

Festkörpermechanik und Materialtheorie für nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen

Frank Ihlenburg

7. März 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 FEM für Festkörper	9
1.1 Modellbildung	9
1.2 Kontinuumsmechanik und Strukturmechanik	10
1.3 Nichtlinearitäten	11
1.4 Diskretisierung mit FEM	13
1.5 Lösungsverfahren	14
1.6 Beispiele	21
1.7 Aufgaben	27
2 Operatoren und Tensoren	29
2.1 Kontinuierliche und diskrete Mengen	29
2.2 Funktionen	30
2.3 Analytische und diskrete Modelle der Mechanik	32
2.4 Funktionale und Operatoren	33
2.5 Matrizen und Vektoren	35
2.6 Lineare Räume und lineare Abbildungen	41
2.7 Tensoren	44
3 Verformungskinematik	61
3.1 Annahmen und Einführungsbeispiele	61
3.2 Euler'sche und Lagrange'sche Beschreibung der Bewegung	64
3.3 Funktionen und Ableitungen	66
3.4 Deformations- und Verschiebungsgradient	69
3.5 Cauchy-Green Tensoren und Strecktensoren	71
3.6 Polare Zerlegung des Deformationstensors	73
3.7 Dehnungstensoren	77
3.8 Dyadische Darstellung der Tensoren	83
3.9 Volumen- und Flächenänderung	85
3.10 Verformungs- und Dehngeschwindigkeit	88
3.11 Koordinatentransformation und Objektivität	92
3.12 Push-forward, Pull-back und Lie-Ableitung	97
3.13 Beispiele	99
4 Spannungen und Gleichgewicht	101
4.1 Betrachtung in der Momentankonfiguration	101
4.2 Rückrechnung auf die Ausgangskonfiguration	107

4.3	Objektivität der Spannungstensoren	110
4.4	Beispiele	111
5	Rheologische Modelle	115
5.1	Werkstoffe im physikalischen Experiment	115
5.2	Rheologische Elemente	117
5.3	Elastizität und Viskoclastizität	119
5.4	Plastizität	135
5.5	Viskoplastizität	146
5.6	Approximation der Fließkurven	150
6	Klassische Materialgleichungen	155
6.1	Effektivgrößen der Gestaltänderung	155
6.2	Elastizität und Viskoclastizität	158
6.3	Plastizität	163
6.4	Schädigung und Versagen	176

Einleitung

Lineare Systeme werden allgemein über die Gültigkeit des Superpositionsprinzips definiert. Der lineare Zusammenhang zwischen In- und Outputvariablen wird in **X-Y** Diagrammen als eine Gerade bzw. eine n -dimensionale Ebenen dargestellt. Ist der lineare Zusammenhang zwischen In- und Output nicht gegeben, heißt ein System nichtlinear.

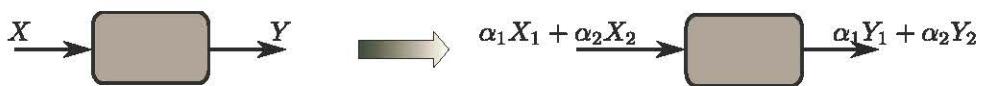


Abbildung 1: In homogenen linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip.

Die Mechanik betrachtet die Bewegung von Körpern unter der Wirkung von Kräften. Die Kräfte werden durch Vektoren \mathbf{f} und die die Bewegung wird durch Verschiebungsvektoren \mathbf{u} gekennzeichnet. Die Kraft-Verschiebungsdiagramme linearer mechanischer Systeme sind Geraden bzw. Ebenen. Bei der Wirkung von Kräften wird zwischen Starrkörpern und Festkörpern unterschieden. In Starrkörpern bleiben während der Bewegung die Abstände zwischen beliebigen zwei Punkten konstant. Die Verformung von Festkörpern wird dahingegen über die Relativverschiebung benachbarter Punkte, d.h. die Änderung des Abstands zwischen ihnen bei der Bewegung, charakterisiert. Diese Relativverschiebungen werden in der technischen Mechanik als Verzerrungen bzw. Dehnungen bezeichnet. In statisch bestimmt gelagerten Festkörpern ist die Verschiebung von inneren Punkten immer mit einer Verformung verbunden.

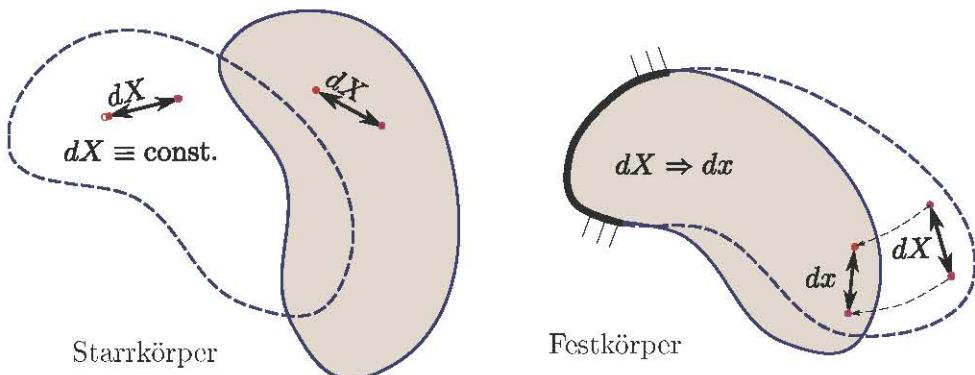


Abbildung 2: Bei der Starrkörpersverschiebung bleiben die Abstände $d\mathbf{X}$ zwischen beliebigen zwei Punkten des Körpers konstant. Bei der Festkörperverformung ändern sich die Abstände von $d\mathbf{X}$ auf $d\mathbf{x}$.

In den Einführungskursen zur Finite-Elemente Methode (FEM) werden lineare Modelle der Technischen Mechanik (Elastostatik und -dynamik) diskretisiert. Dabei werden *differentielle Beziehungen und kinematische Gleichungen* (z.B. Randbedingungen) *diskretisiert*, d.h. in algebraische Gleichungen für die Knotenfreiheitsgrade überführt. Mit den linearen Modellannahmen

1. **Kinematik:** Die Verzerrungen hängen linear von den Verschiebungen ab.
2. **Material:** Die Spannungen hängen linear von den Verzerrungen ab.
3. **Kontakt:** Die Randbedingungen ändern sich durch die Verformung nicht.

wird in der Elastostatik aus dem Gleichgewicht zwischen den inneren Kräften (Spannungen) und den äußeren Lasten mit der FEM das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ erzeugt, in dem die Knotenverschiebungen \mathbf{u} *linear* von den externen Knotenkräften \mathbf{f} abhängen. Das Gleichgewicht wird dabei i.d.R. nach der Theorie erster Ordnung, also am unverformten Bauteil, aufgestellt. Sowohl die Lagerbedingungen als auch die Lasten sind während der Berechnung unveränderlich.

Für die lineare Kinematik der Verformung müssen die Verschiebungen so klein sein, daß quadratische Terme im Dehnungstensor gegenüber den linearen Termen vernachlässigt werden können (Annahme *kleiner Verschiebungen*). Die Verdrehungen φ (wie sie z.B. in der Balken- oder Schalentheorie auftreten) erfüllen in linearen Modellen die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ (Annahme *kleiner Verdrehungen* bzw. kleiner Rotationen). Sind eine oder beide Annahmen nicht verletzt, ist das Berechnungsmodell *geometrisch nichtlinear*.

Die Annahme des linearen Materialverhaltens wird durch das linear-elastische Stoffgesetz erfüllt. Dieses Materialmodell ist z.B. für Metalle unterhalb der Fließgrenze durch die Werkstoffprüfung validiert. Duktile Stähle haben auch noch Tragreserven oberhalb der Fließgrenze. Sie verhalten sich dann aber nicht mehr elastisch, da die Verformung nach Entlastung nicht komplett zurückgeht. Für nichtmetallische Werkstoffe stellt die linear-elastische Annahme in der Regel nur eine grobe Näherung dar. Die Versuchs-Diagramme von Kunststoffen wie Elastomeren oder Polymeren weisen schon bei kleinen Verformungen signifikante Nichtlinearitäten auf. In vielen Simulationen, z.B. in numerischen Crash-Tests, ist zudem das Materialverhalten bei großen Verformungen zu berücksichtigen. Die Berechnungsmodelle sind dann sowohl geometrisch als auch *physikalisch nichtlinear*.

