

多元统计分析期中考试试题全解

Phlinsia

2024 年 5 月 14 日

题目 1. 2.20

已知:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

请计算平方根矩阵 $A^{\frac{1}{2}}$ 以及 $A^{-\frac{1}{2}}$ 。然后证明下式:

$$A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = I$$

解答. 计算 A 的特征值:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = 3.618, \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = 1.382$$

计算矩阵 A 的特征值归一化特征向量对, 当 $Ax = \lambda x$ 时

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3.618 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = (1, 1.618)$$

$$\therefore e_1 = (0.5257, 0.8507)^\top$$

$$\text{同理: } \lambda_2 = 1.382, e_2 = (0.8507, -0.5257)^\top$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_1}e_1e_1^\top + \sqrt{\lambda_2}e_2e_2^\top = \begin{bmatrix} 1.376 & 0.325 \\ 0.325 & 1.701 \end{bmatrix}$$

$$A^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1e_1^\top + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}e_2e_2^\top = \begin{bmatrix} 0.760 & -0.145 \\ -0.145 & 0.615 \end{bmatrix}$$

$$\text{验证则可得证: } A^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

题目 2. 4.8.

已知 $X_1 \sim N(0, 1)$

$$X_2 = \begin{cases} -X_1, & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ X_1, & x_1 > 1 \text{ 或 } x_1 < -1 \end{cases}$$

- (a) 证明 $X_2 \sim N(0, 1)$
- (b) 证明 X_1, X_2 不符合二元正态分布

解答.

(a)

$$-1 \leq x_1 \leq 1 \text{ 时 } \Rightarrow x_2 = -x_1 \sim N(0, 1)$$

这个变换反映在密度函数上就是关于 y 轴的对称变换，不会改变分布的形状和参数，因为正态分布完全对称.

$$x_1 > 1 \text{ 或 } x_1 < -1 \text{ 时 } \Rightarrow x_2 = x_1 \sim N(0, 1)$$

$\therefore X_2$ 通过简单的线性变换（包括恒等变换和翻转）保持了原始分布的性质 $\therefore X_2 \sim N(0, 1)$

- (b) 如果 X_1 和 X_2 符合二元正态分布，那么它们的相关系数 ρ 应该在整個定义域内保持不变。但根据 X_2 的定义， ρ 实际上在 $X_1 \in [-1, 1]$ 时为 -1 ，在 X_1 的其他取值时为 1 ，这违反了二元正态分布的定义，因为相关系数必须是固定值。

题目 3. 2.32

给定了随机向量 $\mathbf{X}^\top = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, 均值向量 $\mu^\top = (2, 4, -1, 3, 0)$, 以及方差-协方差矩阵 $\Sigma_{\mathbf{X}}$

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ -0.5 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{X} 划分为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix}$$

又

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

考虑 $\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)}$ 的线性组合, 求:

- (a) $E(\mathbf{X}^{(1)})$
- (b) $E(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)})$
- (c) $Cov(\mathbf{X}^{(1)})$
- (d) $Cov(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)})$
- (e) $E(\mathbf{X}^{(2)})$

(f) $E(\mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)})$

(g) $Cov(\mathbf{X}^{(2)})$

(h) $Cov(\mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)})$

(i) $Cov(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})$

(j) $Cov(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)})$

解答.

(a)

$$E(\mathbf{X}^{(1)}) = \mu^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}\mu^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c)

$$Cov(\mathbf{X}^{(1)}) = \Sigma_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(d)

$$Cov(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)}) = \mathbf{A}\Sigma_{11}\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(e)

$$E(\mathbf{X}^{(2)}) = \mu^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(f)

$$\mathbf{B}\mu^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(g)

$$\text{Cov}(\mathbf{X}^{(2)}) = \Sigma_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(h)

$$\text{Cov}(\mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)}) = \mathbf{B}\Sigma_{22}\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 9 & 24 \end{bmatrix}$$

(i)

$$\text{Cov}(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(j)

$$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{B}\mathbf{X}^{(2)}) = \mathbf{A}\Sigma_{12}\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

题目 4. 4.18.

