Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

2015-04-15

Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

planare Einbettung:

Graph $G = (V, E)$ kann dargestellt werden indem man die Knoten aus V auf Punkte im $\mathbb{R}^2$ und die Kanten aus E auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

G heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = f$

Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph $G = (V, E)$ gilt für jede planare Einbettung (geg. durch $\mathcal{F}$), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$)

Beweis per Induktion über m:

IA: $m = 0$, es ist $n = 1, f = 1 \Rightarrow$ Beh.

Sei also m ≥ 1

Fall 1: G enthalte einen Kreis

$\Rightarrow$ es existiert $l \in E$ so dass $G' := G - e = (V, E \setminus e)$ ebenfalls zusammenhängend und e an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in G' werden.

⇒ f' #Facetten von G' erfüllt

$$f' = f - 1 \underset{IV}{\Longrightarrow} n - (m-1) + f' = 2$$
$$\Longrightarrow n - m + f = 2$$

Fall 2: G enthält keinen Kreis, ist also Baum und $|\mathcal{F}| = 1$. Für beliebige $e \in E$ zerfällt $G' = G - e$ in zwei Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_2)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1$$
$$\Longrightarrow n - m + f = n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1 + 1 = \underset{\overset{\parallel}{2}}{(n_1 - m_1 + 1)} + \underset{\overset{\parallel}{2}}{(n_2 - m_2 + 1)} - 2 = 2$$

Folgerungen:

- #Facetten ist für jede planare Einbettung von G gleich
- #Kanten eines Baumes mit n Knoten ist n-1

Lemma: Ein planarer Graph mit n Knoten ($n \geq 3$) hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

Beweis: o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

`Bild`

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$3f = 2m$$
$$\underset{mit\ Euler}{=}$$
$$3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$$

Lemma: Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten. $d_{max}(G)$ bezeichne Maximalgrad in G, n_i #Knoten von Grad i.

Dann gilt:

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots + (d_{max}(G) - 6) * n_{d_{max}(G)} + 12$$

Beweis: Es gilt $n = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i$ und $2m = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i$.
Da $m \leq 3n - 6$ folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

Folgerung: Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.

Dualität von Schnitten und Kreisen

`Bild Dualgraph`

Planarer Graph G mit Einbettung $\mathcal{F}_i$ Dualgraph G^* dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in G ($\widehat{=}$ entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in G^* und umgekehrt.

Minor bzw. Unterteilung

`Bild G' Subgraph von G`

$G' = (V', E')$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

$G' = (V', E')$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$ wenn G' aus G entsteht indem man Kanten von G durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph H heißt *Minor* von G wenn H aus G entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

H ist *Minor* von G falls G eine Unterteilung von H als Subgraph enthält.

`Bild G' Unterteilung von G`

`Bild G' Minor von G`

Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

"$\Rightarrow$" klar, da K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar.

"$\Leftarrow$": Es ist also "nur" zu zeigen: Wenn G nicht planar, dann enthält G einen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Vorbereitung des Beweises

`Bild K_{3,2}`

Nehme Graph der $K_{3,2}$ als Minor enthält -Graph (Minor von $K_{3,2}$)

(2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski_slides.pdf)

(2014-04-29)

Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; "Listenfärbung" nicht im Skript, aber Folien)

Färbungsproblem (k-Färbung)

geg. $G = (V, E)$, k Farben

Problem Existiert *korrekte* Färbung der Knoten aus V mit diesen k Farben, d.h. falls $\{u, v\} \in E \implies Farbe(u) \neq Farbe(v)$

Listenfärbungsproblem

geg. $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$

Problem Gibt es für *jede* Zuordnung von Listen S_v zu Knoten $v \in V$ mit $|S_v| = k$ eine korrekte Färbung der Knoten bei der jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste enthält?

Beobachtung Listenfärbung ist Verallgemeinerung von Färbungsproblem.

Satz Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar.