Insbesondere in Crash-Tests ändern sich auch die Randbedingungen während der Simulation. Dies ist immer dann der Fall, wenn sich Lagerungen oder konstruktive Verbindungen unter Last lösen oder Bauteile durch Verformung miteinander in Kontakt kommen. Diese Abhängigkeit der Randbedingungen von der Verschiebung \mathbf{u} führt ebenfalls zu nichtlinearen Kraft-Verschiebungs-Diagrammen.

Lineare Berechnungsmodelle sind technisch nicht zulässig, wenn es das physikalische Verhalten im Versuch nicht (mit praktisch ausreichender Genauigkeit) wiedergibt. Im Allgemeinen führt die FE-Modellbildung in der Statik auf die nichtlineare Vektorgleichung

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ext} .$$

Darin ist \mathbf{f}_{ext} der Vektor der äußeren Knotenkräfte und \mathbf{u} der Vektor der Knotenverschiebungen. Die Komponenten des Vektors $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$ können als innere Knotenkräfte interpretiert werden.¹ Dieser Vektor hängt i.A. *nichtlinear* von den Verschiebungen \mathbf{u} ab. Im Fall einer linearen Abhängigkeit ist $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{Ku}$, und es ergibt sich das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$.

Der Modellierungs- und Diskretisierungsprozess der FEM ist für lineare und nichtlineare mechanische Modelle identisch. Unterschiede treten nur in der numerischen Lösung der diskreten Gleichungssysteme auf. Im linearen Fall kann das algebraische Gleichungssystem direkt, z.B. mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, nach den gesuchten Knotenverschiebungen \mathbf{u} umgestellt werden. Aus diesen werden dann mittels der Formfunktionen die Dehnungen, und aus diesen

¹ Das Gleichungssystem ist nur von theoretischem Interesse; im Prozess der FE-Diskretisierung wird es nicht explizit aufgestellt.

über das lineare Materialgesetz die Spannungen in allen Elementen berechnet. Das nichtlineare System wird mit geeigneten iterativen Verfahren gelöst. Generell werden dabei die Gleichungen schrittweise *linearisiert*, indem inkrementelle Zuwächse des Vektors der inneren Kräfte durch

$$\Delta \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) \approx \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}}_{K_T(\mathbf{u})} \Delta \mathbf{u}$$

angennähert werden. Die Matrix $K_T(\hat{\mathbf{u}})$ heißt *Tangentensteifigkeitsmatrix*. Sie wird am verformten Modell berechnet und hängt von den bereits vorliegenden Knotenverschiebungen ab.

Die Abb. 3 verdeutlicht schematisch die Lösung für lineare bzw. nichtlineare statische FE-Modelle. In beiden Fällen werden lineare Gleichungssysteme der Form $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ gelöst. Während die Tangentensteifigkeit \mathbf{K} für lineare Systeme konstant ist, wird sie im nichtlinearen Fall iterativ an den bereits erreichten Gleichgewichtspunkt $\{\mathbf{u}, \mathbf{f}\}$ angepasst. In jedem Iterationsschritt wird das lineare System

$$K_T(\mathbf{u})\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{f}$$

gelöst.

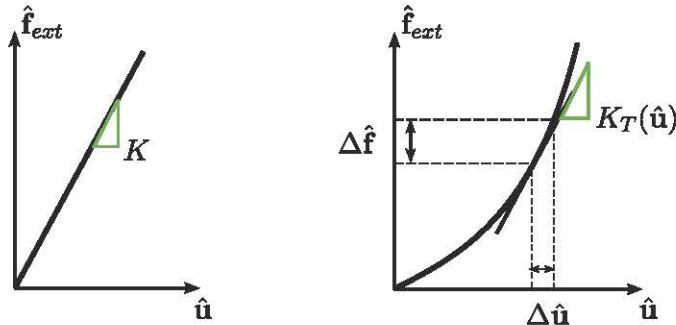


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen externen Knotenkräften $\hat{\mathbf{f}}$ und Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ in linearen (links) und nichtlinearen FE-Modellen (rechts).

Kapitel 1

FEM für Festkörper

1.1 Modellbildung

Ein Körper verformt sich unter dem Einfluß von Kräften. Dabei verändert sich das Volumen vom Wert V im unverformten Zustand zur Zeit $t = 0$ auf den verformten Wert v für den Zeitpunkt t . Die Oberfläche des Körpers wird mit ∂V bzw. ∂v bezeichnet. Wir nehmen an, daß der Körper an einem Teil der Oberfläche gelagert ist, während auf der freien Oberfläche äußere Lasten \mathbf{t}_{ext} [N/m^2] angreifen. Auf die Volumenpartikel des Körpers wirken Massenkräfte \mathbf{f}_b [N/m^3]. Die Punkte \mathbf{P} des Körpers verschieben sich bei der Verformung aus der unverformten Position \mathbf{X} auf die Position \mathbf{x} . Der Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}[\text{m}]$ heißt *Verschiebung* des Punktes \mathbf{P} ; vgl. Abb. 1.1.

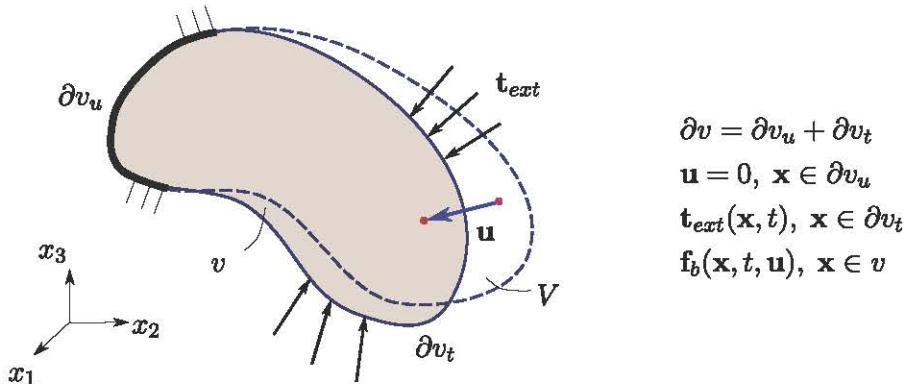


Abbildung 1.1: Verformung eines Festkörpers

Nach dem Schnitteinheitsprinzip werden an gedachten Schnittflächen durch den Körper innere Kräfte als *Spannungsvektoren* \mathbf{t}_{int} angetragen. In jedem inneren Punkt werden die Spannungsvektoren aus drei senkrechten Schnitten zum Spannungstensor $\underline{\sigma}$ zusammengefaßt. Aus dem Momentensatz am Volumenpartikel folgt die Symmetrie des Spannungstensors. Der Kräftesatz ergibt die fundamentale Gleichung

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{f}_b = 0 \quad (1.1)$$

für das Gleichgewicht der inneren Kräfte an jedem Punkt des Körpers. Diese allgemeine Beziehung gilt sowohl für statische als auch für dynamische Beanspruchung. Sie besteht aus drei Gleichungen für sechs unbekannte Komponenten des symmetrischen Spannungstensors. Im dynamischen Fall sind die Volumenkräfte proportional zur Beschleunigung $\ddot{\mathbf{u}}$ des Punktes \mathbf{P} , so daß die Gleichungen insgesamt neun unbekannte Größen enthalten. Für die mathematische Be-

stimmtheit müssen weitere Gleichungen hinzugefügt werden. Wir erhalten diese Gleichungen aus der Analyse des Materialverhaltens und der Verformungskinematik des Festkörpers.

Die Verformung des Körpers wird durch Relativverschiebungen benachbarter Punkte über den dimensionslosen Verzerrungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ beschrieben. Der Zusammenhang

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \quad (1.2)$$

zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen wird als *Verformungskinematik* bezeichnet.

Das Verhalten des Werkstoffs bei Beanspruchung wird durch Spannungs-Dehnungs-Diagramme bzw. Materialgleichungen der Form

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (1.3)$$

charakterisiert. Die Materialgleichungen werden auch *konstitutive Gleichungen* genannt, weil sie zusammen mit (1.1) und (1.2) formal ein geschlossenes Berechnungssystem von 15 Gleichungen für 15 Unbekannte bilden (konstituieren).

