时间序列分析第四章作业

Phlinsia

2024 年 4 月 3 日

Contents

0.1 4.2 绘制自相关图

a

```r
tacf <- function(..., lag.max = 10) {
  s <- ARMAacf(..., lag.max = lag.max)

  lattice::xyplot(s ~ as.numeric(names(s)), type = "h",
                  ylab = " 自相关系数", xlab = " 滞后阶数",
                  panel = function(x, y, ...) {
                    panel.abline(h = 0)
                    panel.xyplot(x, y, ...)
                  })
}
```

```r
tacf(ma = list(-0.5, -0.4))
```

b

```r
tacf(ma = list(-1.2, 0.7))
```

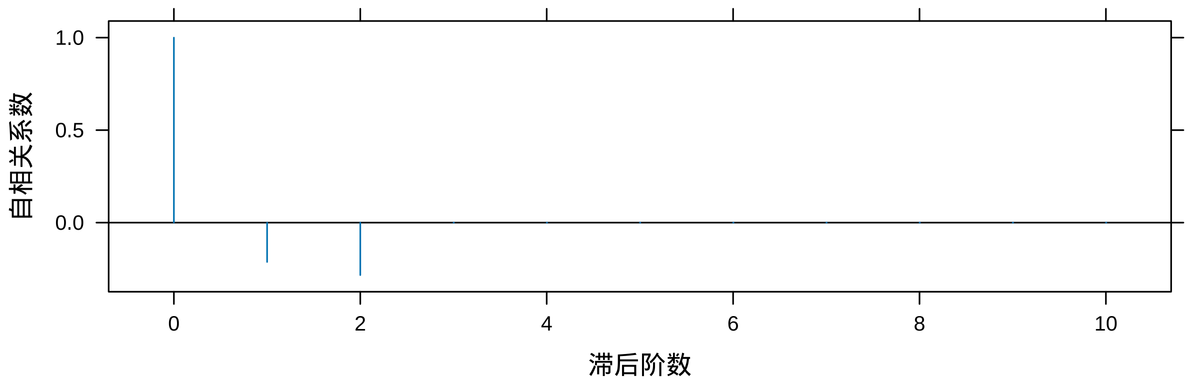


Figure 1: 当 $\theta_1 = 0.5$ 且 $\theta_2 = 0.4$ 时的自相关图

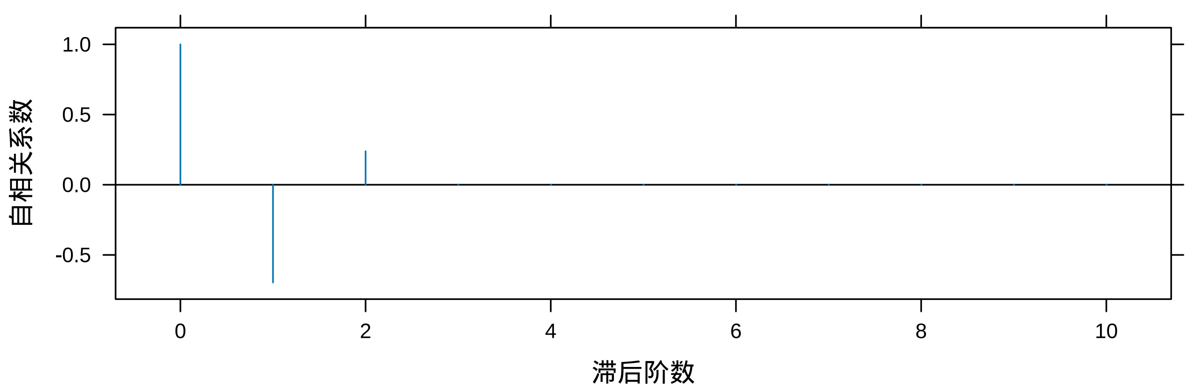


Figure 2: 当 $\theta_1 = 1.2$ 且 $\theta_2 = -0.7$ 时的自相关图

c

```r
tacf(ma = list(1, 0.6))
```

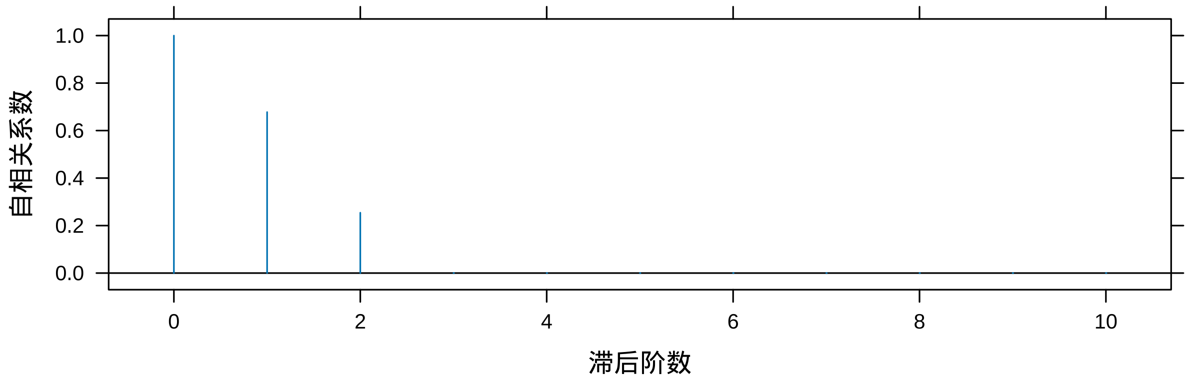


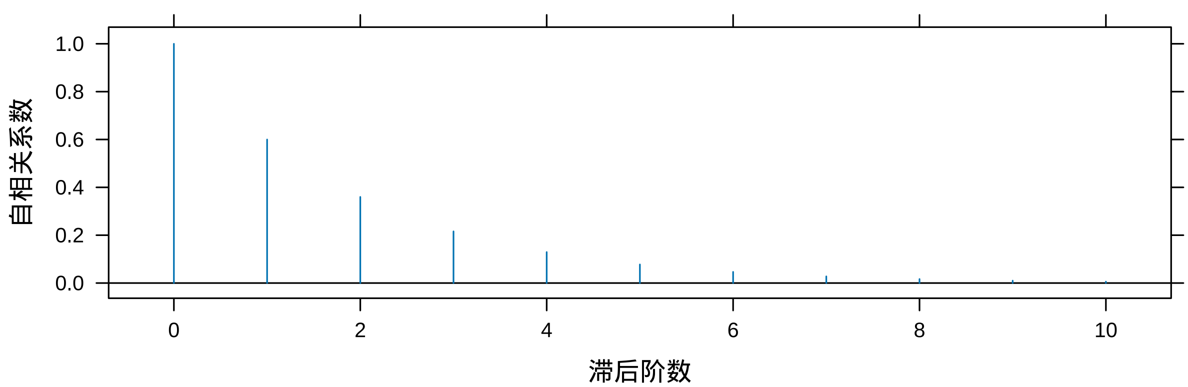
Figure 3: 当 $\theta_1 = -1$ 且 $\theta_2 = -0.6$ 时的自相关图

