

Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

2015-04-15

Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

planare Einbettung:

Graph $G = (V, E)$ kann dargestellt werden indem man die Knoten aus V auf Punkte im \mathbb{R}^2 und die Kanten aus E auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

G heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge \mathcal{F} , $|\mathcal{F}| = f$

Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph $G = (V, E)$ gilt für jede planare Einbettung (geg. durch \mathcal{F}), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$)

Beweis per Induktion über m :

IA: $m = 0$, es ist $n = 1, f = 1 \Rightarrow$ Beh.

Sei also $m \geq 1$

Fall 1: G enthalte einen Kreis

\Rightarrow es existiert $l \in E$ so dass $G' := G - e = (V, E \setminus e)$ ebenfalls zusammenhängend und e an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in G' werden.

$\Rightarrow f'$ #Facetten von G' erfüllt

$$\begin{aligned} f' = f - 1 &\xRightarrow{IV} n - (m - 1) + f' = 2 \\ &\Rightarrow n - m + f = 2 \end{aligned}$$

Fall 2: G enthält keinen Kreis, ist also Baum und $|\mathcal{F}| = 1$. Für beliebige $e \in E$ zerfällt $G' = G - e$ in zwei Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1 \\ \Rightarrow n - m + f &= n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1 + 1 = (n_1 - m_1 + 1) + (n_2 - m_2 + 1) - 2 = 2 \end{aligned}$$

$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ 2 & 2 \end{array}$

Folgerungen:

- #Facetten ist für jede planare Einbettung von G gleich
- #Kanten eines Baumes mit n Knoten ist $n-1$

Lemma: Ein planarer Graph mit n Knoten ($n \geq 3$) hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

Beweis: o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

Bild

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$\begin{aligned} 3f &= 2m \\ &\stackrel{\text{mit Euler}}{=} \\ 3(2 - n + m) &= 6 - 3n + 3m \end{aligned}$$

Lemma: Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten. $d_{\max}(G)$ bezeichne Maximalgrad in G , n_i #Knoten von Grad i .

Dann gilt:

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots + (d_{\max}(G) - 6) \cdot n_{d_{\max}(G)} + 12$$

Beweis: Es gilt $n = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i$ und $2m = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i$.

Da $m \leq 3n - 6$ folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

Folgerung: Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.

Dualität von Schnitten und Kreisen

Bild Dualgraph

Planarer Graph G mit Einbettung \mathcal{F}_i Dualgraph G^* dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in G ($\hat{=}$ entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in G^* und umgekehrt.

Minor bzw. Unterteilung

Bild G' Subgraph von G

$G' = (V', E')$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

$G' = (V', E')$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$ wenn G' aus G entsteht indem man Kanten von G durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph H heißt *Minor* von G wenn H aus G entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

H ist *Minor* von G falls G eine Unterteilung von H als Subgraph enthält.

Bild G' Unterteilung von G

Bild G' Minor von G

Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

“ \Rightarrow ” klar, da K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar.

“ \Leftarrow ”: Es ist also “nur” zu zeigen: Wenn G nicht planar, dann enthält G einen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Vorbereitung des Beweises

Bild $K_{3,2}$

Nehme Graph der $K_{3,2}$ als Minor enthält -Graph (Minor von $K_{3,2}$)

(2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski_slides.pdf)

Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; “Listenfärbung” nicht im Skript, aber Folien)

Färbungsproblem (k-Färbung)

geg. $G = (V, E)$, k Farben

Problem Existiert *korrekte* Färbung der Knoten aus V mit diesen k Farben,
d.h. falls $\{u, v\} \in E \implies \text{Farbe}(u) \neq \text{Farbe}(v)$

Listenfärbungsproblem

geg. $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$

Problem Gibt es für *jede* Zuordnung von Listen S_v zu Knoten $v \in V$ mit $|S_v| = k$ eine korrekte Färbung der Knoten bei der jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste enthält?

Beobachtung Listenfärbung ist Verallgemeinerung von Färbungsproblem.

Satz Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar.

Beweis Induktion über $|V| = n$ (benutzen nicht, dass v exist. mit $d(v) \leq 5$).

beweisen schärfere Behauptung:

Falls G planar und

- jede innere Facette Dreieck
- äußere Facette durch Kreis $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$ begrenzt
- v_1 mit Farbe 1 gefärbt
- v_2 mit Farbe 2 gefärbt
- jeder Knoten mit Liste von mind. 3 Farben assoziiert
- jeder Knoten aus $G - C$ mit Liste von mind. 5 Farben assoziiert

dann folgt: G korrekt färbbar

Offensichtlich folgt daraus 5-Listenfärbbarkeit.

Beweis der schärferen Behauptung per Induktion

Falls $G = (V, E)$ planar und $|V| = 3$ trivial

Induktionsschritt $G = (V, E)$ pl. und $|V| \geq 4$, Kreis C der äußeren Facette begrenzt

zwei Fälle: C enthält Sehne $\{v, w\}$ im Inneren oder nicht

bild

Fall 1: C enthält Sehne $\{v, w\}$ $\{v, w\}$ induziert eindeutig bestimmte Kreise C_1 und C_2 welche jeweils Subproblem G_1 und G_2 induzieren. o.B.d.A. enthalte C_1 Kante $\{v_1, v_2\}$ (und damit v_1, v_2 nicht beide auf C_2 . Wende IV auf C_1 an und dann IV auf C_2 wobei v und w Rolle von v_1, v_2 spielen. \Rightarrow Färbung von G_1 und G_2 ind. korrekte Färbung von G .

Fall 2: C enthält keine Sehne Seien $v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_l, v_1$ die Nachbarn von v_k . Da alle inneren Facetten Dreiecke ist $v_{k-1}u_1 \dots u_lv_1$ Weg P und $(C - v_k) \cup P = C'$ wird Kreis der äußere Facette begrenzt. "Reserviere" zwei Farben aus Liste von v_k und entferne diese ggf. aus Listen von u_1, \dots, u_l . Wende IV auf durch C' induz. Graph an. Höchstens eine der beiden reservierten Farben wird für v_{k-1} verwendet, die andere kann für v_k verwendet werden.

Satz Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

Beweis konst. Gegenbeispiel, d.h. planarer Graph mit Listenzuweisung mit Listen $S_v, |S_v| = 4$, so dass Graph nicht korrekt färbbar unter Berücksichtigung der S_v .

Kern der Konstruktion:

bild