

Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

Contents

Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen	2
planare Einbettung:	2
Satz von Euler (1790):	2
Dualität von Schnitten und Kreisen	4
Minor bzw. Unterteilung	4
Satz von Kuratowski (1930)	4
Vorbereitung des Beweises	5
Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; “Listenfärbung” nicht im Skript, aber Folien)	5
Färbungsproblem (k-Färbung)	5
Listenfärbungsproblem	5
Beweis der schärferen Behauptung per Induktion	6
Matching	7
Matching-Algorithmus für pl. Graph $G = (V, E)$	8
Mixed-Max-Cut in pl. Graphen	9
Beweis zu Folie (Kozykel und st-Schnitte)	11
Beweis zu Folie “Betrachte Fluss von auf P”	11
Das Menger-Problem	11
Satz von Menger	12
Menger-Problem	12
Menger-Problem in pl. Graphen; kantendisj. Variante	12
zu Schritt 1	13
Zu Schritt 2	13
Konstruktion der Kreise $C_1 \dots C_l$	13

Zu Schritt 2 (Wdh)	14
Zu Schritt 3	14
Das knotendisjunkte Menger-Problem	15
Das Problem von Okamura und Seymour	16
Kantendisjunktes Wegpackungsproblem	16
2 Phasen	18
Instanz mit Klammerstruktur	18
Korrektheit von Phase 1	18
Zu Phase 2	19
Planartest in Linearzeit	20
Beweis zum Lemma defekte Kanten bilden Pfad	20

Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

planare Einbettung:

Graph $G = (V, E)$ kann dargestellt werden indem man die Knoten aus V auf Punkte im \mathbb{R}^2 und die Kanten aus E auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

G heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge \mathcal{F} , $|\mathcal{F}| = f$

Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph $G = (V, E)$ gilt für jede planare Einbettung (geg. durch \mathcal{F}), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$)

Beweis per Induktion über m :

IA: $m = 0$, es ist $n = 1, f = 1 \Rightarrow$ Beh.

Sei also $m \geq 1$

Fall 1: G enthalte einen Kreis

\Rightarrow es existiert $l \in E$ so dass $G' := G - e = (V, E \setminus e)$ ebenfalls zusammenhängend und e an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in G' werden.

$\Rightarrow f' \neq \# \text{Facetten von } G'$ erfüllt

$$\begin{aligned} f' = f - 1 &\stackrel{IV}{\implies} n - (m - 1) + f' = 2 \\ &\implies n - m + f = 2 \end{aligned}$$

Fall 2: G enthält keinen Kreis, ist also Baum und $|\mathcal{F}| = 1$. Für beliebige $e \in E$ zerfällt $G' = G - e$ in zwei Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1 \\ \implies n - m + f &= n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1 + 1 = (n_1 - m_1 + 1) + (n_2 - m_2 + 1) - 2 = 2 \end{aligned}$$

\parallel
2

\parallel
2

Folgerungen:

- $\# \text{Facetten}$ ist für jede planare Einbettung von G gleich
- $\# \text{Kanten}$ eines Baumes mit n Knoten ist $n-1$

Lemma: Ein planarer Graph mit n Knoten ($n \geq 3$) hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

Beweis: o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

Bild

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$\begin{aligned} 3f &= 2m \\ &\stackrel{\text{mit Euler}}{=} \\ 3(2 - n + m) &= 6 - 3n + 3m \end{aligned}$$

Lemma: Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten. $d_{\max}(G)$ bezeichne Maximalgrad in G , n_i $\#$ Knoten von Grad i .

Dann gilt:

$$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots + (d_{\max}(G) - 6) * n_{d_{\max}(G)} + 12$$

Beweis: Es gilt $n = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i$ und $2m = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i$.

Da $m \leq 3n - 6$ folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

Folgerung: Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.

Dualität von Schnitten und Kreisen

Bild Dualgraph

Planarer Graph G mit Einbettung \mathcal{F}_i Dualgraph G^* dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in G ($\hat{=}$ entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in G^* und umgekehrt.

Minor bzw. Unterteilung

Bild G' Subgraph von G

$G' = (V', E')$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

$G' = (V', E')$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$ wenn G' aus G entsteht indem man Kanten von G durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph H heißt *Minor* von G wenn H aus G entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

H ist *Minor* von G falls G eine Unterteilung von H als Subgraph enthält.

Bild G' Unterteilung von G

Bild G' Minor von G

Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

“ \Rightarrow ” klar, da K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar.

“ \Leftarrow ”: Es ist also “nur” zu zeigen: Wenn G nicht planar, dann enthält G einen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Vorbereitung des Beweises

Bild $K_{3,2}$

Nehme Graph der $K_{3,2}$ als Minor enthält -Graph (Minor von $K_{3,2}$)

(2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski_slides.pdf)

(2014-04-29)

Färbung planarer Graphen (Kap.4 im Skript; “Listenfärbung” nicht im Skript, aber Folien)

Färbungsproblem (k-Färbung)

geg. $G = (V, E)$, k Farben

Problem Existiert *korrekte* Färbung der Knoten aus V mit diesen k Farben,
d.h. falls $\{u, v\} \in E \implies \text{Farbe}(u) \neq \text{Farbe}(v)$

Listenfärbungsproblem

geg. $G = (V, E), k \in \mathbb{N}$

Problem Gibt es für *jede* Zuordnung von Listen S_v zu Knoten $v \in V$ mit $|S_v| = k$ eine korrekte Färbung der Knoten bei der jeder Knoten eine Farbe aus seiner Liste enthält?