Für die FEM wird die *schwachen Formulierung* der Gleichgewichtsrelation (1.1) mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u} = 0 \text{ auf } \partial v_u, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{ext} \text{ auf } \partial v_t$$

verwendet. Multiplikation der Gleichung (1.1) mit einer virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$, partielle Integration und Einsetzen der Randbedingungen führen auf

$$\delta W_{int} = \int_v \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} - \mathbf{f}_b \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial v_t} \mathbf{t}_{ext} \cdot \delta \mathbf{u} \, da = \delta W_{ext}, \quad (1.4)$$

die für beliebige virtuellen Verschiebungen mit $\partial \mathbf{u}|_{\partial v_u} = 0$ gelten muß. In der Mechanik ist diese Gleichung auch als axiomatische Formulierung des Gleichgewichts über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bekannt.

1.2 Kontinuumsmechanik und Strukturmechanik

Die Werkstoffe von Festkörpern sind mikroskopisch inhomogen. Metalle weisen z.B. Einschlüsse, Poren oder Gefügegrenzen auf. In der Kontinuumsmechanik werden solche Inhomogenitäten vernachlässigt. Der Werkstoff wird als homogen betrachtet und es wird vorausgesetzt daß das Volumen des Festkörpers *dicht* gefüllt ist. Für die mathematische Betrachtung sind Festkörpervolumen abgeschlossene Untermengen des Euklid'schen Raumes \mathbb{R}^3 . Die Formänderung kontinuier-



Abbildung 1.2: Kontinuumsmechanischer Ansatz: Mikroskopische Inhomogenitäten im Materialgefüge von Festkörpern werden vernachlässigt.

licher Volumen wird über den Deformationstensor und die daraus abgeleiteten Dehnungstensoren analytisch auf die Verschiebungen der inneren Punkte zurückgeführt.

Festkörper mit bestimmten geometrischen Eigenschaften werden als Strukturen bezeichnet. Neben dem kontinuumsmechanischen Ansatz werden weitere Annahmen getroffen, die auf dimensional reduzierte Modelle führen. Beispiele für Strukturen sind die im Leichtbau verwendeten dünnwandige Bauteile. Die Mittelflächen solcher Bauteile können als Hyperflächen im Raum beschrieben werden. Die Dicke wird dieser zweidimensionalen Geometricbeschreibung als formaler Parameter hinzugefügt. Die Verzerrungen und Spannungen in den *äußeren Fasern der Bauteile* werden auf die Verschiebungen der Mittelfläche bezogen. In der Verformungskinematik von Strukturen werden neben diesen Verschiebungen (Translationen) auch die Winkeländerungen (*Rotationen*) der Querschnitte bei der Verformung berücksichtigt. Diese Vorgehensweise ist bereits aus der Technischen Mechanik bekannt, wo Stäbe und Balken eindimensional als Linien modelliert und die zwei weiteren räumlichen Dimensionen über Querschnittsgrößen wie Fläche oder Flächenträgheitsmoment in die Berechnung eingehen.

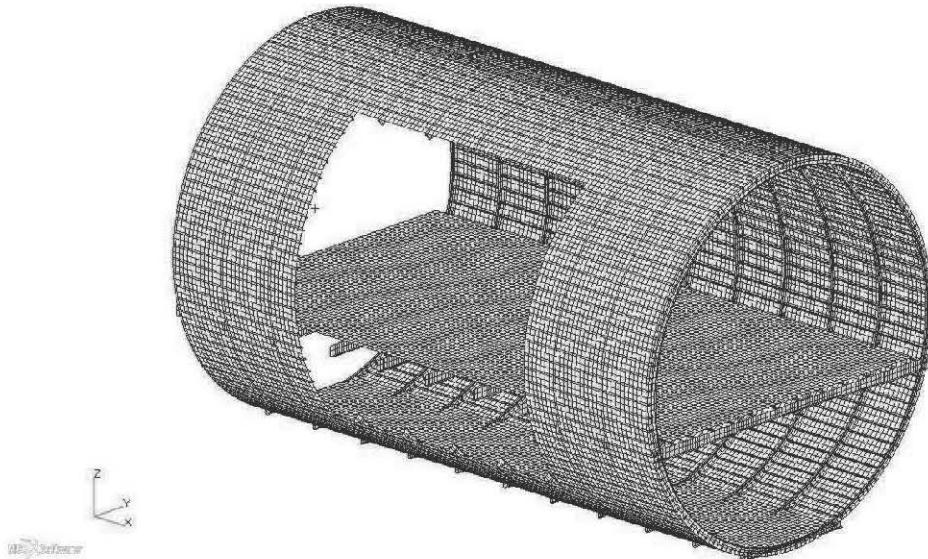


Abbildung 1.3: Strukturmechanisches FE-Modell eines Flugzeugrumpfs (mit freundlicher Genehmigung von Martin Wandt, Airbus). Die Außenhaut, der Boden und die radial umlaufenden Schotten sind als Schalen modelliert. Für die längs des Rumpfes verlaufenden Stringer sind Balkenelemente eingefügt.

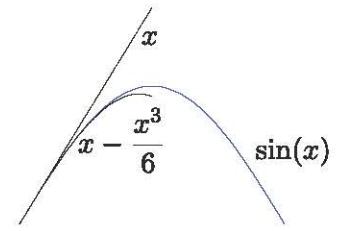
1.3 Nichtlinearitäten

Das Gleichgewicht (1.1) am Volumenpartikel ist eine lineare Relation zwischen Komponenten der inneren Kräfte. Die Materialgleichungen (1.3) und die Verformungskinematik (1.2) sind im Allgemeinen nichtlinear. Ein mechanisches Modell heißt *geometrisch nichtlinear*, wenn die Verzerrungen nicht linear von den Verschiebungen abhängen oder auch wenn ein nicht linearer Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Rotationen besteht, und *physikalisch nichtlinear* bei einem nicht linearen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungstensor. Nichtlineare Berechnungsmodelle entstehen auch dann wenn die Randbedingungen oder Lasten von der Verformung abhängen. Dies ist z.B. bei *Kontaktproblemen* der Fall.

1.3.1 Geometrische Nichtlinearität

Für die geometrische Linearität müssen die Verschiebungen so klein sein, daß quadratische Terme im Dehnungstensor vernachlässigt werden können. Für Rotationen φ , wie sie z.B. in der Balken- oder Schalentheorie auftreten, wird in linearen Modellen die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ angenommen. Sind eine oder beide Annahme nicht zulässig, ist das Berechnungsmodell *geometrisch nichtlinear*.

In der Skizze ist der geometrisch nichtlineare Zusammenhang $y = \sin x$ zusammen mit der linearen Approximation $y = x$ abgebildet. Die Strich-Punkt Linie zeigt die nichtlineare Approximation $y = x - x^3/6$. (Die Approximationen folgen aus dem Abbruch der Taylor-Entwicklung nach dem ersten bzw. dem zweiten Glied). Die mathematische Formulierung von Verzerrungen für großen Verschiebungen wird näher im Kapitel zur Verformungskinetik betrachtet.



1.3.2 Physikalische Nichtlinearität

Die Annahme der physikalischen Linearität ist für Werkstoffe mit linear-elastischem Materialverhalten erfüllt. Dieses Materialmodell ist z.B. für Metalle unterhalb der Fließgrenze durch die Werkstoffprüfung validiert. Duktile Stähle haben auch noch Tragreserven oberhalb der Fließgrenze. Sie verhalten sich dann aber nicht mehr elastisch, da die Verformung nach Entlastung nicht komplett zurückgeht. Die Abb. 1.4 zeigt ein bilineares Materialmodell für das elastisch-plastische Werkstoffverhalten.

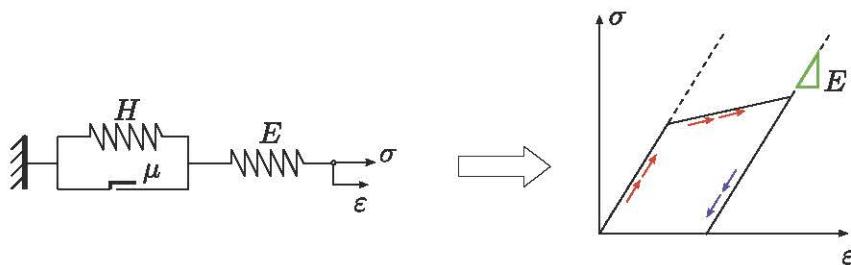


Abbildung 1.4: Rheologisches Modell des elastisch-plastischen Standardkörpers (links), Bilineare Approximation des elastisch-plastischen Materialverhaltens(rechts)

Für nichtmetallische Werkstoffe stellt die linear-elastische Annahme in der Regel nur eine grobe Näherung dar. Die Versuchs-Diagramme von Kunststoffen wie Elastomere oder Polymere weisen schon bei kleinen Verformungen signifikante Nichtlinearitäten auf. In vielen Simulationen, z.B. in numerischen Crash-Tests, ist zudem das Materialverhalten bei großen Verformungen zu berücksichtigen. Die Berechnungsmodelle sind dann sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlinear. Nichtlineare Materialmodelle werden in den Kapiteln Rheologischen Modellierung und Materialgleichungen eingeführt.