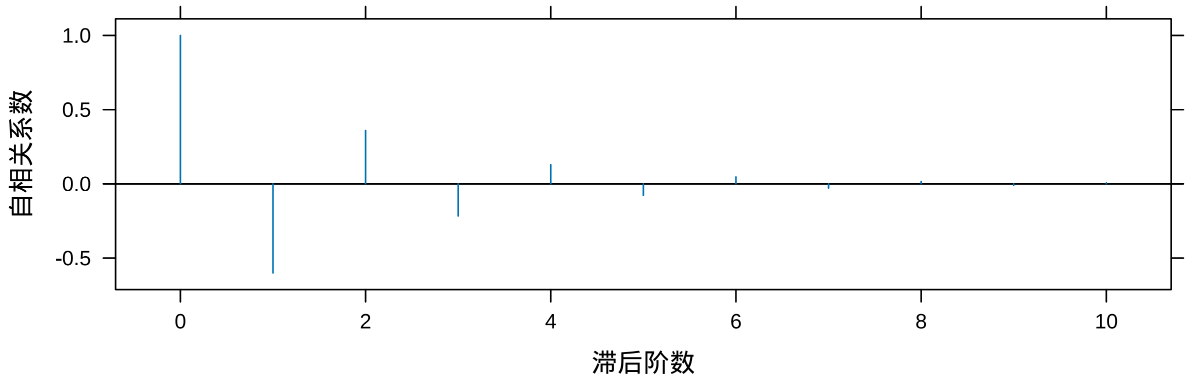
0.2 4.4.MA(1) 模型中系数非唯一性

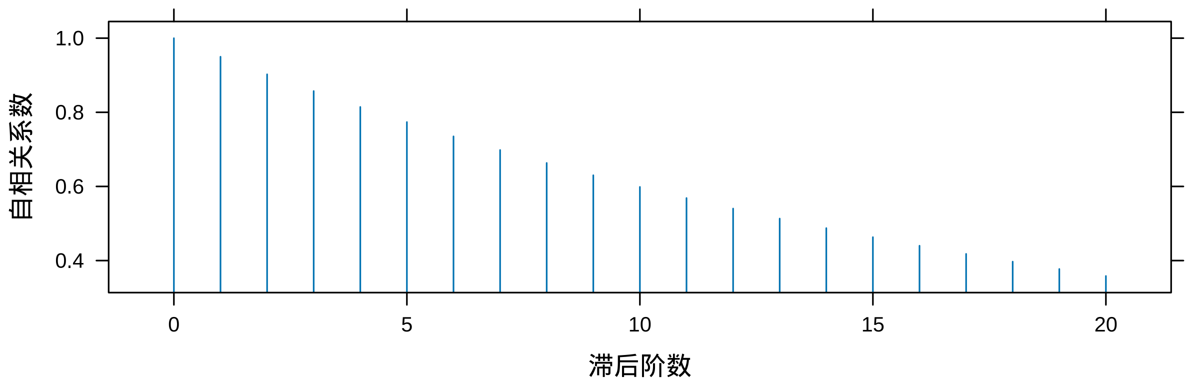
$$\frac{-\frac{1}{\theta}}{1+\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{\theta} \times \theta^2}{\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)\theta^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

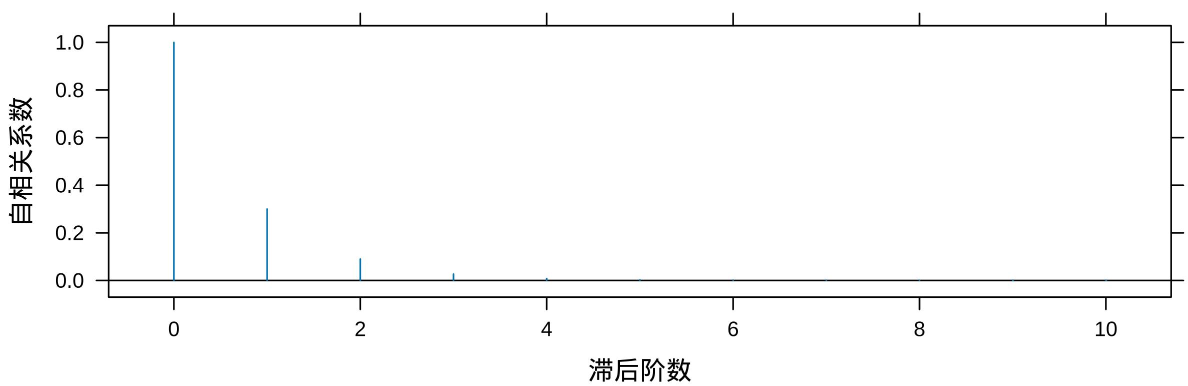
0.3 4.5. 绘制更多的自相关图

```r
theta <- c(0.6, -0.6, 0.95, 0.3)
lag <- c(10, 10, 20, 10)
for (i in seq_along(theta)) {
  print(tacf(ar = theta[i], lag.max = lag[i]))
}
```









0.4 4.6.AR(1) 过程的自相关函数

a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\ Y_t,\ Y_{t-k}) &= \mathrm{Cov}(Y_t - Y_{t-1}, Yt-k-Y_{t-k-1}) \\
&= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) - \mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-k}) - \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k-1}) + \mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-k-1}) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}(\phi^2 - \phi^{k-1} - \phi^{k+1} + \phi^k) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}\phi^{k-1}(2\phi - \phi 2 - 1) \\
&= -\frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}(1-\phi)^2\phi^{k-1} \\
&= -\sigma_e^2\frac{(1-\phi)^2}{(1-\phi)(1+\phi)} \\
&= -\sigma_e^2\frac{1-\phi}{1+\phi}\phi^{k-1}
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(W_t) &= \mathrm{Var}(Y_t - Y_{t-1}) \\
&= \mathrm{Var}(\phi_1 Y_{t-1} + e_t - Y_{t-1}) \\
&= \mathrm{Var}(Y_{t-1}(\phi-1) + \sigma_e^2) \\
&= (\phi-1)^2\mathrm{Var}(Y_{t-1}) + \mathrm{Var}(e_t) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}(\phi^2 - 2\phi + 1) + \sigma_e^2 \\
&= \frac{\sigma_e^2(\phi^2 - 2\phi + 1 + 1 - \phi^2)}{1-\phi^2} \\
&= \frac{2\sigma_e^2(1-\phi)}{1-\phi^2} \\
&= \frac{2\sigma_e^2}{1+\phi}
\end{aligned}
$$