Beobachtung Listenfärbung ist Verallgemeinerung von Färbungsproblem.

Satz Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar.

Beweis Induktion über $|V| = n$ (benutzen nicht, dass v exist. mit $d(v) \leq 5$).

beweisen schärfere Behauptung:

Falls G planar und

- jede innere Facette Dreieck
- äußere Facette durch Kreis $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$ begrenzt
- v_1 mit Farbe 1 gefärbt
- v_2 mit Farbe 2 gefärbt
- jeder Knoten mit Liste von mind. 3 Farben assoziiert
- jeder Knoten aus $G - C$ mit Liste von mind. 5 Farben assoziiert

dann folgt: G korrekt färbbar

Offensichtlich folgt daraus 5-Listenfärbbarkeit.

Beweis der schärferen Behauptung per Induktion

Falls $G = (V, E)$ planar und $|V| = 3$ trivial

Induktionsschritt $G = (V, E)$ pl. und $|V| \geq 4$, Kreis C der äußeren Facette begrenzt

zwei Fälle: C enthält Sehne $\{v, w\}$ im Inneren oder nicht

bild

Fall 1: C enthält Sehne $\{v, w\}$ $\{v, w\}$ induziert eindeutig bestimmte Kreise C_1 und C_2 welche jeweils Subproblem G_1 und G_2 induzieren. o.B.d.A. enthalte C_1 Kante $\{v_1, v_2\}$ (und damit v_1, v_2 nicht beide auf C_2 . Wende IV auf C_1 an und dann IV auf C_2 wobei v und w Rolle von v_1, v_2 spielen. \Rightarrow Färbung von G_1 und G_2 ind. korrekte Färbung von G .

Fall 2: C enthält keine Sehne Seien $v_{k-1}, u_1, u_2, \dots, u_l, v_1$ die Nachbarn von v_k . Da alle inneren Facetten Dreiecke ist $v_{k-1}u_1 \dots u_lv_1$ Weg P und $(C - v_k) \cup P = C'$ wird Kreis der äußere Facette begrenzt. "Reserviere" zwei Farben aus Liste von v_k und entferne diese ggf. aus Listen von u_1, \dots, u_l . Wende IV auf durch C' induz. Graph an. Höchstens eine der beiden reservierten Farben wird für v_{k-1} verwendet, die andere kann für v_k verwendet werden.

Satz Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar.

Beweis konst. Gegenbeispiel, d.h. planarer Graph mit Listenzuweisung mit Listen $S_v, |S_v| = 4$, so dass Graph nicht korrekt färbbar unter Berücksichtigung der S_v .

Kern der Konstruktion:

bild

hat "vis-à-vis-Eigenschaft", d.h. in korrekte Färbung müssen mind. zwei gegenüberliegende Eckknoten dieselbe Farben haben. (klar!)

2015-05-12

Bemerkung zu Planar Separator Theorem: Linearzeitimplementierung

PST: pl. $G = (V, E)$; exist Separator S der G in $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ trennt mit

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}n$
2. $|S| \leq 4\sqrt{n}$

Matching

$G = (V, E)$, ein Matching $M \subseteq E$ sodass keine zwei Kanten aus M gemeinsame Endknoten haben.

$w : E \rightarrow \mathbb{R}$

- Finde $M \subseteq E$ Matching mit max. Gewicht, wobei $w(M) = \sum_{l \in M} w(l)$
- Finde $M \subseteq E$ Matching mit max. Kardinalität, (Fall $w(l) = 1$ f.a. $l \in E$)

Beide Probleme sind auch für bel. Graphen in P.

build

alternierender Weg bzgl. $M \rightarrow$ Vertauschen der Kanten auf Weg aus M mit Kanten auf Weg, die nicht in M sind resultiert in größerem Matching M^*

-
- Ein bezüglich einem Matching M *alternierender Weg* ist ein einfacher Weg oder einfacher Kreis, dessen Kanten abwechselnd in M und $E \setminus M$ sind.
 - Alternierender Weg P (bezeichne entsprechende Kantenmenge) ist *erhöhender Weg* falls

$$\sum_{l \in P, l \in E \setminus M} w(l) > \sum_{l \in P, l \in M} w(l)$$

und P entweder Kreis (gerader Länge) oder dessen erste und letzte Kante beide in M sind oder inzident zu einem ungematchten Knoten.

Beobachtung M Matching, P erhöhender Weg bzgl. $M \Rightarrow M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ wieder Matching mit $w(M') > w(M)$.

Lemma $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}, M$ Matching in G . Dann ist $w(M)$ maximal genau dann wenn es keinen erhöhenden Weg bzgl. M gibt.

Beweis " \Rightarrow " klar

" \Leftarrow " sei M nicht max. Matching in G und es existiert kein bzgl. M erhöhender Weg. Dann exist. Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$. Betrachte Subgraph $G_{M^* \triangle M}$ von G der durch

$$M^* \triangle M = M \cup M^* \setminus (M \cap M^*)$$

induziert wird. In diesem Graph haben alle Knoten Grad 1 und Grad 2 und er besteht aus einfachen Wegen und Kreisen.