Beweis Induktion über $|V| = n$ (benutzen nicht, dass v exist. mit $d(v) \leq 5$).

beweisen schärfere Behauptung:

Falls G planar und

- jede innere Facette Dreieck
- äußere Facette durch Kreis $C = v_1 v_2 \ldots v_k v_1$ begrenzt
- v_1 mit Farbe 1 gefärbt
- v_2 mit Farbe 2 gefärbt
- jeder Knoten mit Liste von mind. 3 Farben assoziiert
- jeder Knoten aus $G - C$ mit Liste von mind. 5 Farben assoziiert

dann folgt: G korrekt färbbar

Offensichtlich folgt daraus 5-Listenfärbbarkeit.

Beweis der schärferen Behauptung per Induktion

Falls $G = (V, E)$ planar und $|V| = 3$ trivial

Induktionsschritt $G = (V, E)$ pl. und $|V| \geq 4$, Kreis C der äußeren Facette begrenzt

zwei Fälle: C enthält Sehne $\{v, w\}$ im Inneren oder nicht

`bild`

Fall 1: C enthält Sehne $\{v, w\}$ $\{v, w\}$ induziert eindeutig bestimmte Kreise C_1 und C_2 welche jeweils Subproblem G_1 und G_2 induzieren. o.B.d.A. enthalte C_1 Kante $\{v_1, v_2\}$ (und damit v_1, v_2 nicht beide auf C_2. Wende IV auf C_1 an und dann IV auf C_2 wobei v und w Rolle von v_1, v_2 spielen. $\Rightarrow$ Färbung von G_1 und G_2 ind. korrekte Färbung von G.

Fall 2: C enthält keine Sehne Seien $v_{k-1}, u_1, u_2, ... u_l, v_1$ die Nachbarn von v_k. Da alle inneren Facetten Dreiecke ist $v_{k-1} u_1 ... u_l v_1$ Weg P und $(C - v_k) \cup P = C'$ wird Kreis der äußere Facette begrenzt. "Reserviere" zwei Farben aus Liste von v_k und entferne diese ggf. aus Listen von $u_1, \ldots, u_l$. Wende IV auf durch C' induz. Graph an. Höchstens eine der beiden reservieten Farben wird für v_{k-1} verwendet, die andere kann für v_k verwendet werden.

Satz Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

Beweis konst. Gegenbeispiel, d.h. planarer Graph mit Listenzuweisung mit Listen $S_v, |S_v| = 4$, so dass Graph nicht korrekt färbbar unter Berücksichtigung der S_v.

Kern der Konstruktion:

`bild`

hat "vis-à-vis-Eigenschaft", d.h. in korrekte Färbung müssen mind. zwei gegenüberliegende Eckknoten dieselbe Farben haben. (klar!)

2015-05-12

Bemerkung zu Planar Separator Theorem: Linearzeitimplementierung

PST: pl. $G = (V, E)$; exist Separator S der G in $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ trennt mit

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} n$
2. $|s| \leq 4\sqrt{n}$

Matching

$G = (V, E)$, ein Matching $M \subseteq E$ sodass keine zwei Kanten aus M gemeinsame Endknoten haben.

$w : E \to \mathbb{R}$

- Finde $M \subseteq E$ *Matching mit max. Gewicht*, wobei $w(m) = \sum_{l \in M} w(l)$
- Finde $M \subseteq E$ *Matching mit max. Kardinalität*, (Fall w(l) = 1 f.a. $l \in E$

Beide Probleme sind auch für bel. Graphen in P.

`bild`

alternierender Weg bzgl. M $\to$ Vertauschen der Kanten auf Weg aus M mit Kanten auf Weg, die nicht in M sind resultiert in größerem Matching M*

- Ein bezüglich einem Matching M *alternierender Weg* ist ein einfacher Weg oder einfach Kreis, dessen Kanten abwechselnd in M und $E \setminus M$ sind.
- Alternierender Weg P (bezeichne entsprechende Kantenmenge) ist *erhöhender Weg* falls
$$\sum_{l \in P, l \in E \setminus M} w(l) > \sum_{l \in P, l \in M} w(l)$$
und P entweder Kreis (gerader Länge) oder dessen erste und letzte Kante beide in M sind oder inzident zu einem ungematchten Knoten.

Beobachtung M Matching, P erhöhender Weg bzgl M $\Rightarrow M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ wieder Matching mit $w(M') > w(M)$.

Lemma $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}$, M Matching in G. Dann ist $w(M)$ maximal genau dann wenn es keinen erhöhenden Weg bzgl. M gibt.

