

多元统计分析课程作业 3

Phlins

2024 年 4 月 11 日

题目 1. 5.1

(a) 使用给定的数据计算检验统计量 T^2 以检验原假设 $H_0: \mu' = [7, 11]$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 9 \\ 6 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

(b) 描述 (a) 部分中 T^2 统计量的分布情况。

(c) 结合 (a) 和 (b) 的结果, 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下对原假设 H_0 进行检验。你会得出什么结论?

解答.

(a)

变量数 $p = 2$, 样本大小 $n = 4$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{2+8+6+8}{n} \\ \frac{12+9+9+10}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j), \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 8 & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix},$$

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu')^\top \mathbf{S}^{-1}(\bar{x} - \mu') = \frac{150}{11} = 13.64$$

(b)

$$\therefore T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p},$$

$$\therefore T^2 \sim 3F_{2,2}$$

(c)

$$H_0: \mu' = [7, 11]$$

$$\therefore \alpha = 0.05 \therefore F_{2,2}(0.05) = 19$$

$$\therefore T^2 = 13.64 < 3F_{2,2}(0.05) = 57$$

$$\therefore \alpha = 0.05 \text{ 时接受原假设 } H_0$$

题目 2. 5.5. 样本均值向量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.603 \end{bmatrix}$$

样本协方差矩阵:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.0144 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.0146 \end{bmatrix}$$

样本协方差矩阵的逆矩阵：

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix}$$

在 0.05 的显著性水平上，对原假设 H_0 进行检验，其中原假设为： $H_0: \boldsymbol{\mu}' = [0.55, 0.60]$ 。检验的结果是否与图 5.1 中所示的 $\boldsymbol{\mu}$ 参数 95% 的置信椭圆相一致？请对此进行解释。

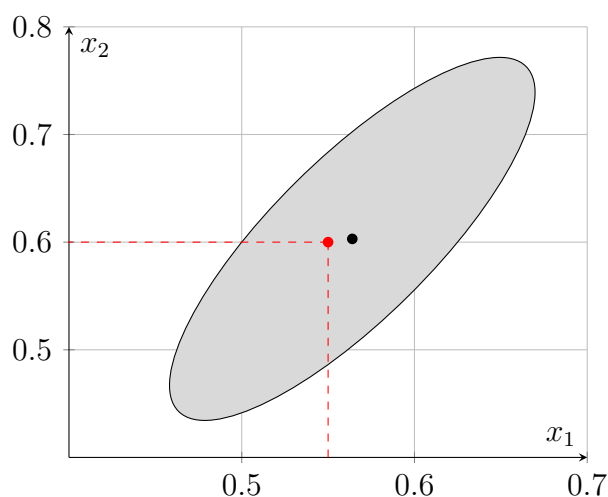
解答.

$$H_0: \boldsymbol{\mu}' = [0.55, 0.60], T^2 = n(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}')^\top \mathbf{S}^{-1}(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}') = 1.17$$

$$\alpha = 0.05 \therefore F_{2,40}(0.05) = 3.23$$

$$\therefore T^2 = 1.17 < \frac{2(40+1)}{40}, F_{2,40}(0.05) = 2.05 \times 3.23 = 6.62$$

在 0.05 的显著性水平上，我们不拒绝原假设 H_0 。这一结果与图中所示的 95% 置信椭圆一致，因为均值向量 $\boldsymbol{\mu}' = [0.55, 0.60]$ 位于该椭圆内部。



题目 3. 绘制散点图，展示当显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，对于不同的样本量 n （从 2 到 120，步长为 1）和不同自由度 p （从 1 到 60，步长为 1）条件下，变量 $\frac{(n-1)p}{n-p}F_{p,n-p}(\alpha)$ 的观测值分布情况。

解答.

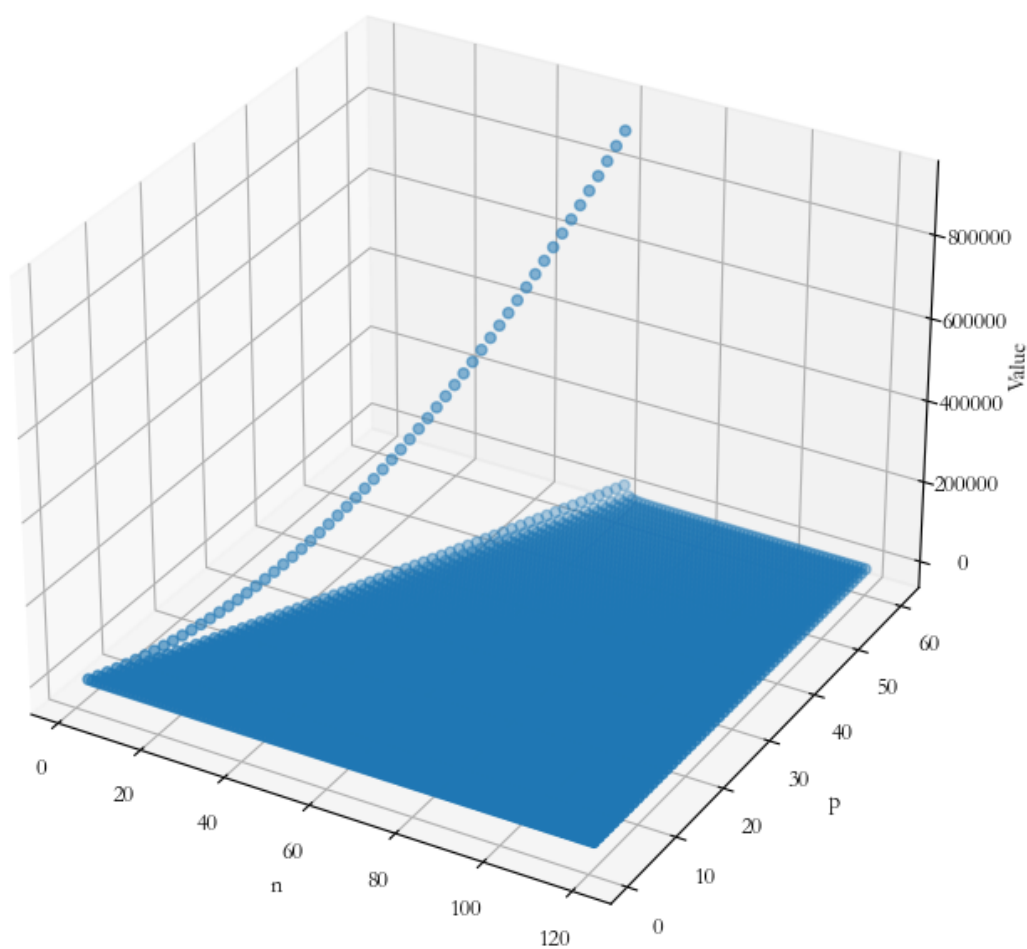


图 1: 观测值分布情况