Falls kein Kreis in $G_{M \triangle M^*}$ erhöhend bzgl. M so exist. in $G_{M \triangle M^*}$ ein inklusionsmaximaler Weg, der Weg P in G induziert mit $w(P \cap M^*) > w(P \cap M)$

\Rightarrow beide Endkanten von P gehören zu M oder eine Endkante gehört nicht zu M und ist inzident zu einem Knoten v , v nicht durch M gematcht.

$\Rightarrow P$ erhöhend bzgl. M . (Widerspruch)

Lemma $G = (V, E), w : E \rightarrow \mathbb{R}, v \in V, M$ Matching in $G - v$ (Graph induziert durch $V \setminus \{v\}$)

Dann gilt:

1. Falls es keinen bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v , so hat M auch in G max. Gewicht
2. Falls es bzgl. M erhöhenden Weg in G gibt mit Endknoten v und $w(P \cap E \setminus M) - w(P \cap M)$ maximal unter allen solchen erhöhenden Wegen, so ist $M^* = M \triangle P$ Matching maximalen Gewichts in G .

bild i) ii)

Beweis erhöhender Weg bzgl. M in G muss v als Endknoten haben. Sei M^* max. Matching in $G \Rightarrow M \triangle M^*$ ist Menge von alternierenden Kreisen und Wegen bzgl. M bzw M^* in G

P erhöhender Weg bzgl. M in $G_{M \triangle M^*} \Rightarrow P$ erhöhender Weg bzgl. M in G .

Da $G_{M \triangle M^*}$ höchstens bzgl. M erhöhender Weg P^* mit Endknoten v enthält gilt $w(M) - w(P^* \cap M) = w(M^*) - w(P^* \cap M^*)$

Gewicht des Matching M' , das durch erhöhen entlang P^* entsteht ist:

$$\begin{aligned} w(M') &= w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap E \setminus M) = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*) \\ &\Rightarrow \\ w(M') &= w(M^*) \end{aligned}$$

2015-05-20 14:10:24

Matching-Algorithmus für pl. Graph $G = (V, E)$

1. Zerlege G in G_1, G_2 durch Separator S entspr. Planar-Separator-Theorem und berechne rekursiv in G_1 und G_2 Matchings M_1 bzw. M_2 maximalen Gewichts; bezeichne $M = M_1 \cup M_2$
2. Solange $S \neq \emptyset$
 - wähle $v \in S, S := S \setminus \{v\}$ und berechne mit Lemma aus M' matching max. Gewichts in $G' + v$

$$t(n) = t(c_1 n) + t(c_2 n) + c_3 \cdot \sqrt{n} \cdot t'(n)$$

$t'(n)$ Laufzeit für Lemma, c_1, c_2, c_3 Konstante; $c_1, c_2 \leq \frac{2}{3}, c_1 + c_2 \leq 1$

Mit Master-Theorem kann $t(n)$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} t(n) &\in O(n^{\frac{3}{2}}) \text{ falls } t'(n) \in O(n) \\ t(n) &\in O(n^{\frac{3}{2}} \log n) \text{ falls } t'(n) \in O(n \log n) \end{aligned}$$

Mixed-Max-Cut in pl. Graphen

$G = (V, E)$, $S \subseteq E$ Schnitt von G falls durch $E \setminus S$ induz. Subgraph unzusammenhängend und für alle $\{u, v\} \in S$ u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten dieses Subgraphs.

Kantengewichte $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Mixed-Max Cut Finde Schnitt S mit $w(s) = \sum_{l \in S} w(l)$ maximal.

Ist in bel. Graphen NP-schwer.

Beobachtung MIXED-MAX CUT Problem und MIXED-MIN CUT Problem äquivalent.

Spezialfall: MIN CUT Problem mit $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist auch für bel. Graphen in P
polynomialer Algorithmus für MIXED-MAX CUT in pl. Graphen:

verwende:

- Dualität von Schnitten und Kreisen
- max. Matching bzw. Planar Separator Theorem

Laufzeit in $O(n^{3/2} \log n)$.

Es gilt: G enthält Euler-Kreis g.d.w. E kantendisjunkte Vereinigung einfacher Kreise g.d.w. für alle $v \in V$ ist Knotengrad $d(v)$ gerade.

Dualität von Schnitt in G und Menge von einf. Kreisen (= Kantenmenge, in der f.a. Knoten v $d(v)$ gerade (= gerade Menge)) in Dualgraph G^* (bzgl. bel. pl. Einbettung)

bild gewichteter dualgraph

Schritt 1 trianguliere G in $O(n)$; zusätzliche Kanten erhalten Gewicht 0

Schritt 2 berechne in $O(n)$ Dualgraph bzgl. bel. pl. Einbettung; G^* ist dann 3-regulär (d.h. für alle v : $d(v) = 3$)

Schritt 3 konstruiere zu G^* Graph G' so dass perfektes Matching min. Gewichts in G' eine gerade Menge (bzw. Menge von Kreisen) max. Gewichts in G^* induziert.