0.5 4.7 几种模型的特性

a

MA(1) 仅在滞后 1 存在非零相关性。相关系数可正可负，但必介于-0.5 和 0.5 之间。

b

MA(2) 仅在滞后 1 和 2 存在非零自相关性。序列形态取决于系数的具体数值。

c

AR(1) 从滞后 0 期开始指数衰减的相关性。

$$
\begin{cases}
\phi > 0, \text{此时所有自相关系数均为正数;} \\
\phi < 0, \text{此时自相关系数按负、正、负等规律交替出现.}
\end{cases}
$$

d

AR(2) 自相关函数（ACF）具有不同的模式，取决于根是复数还是实数。

e

ARMA(1,1) 从滞后 1 开始指数衰减的相关性。

0.6 4.8 AR(2) 模型

首先，我们有方差表达式：

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(\phi_2 Y_{t-2} + e_t) = \phi_2^2 \text{Var} Y_{t-2} + \sigma_e^2$$

假设平稳性，则上式等价于：

$$\text{Var}(Y_{t-2}) = \phi_2^2 \text{Var}(Y_{t-2}) + \sigma_e^2 \iff \sigma_e^2 = (1-\phi_2^2)\text{Var}(Y_{t-2}) \iff \text{Var}(Y_{t-2}) = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi_2^2}$$

这个等式要求 $-1 < \phi_2 < 1$，因为 $\text{Var}(Y_{t-2})$ 必须大于等于 0。

0.7 4.9 AR(2) 过程

a

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= 0.6\rho_0 + 0.3\rho_{-1} = 0.6 + 0.3\rho_1 = 0.8571 \\
\rho_2 &= 0.6\rho_1 + 0.3\rho_0 = 0.81426 \\
\rho_3 &= 0.6\rho_2 + 0.3\rho_1 = 0.7457
\end{aligned}$$

特征方程的根由下式给出：

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} = \frac{0.6 \pm \sqrt{0.6 + 4 \times 0.3}}{-2 \times 0.3} = -1 \pm 2.0817 = \{1.0817, -3.0817\}.$$

由于这两个根的绝对值均大于 1，它们是实数。接下来，我们绘制理论上的自相关函数 (4).

```
tacf(ar = c(0.6, 0.3))
```

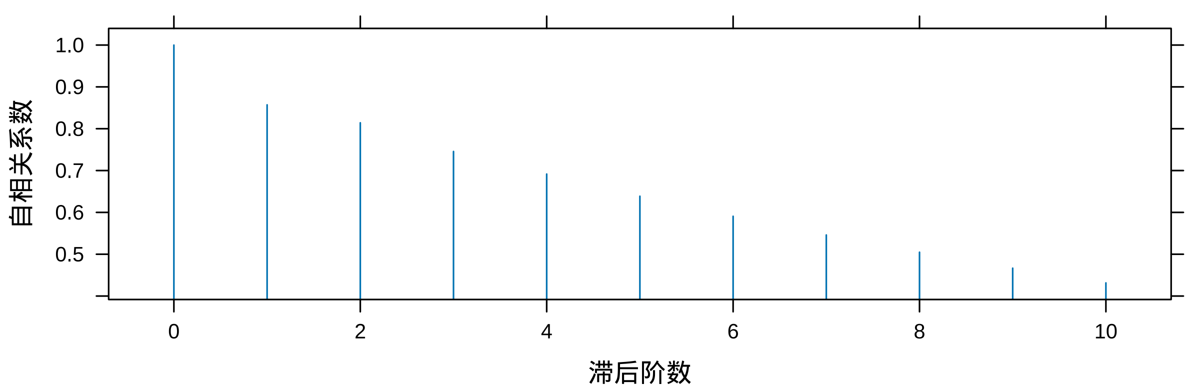


Figure 4: AR(2) 模型自相关函数，其中 \$ { }_1 = 0.6,{ }_2 = 0.3\$

b

接下来，我们编写一个函数来完成这个任务。

```r
ar2solver <- function(phi1, phi2) {
  roots <- polyroot(c(1, -phi1, -phi2))
  cat(" 根:\t\t", roots, "\n")

  if (any(Im(roots) > sqrt(.Machine$double.eps))) {
    damp <- sqrt(-phi2)
    freq <- acos(phi1 / (2 * damp))

    cat(" 衰减因子:\t", damp, "\n")
    cat(" 频率:\t\t", freq, "\n")
  }

  tacf(ar = c(phi1, phi2))
}
```

```r
ar2solver(-0.4, 0.5)
```

```
## 根:         -1.069694+0i 1.869694+0i
```