1.3.3 Nichtlinearität durch Kontakt

Insbesondere in Crash-Tests ändern sich auch die Randbedingungen während der Simulation. Dies ist immer dann der Fall, wenn sich Lagerungen oder konstruktive Verbindungen unter Last lösen oder Bauteile durch Verformung miteinander in Kontakt kommen. Diese Abhängigkeit der Randbedingungen von der Verschiebung \mathbf{u} führt ebenfalls zu nichtlinearen Kraft-Verschiebungs

Diagrammen. In der Abb. 1.5 ist das bilinear-elastische Kraft-Verschiebungsdiagramm einer einfachen Kontaktkonfiguration gezeigt.

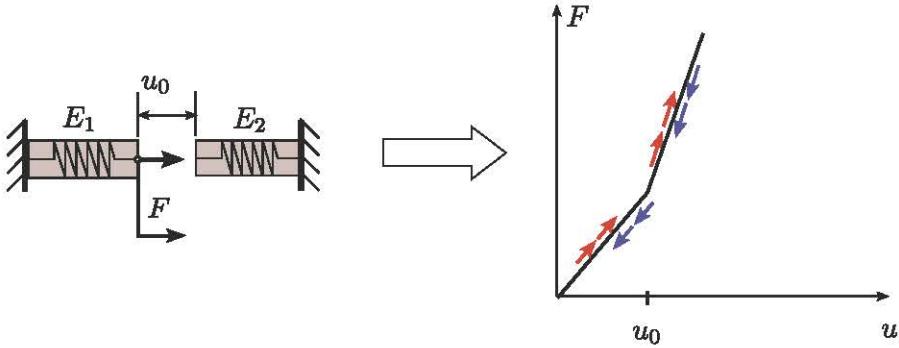


Abbildung 1.5: Kontaktmodell mit zwei elastischen Stäben (links), Bilinear-elastisches Materialverhalten (rechts); nach Wriggers [21]

1.4 Diskretisierung mit FEM

Der interne Prozess der Finite-Elemente-Methode ist für lineare und nichtlineare mechanische Modelle identisch. Ausgehend von der schwachen Formulierung des Gleichgewichts in (1.4) werden die drei Schritte (PApAs) ausgeführt:

1. *Partition:* Vernetzung, d.h. Unterteilung der Bauteile (Körper) in Finite Elemente und Modellierung der Lager- und Verbindungstechnik. Die Körpervolumen können als Vereinigung der FE-Volumen

$$V = \bigcup_{(e)} V^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \int_V = \sum_{(e)} \int_{V^{(e)}}$$

aufgefasst werden. Das Volumenintegral der inneren Energie ist dann gleich der Summe der Teilintegrale.

2. *Approximation:* Lokale (d.h. elementweise) Diskretisierung. Auf den Elementen werden die kontinuierlichen Verschiebungen durch Formfunktionen zwischen den Knotenverschiebungen interpoliert.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_j N_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}_j$$

Nach der numerischen Quadratur der Element-Integrale verbleiben die Knotenverschiebungen als Unbekannte. Die Approximation ist der eigentliche Näherungsschritt der FEM und zugleich, durch die Reduktion der Unbekannten auf die diskrete Untergruppe der Knoten, der Übergang vom kontinuierlichen zum diskreten Berechnungsmodell.

3. *Assemblierung:* Addition der diskretisierten Element-Integrale. Die Ergebnisse der numerischen Quadratur werden in eine globale Steifigkeits- bzw. Massenmatrix übertragen.

Im Allgemeinen führt die FE-Modellbildung für statische Berechnungen auf die Vektorgleichung

$$\hat{\mathbf{f}}_{int}(\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{f}}_{ext}, \quad (1.1)$$

deren linke Seite formal als Vektor der inneren Knotenkräfte interpretiert werden kann, der i.A. *nichtlinear* von den Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ abhängt. Mit der Annahme linearer Massen- und Dämpfungs Kräfte ergibt sich bei dynamischer Beanspruchung analog das Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}}_{int}(\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{f}}_{ext}. \quad (1.2)$$

In den Einführungskursen zur FEM wird die Methode auf Modelle der Technischen Mechanik angewendet. Für die Elastostatik wird dann das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (1.3)$$

mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , dem Vektor der nicht gelagerten Knotenfreiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}$ und dem Vektor der äußeren Knotenkräfte $\hat{\mathbf{f}}_{ext}$ erzeugt. Die Gleichgewichtsrelation (1.1) wird in der linearen Mechanik i.d.R. nach der Theorie erster Ordnung, also am unverformten Bauteil, aufgestellt. Sowohl die Lagerbedingungen als auch die Lasten sind während der Berechnung unveränderlich. Für dynamische Berechnungen hat das lineare Modell die allgemeine Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (1.4)$$

mit der Massenmatrix \mathbf{M} und Dämpfungsmatrix \mathbf{C} . Die Komponenten der lokalen Steifigkeits- bzw. Massenmatrizen hängen von den Produkten der Formfunktionen bzw. deren partieller Ableitung ab (vgl. [4, p.342])

$$K_{ij} \sim \int_{V_e} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} C_{ijkl} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} dx, \quad M_{ij} \sim \rho \int_{V_e} N_i N_j dx.$$

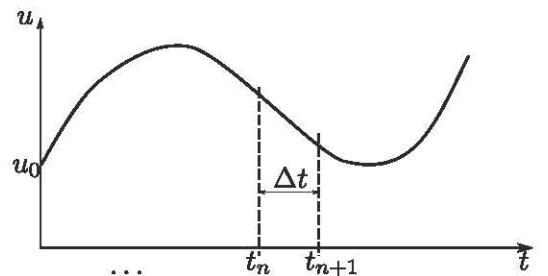
Die linearen Berechnungsmodelle sind technisch nicht zulässig, wenn sie das physikalische Verhalten im Versuch nicht (mit praktisch ausreichender Genauigkeit) wiedergeben.

1.5 Lösungsverfahren

Für die Lösung der dynamischen Systeme (1.4) bzw. (1.2) unterscheidet man zunächst zwischen expliziten und impliziten Verfahren. Wir stellen das Differenzenverfahren und das Newmark-Verfahren vor. Innerhalb der impliziten Verfahren sind Gleichgewichtsiterationen erforderlich. Hierfür sind das Newton-Verfahren oder das Bogenlängen-Verfahren gebräuchlich.

1.5.1 Explizite und implizite Verfahren

Wir illustrieren die Ideen an einer skalaren Funktion (Vektorkomponente) $u(t)$, welche zu jeder Zeit t die nichtlineare Differentialgleichung (1.2) erfüllen soll. Gegeben sind die Anfangswerte $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$. Für die numerische Lösung wird auf der Zeitachse eine diskrete Untermenge von Zeitpunkten $t_n, n = 0, 1, 2, \dots$ mit $t_0 = 0$ definiert. Die Differenzen $t_{n+1} - t_n = \Delta t_n$ heißen Zeitschritte. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir



$$u_n = u(t_n), \quad v_n = \dot{u}(t_n), \quad a_n = \ddot{u}(t_n), \quad f_{ext}(t_n) = f_{ext,n}, \quad f_{int}(u_n, t_n) = f_{int}(u_j).$$

Damit erhalten wir das dynamische Gleichgewicht (1.2) zu den Zeitpunkten t_n und t_{n+1} in Form der Gleichungen

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_n + \mathbf{C} v_n + \mathbf{f}_{int}(u_n) = \mathbf{f}_{ext,n} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} v_{n+1} + \mathbf{f}_{int}(u_{n+1}) = \mathbf{f}_{ext,n+1} \quad (1.2)$$

Wir nehmen an daß der Wert \mathbf{u}_n bekannt ist und suchen \mathbf{u}_{n+1} . In einem expliziten Verfahren wird dieser Wert direkt aus der Gleichung (1.1) bestimmt. Es wird nicht geprüft, ob der gefundene Wert auch die Gleichung (1.2) erfüllt, sondern diese Gleichung wird im nächsten Iterationsschritt wiederum zur Bestimmung von \mathbf{u}_{n+2} benutzt. Im impliziten Verfahren wird hingegen \mathbf{u}_{n+1} in (1.2) und geprüft ob damit das Gleichgewicht zum Zeitpunkt t_{n+1} erfüllt ist. In der Regel ist dies für die Startlösung nicht der Fall und es sind zusätzliche Gleichgewichtsiterationen erforderlich. Wir stellen im Folgenden je eine explizite und eine implizite Methode näher vor.