Schritt 4 berechne in $O(n^{3/2} \log n)$ solch ein Matching bzw. gerade Menge

Schritt 5 falls diese gerade Menge nicht leer, gib entspr. Schnitt aus. Ansonsten "Sonderfall"

Matching M in $G = (V, E)$ mit $|V|$ gerade heißt perfekt falls $|M| = \frac{|V|}{2}$

zu Schritt 3 beachte dass G^* 3-regulär, Matching ergibt zwei Fälle:

Dreieck mit kante an jeder Ecke

Fall 1: Alle drei äußeren Kanten gematcht Fall 2: Eine kante von dreieck, eine äußere bild

G' entsteht aus G^* indem jeder Knoten durch Dreieck ersetzt wird. Sei m #Kanten in G^* , n #Knoten in $G^* \Rightarrow 3n = 2m \Rightarrow n$ gerade \Rightarrow #Knoten in G' gerade

zu Schritt 4 konstruiere perfektes Matching min. Gewichts in G'

Beobachtung: M perfektes Matching min. Gewichts in $G = (V, E)$ mit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ g.d.w. M perfektes Matching max. Gewichts bzgl. Gewichts fkt. $\bar{w} : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\bar{w}(l) := W - w(l)$, W geeignet gewählte Konstante.

Erzwinge dass Matching max. Gewichts *perfekt* ist:

- zu M perfekt betrachte

$$\bar{w}(M) = \sum_{l \in M} \bar{w}(l) = \frac{n}{2}W - \sum_{l \in M} w(l) \geq \frac{n}{2} \cdot (W - w_{max})$$

, wobei $w_{max} = \max_{l \in E} w(l)$

- zu M' nicht perfekt gilt

$$\bar{w}(M') \leq (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min}), w_{min} = \min_{l \in E} w(l)$$

Wähle also W so dass $\frac{n}{2} \cdot (W - w_{max}) > (\frac{n}{2} - 1)(W - w_{min})$

zu Schritt 5 Komplementmenge von perfekten Matching min. Gewichts in G' induziert gerade Menge max. Gewichts in G^* und damit max. Schnitt in G .

Es kann sein, dass resultierende Menge leer ist! Passiert wenn max. Schnitt negatives Gewicht hat.

\rightarrow *Sonderfall:* Wollen nichttrivialen Schnitt erzwingen.

betrachte wieder Schritt 3: erzwinge, dass in perfekten Matching minimalen Gewichts für mindestens ein Knoten v aus G^* Fall 2 eintritt.

Vorgehensweise: betrachte alle Knoten v aus G^* und $G^* - v$ sowie durch perfektes Matching in G' induzierte Matching in $G^* - v$ und berechne mit "Matching-Lemma" Matching in G^* .

Wähle M mit $w(M) = \min_{v \in V^*} w(M_v)$

Frage: Wie kann man dabei Fall 2 an v erzwingen?

2015-05-26 14:42:21

Beweis zu Folie (Kozykel und st-Schnitte)

- 1) s, t auf selber Seite von C^* \Rightarrow P kreuzt C^* gleich oft in jeder Richtung \Rightarrow C enthält selbe Zahl von Kanten in P und $\text{rev}(P) \Rightarrow \pi(C) = 0$
- 2) s rechts, t links \Rightarrow P kreuzt einmal mehr von rechts nach links $\Rightarrow \pi(C) = 1$
- 3) analog $\Rightarrow \pi(C) = -1$

C s, t-Schnitt \Rightarrow P kreuzt C^* von rechts nach links $\Rightarrow \pi(C) = 1$. $\pi(C) = 1 \Rightarrow$ Fall 2; s rechts, t links. \Rightarrow C st-Schnitt.

Beweis zu Folie "Betrachte Fluss von λ auf P"

Beweis: " \Rightarrow " Angenommen G_λ^* enthält neg. Kreis C^*

$$0 > c(\lambda, C^*) = \sum_{e \in C^*} c(e) = \sum_{e \in C^*} c(e) - \lambda \sum_{e \in C^*} \pi(e) = \sum_{e \in C^*} \underbrace{c(e) - \lambda \pi(e)}_{\geq 0} \underset{>0}{> 0}$$

$$\Rightarrow \pi(C) = 1. \Rightarrow \text{C ist st-Schnitt}$$

Außerdem $\sum_{e \in C^*} c(e) < \lambda \Rightarrow$ st-Schnitt mit Kap. $< \lambda$.

" \Leftarrow ": G_λ^* enthält keinen neg. Kreis \Rightarrow kürzeste Wege wohldef.

Wähle o in G_λ^* bel. Ursprung.

$\text{dist}(\lambda, p)$: Distanz von p zu o in G_λ^* .

Def: $\phi(\lambda, e) := \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*)) - \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + \lambda \cdot \pi(e)$

Zeige: ϕ ist gültiger st-Fluss.

- 1) Für $v \in V$ gilt: $\sum_w \phi(v \rightarrow w) = \sum_w \pi(v \rightarrow w)$
 $\Rightarrow \phi(\lambda, \cdot)$ ist Fluss mit Wert λ .
- 2) $\text{slack}(\lambda, e^*) := \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + c(\lambda, e) - \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*))$
 Gilt: $\text{slack}(\lambda, e) = c(e) - \phi(\lambda, e)$
 $\phi(\lambda, e) \leq c(e) \Leftrightarrow \text{slack}(\lambda, e) \geq 0$.
 Wäre $\text{slack}(\lambda, e) < 0 \Rightarrow \text{dist}(\lambda, \text{head}(e^*)) > \text{dist}(\lambda, \text{tail}(e^*)) + c(\lambda, e^*)$
 (widerspruch)

Max λ sodass kein neg. Kreis in G_λ^* ist Länge eines kürzesten ts-Wege in G_λ^* .

