# Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

2015-04-15

## Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

### planare Einbettung:

Graph $G = (V, E)$ kann dargestellt werden indem man die Knoten aus V auf Punkte im $\mathbb{R}^2$ und die Kanten aus E auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

G heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = f$

### Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph $G = (V, E)$ gilt für jede planare Einbettung (geg. durch $\mathcal{F}$), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$)

**Beweis** per Induktion über m:

**IA**: $m = 0$, es ist $n = 1, f = 1 \Rightarrow$ Beh.

Sei also m $\geq 1$

*Fall 1:* G enthalte einen Kreis

$\Rightarrow$ es existiert $l \in E$ so dass $G' := G - e = (V, E \setminus e)$ ebenfalls zusammenhängend und e an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in G' werden.

⇒ f' #Facetten von G' erfüllt

$$f' = f - 1 \underset{IV}{\Longrightarrow} n - (m-1) + f' = 2$$
$$\Longrightarrow n - m + f = 2$$

*Fall 2:* G enthält keinen Kreis, ist also Baum und $|\mathcal{F}| = 1$ . Für beliebige $e \in E$ zerfällt $G' = G - e$ in zwei Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_2)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1$$
$$\Longrightarrow n{-}m{+}f = n_1{+}n_2{-}m_1{-}m_2{-}1{+}1 = (\underset{\underset{2}{\parallel}}{n_1 - m_1 + 1}){+}(\underset{\underset{2}{\parallel}}{n_2 - m_2 + 1}){-}2 = 2$$

**Folgerungen:**

- #Facetten ist für jede planare Einbettung von G gleich
- #Kanten eines Baumes mit n Knoten ist n-1

*Lemma:* Ein planarer Graph mit n Knoten ($n \geq 3$) hat höchstens $3n-6$ Kanten.

*Beweis:* o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

`Bild`

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$3f = 2m$$
$$\underset{mit\ Euler}{=}$$
$$3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$$

*Lemma:* Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten. $d_{max}(G)$ bezeichne Maximalgrad in G, $n_i$ #Knoten von Grad i.

Dann gilt:

$6n_0{+}5n_1{+}4n_2{+}3n_3{+}2n_4{+}n_5 \geq n_7{+}2n_8{+}3n_9{+}\cdots{+}(d_{max}(G){-}6){*}n_{d_{max}(G)}{+}12$

*Beweis:* Es gilt $n = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i$ und $2m = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i$.
Da $m \leq 3n - 6$ folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

*Folgerung:* Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.

## Dualität von Schnitten und Kreisen

`Bild Dualgraph`

Planarer Graph G mit Einbettung $\mathcal{F}_i$ Dualgraph $G^*$ dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in G ($\widehat{=}$ entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in $G^*$ und umgekehrt.

## Minor bzw. Unterteilung

`Bild G' Subgraph von G`

$G' = (V', E')$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

$G' = (V', E')$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$ wenn $G'$ aus $G$ entsteht indem man Kanten von G durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph H heißt *Minor* von G wenn H aus G entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

H ist *Minor* von G falls G eine Unterteilung von H als Subgraph enthält.

`Bild G' Unterteilung von G`

`Bild G' Minor von G`

## Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar wenn er weder $K_5$ noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

"$\Rightarrow$" klar, da $K_5$ und $K_{3,3}$ nicht planar.

"$\Leftarrow$": Es ist also "nur" zu zeigen: Wenn G nicht planar, dann enthält G einen $K_5$ oder $K_{3,3}$ als Minor.

### Vorbereitung des Beweises

`Bild K_{3,2}`

Nehme Graph der $K_{3,2}$ als Minor enthält -Graph ( Minor von $K_{3,2}$)

> (2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski_slides.pdf)

> (2014-04-29)

# Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; "Listenfärbung" nicht im Skript, aber Folien)

## Färbungsproblem (k-Färbung)

**geg.** $G = (V, E)$, k Farben

**Problem** Existiert *korrekte* Färbung der Knoten aus V mit diesen k Farben, d.h. falls $\{u, v\} \in E \implies Farbe(u) \neq Farbe(v)$

## Listenfärbungsproblem

**geg.** $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$

**Problem** Gibt es für *jede* Zuordnung von Listen $S_v$ zu Knoten $v \in V$ mit $|S_v| = k$ eine korrekte Färbung der Knoten bei der jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste enthält?