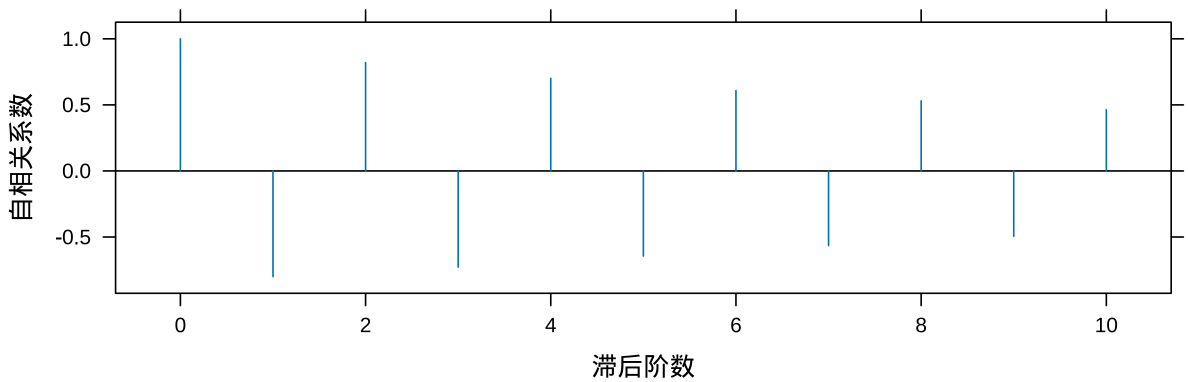


Figure 5: AR(2) 模型自相关函数，其中 $\phi_1 = -0.4, \phi_2 = 0.5$。

c

```r
ar2solver(1.2, -0.7)
```

```
## 根:         0.8571429+0.8329931i 0.8571429-0.8329931i
## 衰减因子:     0.83666
## 频率:        0.7711105
```

d

```r
ar2solver(-1, -0.6)
```

```
## 根:         -0.8333333+0.9860133i -0.8333333-0.9860133i
## 衰减因子:     0.7745967
## 频率:        2.27247
```

