# 时间序列分析单元二练习

Phlins

2024 年 5 月 13 日

**题目 1.** 2.4. 令 $e_t$ 为零均值白噪声过程, 假设观测到的过程是 $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$, 其中 $\theta = 3 or \frac{1}{3}$

(a) 求出 $\theta = 3 or \frac{1}{3}$ 时 $Y_t$ 的自相关函数

(b) 无论 $\theta$ 的值是多少, $Y_t$ 都平稳. 简单起见 $Y_t$ 均值是 0, 方差是 1, 观察 $Y_t$ 序列在 $t = 1, 2, \cdots, n$ 的值, 假设可以得到对 $\rho_k$ 较好的估计, 这时根据该估计, 能否确定 $\theta$ 的值? 判断理由?

**解答.**

$$E[Y_t] = E[e_t + \theta e_{t-1}] = E[e_t] + \theta E[e_{t-1}] = 0 + 0 = 0$$
$$V[Y_t] = V[e_t + \theta e_{t-1}] = V[e_t] + \theta^2 V[e_{t-1}] = \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2(1 + \theta^2)$$

$k=1$ 时

$$C[e_t+\theta e_{t-1}, e_{t-1}+\theta e_{t-2}] =$$

$$C[e_t, e_{t-1}] + C[e_t, \theta e_{t-2}] + C[\theta e_{t-1}, e_{t-1}] + C[\theta e_{t-1}, \theta e_{t-2}] =$$

$$0+0+\theta V[e_{t-1}] + 0 = \theta\sigma_e^2,$$

$$\mathrm{Corr}[Y_t, Y_{t-k}] = \frac{\theta\sigma_e^2}{\sqrt{(\sigma_e^2(1+\theta^2))^2}} = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

$k=0$ 时

$$\mathrm{Corr}[Y_t, Y_{t-k}] = \mathrm{Corr}[Y_t, Y_t] = 1$$

$k>0$ 时

$$C[e_t+\theta e_{t-1}, e_{t-k}+\theta e_{t-k-1}] =$$

$$C[e_t, e_{t-k}] + C[e_t, e_{t-1-k}] + C[\theta e_{t-1}, e_{t-k}] + C[\theta e_{t-1}, \theta e_{t-1-k}] = 0$$

考虑所有项都是独立的：

$$\mathrm{Corr}[Y_t, Y_{t-k}] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2} & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}.$$

即

$$\mathrm{Corr}[Y_t, Y_{t-k}] = \begin{cases} \frac{3}{1+3^2} = \frac{3}{10} & \theta=3 \\ \frac{1/3}{1+(1/3)^2} = \frac{1}{10/3} = \frac{3}{10} & \theta=1/3 \end{cases}.$$

对于 (b) 无法确定 $\theta$，因为 $\rho$ 已经被标准化，无论 $k$ 的取值如何，我们都无法观察到方差的任何差异。即 $\rho_k$ 无法推断出 $\theta$ 的大小。

**题目 2.** 2.5. 假设 $Y_t = 5 + 2t + X_t$，其中 $X_t$ 是一个均值为 0 平稳序列，具有自协方差函数 $\gamma_k$。

(a) 求 $Y_t$ 的均值函数

(b) 求 $Y_t$ 的自协方差函数

(c) $Y_t$ 是平稳序列吗？请证明你的结论。

**解答.**

(a)

$$\mu_t = E[Y_t] = E[5 + 2t + X_t] = 5 + 2E[t] + E[X_t] = 5 + 2t + 0 = 2t + 5$$

(b)

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}[Y_t, T_s] = \mathrm{Cov}[5+2t+X_t, 5+2(t-k)+X_{t-k}] = \mathrm{Cov}[X_t, X_s] = \gamma_{|t-s|}$$

(c) 不平稳。因为均值函数和 $t$ 有关。

**题目 2 的注记.**

**题目 3.** 2.6. 设 $X_t$ 是平稳时间序列，并且定义

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{当 t 是奇数时} \\ X_t + 3 & \text{当 t 是偶数时} \end{cases}$$