Das Menger-Problem

Zur Erinnerung: $S \subset V$ heißt *Separator* in $G = (V, E)$, falls $G - S$ unzusammenhängend. $S \subset E$ heißt *Schnitt* in $G = (V, E)$ falls der durch $E \setminus S$ induzierte Teilgraph von G unzusammenhängend.

Zu $u, v \in V$ def:

$$K_G(u, v) := \begin{cases} |V| - 1 & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ \min_{S \subset V} |S| & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$K(G) := \min_{u, v \in V} K_G(u, v) = \min_{S \text{ Separator in } G} \{|S|, |V| - 1\}$$

$$\lambda_G(u, v) := \min_{S \subset E} |S|$$

$$\lambda(G) := \min_{u, v \in V} \lambda_G(u, v) = \min_{S \subset E, S \text{ Schnitt in } G} |S|$$

Zwei Wege heißen *kantendisjunkt*, wenn sie keine gemeinsame Kante enthalten und (intern) *knotendisjunkt* wenn sie (außer Anfangs- und Endknoten) keinen Knoten gemeinsam haben.

Satz von Menger

Seien s und t Knoten in $G = (V, E)$ ($\{s, t\} \notin E$ bei knotendisj. Version)

- $K_G(s, t) \geq k$ g.d.w. es mind. k paarweise knotendisj. s - t -Wege gibt
- $\lambda_G(s, t) \geq k$ g.d.w. es mind. k paarweise kantendisj. s - t -Wege gibt

Menger-Problem

Zu $G = (V, E)$, $s, t \in V$ finde max. Anzahl knotendisj. bzw. kantendisj. s - t -Wege.

Menger-Problem in pl. Graphen; kantendisj. Variante

Linearzeitalgorithmus basierend *Right-First-DFS* *Spezialfall:* s und t liegen auf derselben Facette

Bild

RIGHT-FIRST $\hat{=}$ im Gegenuhrzeigersinn nächste freie Kante in Adjazenzliste (relativ zur aktuellen eingehenden Kante)

Linearzeitalgorithmus bestehend aus 4 Schnitten; $G = (V, E)$ planar eingebettet, o.B.d.A. t auf äußerer Facette.

1. Schritt ersetze $G = (V, E)$ durch $\vec{G} = (V, \vec{E})$ indem $\{u, v\} \in E$ durch (u, v) und (v, u) ersetzt wird. (In $O(n)$)

2. Schritt berechne in $O(n)$ Menge gerichteter einfacher kantendisj. Kreise $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$ und konstruiere (in $O(n)$) aus \vec{G} Graph $\vec{G}_C = (V, \vec{E}_C)$, der entsteht in dem alle Knoten auf den \vec{C}_i umgedreht werden.

3. Schritt berechne in \vec{G}_C in $O(n)$ mittels RIGHT-FIRST-DFS eine max. Anzahl kantendisj. gerichteter s-t-Wege.

4. Schritt berechne aus dem in Schritt 3 gefundenen s-t-Wegen in \vec{G}_C gleiche Anzahl kantendisj. s-t-Wege in G in $O(n)$.

zu Schritt 1

Bild

Lemma: Seien p_1, \dots, p_r kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in \vec{G} . Dann enthält $P = \{\{u, v\} \in E : \text{genau eine der Kanten } (u, v) \text{ und } (v, u) \text{ liegt auf einem der } p_i\}$ gerade r kantendisjunkte s-t-Wege in G .

Beweis: zwei Fälle Bilder

Zu Schritt 2

C_1, \dots, C_l in \vec{G} so dass 1. \vec{G}_C enthält keine Rechtskreise, d.h. keine Kreise deren Inneres rechts liegt. 2. Sei $\vec{P}_C \subseteq \vec{E}_C$ Menge der Kanten auf kantendisjunkten s-t-Wegen in \vec{G}_C und $\vec{P} \subseteq \vec{E}$ wobei

$$\vec{P} := (\vec{P}_C \cap \vec{E}) \cup \{(u, v) \in \vec{E} : (u, v) \text{ auf einem der } \vec{C}_i \text{ und } (v, u)' \notin \vec{P}_C\}$$

Dann induziert \vec{P} k kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in \vec{G} g.d.w. \vec{P}_C k kantendisjunkte gerichtete s-t-Wege in \vec{G}_C induziert.

Konstruktion der Kreise $C_1 \dots C_l$

sei f Facette in G bzw. \vec{G} ; def. Abstand von f von äußerer Facette als

$dist(f) :=$ Länge eines kürzesten Weges von Dualknoten zu f zu Dualknoten zu äußerer Facette f_0 in G^*

def. C_i als Vereinigung der einfachen Kreise in G für die alle Facetten f im Inneren $dist(f) \geq i$ erfüllen. \vec{C}_i sei entsprechend Rechtskreis in \vec{G} .

Drehe alle diese \vec{C}_i um $\rightarrow \vec{G}_C$

2015-06-03 14:07:31

Zu Schritt 2 (Wdh)

C_1, \dots, C_l geeignete Kreise in G ; $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$ entsprechende Rechtskreise in \vec{G} drehe $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_l$ um $\sim \rightarrow \vec{G}_C$; \vec{G}_C enthält keine Rechtskreise, da für jeden Rechtskreis in \vec{G} beim Übergang zu \vec{G}_C mindestens eine Kante des Kreises umgedreht wird.