试根据来自二维正态总体的随机样本

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

求 2×1 均值向量 μ 和 2×2 协方差矩阵 Σ 的极大似然估计

解答. 根据 4.11 结果, μ 和 Σ 的最大似然估计分别为 $\hat{\mu} = \bar{x} = [4, 6]'$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right)' + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right)' \right. \\ & \quad \left. + \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right)' + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right)' \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

题目 5. 5.1

(a) 使用给定的数据计算检验统计量 T^2 以检验原假设 $H_0: \mu' = [7, 11]$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & 9 \\ 6 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

(b) 描述 (a) 部分中 T^2 统计量的分布情况。

(c) 结合 (a) 和 (b) 的结果, 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下对原假设 H_0 进行检验。你会得出什么结论?

解答.

(a)

变量数 $p = 2$, 样本大小 $n = 4$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{2+8+6+8}{n} \\ \frac{12+9+9+10}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j), \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 8 & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & 2 \end{bmatrix},$$

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu')^\top \mathbf{S}^{-1}(\bar{x} - \mu') = \frac{150}{11} = 13.64$$

(b)

$$\therefore T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p},$$

$$\therefore T^2 \sim 3F_{2,2}$$

(c)

$$H_0: \mu' = [7, 11]$$

$$\because \alpha = 0.05 \therefore F_{2,2}(0.05) = 19$$

$$\because T^2 = 13.64 < 3F_{2,2}(0.05) = 57$$

$$\therefore \alpha = 0.05 \text{ 时接受原假设 } H_0$$

题目 6. 4.11.

A 是方阵, 请证明:

$$\begin{aligned} |A| &= |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \quad (|A_{22}| \neq 0) \\ &= |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}| \quad (|A_{11}| \neq 0) \end{aligned}$$

解答.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{两边取行列式 } |A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

$$\begin{bmatrix} I & -A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{两边取行列式 } |A| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|$$

题目 7. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 是从正态总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 抽取的样本, 对于一切可能的 μ, Σ , 多元正态似然函数的最大值是:

$$\begin{aligned}\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\Sigma_\mu|} e^{-\frac{np}{2}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top\end{aligned}$$

再假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 下正态似然函数的最大值为:

$$\begin{aligned}\max_{\Sigma} L(\mu_0, \Sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\Sigma_0|} e^{-\frac{np}{2}} \\ \Sigma_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)^\top \\ \text{验证: } \Lambda^{\frac{2}{n}} &= \frac{|\Sigma_\mu|}{|\Sigma_0|} = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{-1}\end{aligned}$$

解答.

令 $(p+1) \times (p+1)$ 矩阵 A 为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})^\top & \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0) \\ \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)^\top & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top \right| \left| -1 - \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)^\top A_{11}^{-1} \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0) \right| \\
 &= (-1) \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top + \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0) \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)^\top &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^\top \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top + n(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)^\top
 \end{aligned}$$

两边取行列式并乘-1:

$$\begin{aligned}
 (-1) \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)^\top \right| &= (-1) \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top + n(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)^\top \right| \\
 \Rightarrow (-1) \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)^\top \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top \right| \left| -1 - n(\bar{x} - \mu_0)^\top A_{11}^{-1}(\bar{x} - \mu_0) \right| \\
 &\Rightarrow (-1) |n\Sigma_0| = |n\Sigma| \left| -1 - n(\bar{x} - \mu_0)^\top \frac{S^{-1}}{n-1}(\bar{x} - \mu_0) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \because S_{p \times p} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})^\top \\
 \therefore S^{-1} &= \frac{n-1}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})^\top} \\
 \therefore \left[\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})^\top \right]^{-1} &= \frac{S^{-1}}{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |n\Sigma_0| &= |n\Sigma| \left| 1 + \frac{T^2}{n-1} \right| \\
 \Rightarrow \frac{|\Sigma_0|}{|\Sigma|} &= 1 + \frac{T^2}{n-1}
 \end{aligned}$$