(a) 证明对所有的滞后 $k$，$Cov(Y_t, Y_{t-k})$ 与 t 无关

(b) $Y_t$ 平稳吗？请证明你的结论。

**解答.**

(a) 对于常数 $a$ 和 $b$,

$$\mathrm{Cov}[a+X_t, b+X_{t-k}] = \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}],$$

对于所有 $k$ 都不随 $t$ 而变，因为 $X_t$ 平稳。或对应检验：

$$\mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] \begin{cases} \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}+3] & t, k\text{奇} \\ \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}] & t\text{奇}k\text{偶} \\ \mathrm{Cov}[X_t+3, X_{t-k}] & t\text{偶}k\text{奇} \\ \mathrm{Cov}[X_t+3, X_{t-k}+3] & t, k\text{偶} \end{cases} = \gamma_k, \text{与}t\text{无关}$$

(b)

$$\mu_t = E[Y_t] = \begin{cases} E[X_t] = \mu & t\text{奇} \\ 3+E[X_t] = \mu+3 & t\text{偶} \end{cases}.$$

$\mu_t$ 随 $t$ 变化，所以 $Y_t$ 不平稳。

**题目 4.** 2.7. 假设 $Y_t$ 平稳, 且有自协方差函数 $\gamma_k$

(a) 通过求 $W_t$ 的均值和自协方差函数, 证明 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 平稳

(b) 证明：$U_t = \nabla^2 Y_t = \nabla[Y_t = Y_{t-1}] = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ 平稳

**解答.**

(a)

$$\mu_t = E[W_t] = E[Y_t - Y_{t-1}] = E[Y_t] - E[Y_{t-1}] = 0$$

因为 $Y_t$ 稳定

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[W_t] &= \mathrm{Cov}[W_t, W_t] = \mathrm{Cov}[Y_t - Y_{t-1}, Y_t - Y_{t-1}] \\ &= \mathrm{Cov}[Y_t, Y_t] - \mathrm{Cov}[Y_{t-1}, Y_{t-1}] - \mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-1}] - \mathrm{Cov}[Y_{t-1}, Y_t] \\ &= 2(\gamma_0 - \gamma_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[W_t, W_{t-k}] &= \mathrm{Cov}[Y_t - Y_{t-1}, Y_{t-k} - Y_{t-1-k}] \\ &= \mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] + \mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-1-k}] + \mathrm{Cov}[-Y_{t-1}, Y_{t-k}] + \mathrm{Cov}[-Y_{t-1}, -Y_{t-1-k}] \\ &= \gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1} + \gamma_k = 2\gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}.\end{aligned}$$

(b) 在 (a) 中，我们发现了两个平稳过程之间的差异，即 $\nabla Y_t$ 本身平稳。由此可知，这些差异中的两个差异之间的差异 $\nabla^2 Y_t$ 也平稳。

**题目 5.** 2.8. 假设 $Y_t$ 平稳，自协方差函数是 $\gamma_k$，证明对任意固定的整数 $n$ 及任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 如下定义的过程 $W_t W_t = c_1 Y_t + c_2 Y_{t-1} + \cdots + c_n Y_{t-n+1}$ 是平稳的

**解答.**

$$\begin{aligned}E[W_t] &= c_1 E[Y_t] + c_2 E[Y_t] + \cdots + c_n E[Y_t] \\ &= E[Y_t](c_1 + c_2 + \cdots + c_n),\end{aligned}$$

因此期望值恒定。此外，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[W_t] &= \mathrm{Cov}[c_1 Y_t + c_2 Y_{t-1} + \cdots + c_n Y_{t-k}, c_1 Y_{t-k} + c_2 Y_{t-k-1} + \cdots + c_n Y_{t-k-n}] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i c_j \mathrm{Cov}[Y_{t-j} Y_{t-i-k}] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i c_j \gamma_{j-k-i},\end{aligned}$$

