

Teoria sterowania (TST)

PROJEKT 1

Arkadiusz Piórkowski

2 listopada 2017

Zadanie

Cel projektu

Celem zadania jest zbadanie i zilustrowanie dynamiki układu liniowego

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t), x(0) = x_0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

w przestrzeni fazowej.

Wymagania

Badania i symulacje należy wykonać w środowisku Matlab lub Octave, wykorzystując dostępne procedury numeryczne i graficzne. Stworzony skrypt powinien umożliwiać:

- konstruowanie macierzy o zadanym widmie,
- konstruowanie zbioru \mathbf{Z} punktów początkowych rozłożonych na okręgu,
- obliczanie trajektorii w przestrzeni stanów (portret fazowy),
- obliczanie wektorów własnych ν_i macierzy \mathbf{A} ,
- ilustrację obrazu \mathbf{AZ} zbioru \mathbf{Z} punktów położonych na okręgu jednostkowym,
- ilustrację wektorów $\lambda_i \nu_i, \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}), i = 1, 2$,
- ilustrację pola wektorowego okrślającego trajektorie układu.

Zadania badawcze

Należy wykonać następujące zadania:

- podać interpretację wartości własnych i wektorów własnych,
- zademonstrować zależność dynamiki układu od widma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_A(\lambda) = 0\}$ i wektorów własnych macierzy \mathbf{A} .

Sprawozdanie

Wstęp teoretyczny

Postać rozwiązania równania różnicowego liniowego:

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t), x(0) = x_0$$

jest następująca:

$$x(t) = \mathbf{A}^t x_0$$

Zatem dynamika układu jest określona przez własności ciągu $\mathbf{A}^t, t \rightarrow \infty$. Własności tego ciągu są określone przez widmo macierzy \mathbf{A} (zbiór pierwiastków równania charakterystycznego $\sigma(\mathbf{A}) = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_A(z) = 0\}$). Z pierwiastkami równania charakterystycznego są związane wektory własne: $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}x = \lambda x \wedge x \neq 0$.

W celu łatwiejszej analizy można skorzystać z podobieństwa macierzy \mathbf{A} i \mathbf{J} , które spełniają następujące równania:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} \equiv \mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Podobieństwo nie zmienia widma

$$\mathbf{A}x = \lambda x \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{P}^{-1}x) = \lambda(\mathbf{P}^{-1}x)$$

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{J})$$

, ale transformuje wektory własne odwracalną macierzą zmiany bazy: $z = \mathbf{P}^{-1}x$.

Dynamika długookresowa jest określona przez widmo $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{J})$, o czym świadczy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^2\mathbf{P}^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{P}\mathbf{J}^t\mathbf{P}^{-1}$$

Postać diagonalna macierzy ułatwia analizę dynamiki układu, ale nie każdą macierz można zdiagonalizować. Istnieje jednak postać macierzy bliskiej diagonalnej, która zachowuje widmo. Są to macierze Jordana, które są podobne do dowolnej macierzy kwadratowej. Macierze Jordana \mathbf{J} posiada na diagonalu klatki Jordana \mathbf{J}_i , które są związane z wartościami własnymi λ_i :

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_m), 1 \leq m \leq n$$

$$\mathbf{J}_i = [b_{kl}]_{s_i \times s_i} = \lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{N}_i, \sum_{i=1}^m s_i = n$$

, gdzie macierz \mathbf{N}_i jest macierzą nilpotentną posiadającą jedynki powyżej diagonal:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{s_i \times s_i}$$

1 Konstrukowanie macierzy \mathbf{A} o zadanym widmie i obliczanie wektorów własnych ν_i macierzy

Do konstruowania macierzy o zadanym widmie posłużono się podobieństwem macierzy \mathbf{A} i macierzy Jordana \mathbf{J} , o określonej strukturze

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

, gdzie :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Macierz zmiany bazy \mathbf{P} musi być macierzą nieosobliwą.