Beweis "$\Rightarrow$" klar

"$\Leftarrow$" sei M nicht max. Matching in G und es existiert kein bzgl. M erhöhender Weg. Dann exist. Matching M^* mit $w(M^*) > w(m)$. Betrachte Subgraph $G_{M^* \triangle M}$ von G der durch

$$M^* \triangle M = M \cup M^* \setminus (M \cap M^*)$$

induziert wird. In diesem Graph haben alle Knoten Grad 1 und Grad 2 und er besteht aus einfachen Wegen und Kreisen.
Falls kein Kreis in $G_{M \triangle M^*}$ erhöhend bzgl. M so exist in $G_{M \triangle M^*}$ ein inklusionsmaximaler Weg, der Weg P in G induziert mit $w(P \cap M^*) > w(P \cap M)$

$\Rightarrow$ beide Endkanten von P gehören zu M oder eine Endkante gehört nicht zu M und ist inzident zu einem Knoten v, v nicht durch M gematcht.

$\Rightarrow$ P erhöhend bzgl. M. (widerspruch)

Lemma $G = (V, E), w : E \to \mathbb{R}, v \in V$, M Matching in $G - v$ (Graph induziert durch $V \setminus \{v\}$)

Dann gilt:

1. Falls es keinen bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v, so hat M auch in G max. Gewicht

2. Falls es bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v und $w(P \cap E \setminus M) - w(P \cap M)$ maximal unter allen solchen erhöhenden Wegen, so ist $M^* = M \triangle P$ Matching maximalen Gewichts in G.

```
bild i) ii)
```

Beweis erhöhender Weg bzgl. M in G muss v als Endknoten haben. Sei M^* max. Matching in G $\Rightarrow$ $M \triangle M^*$ ist Menge von alternierenden Kreisen und Wegen bzgl. M bzw M^* in G

P erhöhender Weg bzgl. M in $G_{M \triangle M^*}$ $\Rightarrow$ P erhöhender Weg bzgl. M in G.

Da $G_{M \triangle M^*}$ höchstens bzgl. M erhöhender Weg P^* mit Endknoten v enthält gilt $w(M) - w(P^* \cap M) = w(M^*) - w(P^* \cap M^*)$

Gewicht des Matching M', das durch erhöhen entlang P^* entsteht ist:

$$w(M') = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap E \setminus M) = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*)$$

$$\Rightarrow$$

$$w(M') = w(M^*)$$

2015-05-20 14:10:24

Matching-Algorithmus für pl. Graph $G = (V, E)$

1. Zerlege G in G_1, G_2 durch Separator S entspr. Planar-Separator-Theorem und berechne rekursiv in G_1 und G_2 Matchings M_1 bzw. M_2 maximalen Gewichts; bezeichne $M = M_1 \cup M_2$
2. Solange $S \neq \emptyset$
   - wähle $v \in S, S := S \setminus \{v\}$ und berechne mit Lemma aus M' matching max. Gewichts in $G' + v$

$$t(n) = t(c_1 n) + t(c_2 n) + c_3 \cdot \sqrt{n} \cdot t'(n)$$

t'(n) Laufzeit für Lemma, c_1, c_2, c_3 Konstante; $c_1, c_2 \leq \frac{2}{3}, c_1 + c_2 \leq 1$

Mit Master-Theorem kann t(n) abgeschätzt werden durch

$$t(n) \in O(n^{\frac{3}{2}}) \text{falls } t'(n) \in O(n)$$

$$t(n) \in O(n^{\frac{3}{2}} \log n) \text{falls } t'(n) \in O(n \log n)$$

Mixed-Max-Cut in pl. Graphen

$G = (V, E), S \subseteq E$ *Schnitt* von G falls durch $E \backslash S$ induz. Subgraph unzusammenhängend und für alle $\{u, v\} \in S$ u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten dieses Subgraphs.

Kantengewichte $w : E \to \mathbb{R}$

Mixed-Max Cut Finde Schnitt S mit $w(s) = \sum_{l \in S} w(l)$ maximal.

Ist in bel. Graphen NP-schwer.

Beobachtung Mixed-Max Cut Problem und Mixed-Min Cut Problem äquivalent.