Sei $\vec{P}_C \subset \vec{E}_C$ Kantenmenge zu k s-t-Wege in \vec{G}_C . Konstruiere dazu Kantenmenge \vec{P} in \vec{G}

$\vec{P} :=$ siehe oben

Bild

Zu Schritt 3

Berechnung einer max. Anzahl s-t-Wege in G_C in $O(n)$

- Schleife über ausgehende Kanten aus s
 - RIGHT-FIRST-DFS-Tiefensuche
 - Suchschritt: rechteste freie auslaufende Kante in Bezug auf Referenzkante
 - 2 Varianten welche “Referenzkante”
 - * **Weihe**: aktuell einlaufende Kante
 - * **Coupry**: erste einlaufende Kante

Korrektheitsbeweis zu Schritt 3 Zu beweisen: \vec{P}_C enthält maximale Anzahl s-t-Wege. Benutze dazu gewichtete Variante des Satz von Menger, d.h. konstruiere s-t-Schnitt, der entsprechende Kapazität hat.

Schnitt A wird induziert durch geeigneten Kreis \vec{K} in \vec{G}_C mit folgenden Eigenschaften:

- i) $s \in \text{Inneres}(\vec{K})$ oder auf \vec{K}
- ii) $t \in \text{Äußeres}(\vec{K})$
- iii) $|A := \{(u, v) \in \vec{E}_C : u \text{ auf } \vec{K}, v \in \text{Äußeres}(\vec{K})\}|$ ist gleich #s-t-Wege in \vec{P}_C

\vec{K} wird mittels LEFT-FIRST Rückwärtssuche von s aus in \vec{P}_C konstruiert

Bild: Kreis mit t ausserhalb: Varianten wie K aussieht: 1. S liegt auf Kreis, 2. S liegt in Kreis

Lemma Betrachte $\vec{G}_C = (V, \vec{E}_C)$ und \vec{K} , dann ist jede Kante $(u, v) \in \vec{E}_C$ mit u auf \vec{K} und $v \in \text{Äußeres}(\vec{K})$ durch einen s-t-Wege aus \vec{P}_C besetzt

Beweis

- i) wenn p_1, \dots, p_l s-t-Wege und linkskreise von s nach s. Dann gehört keine der Kanten (X, Y) , $X \in \text{Äußeres}(\vec{K})$ und y auf \vec{K} zu einem der p_i **bild** wegen Left-First in Graph induziert durch p_1, \dots, p_l $(u, y) \notin p_i$ für alle $1 \leq i \leq l \Rightarrow$ für (u, v) mit u auf \vec{K} , $r \in \text{Äußeres}(\vec{K})$ kann nicht auf einem Linkskreis aus p_1, \dots, p_l liegen.
- ii) betrachte (u, v) mit u auf \vec{K} , $v \in \text{Äußeres}(\vec{K})$ und (u, w) mit w auf \vec{K} **bild**
Annahme: (u, v) gehört zu keinem der p_1, \dots, p_l
betrachte Referenzkante zu (u,w) in RIGHT-FIRST-SUCHE (Schritt 3)
Referenzkante “liegt wie” **grün** oder **blau**, aber dann hätte RIGHT-FIRST *nicht* (u,w) sondern (u,v) \Rightarrow Widerspruch

Das knotendisjunkte Menger-Problem

geg. $G = (V, E)$, $s, t \in V$. Finde eine maximale Anzahl paarweise (intern) knotendisj. s-t-Wege in G.

Satz von Menger maximale Anzahl knotendisj. s-t-Wege ist gleich der Größe eines minimalen Separators, der s und t trennt.

Linearzeitalgorithmus für knotendisjunktes Menger-Problem in planaren Graphen basiert auf RIGHT-FIRST-Suche.

Schritt 1 überführe $G = (V, E)$ in gerichteten Graph $\vec{G} = (V, \vec{E})$ indem alle Kanten mit $u, v \in V \setminus \{s, t\}$ durch zwei gerichtete Kanten ersetzt werden. Kanten $\{s, v\}$ werden nur durch (s, v) und $\{v, t\}$ nur durch (v, t) ersetzt.

Schritt 2 Seien $l_1, \dots, l_r \in E$ die aus s auslaufenden Kanten, führe Schleife über l_1, \dots, l_r aus, wobei im i-ten Durchlauf RIGHT-FIRST-Suche startend bei s mit l_i ausgeführt wird. Durchlauf endet in t oder in s.

RIGHT-FIRST-Suche kann zu “Konflikt” führen, d.h. Suche trifft auf einen bereits belegten Knoten

- belegter Knoten: **bild**

zwei mögliche Konfliktsituationen:

- Konflikt von links,
- Konflikt von rechts

- 1) Konflikt von links (mit anderem Pfad oder selben Pfad früher)
 \Rightarrow BACKTRACK-REMOVE: ein Schritt zurück

2) Konflikt von rechts

- a) zwischen zwei Wegen, gefundenen Weg und Suchweg: Vorangehende Wegabschnitte von gefundenem Weg und Suchweg werden vertauscht
 \Rightarrow Konflikt von links

- b) Suchweg trifft von rechts auf sich selbst

Trick: verhindere, dass ein Rechtskreis durchlaufen wird, indem nach vorherigen Durchlauf des entsprechenden Linkskreis geeignete Kante gelöscht wird.