上式与 $t$ 无关；因此，$W_t$ 平稳。

**题目 6.** 2.9. 假设 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t$，其中 $X_t$ 是一个零均值平稳序列，具有自协方差函数 $\gamma_k$，并且 $\beta_0, \beta_1$ 是常数。

(a) 证明 $Y_t$ 不平稳，但是 $W_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ 平稳

(b) 一般地，证明：如果 $Y_t = \mu_t + X_t$，其中 $Y_t$ 是零均值平稳序列，$\mu_t$ 是 $t$ 的 $d$ 阶多项式，那么当 $m \geqslant d$ 时，$\nabla^m Y_t = \nabla(\nabla^{m-1} Y_t)$ 是平稳的，而当 $0 \leqslant m < d$ 时非平稳。

**解答.**

(a)

$$E[Y_t] = \beta_0 + \beta_1 t + E[X_t] = \beta_0 + \beta_1 t + \mu_{t_x},$$

仍和 $t$ 有关，因此 $Y_t$ 不平稳。

$$\begin{aligned} E[W_t] = E[Y_t - Y_{t-1}] &= E[\beta_0 + \beta_1 t + X_t - (\beta_0 + \beta_1(t-1) + X_{t-1})] \\ &= \beta_0 + \beta_1 t - \beta_0 - \beta_1 t + \beta_1 = \beta_1, \end{aligned}$$

$E[W_t]$ 与 $t$ 无关，此外:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[W_t] = \mathrm{Var}[X_t, X_{t-1}] &= \mathrm{Cov}[X_t - X_{t-1}, X_t - X_{t-1}] \\ &= \mathrm{Cov}[Y_t, Y_t] - \mathrm{Cov}[Y_{t-1}, Y_{t-1}] - \mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-1}] - \mathrm{Cov}[Y_{t-1}, Y_t] \\ &= 2(\gamma_0 - \gamma_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[W_t, W_{t-k}] &= \mathrm{Cov}[\beta_1 + X_t - X_{t-1}, \beta_1 + X_{t-k} - X_{t-1-k}] \\ &= 2\gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1}. \end{aligned}$$

也与 $t$ 无关，从而证明了 $W_t$ 平稳。

(b)

$$\mu_t = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$$

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (\mu_t - \mu_{t-1}) + (X_t - X_{t-1})$$

$$\nabla \mu_t = \mu_t - \mu_{t-1} = a_1 + \partial a_2 t + \cdots + d a_d t^{d-1} + \text{低阶项}$$

如上，一阶差分将多项数阶数降低一阶，则 $m$ 阶差分：

$$\nabla^m \mu_t = a_1 + \partial a_2 t + \cdots + d a_d t^{d-m+1} + \text{低阶项} = \begin{cases} a_1 & d = m \\ 0 & d < m \end{cases}$$

$d \leqslant m$ 时，

$\because \nabla^m \mu_t$ 是常数 $\therefore X_t$ 平稳.

$\because$ 差分平稳序列仍平稳

$\therefore \nabla^m X_t$ 平稳

$\therefore \nabla^m Y_t = \nabla^m X_t + \nabla^m \mu_t$ 平稳

$d > m$ 时，

$\because \nabla^m \mu_t$ 是 $d - m$ 阶多项式，

$\therefore \nabla^m \mu_t = b_0 + b_1 t + b_{d-m} t^{d-m}$

$\therefore E[\nabla^m \mu_t]$ 与 $t$ 有关

$\therefore \nabla^m \mu_t$ 不平稳

$\therefore \nabla^m Y_t = \nabla^m X_t + \nabla^m \mu_t$ 不平稳

**题目 7.** 2.10. 设 $X_t$ 是零均值、单位方差的平稳过程，具有自相关系数 $\rho_1$，假设 $\mu_t$ 为非常数函数，$\sigma_t$ 是取值为正的非常数函数，观测序列形如 $Y_t = \mu_t + \sigma_t X_t$

(a) 求过程 $Y_t$ 的均值和自协方差函数

(b) 证明过程 $Y_t$ 的自相关函数只依赖于时滞，过程 $Y_t$ 平稳吗?