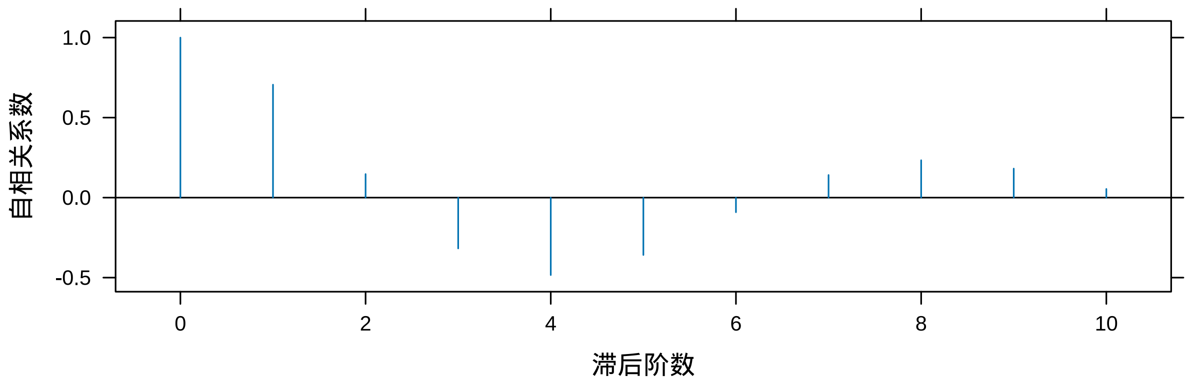


Figure 6: AR(2) 模型自相关函数，其中 $\phi_1 = 1.2, \phi_2 = -0.7$。

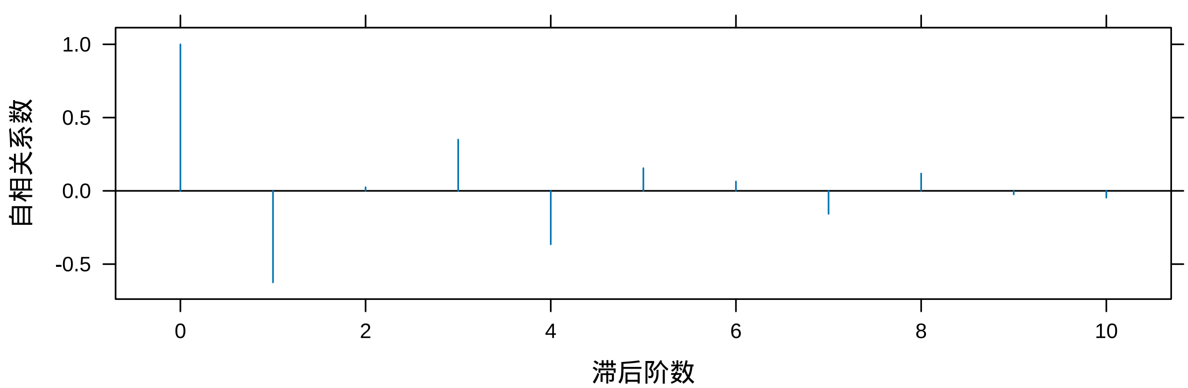


Figure 7: AR(2) 模型自相关函数，其中 $\phi_1 = -1, \phi_2 = -0.6$。

e

```r
ar2solver(0.5, -0.9)
```

```
## 根:         0.277778+1.016834i 0.277778-1.016834i
## 衰减因子:     0.9486833
## 频率:        1.304124
```

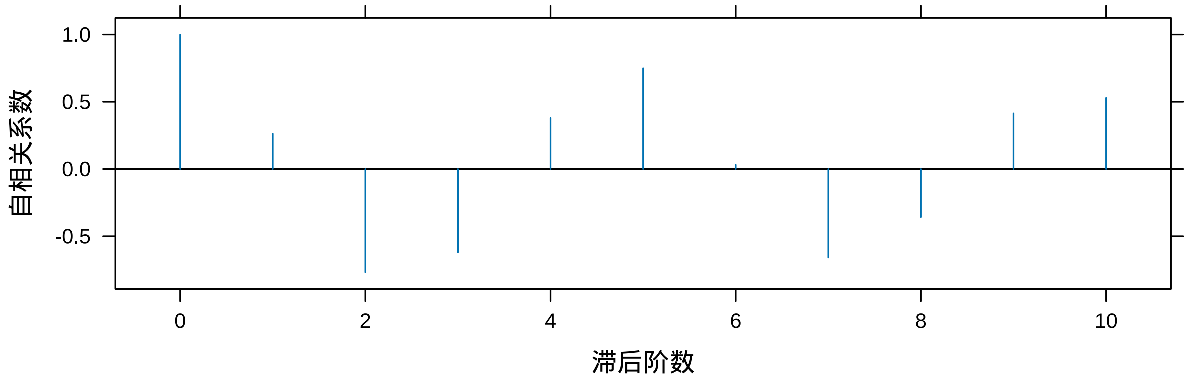


Figure 8: AR(2) 模型自相关函数，其中 $\phi_1 = 0.5, \phi_2 = -0.9$。

f

```r
ar2solver(-0.5, -0.6)
```

```
## 根:         -0.416667+1.221907i -0.416667-1.221907i
## 衰减因子:     0.7745967
## 频率:        1.899428
```

