kante  $(u, v) \in \vec{E}_C$  mit  $u$  auf  $\vec{K}$  und  $v \in \text{Äußeres}(\vec{K})$  durch einen s-t-Wege aus  $\vec{P}_C$  besetzt

## Beweis

- i) wenn  $p_1, \dots, p_l$  s-t-Wege und linkskreise von s nach s. Dann gehört keine der Kanten  $(X, Y)$ ,  $X \in \text{Äußeres}(\vec{K})$  und y auf  $\vec{K}$  zu einem der  $p_i$  **bild** wegen Left-First in Graph induziert durch  $p_1, \dots, p_l$   $(u, y) \notin p_i$  für alle  $1 \leq i \leq l \Rightarrow$  für  $(u, v)$  mit u auf  $\vec{K}$ ,  $r \in \text{Äußeres}(\vec{K})$  kann nicht auf einem Linkskreis aus  $p_1, \dots, p_l$  liegen.
- ii) betrachte  $(u, v)$  mit u auf  $\vec{K}$ ,  $v \in \text{Äußeres}(\vec{K})$  und  $(u, w)$  mit w auf  $\vec{K}$  **bild**  
*Annahme:*  $(u, v)$  gehört zu keinem der  $p_1, \dots, p_l$   
betrachte Referenzkante zu  $(u, w)$  in RIGHT-FIRST-SUCHE (Schritt 3)  
Referenzkante "liegt wie" **grün** oder **blau**, aber dann hätte RIGHT-FIRST *nicht*  $(u, w)$  sondern  $(u, v) \Rightarrow$  Widerspruch

## Das knotendisjunkte Menger-Problem

geg.  $G = (V, E)$ ,  $s, t \in V$ . Finde eine maximale Anzahl paarweise (intern) knotendisj. s-t-Wege in G.

**Satz von Menger** maximale Anzahl knotendisj. s-t-Wege ist gleich der Größe eines minimalen Separators, der s und t trennt.

Linearzeitalgorithmus für knotendisjunktes Menger-Problem in planaren Graphen basiert auf RIGHT-FIRST-Suche.

**Schritt 1** überführe  $G = (V, E)$  in gerichteten Graph  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  indem alle Kanten mit  $u, v \in V \setminus \{s, t\}$  durch zwei gerichtete Kanten ersetzt werden. Kanten  $\{s, v\}$  werden nur durch  $(s, v)$  und  $\{v, t\}$  nur durch  $(v, t)$  ersetzt.

**Schritt 2** Seien  $l_1, \dots, l_r \in E$  die aus s auslaufenden Kanten, führe Schleife über  $l_1, \dots, l_r$  aus, wobei im i-ten Durchlauf RIGHT-FIRST-Suche startend bei s mit  $l_i$  ausgeführt wird. Durchlauf endet in t oder in s.

RIGHT-FIRST-Suche kann zu "Konflikt" führen, d.h. Suche trifft auf einen bereits belegten Knoten

- belegter Knoten: **bild**

zwei mögliche Konfliktsituationen:

- Konflikt von links,
- Konflikt von rechts

- 1) Konflikt von links (mit anderem Pfad oder selben Pfad früher)  
 $\Rightarrow$  BACKTRACK-REMOVE: ein Schritt zurück

## 2) Konflikt von rechts

- a) zwischen zwei Wegen, gefundenen Weg und Suchweg: Vorangehende Wegabschnitte von gefundenem Weg und Suchweg werden vertauscht  
 $\Rightarrow$  Konflikt von links

- b) Suchweg trifft von rechts auf sich selbst

Trick: verhindere, dass ein Rechtskreis durchlaufen wird, indem nach vorherigen Durchlauf des entsprechenden Linkskreis geeignete Kante gelöscht wird.

Man kann beweisen, dass für Kante  $(v, w)$  die zu Rechtskreis mit Konflikt rechts in  $v$  führt zuvor umgekehrte Kante  $(w, v)$  in einem Linkskreis mit Konflikt von links in  $v$  durchlaufen wird.

$\rightsquigarrow$  lösche Kante  $(v, w)$  die nach RIGHT-FIRST-Auswahlregel nächste Kante wäre (\*) nachdem  $(w, v)$  zuvor von demselben Suchweg belegt wurde.

zweiter Trick: führe globalen Zähler ein, der um 1 erhöht wird, wenn neue Suche in  $s$  startet oder Wege umorganisiert werden wegen “Konflikt von rechts” setze Wert des “lokalen” Zählers um besuchten Knoten  $v$  auf Wert des globalen Zählers  $\rightsquigarrow$  Situation (\*) wird erkannt, da Wert des lokalen Zählers an  $v$  und  $w$  gleich.

**Laufzeit**  $O(n)$  klar, da jede Kante höchstens einmal besucht wird und RIGHT-FIRST-Auswahlschritt in  $O(1)$ ; Referenzkante zu Knoten  $v$  bleibt gleich.

**Korrektheit** wichtigster Teil ist Beweis, dass “gelöschte” Kante wegen “Backtrack-Remove” oder wegen (\*) für Lösung nicht benötigt wird.

Sei  $k$  maximale Anzahl s-t-Wege in  $G$  und  $a_1, \dots, a_n$  gelöschte Kanten (in dieser Reihenfolge).

Beweise per Induktion über  $a_1 \dots a_n$  dass  $G_i := G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  ebenfalls  $k$  s-t-Wege enthält.

## Das Problem von Okamura und Seymour

### Kantendisjunktes Wegpackungsproblem

Gegeben  $G = (V, E)$  und Paare ausgezeichneter Knoten  $\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_k, t_k\}, s_i, t_i \in V$

Finde paarweise kantendisjunkte  $s_i - t_i$ -Wege.

NP-vollständig, sogar wenn  $G$  planar. Mögliche Spezialfälle:

- $G$  planar und  $s_i, t_i$  für alle  $1 \leq i \leq k$  auf dem Rand derselben Facette
- $G$  planar und sogar  $G := (V, E \cup D)$  wobei  $D := \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \text{ Terminale}\}$  planar



D für “Demand-Kanten”

$G = (V, E), D = \{\{s_i, t_i\} : 1 \leq i \leq k, s_i, t_i \in V\}, X \subseteq V$ . Dann heißt

$$cap(X) := |\{\{u, v\} \in E, u \in X, v \in V \setminus X\}|$$

**Kapazität** von  $X$  (bzw. Kantenschnitt induziert durch  $X$ ).

und

$$dens(X) := |\{\{s_i, t_i\} \in D : |\{s_i, t_i\} \cap X| = 1\}|$$

**Dichte** von  $X$ .

$fcap(X) := cap(X) - dens(X)$  **freie Kapazität** von  $X$ .

Offensichtlich  $fcap(X) \geq 0$  für alle  $X \subset V$  notwendige Bedingung für Lösbarkeit.

**Bild** Also  $fcap(X) \geq 0$  für alle Schnitte  $X \subseteq V$  ist nicht hinreichend für Lösbarkeit!a

Weitere Bedingung an Instanz: Für alle  $X \subseteq V$   $fcup(X)$  gerade. **Geradheitsbedingung**