1.5.2 Zentrales Differenzenverfahren

Aus der Taylor-Entwicklung der Funktion $\mathbf{u}(t)$ folgen die Approximationen¹

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t}, \quad a_n = \frac{u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Einsetzen dieser Approximationen in (1.1) und Umstellen nach \mathbf{u}_{n+1} ergibt

$$\underbrace{\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)}_{LU} \mathbf{u}_{n+1} = (\Delta t)^2 [\mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int}(u_n)] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{M} (2u_n - u_{n-1}).$$

Dieses Gleichungssystem kann z.B. mit LU-Zerlegung der linken Seite direkt nach der \mathbf{u}_{n+1} aufgelöst werden. In der Praxis werden oft Optionen (z.B. die lumped Massenmatrix) verwendet, die auf der linken Seite auf eine Diagonalmatrix führen. Damit wird der Aufwand zur Lösung der obigen Gleichung minimiert. Die gefundene Lösung \mathbf{u}_{n+1} wird dann in (1.2) eingesetzt, daraus wiederum \mathbf{u}_{n+2} bestimmt usw. Im ersten Zeitschritt bei $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ enthalten die zentralen Differenzen den fiktiven Wert \mathbf{u}_{-1} , der jedoch z.B. aus der Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit eliminiert werden kann.

Bei der Anwendung des expliziten Verfahrens ist die Stabilitätsbedingung [4, 6.2]

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{krit} \quad \text{mit} \quad 0.8 \leq \alpha \leq 0.98, \quad \Delta t_{krit} = \min_e \frac{l_e}{c}$$

(1.3)

zu beachten. Die untere Beschränkung des Faktors α drückt aus, daß zu kleine Zeitschritte sich ebenfalls negativ auf die Genauigkeit der Lösung auswirken vgl. [3, S.972]. Mit l_e und c sind die Elementlänge bzw. die Wellengeschwindigkeit bezeichnet. In ungedämpften Systemen kann die Stabilität der Berechnung auch über die Erhaltung der Energie geprüft werden. Hierzu wird von Belytschko u.a. das Kriterium

$$|W_{\text{kin}} + W_{\text{int}} - W_{\text{ext}}| \leq \varepsilon \max(W_{\text{kin}}, W_{\text{int}}, W_{\text{ext}})$$

empfohlen [4, 6.2.3]

¹Wir nehmen hier der Einfachheit halber einen konstanten Zeitschritt Δt an. Die Formeln für variable Zeitschrittverfahren findet man z.B. in [4].

1.5.3 Newmarkverfahren

Für die Funktionen \mathbf{u} und $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ werden die gewichteten Ansätze

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + (\Delta t)^2 [(0.5 - \beta) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1}] \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \quad (1.5)$$

verwendet. Das explizite zentrale Differenzenverfahren ergibt sich als der Spezialfall $\beta = 0, \gamma = 0.5$. Die Wahl $\beta = 0.25, \gamma = 0.5$ entspricht der Approximation der Integrale in

$$\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} dt, \quad \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n = \int_t^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} dt$$

mit der Trapezregel. In Bathe [3, 9.4] wird die unbedingte Stabilität des Verfahrens für

$$\gamma \geq 0.5, \quad \beta \geq 0.25(\gamma + 0.5)^2 \quad (1.6)$$

nachgewiesen. Im Allgemeinen ist das Newmark-Verfahren implizit. Bei Vorgabe der Werte auf der Stufe \mathbf{n} und der Parameter β, γ verbleiben in den Gleichungen (1.4) und (3.1) noch drei unbekannte Größen $\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}$. Als dritte Gleichung wird (1.2) herangezogen. Durch Umstellen erhalten wir aus (1.4) und (3.1) [21, 6.1.]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= \alpha_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2 \mathbf{v}_n - \alpha_3 \mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \alpha_4 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \alpha_5 \mathbf{v}_n + \alpha_6 \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_1 = 1/\beta(\Delta t)^2 \quad \alpha_2 = 1/\beta\Delta t \quad \alpha_3 = (1 - 2\beta)/\beta, \quad \alpha_4 = \gamma/\beta\Delta t, \quad \alpha_5 = 1 - \gamma/\beta, \quad \alpha_6 = (1 - \gamma/2\beta)\Delta t.$$

Einsetzen in (1.2) ergibt nach Umstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{M} [\alpha_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2 \mathbf{v}_n - \alpha_3 \mathbf{a}_n] + \mathbf{C} [\alpha_4 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \alpha_5 \mathbf{v}_n + \alpha_6 \mathbf{a}_n] + \\ + \mathbf{f}_{int} (\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext,n+1} = 0 \end{aligned}$$

Die Nullstelle \mathbf{u}_{n+1} dieser Gleichung wird über *Gleichgewichtsiterationen* für Zwischenwerte \mathbf{u}_{n+1}^j mit dem Startwert $\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$ gesucht. In jedem Iterationsschritt wird der aktuelle Wert des Residuums

$$\mathbf{r} (\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M} [\alpha_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2 \mathbf{v}_n - \alpha_3 \mathbf{a}_n] + \quad (1.7)$$

$$+ \mathbf{C} [\alpha_4 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \alpha_5 \mathbf{v}_n + \alpha_6 \mathbf{a}_n] + \quad (1.8)$$

$$+ \mathbf{f}_{int} (\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext,n+1} \quad (1.9)$$

ermittelt. Die Iteration wird abgebrochen wenn $|\mathbf{r}|$ eine gesetzte Toleranz unterschreitet.

1.5.4 Gleichgewichtsiteration

Wir beschränken wir uns hier auf statische Berechnungen. Mit $\mathbf{M} = \mathbf{0} = \mathbf{C}$ reduziert sich dann das Residuum auf

$$\mathbf{r} (\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}_{int} (\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext,n+1}. \quad (1.10)$$

In FE-Lösern wird auch im statischen Fall häufig ein TIME Parameter verwendet, der dann als Unterteilung des Lösungsprozesses in Teilabschnitte, z.B. durch inkrementelles Aufbringen der äußeren Last, zu verstehen ist. Innerhalb der Teilabschnitte wird jeweils iterativ die Nullstelle des Residuums gesucht. Hierfür ist in jedem Last- bzw. Iterationsschritt die Tangentensteifigkeitsmatrix zu bilden. Im Assemblierungsschritt werden jeweils die Element-Steifigkeitsmatrizen (im lincaren Fall) bzw. die Tangentensteifigkeitsmatrizen des aktuellen Iterationsschrittes in die globale Steifigkeitsmatrix assembliert.

