Mitschrieb Planare Graphen SS 2015

Robin

2015-04-15

Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

planare Einbettung:

Graph $G = (V, E)$ kann dargestellt werden indem man die Knoten aus V auf Punkte im $\mathbb{R}^2$ und die Kanten aus E auf Jordan-Kurven (d.h. stetige sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten abdeckt.

G heißt *planar* wenn es eine Darstellung gibt, bei der sich die Kanten höchstens in einem gemeinsamen Endpunkt berühren.

- planare Einstellung zerlegt Ebene in *Facetten* (Gebiete, Flächen)
- planare Einbettung, die durch ihre Facetten bzw. die Reihenfolge der Kanten in Adjazenzlisten beschrieben ist, heißt *kombinatorische Einbettung*
- planare Einbettung, die durch Koordinaten der Punkte beschrieben ist, heißt *geometrische Einbettung*

Facettenmenge $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = f$

Satz von Euler (1790):

In einem zusammenhängenden nichtleeren planaren Graph $G = (V, E)$ gilt für jede planare Einbettung (geg. durch $\mathcal{F}$), dass

$$n - m + f = 2$$

(wobei $|V| = n, |E| = m, |\mathcal{F}| = f$)

Beweis per Induktion über m:

IA: $m = 0$, es ist $n = 1, f = 1 \Rightarrow$ Beh.

Sei also m ≥ 1

Fall 1: G enthalte einen Kreis

$\Rightarrow$ es existiert $l \in E$ so dass $G' := G - e = (V, E \setminus e)$ ebenfalls zusammenhängend und e an zwei Facetten grenzt die zu einer Facette in G' werden.

$\Rightarrow$ f' #Facetten von G' erfüllt

$$f' = f - 1 \underset{IV}{\Longrightarrow} n - (m-1) + f' = 2$$
$$\Longrightarrow n - m + f = 2$$

Fall 2: G enthält keinen Kreis, ist also Baum und $|\mathcal{F}| = 1$. Für beliebige $e \in E$ zerfällt $G' = G - e$ in zwei Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, E_2)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und nach IV:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2, n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

Da

$$n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 - 1$$
$$\Longrightarrow n - m + f = n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1 + 1 = (\underset{\underset{2}{\parallel}}{n_1 - m_1 + 1}) + (\underset{\underset{2}{\parallel}}{n_2 - m_2 + 1}) - 2 = 2$$

Folgerungen:

- #Facetten ist für jede planare Einbettung von G gleich
- #Kanten eines Baumes mit n Knoten ist n-1

Lemma: Ein planarer Graph mit n Knoten ($n \geq 3$) hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

Beweis: o.B.d.A sei G maximal planar (d.h. Hinzunahme weiterer Kanten zerstört Planarität)

`Bild`

Dann ist für jede planare Einbettung jede Facette ein Dreieck und jede Kante grenzt an genau zwei Facetten.

$$3f = 2m$$
$$\underset{mit\ Euler}{=}$$
$$3(2 - n + m) = 6 - 3n + 3m$$

Lemma: Sei G pl. Graph mit mind 3 Knoten. $d_{max}(G)$ bezeichne Maximalgrad in G, n_i #Knoten von Grad i.

Dann gilt:

$6n_0 + 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots + (d_{max}(G) - 6) * n_{d_{max}(G)} + 12$

Beweis: Es gilt $n = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i$ und $2m = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i$.
Da $m \leq 3n - 6$ folgt

$$6 \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} n_i = 6n \geq 2m + 12 = \sum_{i=0}^{d_{max}(G)} i \cdot n_i + 12$$

Folgerung: Jeder planare Graph enthält mind. einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.

Dualität von Schnitten und Kreisen

`Bild Dualgraph`

Planarer Graph G mit Einbettung $\mathcal{F}_i$ Dualgraph G^* dazu. Dann gilt:

Ein Schnitt in G ($\widehat{=}$ entspr. Kantenmenge) induziert eine Menge von Kreisen in G^* und umgekehrt.

Minor bzw. Unterteilung

`Bild G' Subgraph von G`

$G' = (V', E')$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

$G' = (V', E')$ heißt *Unterteilung* von $G = (V, E)$ wenn G' aus G entsteht indem man Kanten von G durch einfache Wege ersetzt.

Ein Graph H heißt *Minor* von G wenn H aus G entsteht durch Löschen von Knoten oder/und Kanten und/oder Knotenkontraktion von Knoten von Grad 2.

H ist *Minor* von G falls G eine Unterteilung von H als Subgraph enthält.

`Bild G' Unterteilung von G`

`Bild G' Minor von G`

Satz von Kuratowski (1930)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

"$\Rightarrow$" klar, da K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar.

"": Es ist also "nur" zu zeigen: Wenn G nicht planar, dann enthält G einen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Vorbereitung des Beweises

`Bild K_{3,2}`

Nehme Graph der $K_{3,2}$ als Minor enthält -Graph (Minor von $K_{3,2}$)

> (2014-04-21)

Siehe Beweisfolien (kuratowski_slides.pdf)