多元统计分析课程作业 2

Phlins

2024 年 4 月 11 日

题目 1. 4.2. 设一个二元正态总体有 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1$ 和 $\rho_{12} = 0.5$.

(a) 写出二元正态密度

(b) 把广义平方距离的表达式 $(x - \mu)'\Sigma^{-1}(x - \mu)$ 写成 x_1 和 x_2 的函数

(c) 确定含 50% 概率的常密度轮廓线 (并画出草图)

解答.

(a) 已知:

$$\because p = 2, \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

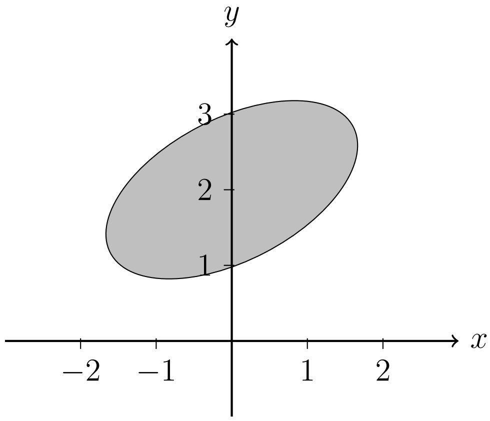
$$\therefore |\Sigma| = \frac{3}{2}, \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x_1(x_2-2) + \frac{4}{3}(x_2-2)^2\right]\right)$$

(b)

$$\frac{2}{3}x_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x_1(x_2-2) + \frac{4}{3}(x_2-2\,)^2$$

(c) $c^2 = \chi_2^2(0.5) = 1.39$. 中心位于 $[0,2]$,长轴半径为 $\sqrt{\lambda_1}c = \sqrt{2.366}\sqrt{1.39} = 1.81$ 的椭圆。长轴方向为 $e = \{0.888, 0.460\}$。短轴方向为 $e = \{-0.460, 0.888\}$,短轴半径为 $\sqrt{\lambda_2}c = \sqrt{0.634}\sqrt{1.39} = 0.94$.



题目 1 的注记.

题目 2. 4.3. 设 $\boldsymbol{X}$ 服从 $\mu' = [-3, 1, 4]$ 和

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 $N_3(\mu, \Sigma)$, 下列各对随机变量中哪几数对相互独立?请解释

(a) X_1 和 X_2

(b) X_2 和 X_3

(c) (X_1, X_2) 和 X_3

(d) $\frac{X_1+X_2}{2}$ 和 X_3

(e) X_2 和 $X_2 - \frac{5}{2}X_1 - X_3$

解答. 根据结果 4.5，我们将零协方差与统计独立性联系起来：

(a) 不，$\sigma_{12} \neq 0$

(b) 是的，$\sigma_{23} = 0$

(c) 是的，$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

(d) 是的，根据结果 4.3，$(x_1 + x_2)/2$ 和 x_3 是联合正态的，它们的协方差是 $\frac{1}{2}\sigma_{13} + \frac{1}{2}\sigma_{23} = 0$

(e) 不，根据结果 4.3，取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$，计算 $A\Sigma A'$，可以看出协方差为 10 而不是 0。

题目 3. 4.16 设 X_1, X_2, X_3 和 X_4 是独立 $N_p(\mu, \Sigma)$ 随机向量

(a) 对以下两个随机向量求边缘分布

$$V_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$
$$V_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

(b) 求 (a) 中定义的随机向量 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的联合密度

解答.

(a) 根据结果 4.8，取 $c_1 = c_3 = 1/4, \quad c_2 = c_4 = -1/4$ 和 $\mu_j = \mu \quad (j = 1, ..., 4)$，我们有 $\sum_{j=1}^{4} c_j\mu_j = 0$ 和 $(\sum_{j=1}^{4} c_j^2)\Sigma = \frac{1}{4}\Sigma$。因此，$V_1$ 是 $N(0, \frac{1}{4}\Sigma)$。类似地，取 $b_1 = b_2 = 1/4$ 和 $b_3 = b_4 = -1/4$，我们发现 V_2 是 $N(0, \frac{1}{4}\Sigma)$。

(b) 再次根据结果 4.8，我们知道 V_1 和 V_2 是联合多元正态分布，其协方差为

$$(\sum_{j=1}^{4} b_j c_j)\Sigma = \left(\frac{1}{4}(\frac{1}{4}) + \frac{-1}{4}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}(\frac{-1}{4}) + \frac{-1}{4}(\frac{-1}{4})\right)\Sigma = 0$$

即

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \text{服从} N_{2p}\left(0, \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\Sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Sigma \end{bmatrix}\right)$$

所以 $2p$ 变量的联合密度为

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2) &= \frac{1}{(2\pi)^p|\frac{1}{4}\Sigma|} \exp\left[-\frac{1}{2}[v_1', v_2'] \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\Sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Sigma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right]. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p|\frac{1}{4}\Sigma|} \exp\left(2(v_1'\Sigma^{-1}v_1 + v_2'\Sigma^{-1}v_2)\right) \end{aligned}$$

题目 4. 4.18. 试根据来自二维正态总体的随机样本

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

求 2×1 均值向量 μ 和 2×2 协方差矩阵 Σ 的极大似然估计

解答. 根据 4.11 结果，μ 和 Σ 的最大似然估计分别为 $\hat{\mu}=\bar{x}=[4,6]'$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\bar{x}\right)\left(x_j-\bar{x}\right)' &= \frac{1}{4}\left\{\left(\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)'+\left(\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)'\right.\\
&\quad\left.+\left(\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)'+\left(\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right)'\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 6\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$