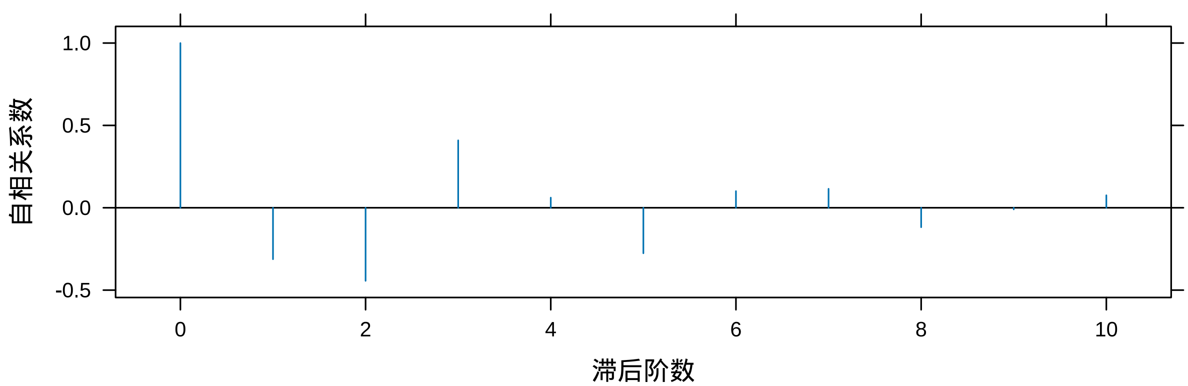


Figure 9: AR(2) 模型自相关函数，其中 $\phi_1 = -0.5, \phi_2 = -0.6$。

0.8 4.10 ARMA(1,1) 模型

a

```r
tacf(ar = 0.7, ma = -0.4)
```

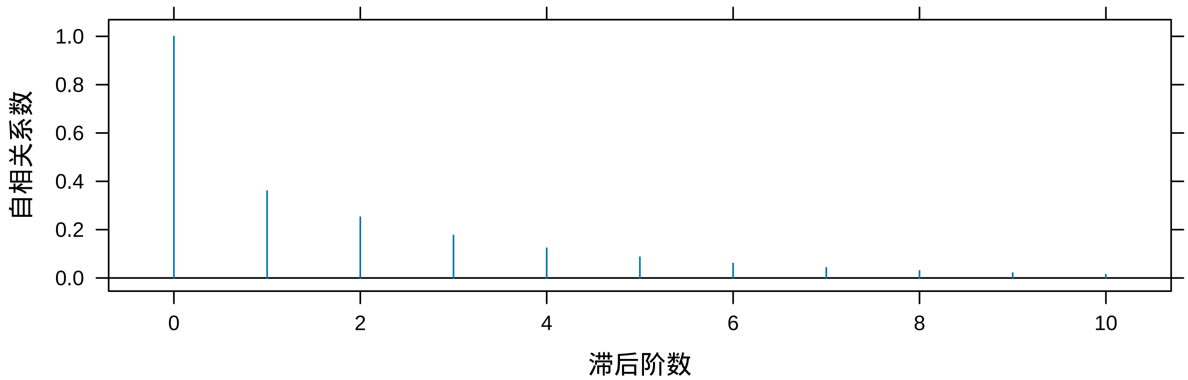


Figure 10: ARMA(1,1) 模型自相关函数，其中 $\phi = 0.7$ 和 $\theta = 0.4$。

b

```r
tacf(ar = 0.7, ma = 0.4)
```

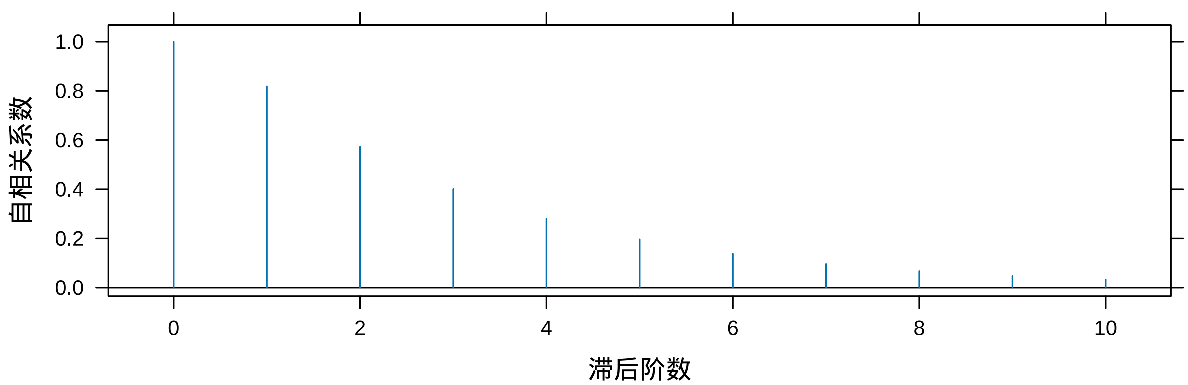


Figure 11: ARMA(1,1) 模型自相关函数，其中 $\phi = 0.7$ 和 $\theta = 0.4$。

0.9 4.12. 两个 MA(2) 过程

a

对于 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ 的情况，

$$\rho_k = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - 1\right)}{1 + \frac{2}{36}} = -\frac{5}{38}.$$

而对于 $\theta_1 = -1$ 和 $\theta_2 = 6$，

$$\rho_k = \frac{1-6}{1+1^2+36} = -\frac{5}{38}.$$

b

对于 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ 的情况，其特征根计算如下：

$$\frac{\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + 4 \times \frac{1}{6}}}{-2 \times \frac{1}{6}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{25}{36}}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \{-3, -2\}$$

而当 $\theta_1 = -1$ 和 $\theta_2 = 6$ 时，

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\times 6}}{-2\times 6} = \frac{-1 \pm 5}{-12} = \frac{1}{12} \pm \frac{5}{12} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

0.10 4.14. 零均值平稳过程

我们令 $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$，然后有

$$\begin{aligned}
e_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} \quad \text{展开得到} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j Y_{t-j} + \theta^0 Y_{t-0} \\
&\iff \\
Y_t &= e_t - \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j Y_{t-j}
\end{aligned}$$

这等价于

$$Y_t = \mu_0 + (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \cdots + \theta^n B^n) e_t$$