Zatem ciąg $\mathbf{A}^t, t \rightarrow \infty$ jest zależny od wartości własnych:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

Dodatkowo umożliwiono tworzenie macierzy o zespolonych sprzężonych wartościach własnych:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Widmo takiej macierzy ma następującą postać

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{a \pm bi\}$$

Poniżej przedstawiono fragment kodu umożliwiający tworzenie macierzy o zadanym widmie:

```
%% Konstrukowanie macierzy o zadanym widmie
clear variables;
J = [ 0.2 0; 0 0.2]; %widmo rzeczywiste
P = [ 3 13; 11 1];
A = P*J/P; %macierz o zadanym widmie sigma(J)
%A = [0.4 0.7; -0.7 0.4]; %A=[a b;-b,a] => widmo a+-ib;
```

Obliczanie wektorów własnych wykonano za pomocą polecenia programu Matlab *eig()* :

```
%% obliczanie wektorow wlasnych v_i macierzy A
%wartosci wlasne
[L] = eig(A);
%wektory wlasne(kolumnowo) i wartosci wlasne w postaci macierzy Jordana
[V, J] = eig(A);
```

, gdzie:

L - wektor wartości własnych

V - macierz wektorów własnych(kolumnowo)

J - macierz diagonalna z wartościami własnymi.

2 Konstrukowanie zbioru Z punktów początkowych rozłożonych na okręgu

Zbiór punktów początkowych jest rozłożony co $\frac{\pi}{4}$ od 0 do 2π na okręgu jednostkowym. Fragment kodu:

```
%% Konstrukowanie zbioru Z punktów początkowych rozłożonych na okręgu
theta=0:pi/100:2*pi;
radius=1;
z=radius*exp(1i*theta);
Z=[real(z);imag(z)];

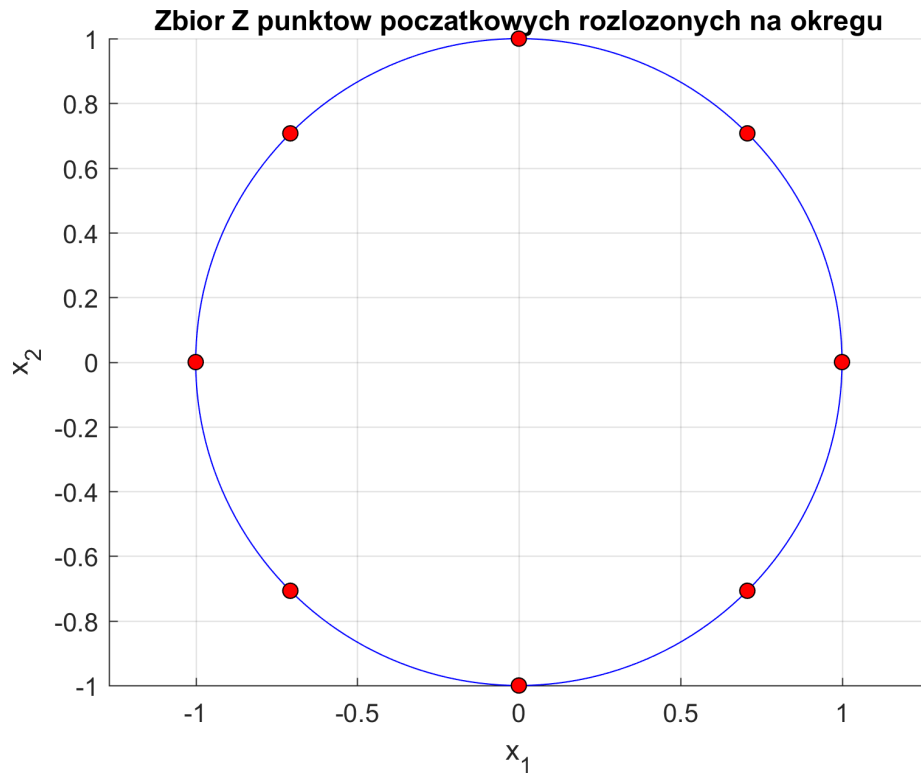
points=0:pi/4:2*pi;
```

```

x0=radius*exp(1i*points);
X0=[real(x0);imag(x0)];

fig1=figure(1);hold on; grid on;
plot(Z(1,:),Z(2,:), 'b',X0(1,:),X0(2,:), 'ko', 'MarkerFace','r');
axis equal;
hold on;