Spezialfall: Min Cut Problem mit $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ ist auch für bel. Graphen in P

polynomialer Algorithmus für Mixed-Max Cut in pl. Graphen:

verwende:

- Dualität von Schnitten und Kreisen
- max. Matching bzw. Planar Separator Theorem

Laufzeit in $O(n^{3/2} \log n)$.

Es gilt: G enthält Euler-Kreis g.d.w. E kantendisjunkte Vereinigung einfacher Kreise g.d.w. für alle $v \in V$ ist Knotengrad $d(w)$ gerade.

Dualität von Schnitt in G und Menge von einf. Kreisen (= Kantenmenge, in der f.a. Knoten v $d(v)$ gerade (= gerade Menge)) in Dualgraph G^* (bzgl. bel. pl. Einbettung)

`bild gewichteter dualgraph`

Schritt 1 trianguliere G in O(n); zusätzliche Kanten erhalten Gewicht 0

Schritt 2 berechne in O(n) Dualgraph bzgl. bel. pl. Einbettung; G^* ist dann 3-regulär (d.h. für alle v: d(v) = 3)

Schritt 3 konstruiere zu G^* Graph G' so dass perfektes Matching min. Gewichts in G' eine gerade Menge (bzw. Menge von Kreisen) max. Gewichts in G^* induziert.

Schritt 4 berechne in $O(n^{3/2} \log n)$ solch ein Matching bzw. gerade Menge

Schritt 5 falls diese gerade Menge nicht leer, gib entspr. Schnitt aus. Ansonsten "Sonderfall"

Matching M in $G = (V, E)$ mit $|V|$ gerade heißt perfekt falls $|M| = \frac{|V|}{2}$

---

zu Schritt 3 beachte dass G^* 3-regulär, Matching ergibt zwei Fälle:

`Dreieck mit kante an jeder Ecke`

Fall 1: `Alle drei äußeren Kanten gematcht` Fall 2: `Eine kante von dreieck, eine äußere bild`

G' entsteht aus G^* indem jeder Knoten durch Dreieick ersetzt wird. Sei m #Kanten in G^*, n #Knoten in G^* $\Rightarrow 3n = 2m \Rightarrow$ n gerade $\Rightarrow$ #Knoten in G' gerade

zu Schritt 4 konstruiere perfektes Matching min. Gewichts in G'

Beobachtung: M perfektes Matching min. Gewichts in $G = (V, E)$ mit $w : E \to \mathbb{R}$ g.d.w. M perfektes Matching max. Gewichts bzgl. Gewichtsfkt. $\overline{w} : E \to \mathbb{R}$ mit $\overline{w}(l) := W - w(l)$, W geeignet gewählte Konstante.

Erzwinge dass Matching max. Gewichts *perfekt* ist:

- zu M perfekt betrachte
$$\overline{w}(M) = \sum_{l \in M} \overline{w}(l) = \frac{n}{2}W - \sum_{l \in M} w(l) \geq \frac{n}{2} \cdot (W - w_{max})$$
, wobei $w_{max} = \max_{l \in E} w(l)$
- zu M' nicht perfekt gilt
$$\overline{w}(M') \leq (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min}), w_{min} = \min_{l \in E} w(l)$$
.

Wähle also W so dass $\frac{n}{2} \cdot (W - w_{max}) > (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min})$

zu Schritt 5 Komplementmenge von perfekten Matching min. Gewichts in G' induziert gerade Menge max. Gewichts in G^* und damit max. Schnitt in G.

Es kann sein, dass resultierende Menge leer ist! Passiert wenn max. Schnitt negatives Gewicht hat.

$\rightarrow$ *Sonderfall*: Wollen nichttrivialen Schnitt erzwingen.

betrachte wieder Schritt 3: erzwinge, dass in perfekten Matching minimalen Gewichts für mindestens ein Knoten v aus G^* Fall 2 eintritt.

Vorgehensweise: betrachte alle Knoten v aus G^* und $G^* - v$ sowie durch perfektes Matching in G' induzierte Matching in $G^* - v$ und berechne mit "Matching-Lemma" Matching in G^*.
Wähle M mit $w(M) = \min v \in V^* w(M_v)$

Frage: Wie kann man dabei Fall 2 an v erzwingen?