Newton-Verfahren

Die Abb. 1.6 (links) verdeutlicht schematisch das Iterationsschema des Newton-Verfahrens im n. Lastschritt. Für eine vorgegebene Laststufe $\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{f}_{ext,n+1}$ wird die Verschiebung \mathbf{u}_{n+1} gesucht

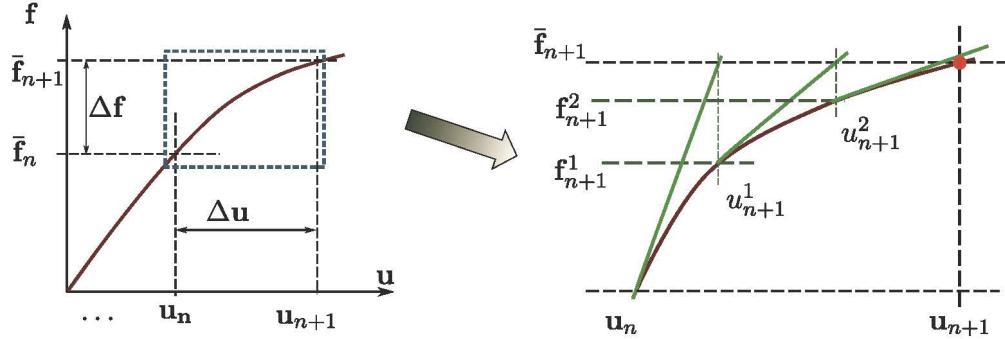


Abbildung 1.6: Inkrementierung der äußeren Last (links) und Newton-Iteration innerhalb des n. Lastintervalls (rechts). Die Laststufen $\bar{\mathbf{f}}$ sind fest vorgegeben. Die Zwischenstufen \mathbf{f}_{n+1}^j werden vom Newton-Algorithmus innerhalb der Gleichgewichtsiteration gefunden.

so daß $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext} \approx 0$. Hierfür werden innerhalb der vorgegebenen Laststufe Gleichgewichtsiterationen durchgeführt, in denen der nichtlineare Zusammenhang $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$ schrittweise durch die Lösung der *linearen Approximation*

$$\Delta \mathbf{f}_{int} \approx \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}}_{K_T(\mathbf{u})} \Delta \mathbf{u}$$

angenähert wird. Die Matrix

$$K_T(\mathbf{u}) = \text{grad } \mathbf{f}_{int} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

heißt *Tangentensteifigkeitsmatrix*. Die Dimension der Matrix ist gleich der Anzahl m der nicht gelagerten Knotenfreiheitsgrade des FE-Modells. In jedem Schritt j der Gleichgewichtsiteration wird das lineare Gleichungssystem

$$K_T(\mathbf{u}_{n+1}^j) \Delta \mathbf{u}_{n+1}^j = \Delta \mathbf{f}_{n+1}^j \quad (1.12)$$

gelöst. Die Vorgehensweise ist in der Abb. 1.6 (rechts) skizziert. Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist jeweils neu zu berechnen und zu invertieren. Häufig wird ein *modifiziertes Newtonverfahren* verwendet, bei dem die Tangentensteifigkeitsmatrix nur im 1. Iterationsschritt des Lastschritts berechnet wird. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Iterationsschritte, was aber oft durch die Aufwandsersparnis für die wiederholte Neuberechnung und Invertierung der Tangentensteifigkeit aufgewogen wird.

Der Algorithmus 5.1 spezifiziert den Ablauf im Lastschritt $n \rightarrow n + 1$. Gegeben sind eine konvergierte Lösung $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$ mit $f_n = f_{ext,n} \approx f_{int}(\mathbf{u}_n)$ für den Lastschritt n , der Wert der nächsten Laststufe $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ und die Toleranz ε . Gesucht ist \mathbf{u}_{n+1} so daß $\|f_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \bar{\mathbf{f}}_{n+1}\| \leq \varepsilon$.

Algorithm 1.1 Newton-Verfahren (Lastschritt n)**START:**

$$u_{n+1}^0 = u_n, \quad K_T^0 = \frac{\partial f_{int}}{\partial u} \Big|_{u=u_{n+1}^0}, \quad f_{n+1}^0 = \bar{f}_n, \quad \Delta f^0 = \bar{f}_{n+1} - f_{n+1}^0.$$

STEP:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^j &= u_{n+1}^{j-1} + [K_T^{j-1}]^{-1} \Delta f^{j-1} \\ f^j &= f_{int}(u_{n+1}^j) \\ \Delta^j f &= \bar{f}_{n+1} - f^j \\ K_T^j &= \frac{\partial f_{int}}{\partial u} \Big|_{u=u_{n+1}^j} \end{aligned}$$

END:

$$\|\Delta^j f\| < \varepsilon$$

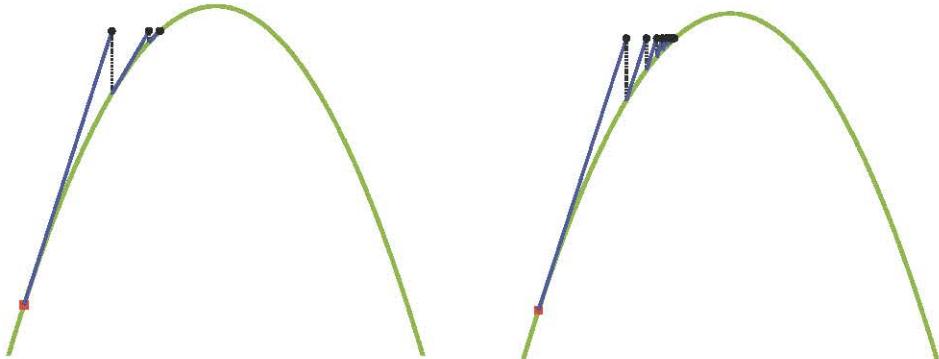
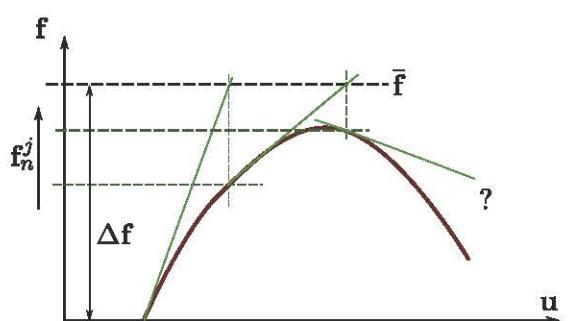


Abbildung 1.7: Konvergenz der Newtonverfahren für die Funktion $f(u) = 4 - 4(u-1)^2$. Für die Toleranz $\varepsilon = 0.0001$ konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $f_n = 3.4$ mit $\Delta f = 0.55$ in drei Schritten (Bild links). Das modifizierte Verfahren benötigt 19 Schritte (Bild rechts).

Wir illustrieren die Implementation an dem von Rust [19] vorgeschlagenen Modellproblem in der Abb. 1.7. Nähere Angaben und Verweise zu Konvergenzkriterien für die Newton-Algorithmen finden sich bei Wriggers [21].

Das Newton-Verfahren divergiert in der Regel bei einer Richtungsänderung der Last-Weg-Kurve. Solche Richtungsänderungen sind treten z.B. beim überkritischen Stabilitätsverhalten dünnwandiger auf. Für die numerische Simulation nichtmonotoner Gleichgewichtsverläufe sind Kurvenverfolgungs-Algorithmen (path tracing methods) wie das Bogenlängenverfahren geeignet.



Bogenlängen-Verfahren

Beim Newton-Verfahren wird in jedem Lastschritt die Obergrenze $\bar{f} = f_n + \Delta f$ des Suchintervalls fest vorgegeben. Ausgehend von dem Startwert $f^0 = f_n$ wird dann die Untergrenze f^j des Lastintervalls iterativ solange geändert, bis mit $f^j \approx \bar{f}$ Konvergenz eintritt. Dabei wird die aktuelle Untergrenze f^j jeweils aus dem Schnittpunkt der Tangente an f^{j-1} mit der festen horizontalen Obergrenze \bar{f} ermittelt. Im Bogenlängenverfahren wird in jedem Schritt j auch eine variable Obergrenze $\bar{f}^j = \lambda_j \bar{f}$ ermittelt. Der Lastparameter λ_j wird nach geometrischen Kriterien berechnet. Wir illustrieren hier in Abb. 1.8 die Festlegung, wonach der Wert \bar{f}^{j+1} im Schnittpunkt der Tangente an f^j mit den Senkrechten auf die Tangente in f^{j-1} gefunden wird. Der Schnittpunkt u_2 der Tangente k_1 und der Senkrechten d_1 ergibt sich der Gleichung

$$f_1 + k_1 \Delta u = \bar{f}_1 + d_1 \Delta u$$

mit $\Delta u = u_2 - u_1$.

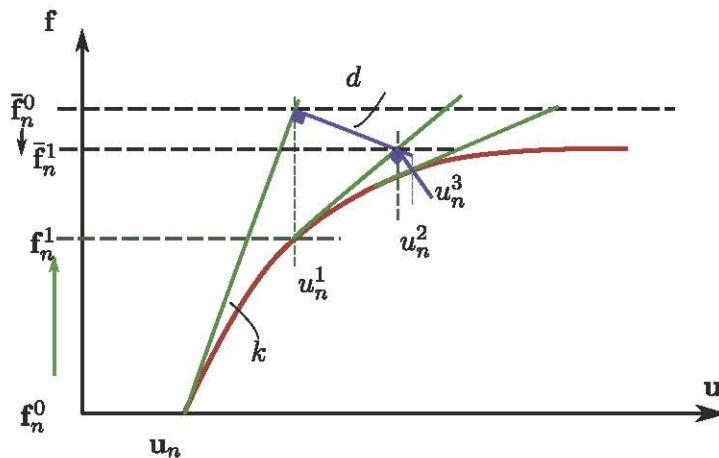


Abbildung 1.8: Beim Bogenlängenverfahren werden in jedem Iterationsschritt sowohl Unter- als auch Obergrenze des aktuellen Lastintervalls neu berechnet. Dadurch wird das Suchintervall in der Regel stärker verkleinert als beim Newton-Verfahren.