```



Rysunek 1: Zbiór punktów początkowych

3 Obliczanie trajektorii układu (rozwiązań równania stanu) dla wybranych punktów początkowych i pola wektorowego

Wyznaczenie trajektorii układu polegało na rozwiązaniu równania różnicowego liniowego dla kolejnych chwil czasu t :

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t), x(0) = x_0$$

, co sprowadza się do obliczenia kolejnych wyrazów ciągu:

$$x(t) = \mathbf{A}^t x_0$$

Fragment kodu realizujący podane zadanie:

```
%% obliczanie trajektorii układu (rozwiązania r-nia stanu) dla wybranych punktów początkowych
```

```

iter=40;
x1=zeros(iter,length(points));
x2=zeros(iter,length(points));

```

```
for i=1:length(points)
```

```

for j=1:iter
    if j==1
        x1(j,i)=X0(1,i);
        x2(j,i)=X0(2,i);
    else
        x1(j,i)=A(1,1)*x1(j-1,i) + A(1,2)*x2(j-1,i);
        x2(j,i)=A(2,1)*x1(j-1,i) + A(2,2)*x2(j-1,i);
    end
end
end
end

```

Pole wektorowe określające trajektorie układu obliczono według wzoru:

$$x(t+1) = \mathbf{A}x(t);$$

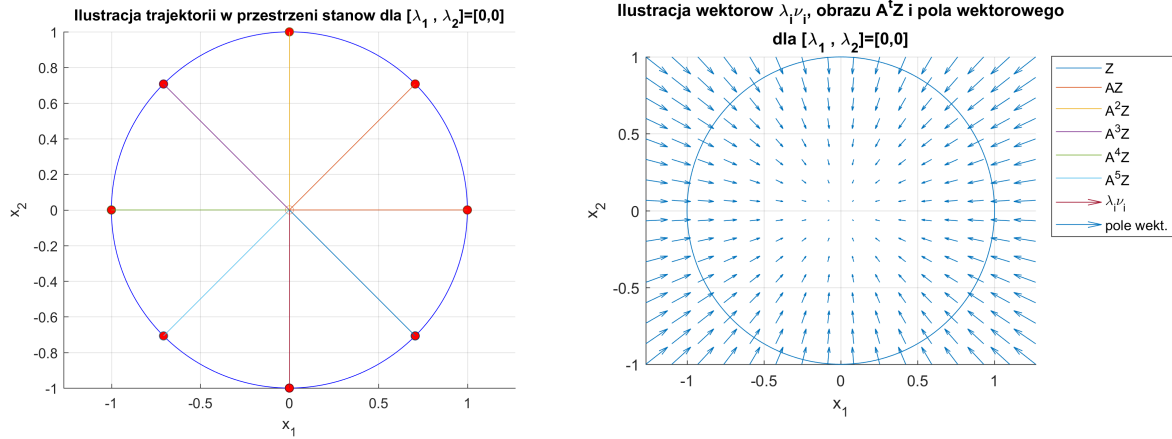
$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})x(t)$$