这是 MA(1) 过程的定义式，其中 B 是滞后算子，满足 $Y_t B^k = Y_{t-k}$。

0.11 4.16. 非平稳 AR(1) 过程

a

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi Y_{t-1} + e_t \implies \\
-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t+j} &= 3\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t-1+j}\right) + e_t \\
-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} e_{t+j} &= -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t-1+j} + \frac{1}{3} e_t \\
-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} e_{t+j} &= -\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t-1+j} \\
-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} e_{t+j} &= -\sum_{j+1=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} e_{t+j}
\end{aligned}$$

b

$$\mathrm{E}(Y_t) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t+j}\right) = 0$$

由于所有项都是不相关的白噪声。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \\
&\mathrm{Cov}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t+j}, \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j e_{t+j-1}\right) = \\
&\mathrm{Cov}\left(-\frac{1}{3}e_{t+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 e_{t+2} - \cdots - \left(\frac{1}{3}\right)^n e_{t+n}, -\frac{1}{3}e_t - \left(\frac{1}{3}\right)^2 e_{t+1} - \cdots - \left(\frac{1}{3}\right)^n e_{t+n-1}\right) = \\
&\mathrm{Cov}\left(-\frac{1}{3}e_{t+1}, -\frac{1}{3^2}e_{t+1}\right) + \mathrm{Cov}\left(-\frac{1}{3^2}e_{t+2}, -\frac{1}{3^3}e_{t+2}\right) + \cdots + \mathrm{Cov}\left(-\frac{1}{3^n}e_{t+n}, -\frac{1}{3^{n+1}}e_{t+n}\right) = \\
&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}\left(-\frac{1}{3^i}e_{t+i}, -\frac{1}{3^{i+1}}e_{t+i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Cov}\left(e_{t+i}, e_{t+i}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3^i}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3^{i+1}}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3^{2i+1}}\cdot\mathrm{Var}(e_{t+i})\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_e^2}{3^{2i+1}}
\end{aligned}$$

这个表达式并不随时间 t 变化。

c

因为 Y_t 依赖于未来的观测值所以模型不令人满意。

0.12 4.17.AR(1) 过程

a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(10\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + e_{t-1} + \frac{1}{2}e_{t-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_{t-3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e_{t-n}\right) + e_{t-1} = \\
&10\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{2}e_{t-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_{t-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 e_{t-3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n e_{t-n} + e_{t-1} = \\
&10\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + e_{t-1} + \frac{1}{2}e_{t-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_{t-3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e_{t-n}
\end{aligned}$$

b

$\mathrm{E}(Y_t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 随着 t 的变化而变化，因此是非平稳的。

0.13 4.18. 平稳的 AR(1)

a

$$\mathrm{E}(W_t) = \mathrm{E}(Y_t + c\phi^t) = \mathrm{E}(Y_t) + \mathrm{E}(c\phi^t) = 0 + c\phi^t = c\phi^t$$

b

$$\phi(Y_{t-1} + c\phi^{t-1}) + e_t = \phi Y_{t-1} + c\phi^t + e_t = \phi\left(\frac{Y_t - e_t}{\phi}\right) + c\phi^t + e_t = Y_t + c\phi^t$$

c

不是，$\mathrm{E}(W_t)$ 不独立于 t。

0.14 4.21. 隐藏的 ARMA

a

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \mathrm{Cov}(e_{t-1} - e_{t-2} + 0.5e_{t-3}, e_{t-1-k} - e_{t-2-k} + 0.5e_{t-3-k}) =$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_e^2 + \sigma_e^2 + 0.25\sigma_e^2 = 2.25\sigma_e^2 & k=0 \\ -\sigma_e^2 - 0.5\sigma_e^2 = -1.5\sigma_e^2 & k=1 \\ 0.5\sigma_e^2 & k=2 \end{cases}$$

b

从某种意义上讲，这是一个 ARMA(p,q) 模型，其中 $p = 0$，$q = 2$，换言之实际上这是一个 MA(2) 过程：$Y_t = e_t - e_{t-1} + 0.5e_{t-2}$，其参数为 $\theta_1 = 1$，$\theta_2 = -0.5$。

0.15 4.22. 证明陈述

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p \implies x^k \left(\left(\frac{1}{k}\right)^p - \phi_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{p-1} \cdots - \phi_p \right)$$

因此，如果 $x_1 = G$ 是上述方程的一个根，则 $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{G}$ 一定是以下方程的根：

$$x^p - \phi_1 x^{p-1} - \phi_2 x^{p-2} - \cdots - \phi_p$$