Der Algorithmus wird in 1.2 dargestellt. Die Abb. 1.9 zeigt den Iterationsverlauf für dieselben Startwerte wie in der Abb. 1.7. Das Ergebnis liegt hier sehr nah am Newton-Verfahren. Die Überlegenheit des Kurvenverfolgungsalgorithmus für die Simulation nichtmonotoner Gleichgewichtskurven wird in Beispiel 1.7 gezeigt.

1.5.5 Zusammenfassung

In der nichtlinearen FEM werden Gleichgewichtspunkte $\{\mathbf{u}, \mathbf{f}\}$ auf der Kraft-Verschiebungskurve nach dem Kriterium $\|\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})\| \leq \epsilon$ mit einer vorgegebenen Toleranz ϵ gesucht. Mit einer optionalen Lastinkrementierung wird die vorgegebene Maximallast \mathbf{f} in Laststufen $\lambda_n \mathbf{f}$ unterteilt. Beim Newton-Verfahren wird der neue Gleichgewichtspunkt \mathbf{f}_{n+1} jeweils fest vorgegeben und der Wert \mathbf{u} wird iterativ geändert bis das Kriterium für die Lösung \mathbf{u}_{n+1} erfüllt ist. Mit anderen Worten, das Suchintervall wird durch die Änderung einer der Intervallgrenzen verkleinert bis der Gleichgewichtspunkt gefunden ist. Die variable Intervallgrenze wird durch Invertierung der Tangentensteifigkeitsmatrix berechnet.

Algorithm 1.2 Bogenlängenverfahren (Lastschritt n)**START:**

$$u_{n+1}^0 = u_n, \quad k^0 = \frac{\partial f_{int}}{\partial u} \Big|_{u=u_{n+1}^0}, \quad f_{n+1}^0 = \bar{f}_n, \quad \Delta f^0 = \bar{f}_{n+1} - f_{n+1}^0, \quad d^0 = 0.$$

STEP:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^j &= u_{n+1}^{j-1} + \frac{\bar{f}^{j-1} - f^{j-1}}{k^{j-1} - d^{j-1}} \\ f^j &= f_{int}(u_{n+1}^j) \\ k^j &= \frac{\partial f_{int}}{\partial u} \Big|_{u=u_{n+1}^j} \\ d^j &= -\frac{1}{k_j} \\ \Delta u &= u_{n+1}^j - u_{n+1}^{j-1} \\ \bar{f}^j &= f^{j-1} + k^j \Delta u \\ \Delta^j f &= \bar{f}_{n+1}^j - f_{n+1}^j \end{aligned}$$

END:

$$\|\Delta f^j\| < \varepsilon$$

Im Bogenlängenverfahren werden *beide Grenzen des Suchintervalls* verkleinert, so daß der Algorithmus in der Regel nicht zu einem Randwert sondern zu einem Wert innerhalb des ursprünglich vorgegebenen Lastinkrements konvergiert. Das Verfahren ist flexibler aber auch aufwändiger als das Newton-Verfahren. Neben der Tangentenrichtung ist in den Iterationsschritten jeweils eine zweite Suchrichtung für die Ermittlung der zweiten Intervallgrenze zu berechnen. Bei inkrementellem Vorgehen erhöht sich in der Regel die Anzahl der Lastinkremente, um eine vorgegebene Maximallast zu erreichen. Nach Wriggers kann man die Lösungsverfahren als Nullstellensuche für das verallgemeinte Residuum

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f}_{ext}$$

mit dem Lastparameter λ auffassen. Im Newton-Verfahren wird $\lambda = \bar{\lambda}$ vorgegeben, während λ in den Kurvenverfolgungsalgorithmen als zusätzliche Unbekannte in den Iterationsprozeß eingeht. Dementsprechend ist die zusätzliche Bestimmungsgleichung

$$g(\mathbf{u}, \lambda) = 0$$

mit einer Funktion g aus dem geometrischen Suchkriterium für die variable Laststufe zu lösen. Faßt man beide Gleichungen über

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) \\ g(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix} = 0,$$

zusammen, so lautet die Linearisierung im j ten Iterationsschritt

$$\mathbf{r}^{j+1} \approx \mathbf{r}^j + \text{grad } \mathbf{r}|_j \Delta^{j+1} \mathbf{u},$$

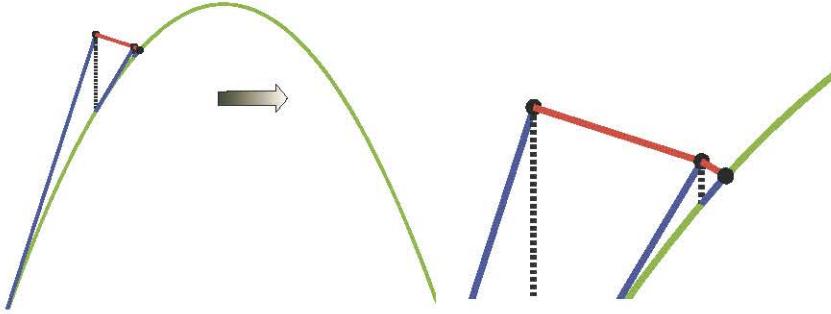


Abbildung 1.9: Iterationsverlauf des Bogenlängenverfahrens am Beispiel $f(u) = 4 - 4(u - 1)^2$. Für den Startwert $f_n = 3.4$ mit $\Delta f = 0.55$ konvergiert die Iteration in drei Schritten. Der vorgegebene obere Lastwert wird gesenkt von $\bar{f}^0 = 3.95$ auf $\bar{f}^3 = 3.924$.

mit dem Gradienten

$$\text{grad } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \\ \frac{g}{\partial \mathbf{u}} & \frac{g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) & -\mathbf{f}_{ext} \\ \frac{g}{\partial \mathbf{u}} & \frac{g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

Die Linearisierung führt somit auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) & -\mathbf{f}_{ext} \\ \frac{g}{\partial \mathbf{u}} & \frac{g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_{\mathbf{u}^j, \lambda^j} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ g \end{bmatrix}_{\mathbf{u}^j, \lambda^j}$$

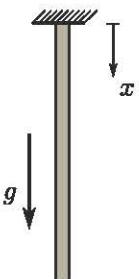
Für weitere Details verweisen wir auf [21].

1.6 Beispiele

1.6.1 Modellbildung

Beispiel 1.1.

Ein Zugstab verformt sich unter Eigengewicht. Dabei ändern sich die Länge von L auf l , der Querschnitt von A auf a und die Dichte von ρ_0 auf ρ . Somit ist $V = AL$ und $\mathbf{v} = a\mathbf{l}$. Da die Masse des Körpers sich bei der Verformung nicht ändert gilt $\rho_0 V = \rho v$. Ist der Querschnitt über die Länge konstant, so kann die kinematische Beschreibung auf das eindimensionale Intervall (Berechnungsgebiet) $\Omega = (0, l)$ reduziert werden. Der cingespannte Rand $\partial\Omega_u$ liegt bei $x = 0$. Der Rand $\partial\Omega_t$ liegt bei $x = l$ und ist frei von äußeren Lasten. Die Volumenkraft hat in Ω den konstanten Wert $f_b \equiv \rho g$.