4 Ilustracja otrzymanych wyników

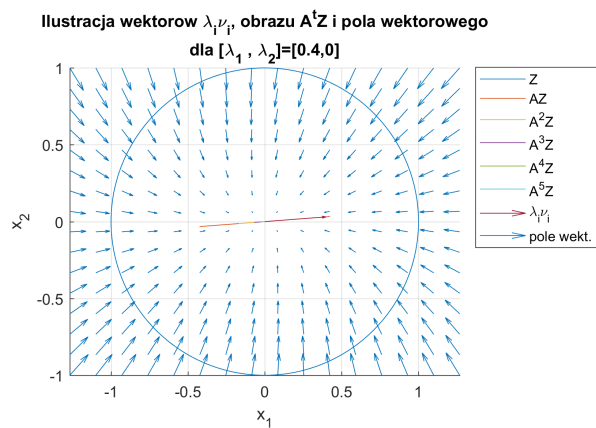
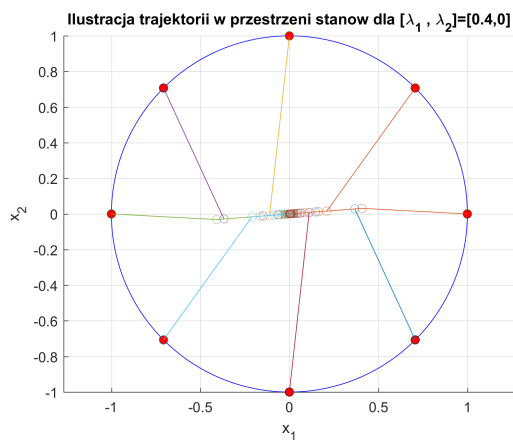
W danym punkcie przedstawiono ilustracje:

- trajektorii w przestrzeni stanów(portret fazowy),
- obrazu $\mathbf{A}\mathbf{Z}$ zbioru \mathbf{Z} punktów położonych na okręgu jednostkowym,
- wektorów $\lambda_i \nu_i, \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}), i = 1, 2$,
- pola wektorowego określającego trajektorie układu,

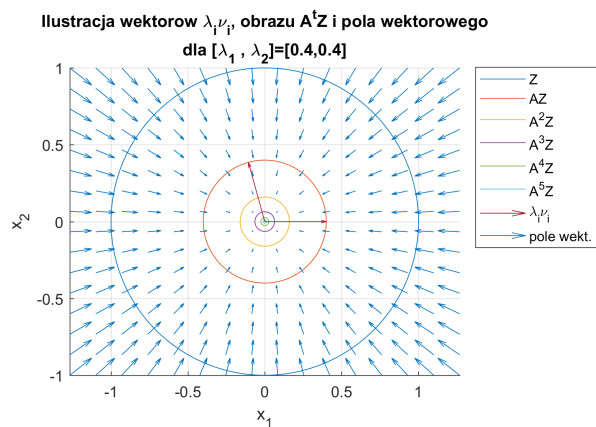
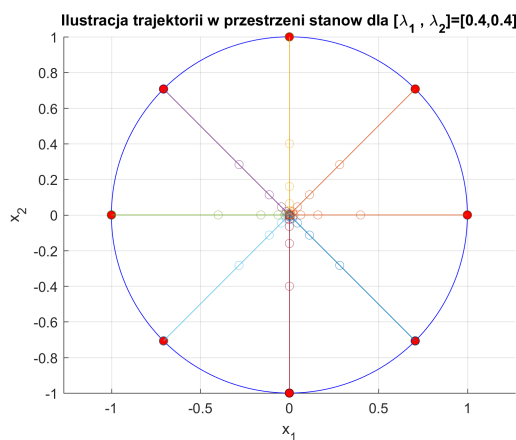
dla różnych wartości własnych macierzy \mathbf{A} (widma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_A(\lambda) = 0\}$).



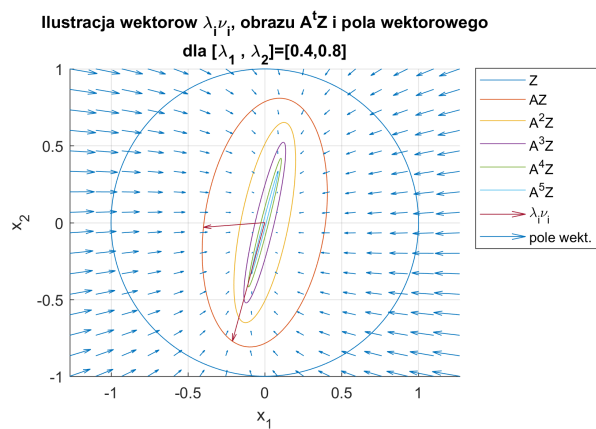
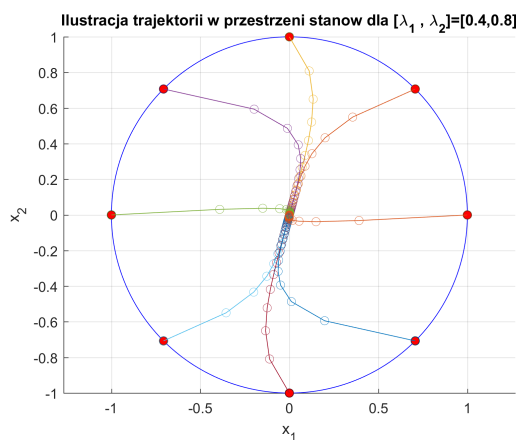
Rysunek 2: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0, 0]$