Man kann beweisen, dass für Kante (v, w) die zu Rechtskreis mit Konflikt rechts in v führt zuvor umgekehrte Kante (w, v) in einem Linkskreis mit Konflikt von links in v durchlaufen wird.

\rightsquigarrow lösche Kante (v, w) die nach RIGHT-FIRST-Auswahlregel nächste Kante wäre (*) nachdem (w, v) zuvor von demselben Suchweg belegt wurde.

zweiter Trick: führe globalen Zähler ein, der um 1 erhöht wird, wenn neue Suche in s startet oder Wege umorganisiert werden wegen “Konflikt von rechts” setze Wert des “lokalen” Zählers um besuchten Knoten v auf Wert des globalen Zählers \rightsquigarrow Situation (*) wird erkannt, da Wert des lokalen Zählers an v und w gleich.

Laufzeit $O(n)$ klar, da jede Kante höchstens einmal besucht wird und RIGHT-FIRST-Auswahlschritt in $O(1)$; Referenzkante zu Knoten v bleibt gleich.

Korrektheit wichtigster Teil ist Beweis, dass “gelöschte” Kante wegen “Backtrack-Remove” oder wegen (*) für Lösung nicht benötigt wird.

Sei k maximale Anzahl s-t-Wege in G und a_1, \dots, a_n gelöschte Kanten (in dieser Reihenfolge).

Beweise per Induktion über $a_1 \dots a_n$ dass $G_i := G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ ebenfalls k s-t-Wege enthält.

Das Problem von Okamura und Seymour

Kantendisjunktes Wegpackungsproblem

Gegeben $G = (V, E)$ und Paare ausgezeichneter Knoten $\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_k, t_k\}, s_i, t_i \in V$

Finde paarweise kantendisjunkte $s_i - t_i$ -Wege.

NP-vollständig, sogar wenn G planar. Mögliche Spezialfälle:

- G planar und s_i, t_i für alle $1 \leq i \leq k$ auf dem Rand derselben Facette
- G planar und sogar $G := (V, E \cup D)$ wobei $D := \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \text{ Terminale}\}$ planar

D für "Demand-Kanten"

$G = (V, E), D = \{\{s_i, t_i\} : 1 \leq i \leq k, s_i, t_i \in V\}, X \subseteq V$. Dann heißt

$$cap(X) := |\{\{u, v\} \in E, u \in X, v \in V \setminus X\}|$$

Kapazität von X (bzw. Kantenschnitt induziert durch X).

und

$$dens(X) := |\{\{s_i, t_i\} \in D : |\{s_i, t_i\} \cap X| = 1\}|$$

Dichte von X .

$fcap(X) := cap(X) - dens(X)$ **freie Kapazität** von X .

Offensichtlich $fcap(X) \geq 0$ für alle $X \subseteq V$ notwendige Bedingung für Lösbarkeit.

Bild

Kapazitätsbedingung $fcap(X) \geq 0$ für alle Schnitte $X \subseteq V$ ist nicht hinreichend für Lösbarkeit!

Geradheitsbedingung Für alle $X \subseteq V$ $fcap(X)$ gerade ist weitere Bedingung an Instanz

2015-06-16

Satz von Okamura und Seymour Falls Geradheitsbedingung erfüllt, so ist Kapazitätsbedingung hinreichend für Lösbarkeit

Lemma Es gilt $fcap(X)$ gerade für alle $X \subseteq V$ g.d.w.

$$\begin{array}{c} fcap(v) \\ \parallel \\ fcap(\{v\}) = \underset{\text{Grad}}{d(v)} - \underset{\text{\#Terminale auf } v}{dens(v)} \end{array}$$

gerade für alle $v \in V$.

Beweis \implies trivial

\Leftarrow : sei $fcap(v)$ gerade für alle $v \in V$. Betrachte $X \subseteq V$:

$$cap(X) = \sum_{v \in X} cap(v) - 2 \cdot |\{\{u, v\} \in E : u, v \in X\}|$$

$$dens(X) = \sum_{v \in X} dens(v) - 2 \cdot |\{\{s_i, t_i\} \in D : s_i, t_i \in X\}|$$

$$fcap(X) = \sum_{v \in X} cap(v) - \sum_{v \in X} dens(v) - 2 \cdot |\{\{u, v\} \in E : u, v \in X\}| + 2 \cdot |\{\{s_i, t_i\} \in D : s_i, t_i \in X\}|$$

$\rightarrow fcap(X)$ gerade

Geradheitsbedingung überprüfen: Es reicht für alle $v \in V$ den Grad von v und $\# s_i, t_i$ auf V zu zählen.

Linearzeitalgorithmus für $G = (V, E)$ pl., Terminalpaare D auf äußerer Facette und Geradheitsbedingung erfüllt.

2 Phasen

1. Konstruiere aus G, D “einfache Instanz” mit “Klammerstruktur” und berechne mittels RIGHT-FIRST Tiefensuche Lösungswege q_1, \dots, q_k . Diese induzieren gerichteten “Hilfsgraph”.
2. Berechne mittels gerichteter RIGHT-FIRST Tiefensuche in Hilfsgraph Lösungswege $p_1 \dots p_k$ die jeweils s_i mit t_i verbinden.