**Beobachtung** Listenfärbung ist Verallgemeinerung von Färbungsproblem.

**Satz** Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar.

**Beweis** Induktion über $|V| = n$ (benutzen nicht, dass v exist. mit $d(v) \leq 5$).

beweisen schärfere Behauptung:

Falls G planar und

- jede innere Facette Dreieck
- äußere Facette durch Kreis $C = v_1 v_2 \ldots v_k v_1$ begrenzt
- $v_1$ mit Farbe 1 gefärbt
- $v_2$ mit Farbe 2 gefärbt
- jeder Knoten mit Liste von mind. 3 Farben assoziiert
- jeder Knoten aus $G - C$ mit Liste von mind. 5 Farben assoziiert

dann folgt: G korrekt färbbar

Offensichtlich folgt daraus 5-Listenfärbbarkeit.

### Beweis der schärferen Behauptung per Induktion

Falls $G = (V, E)$ planar und $|V| = 3$ trivial

**Induktionsschritt** $G = (V, E)$ pl. und $|V| \geq 4$, Kreis C der äußeren Facette begrenzt

zwei Fälle: C enthält Sehne $\{v, w\}$ im Inneren oder nicht

`bild`

**Fall 1: C enthält Sehne** $\{v,w\}$ $\{v,w\}$ induziert eindeutig bestimmte Kreise $C_1$ und $C_2$ welche jeweils Subproblem $G_1$ und $G_2$ induzieren. o.B.d.A. enthalte $C_1$ Kante $\{v_1, v_2\}$ (und damit $v_1, v_2$ nicht beide auf $C_2$. Wende IV auf $C_1$ an und dann IV auf $C_2$ wobei v und w Rolle von $v_1, v_2$ spielen. $\Rightarrow$ Färbung von $G_1$ und $G_2$ ind. korrekte Färbung von G.

**Fall 2: C enthält keine Sehne** Seien $v_{k-1}, u_1, u_2, ... u_l, v_1$ die Nachbarn von $v_k$. Da alle inneren Facetten Dreiecke ist $v_{k-1} u_1 ... u_l v_1$ Weg P und $(C - v_k) \cup P = C'$ wird Kreis der äußere Facette begrenzt. "Reserviere" zwei Farben aus Liste von $v_k$ und entferne diese ggf. aus Listen von $u_1, \dots, u_l$. Wende IV auf durch $C'$ induz. Graph an. Höchstens eine der beiden reservieten Farben wird für $v_{k-1}$ verwendet, die andere kann für $v_k$ verwendet werden.

**Satz** Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

**Beweis** konst. Gegenbeispiel, d.h. planarer Graph mit Listenzuweisung mit Listen $S_v, |S_v| = 4$, so dass Graph nicht korrekt färbbar unter Berücksichtigung der $S_v$.

Kern der Konstruktion:

`bild`

hat "vis-à-vis-Eigenschaft", d.h. in korrekte Färbung müssen mind. zwei gegenüberliegende Eckknoten dieselbe Farben haben. (klar!)

---

2015-05-12

Bemerkung zu Planar Separator Theorem: Linearzeitimplementierung

PST: pl. $G = (V, E)$; exist Separator S der G in $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ trennt mit

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} n$
2. $|s| \leq 4\sqrt{n}$

# Matching

$G = (V, E)$, ein Matching $M \subseteq E$ sodass keine zwei Kanten aus M gemeinsame Endknoten haben.

$w : E \to \mathbb{R}$

- Finde $M \subseteq E$ *Matching mit max. Gewicht*, wobei $w(m) = \sum_{l \in M} w(l)$
- Finde $M \subseteq E$ *Matching mit max. Kardinalität*, (Fall w(l) = 1 f.a. $l \in E$

Beide Probleme sind auch für bel. Graphen in P.

`bild`

alternierender Weg bzgl. M $\rightarrow$ Vertauschen der Kanten auf Weg aus M mit Kanten auf Weg, die nicht in M sind resultiert in größerem Matching M*

---

- Ein bezüglich einem Matching M *alternierender Weg* ist ein einfacher Weg oder einfach Kreis, dessen Kanten abwechselnd in M und $E \setminus M$ sind.
- Alternierender Weg P (bezeichne entsprechende Kantenmenge) ist *erhöhender Weg* falls
$$\sum_{l \in P, l \in E \setminus M} w(l) > \sum_{l \in P, l \in M} w(l)$$
und P entweder Kreis (gerader Länge) oder dessen erste und letzte Kante beide in M sind oder inzident zu einem ungematchten Knoten.

**Beobachtung** M Matching, P erhöhender Weg bzgl M $\Rightarrow M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ wieder Matching mit $w(M') > w(M)$.

**Lemma** $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}$, M Matching in G. Dann ist $w(M)$ maximal genau dann wenn es keinen erhöhenden Weg bzgl. M gibt.