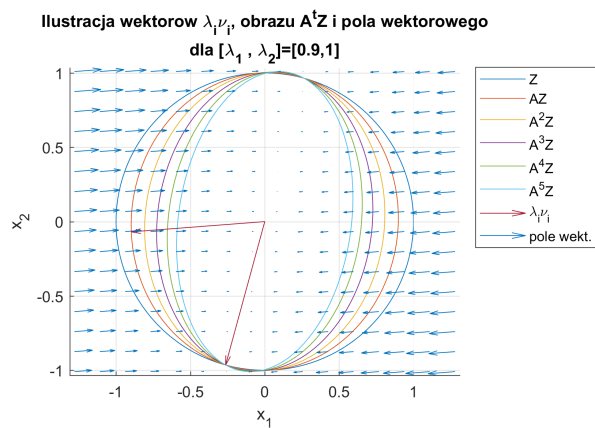
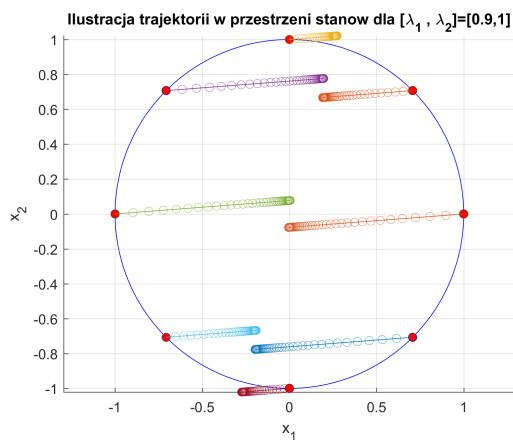
Rysunek 3: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.4, 0]$



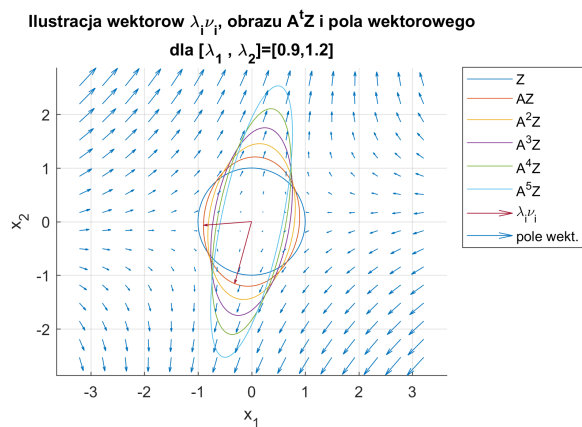
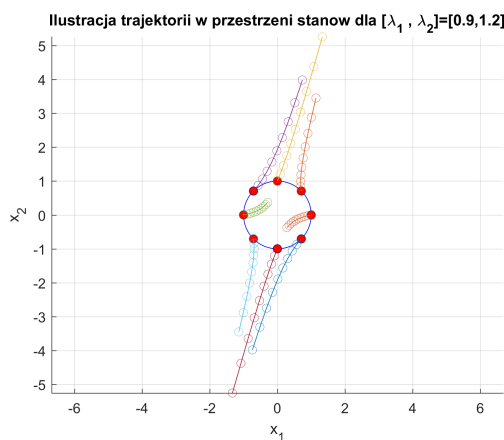
Rysunek 4: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.4, 0.4]$