Instanz mit Klammerstruktur

$G, D = \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \in V\}$ alle auf äußerer Facette

`bild bild`

daraus Instanz mit Klammerstruktur konstruieren:

- wähle beliebiges Terminal als “Startterminal” s
- gehe im Gegenurzeigersinn startend von s um äußere Facette und ordne erste Terminal aus einem Paar $\{s_i, t_i\}$ eine “(” zu und zweitem Auftreten eine “)”

\rightsquigarrow Klammerausdruck; paare Terminal entsprechend Klammerausdruck

\rightsquigarrow Instanz $G = (V, E), D' = \{\{s'_i, t'_i\} : s'_i, t'_i \in V\}$ entsprechende Klammerung

Konstruiere mittels RF-Suche Lösung $q_1 \dots q_k$ zu G, D' ; Reihenfolge in der Wege bezeichnet werden nach Reihenfolge der t'_i , d.h. “von innen nach außen” in Klammerstruktur

Korrektheit von Phase 1

Beobachtung

- i) keine zwei Wege g_i, g_j kreuzen sich und
- ii) kein g_i kreuzt sich selbst (wegen RF-Auswahlregel)

Sei $\vec{G} = (V, \vec{E})$ Graph der durch $q_1 \dots q_k$ induziert wird. Dann enthält \vec{G} keinen Rechtskreis. `bild` \Rightarrow induktiv über $q_i, 1 \leq i \leq k$ kann gezeigt werden, dass q'_i die “richtigen Terminale” verbindet.

1. Phase in $O(n)$ klar. in

2015-06-17

Zu Phase 2

Sei von Startterminal im Gegenuhrzeigersinn jeweils s_i vor t_i und Indizierung entsprechend Auftreten der t_i .

Für $i = 1$ bis k

RFS von s_i aus bis zu einem t_j } $\rightsquigarrow p_i$
falls $j \neq t$ stop

gib p_1, \dots, p_k aus

Laufzeit $O(n)$ amortisiert mit UNION-FIND wie kantendisj. Menger

Korrektheit Algorithmus findet entweder

- i) mit Wegen $p_i \dots p_k$ die jeweils s_i mit t_i verbinden oder
- ii) p_1, \dots, p_{i-1} "korrekt" und p_i verbindet s_i mit $t_j, i \neq j \implies i < j$

\rightsquigarrow Prozedur, die Weg p berechnet, so dass p einen Schnitt X induziert, der

- im Fall i) "saturiert" ist, d.h. $fcap(X) = 0$
- im Fall ii) "übersaturiert" ist, d.h. $fcap(X) < 0$

\implies Korrektheit

Prozedur für Schritt X:

Rückwärts-LFS startend von Terminal t_i bzw. t_j wo Weg p_i endet in Graph, der durch $p_1 \dots p_i$ induziert wird.

Lemma Sei A Menge der Kanten $\{u, v\}$ aus G mit u auf p und v rechts von p . Jede Kante $\{u, v\} \in A$ gehört zu \vec{G} und genau dann in Orientierung (u, v) wenn sie durch einen der $p_1 \dots p_i$ besetzt ist.

Beweis Wenn $\{u, v\}$ durch ein p_i besetzt, dann wegen Konstruktion von p in Orientierung (u, v) .

Fall 1: es existiere (u, v) mit (u, v) nicht durch $p_1 \dots p_i$ besetzt. **bild** Widerspruch zu RFS in Phase 2

Fall 2: es existiert $\{u, v\} \in A, (u, v), (v, u) \notin \vec{G} \implies$ Widerspruch zu RFS in Phase 1

Lemma Sei X Schnitt induziert durch p (Knoten rechts von p). Falls p_i $s_i - t_i - \text{Weg}$, so ist $fcap(X) = 0$ ansonsten $fcap(X) < 0$.

Beweis Kanten $\{u, v\}$ auf p , v rechts von p entweder zu Weg p_j gehört mit $1 \leq j \leq i, s_j \in V \setminus X$ und $t_j \in X$ oder zu Weg q_j aus erster Phase mit $s'_j \in X$ und $t'_j \in V \setminus X$.

Wenn p_i korrekter $s_i - t_i$ -Weg so gibt

$$cap(X) = |\{\{s_j, t_j\} : s_j \in V \setminus X, t_j \in X, 1 \leq j \leq i\}| + |\{\{s'_j, t'_j\} : s'_j \in X \text{ und } t'_j \in V \setminus X, \{s'_j, t'_j\} \notin \{\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_{i-1}, t_{i-1}\}\}\}| = dens(X)$$

Wenn p_i nicht korrekt, d.h. s_i mit $t_j, i < j$ verbindet, so ist $cap(X) < dens(X)$, da $s_i \in V \setminus X, t_i \in X$.

Planartest in Linearzeit

siehe Folien

Beweis zum Lemma defekte Kanten bilden Pfad

- 1) es existiert Knoten mit ≥ 3 defekte Kanten
 \rightsquigarrow 3 Rot-Schwarz-Wechsel \Rightarrow Widerspruch zu rot-konsekutiv
- 2) Wenn Pfad zwischen zwei defekten Kanten existiert, sind alle Kanten auf Pfad defekt: klar, weil äußerer Teil Teilbaum von innerem Teil ist