(c) 是否存在时间序列，其均值为常数，$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k})$ 与 $t$ 无关。而是 $Y_t$ 非平稳的?

**解答.**

(a)

$$\mu_t = E[Y_t] = E[\mu_t + \sigma_t X_t] = \mu_t + \sigma_t E[X_t] = \mu_t + \sigma_t \times 0 = \mu_t$$

$$\gamma_{t,t-k} = \mathrm{Cov}[Y_t] = \mathrm{Cov}[\mu_t + \sigma_t X_t, \mu_{t-k} + \sigma_{t-k} X_{t-k}] = \sigma_t \sigma_{t-k} \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}] = \sigma_t \sigma_{t-k} \rho_k$$

(b) 首先，我们有

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathrm{Var}[\mu_t + \sigma_t X_t] = 0 + \sigma_t^2 \mathrm{Var}[X_t] = \sigma_t^2 \times 1 = \sigma_t^2$$

因为 $X_t$ 的方差为单位方差。此外，

$$\mathrm{Corr}[Y_t, Y_{t-k}] = \frac{\sigma_t \sigma_{t-k} \rho_k}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y_t] \mathrm{Var}[Y_{t-k}]}} = \frac{\sigma_t \sigma_{t-k} \rho_k}{\sigma_t \sigma_{t-k}} = \rho_k,$$

只取决于时滞 $k$。然而，$Y_t$ 不一定平稳，因为 $\mu_t$ 可能与 $t$ 有关。

(c) 存在这样的时间序列，$\rho_k$ 可能与 $t$ 无关，但如果 $\sigma_t$ 不是与 $t$ 无关的话，将得到一条非平稳时间序列，其自相关性与 $t$ 无关且均值恒定。

**题目 8.** 2.11. 假设 $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$ 与 $t$ 无关，而 $E(X_t) = 3t$

(a) $X_t$ 平稳吗?

(b) 令 $Y_t = 7 - 3t + X_t$，$Y_t$ 平稳吗?

**解答.**

(a)

$$\mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}] = \gamma_k$$
$$E[X_t] = 3t$$

$X_t$ 不平稳，因为 $\mu_t$ 随 $t$ 变化。

(b)

$$E[Y_t] = 3 - 3t + E[X_t] = 7 - 3t - 3t = 7$$
$$\mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] = \mathrm{Cov}[7 - 3t + X_t, 7 - 3(t-k) + X_{t-k}] = \mathrm{Cov}[X_t, X_{t-k}] = \gamma_k$$

由于 $Y_t$ 的均值函数是常数 7，且其自协方差不随 $t$ 变化，所以 $Y_t$ 平稳。

**题目 9.** 2.12. 假设 $Y_t = e_t - e_{t-12}$，证明：$Y_t$ 平稳，并且 $k > 0$ 时，其自相关函数只在滞后 $k = 12$ 时非零。

**解答.**

$$E[Y_t] = E[e_t - e_{t-12}] = E[e_t] - E[e_{t-12}] = 0$$
$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] = \mathrm{Cov}[e_t - e_{t-12}, e_{t-k} - e_{t-12-k}] =$$
$$\mathrm{Cov}[e_t, e_{t-k}] - \mathrm{Cov}[e_t, e_{t-12-k}] - \mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_{t-k}] + \mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_{t-12-k}]$$

$$
\mathrm{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] = \begin{cases}
\mathrm{Cov}[e_t, e_{t-12}] - \mathrm{Cov}[e_t, e_t] - \\
\mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_{t-12}] + \mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_t] = \\
\mathrm{Var}[e_t] - \mathrm{Var}[e_{t-12}] \neq 0 & k = 12\text{时} \\
\\
\mathrm{Cov}[e_t, e_{t-k}] - \mathrm{Cov}[e_t, e_{t-12-k}] - \\
\mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_{t-k}] + \mathrm{Cov}[e_{t-12}, e_{t-12-k}] = \\
0 + 0 + 0 + 0 = 0 & k \neq 12\text{时}
\end{cases}
$$