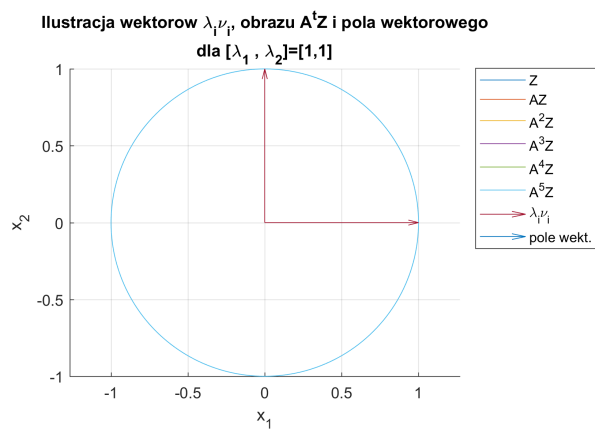
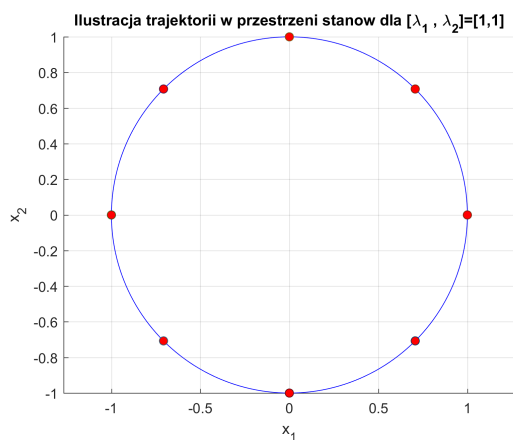
Rysunek 5: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.4, 0.8]$



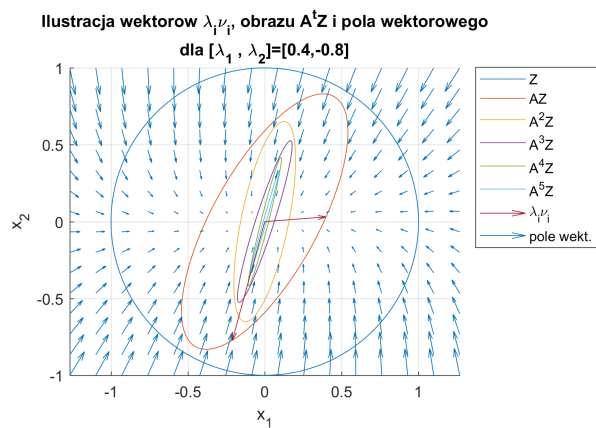
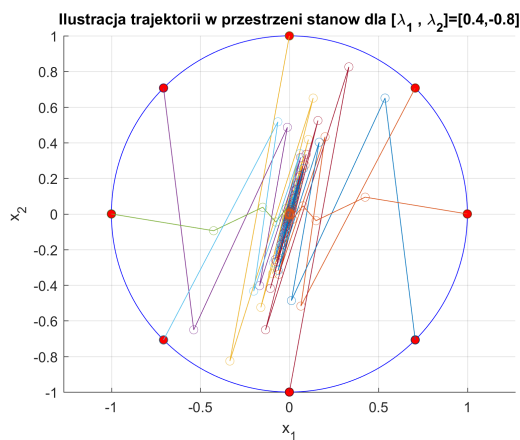
Rysunek 6: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.9, 1]$