**Beweis** "$\Rightarrow$" klar

"$\Leftarrow$" sei M nicht max. Matching in G und es existiert kein bzgl. M erhöhender Weg. Dann exist. Matching $M^*$ mit $w(M^*) > w(m)$. Betrachte Subgraph $G_{M^* \triangle M}$ von G der durch
$$M^* \triangle M = M \cup M^* \setminus (M \cap M^*)$$
induziert wird. In diesem Graph haben alle Knoten Grad 1 und Grad 2 und er besteht aus einfachen Wegen und Kreisen.
Falls kein Kreis in $G_{M \triangle M^*}$ erhöhend bzgl. M so exist in $G_{M \triangle M^*}$ ein inklusionsmaximaler Weg, der Weg P in G induziert mit $w(P \cap M^*) > w(P \cap M)$

$\Rightarrow$ beide Endkanten von P gehören zu M oder eine Endkante gehört nicht zu M und ist inzident zu einem Knoten v, v nicht durch M gematcht.

$\Rightarrow$ P erhöhend bzgl. M. (widerspruch)

**Lemma** $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}, v \in V$, M Matching in $G - v$ (Graph induziert durch $V \setminus \{v\}$)

Dann gilt:

1. Falls es keinen bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v, so hat M auch in G max. Gewicht

2. Falls es bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v und $w(P \cap E \setminus M) - w(P \cap M)$ maximal unter allen solchen erhöhenden Wegen, so ist $M^* = M \triangle P$ Matching maximalen Gewichts in G.

```
bild i) ii)
```

**Beweis** erhöhender Weg bzgl. M in G muss v als Endknoten haben. Sei $M^*$ max. Matching in G $\Rightarrow$ $M \triangle M^*$ ist Menge von alternierenden Kreisen und Wegen bzgl. M bzw $M^*$ in G

P erhöhender Weg bzgl. M in $G_{M \triangle M^*}$ $\Rightarrow$ P erhöhender Weg bzgl. M in G.

Da $G_{M \triangle M^*}$ höchstens bzgl. M erhöhender Weg $P^*$ mit Endknoten v enthält gilt $w(M) - w(P^* \cap M) = w(M^*) - w(P^* \cap M^*)$

Gewicht des Matching M', das durch erhöhen entlang $P^*$ entsteht ist:

$$w(M') = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap E \setminus M) = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*)$$

$$\Rightarrow$$

$$w(M') = w(M^*)$$

2015-05-19 14:43:46

# Uebung zum 3. Blatt

## 1

geg. “Nachfolger” gegen Uhrzeigersinn, Theta-Funktionen, etc wie in Angabe.

- OGDF: C++ bib zum ausprobieren, Enthält Graphstrukturen
- yEd: Grapheditor

Von beliebigem Knoten alle Kreise entlanggehen und füllen - geht nicht wegen Doppelkanten z.B. bei Knoten mit Grad 1

Siehe mehr oder weniger http://i11www.iti.uni-karlsruhe.de/_media/teaching/winter2006/algorithmengineering/triangulierung.pdf

- Für alle $v \in V$
  - Für alle Kanten e indizent zu v
    - $e' = \Theta(e)$
    - trianguliere Facette die (e,e') enthält
    - $e'' = \Theta^*(e')$
    - wenn $\overline{e} = \Theta^*(e'')$ dann
      - fertig

    * wenn $\{v, t(e'')\} \in E$ dann
        · füge $\{s(e''), t(\Theta^*(e''))\}$ ein
        · trianguliere(e,e')
    * sonst
        · füge $e_{neu} = \{v, t(e'')\}$ ein
        · trianguliere$(e, e_{neu})$

Damit in Linearzeit ist, um den Algorithmus oben außenrum:

- N[] = Array der Größe n (initialisiert mit 0)
- Für alle $v \in V$
    - Für alle Nachbarn u von v (O(deg(v)), |V| mal => O(Anzahl kanten))
        * N[u] = 1
    - Für alle Kanten indizent zu v
        * … siehe oben
    - Für alle Nachbarn u von v
        * N[u] = 0

## 2

unwichtig

## 3

### 3.1

Nein, Beispiel:

- Einfacher Pfad mit n Knoten: $ h n/2 $
- "Nested-Triangles"-Graph: $n = 3j + 1, h \geq j/2$

## 4

unwichtig

## 5

(a) BFS O(m)

(Aufgabenstellung falsch, sollte sein "oder entscheidet, dass v nicht auf einem Kreis in G liegt")

(b) BFS von jedem Knoten aus O(n*m)

(c) Planar Separator Theorem verwenden:

- $G_1, G_2$ mit $n/3 \leq k \leq 2n/3$ Knoten
- S mit $4\sqrt{n}$ Knoten

$$T(n) = T(\alpha_1 n) + T(\alpha_2 n) + O(n\sqrt{n}) \in \Theta(n^k) = \Theta(n\sqrt{n})$$

(Mastertheorem anwenden)