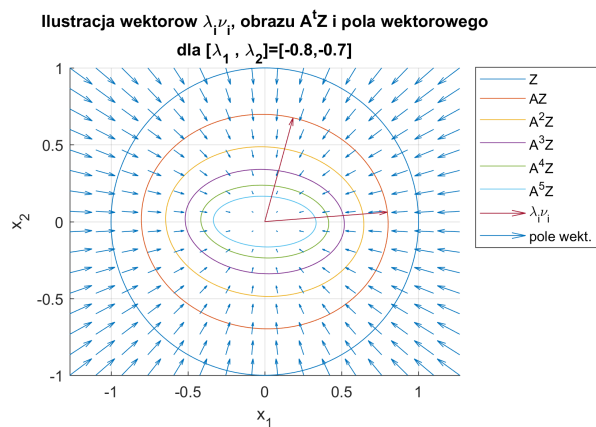
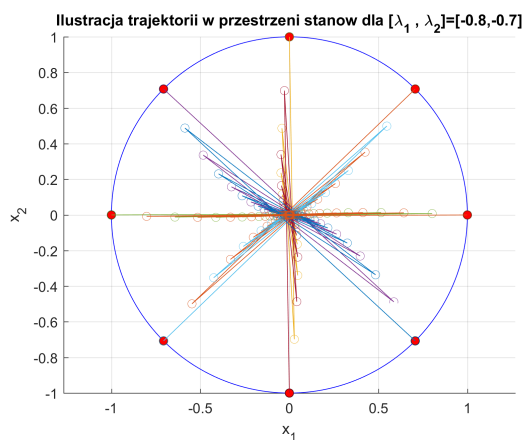
Rysunek 7: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.9, 1.2]$



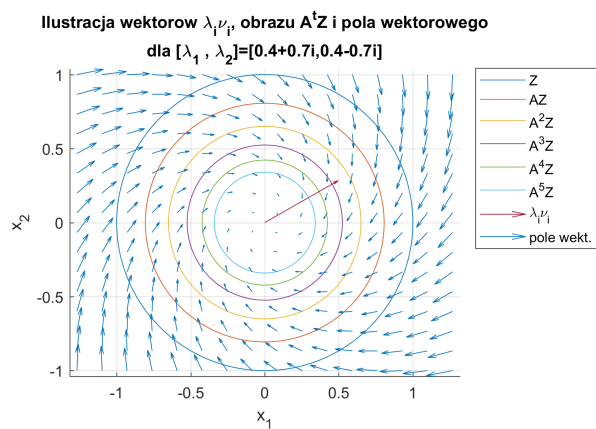
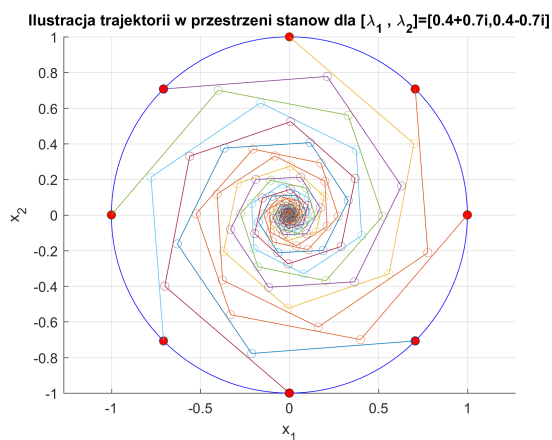
Rysunek 8: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [1, 1]$



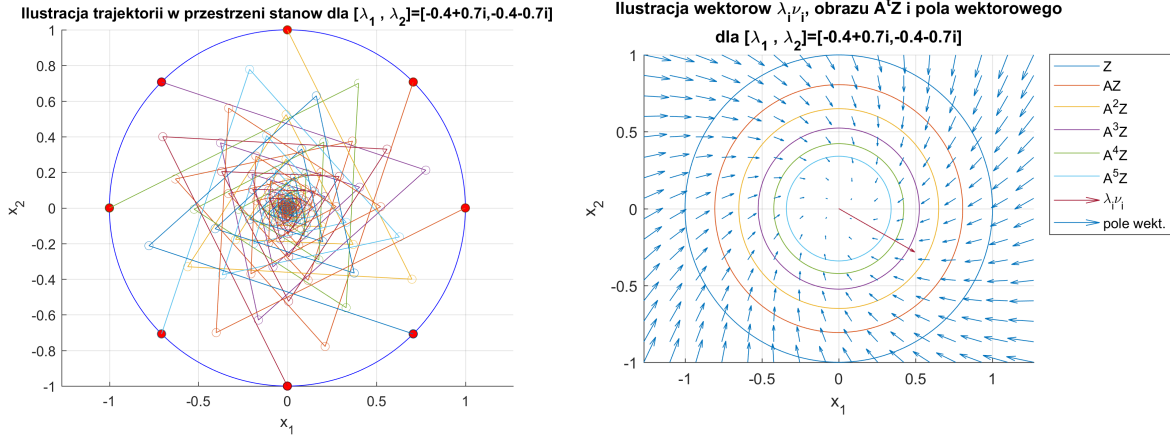
Rysunek 9: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.4, -0.8]$



Rysunek 10: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [-0.8, -0.7]$



Rysunek 11: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.4 + 0.7i, 0.4 - 0.7i]$



Rysunek 12: Wartości własne $[\lambda_1, \lambda_2] = [-0.4 + 0.7i, -0.4 - 0.7i]$

5 Wnioski

Z zamieszczonych w poprzednim punkcie ilustracji można wyciągnąć następujące wnioski:

- Punkt równowagi układu jest stabilny asymptotycznie (układ jest zbieżny), gdy moduły wartości własnych macierzy \mathbf{A} są mniejsze od 1 (znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego). Odpowiada to położeniu biegunów transmitancji układów dyskretnych;
- Układ jest rozbieżny (punkt równowagi układu jest niestabilny), gdy moduł dowolnej wartości własnej macierzy \mathbf{A} jest większy od 1;
- Dla wartości własnych będących liczbami zespolonymi sprzężonymi (ze względu na twierdzenie o pierwiastkach wielomianu o współczynnikach zespolonych) występuje charakterystyczna spiralna trajektoria układu, a wektory własne posiadają współrzędne zespolone.
- W przypadku występowania chociaż jednej wartości własnej o ujemnej części rzeczywistej, można zauważyć oscylacje wokół punktu zbieżności.
- W przypadku, gdy jedna z wartości własnych znajduje się na okręgu jednostkowym, zaś reszta pozostaje wewnątrz okręgu jednostkowego układ jest zbieżny, ale wartość punktu zbieżności zależy od punktu startowego (ważne jest też również znak części rzeczywistej wartości własnej na okręgu - dla dodatnich dochodzimy do punktu zbieżności, zaś dla ujemnych osiągamy oscylacje między dwoma punktami).
- Podczas, gdy wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{A} znajdują się na okręgu jednostkowym występują oscylacje między punktami (dla wartości ujemnych części rzeczywistych), bądź pozostanie w punkcie początkowym.
- Zbieżność jest zależna od widma macierzy \mathbf{A} , a odalenie wartości własnej od środka okręgu jednostkowego decyduje o szybkości zbiegania (rośnie wraz ze zbliżaniem się do środka). Dla wartości własnych \mathbf{A} równych 0 macierz \mathbf{A} jest nilpotentna i układ z czasem dyskretnym zbiega do zera w skończonej liczbie kroków (z tw. Cayleya-Hamiltona). Dla równych wartości własnych zbieżność w każdym kierunku jest taka sama.

Zatem:

$$\lambda_i = \begin{cases} 0, & \text{dla } |\lambda_i| < 1 \\ \infty, & \text{dla } |\lambda_i| > 1 \end{cases}$$

Wektory własne ν_i to wektory, które po przemnożeniu przez macierz \mathbf{A} nie zmieniają swojego kierunku a jedynie zostają przeskalowane przez wartość równą odpowiadającej mu wartości własnej λ_i :

$$\mathbf{A}\nu_i = \lambda_i\nu_i$$

Zwiększanie bądź zmniejszanie wartości własnych wpływa przy przekształceniu okręgu jednostkowego przez macierz \mathbf{A} odpowiednio na rozciąganie bądź zwężanie elipsy w kierunkach określonych przez wektory własne związane z tymi wartościami. Jeśli iloczyn wektora własnego i odpowiadającej mu wartości własnej $\lambda_i\nu_i$ jest wektorem o długości większej od 1 to układ jest rozbieżny.