Der einachsige Spannungszustand im Stab wird durch die Normalspannung $\sigma = \sigma_x = N(x)/a$ mit der Normalkraft $N(x)$ beschrieben. Der Dehnungstensor reduziert sich auf die Komponenten $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. In der Technischen Mechanik wird die Spannung auf den unverformten Querschnitt A bezogen, die Querdehnungen werden vernachlässigt und es wird linear-elastisches Materialverhalten mit dem Elastizitätsmodul

E angenommen. Die Gleichungen (1.1-1.2) lauten dann

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dx} + \rho g &= 0, \\ \sigma &= E\varepsilon, \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx}\end{aligned}\tag{1.1}$$

mit $\rho = \rho_0$. Dazu gelten die kinematische Randbedingung $\mathbf{u}(x = 0) = \mathbf{0}$ und die kinetische Randbedingung $\mathbf{u}(x = L) = \mathbf{0}$. Das Gleichgewicht wird auf den unverformten Stab bezogen. In diesem einfachsten Fall ist die Gleichgewichtsbeziehung $\sigma' = -\rho g$ eindeutig nach der Spannung σ lösbar mit

$$\sigma(x) = \rho g(L - x).$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung von (1.1) ergibt sich dann die Verschiebung

$$u(x) = \frac{\rho g}{2E}x(2L - x).$$

Durch Multiplikation mit einer virtuellen Verschiebung und partielle Integration erhalten wir aus diesen Gleichungen die schwache Formulierung

$$\int_0^L [Eu'\delta u' - \rho g \delta u] dX = 0$$

bzw.

$$\int_0^L Eu'\delta u' dX = \int_0^L \rho g \delta u dX,$$

da die Volumenkraft hier eine gegebene Größe ist. Die FE-Diskretisierung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}.$$

Beispiel 1.2.

Im schwingenden Zug-Druck-Stab sind die Volumenkräfte $\mathbf{f}_b = -\rho \ddot{u}$ verschiebungsabhängig. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma &= E\varepsilon, \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Die Gleichgewichtsbeziehung enthält nun zwei Unbekannte und kann nicht direkt nach der Spannung gelöst werden. Durch Einsetzen der zweiten und dritten Gleichung kann eine der Unbekannten eliminiert werden. Es ergibt sich z.B. für die Verschiebung \mathbf{u} die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

mit der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{\rho/E}$. Die Randbedingungen lauten $\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{u}_{,x}(L, t) = \mathbf{0}$. Für die transiente Lösung werden noch Anfangsbedingungen für \mathbf{u} und $\dot{\mathbf{u}}$ benötigt.

Die schwache Form lautet in diesem Fall

$$E \int_0^L Eu'\delta u' dX + \rho \int_0^L \ddot{u} \delta u dX = 0,$$

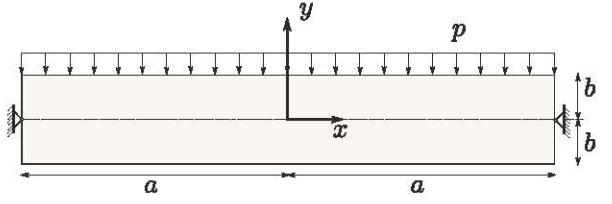
woraus sich durch FE-Diskretisierung das lineare System

$$\mathbf{Ku} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = 0$$

für die freien Schwingungen des Stabes ergibt.

Beispiel 1.3.

Eine rechteckige Scheibe mit den Maßen $2a \times 2b$ und der konstanten Dicke d wird wie skizziert durch eine Flächenlast p beansprucht. Wir führen das Koordinatensystem $-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b, -d/2 \leq z \leq d$ ein. Die Flächenlast ist in z -Richtung konstant. Für diese Beanspruchung sind die Spannungskomponenten in Dickenrichtung z gleich Null.



In jeder Schnittfläche quer zur z -Richtung herrscht derselbe ebene Spannungszustand mit den Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Die Gleichgewichtsbeziehung (1.1) reduziert sich auf die zwei Gleichungen

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0, \quad \tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} = 0$$

Die kinematische Randbedingung ist $\mathbf{u}(-a, 0) = \mathbf{0} = \mathbf{u}(a, 0)$. Auf der oberen Rechteckkante $y = b$ ist die kinetische Randbedingung $\sigma_y(x, b, z) = -p$ gegeben, die verbleibenden Seiten des Rechtecks sind spannungsfrei.

Für dünne Scheiben kann die Querdehnung in Dickenrichtung vernachlässigt werden. Die Schubdehnungen $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ sind gleich Null. Die verbleibenden Komponenten des Verzerrungstensors sind im linear-elastischen Fall über

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}$$

mit den Spannungskomponenten verknüpft. Durch Umkehrung ergibt sich das Materialgesetz in der Form (1.3) zu

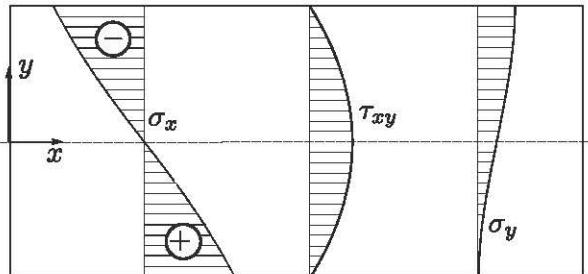
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}.$$

Die Verformungskinematik (1.2) wird bei Annahme kleiner Verschiebungen und Verzerrungen durch die Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

beschrieben. Im Verschiebungsvektor \mathbf{u} ist die Komponente $u_z = 0$.

Damit ist ein geschlossenes System von acht Gleichungen für acht Unbekannte gegeben. Über die Materialgleichungen können die Schubverzerrungen aus den Gleichgewichtsbeziehungen eliminiert und diese Gleichungen dann analytisch gelöst werden [7]. Die Abb. 1.10 zeigt das Ergebnis der Berechnung.



$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3pa^2y}{4b^3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{5a^2} \right), \\ \sigma_y &= -p \left(\frac{1}{2} + \frac{3y}{4b} - \frac{1}{4} \frac{y^3}{b^3} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{3px}{4b} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Abbildung 1.10: Analytische Lösung für einen ebenen Spannungszustand

Die schwache Formulierung des Gleichgewichts bzw. das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lautet

$$\delta W_{int} = d \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \delta \varepsilon_{yx} dx dy = d \int_{-a}^a p(x) \delta u_y(x, y=b) dx = \delta W_{ext},$$

bzw. nach Kürzen der Dicke d

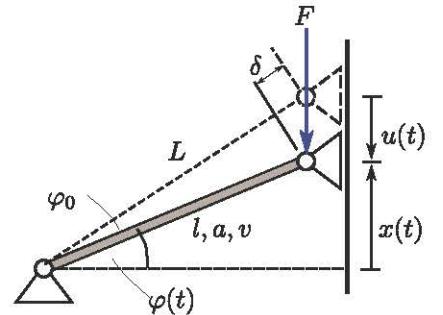
$$\int_{-b}^b \int_{-a}^a \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy = \int_{-a}^a p(x) \delta u_y(x, y=b) dx$$

mit dem Schubwinkel $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$.

1.6.2 Strukturmechanik

Beispiel 1.4.

Ein zweifach gelenkig gelagerter Stab wird durch eine vertikale Kraft $F(t)$ belastet. Das linke Lager ist fest, das rechte Lager ist vertikal verschieblich. Das Material ist linear-elastisch. In der unverformten Lage hat der Stab einen Winkel φ_0 zur horizontalen Ebene. Die Koordinate des beweglichen Lagers ist $x(t)$ mit $x(0) = X$. Zum Zeitpunkt t hat der Stab die Länge l , die Querschnittsfläche a und das Volumen v . Gesucht ist die Last-Verschiebungskurve für die Kraft F und die vertikale Verschiebung u .



Die drei Modellgleichungen lauten

$$\text{Kinematik : } \varepsilon = \ln\left(\frac{l}{L}\right)$$

$$\text{Material : } \sigma = E\varepsilon$$

$$\text{Gleichgewicht}(\downarrow) : \quad N \sin \varphi + F = 0 \quad \text{mit} \quad F = \sigma a$$

Darin wird die Verformungskinematik durch die wahre Dehnung in Stabrichtung beschrieben. Das Gleichgewicht wird in vertikaler Richtung am verformten Bauteil aufgestellt. Das Modell ist physikalisch linear und geometrisch nichtlinear. Der Stab führt große Verschiebungen und Rotationen aus. Die logarithmischen Dehnungen hängen nichtlinear von der Streckung l/L ab.

Durch Einsetzen der Kinematik- und Material-Beziehung in das Gleichgewicht erhalten wir

$$F = -\sigma a \sin \phi = -\sigma \frac{v x}{l l} = -E \frac{vx}{l^2} \ln \frac{l}{L}. \quad (1.3)$$

Zur Umrechnung auf u nutzen wir $l = \sqrt{L^2 \cos^2 \phi_0 + x^2}$ und $x = L \sin \phi_0 - u$. Der Einfachheit halber nehmen wir inkompressibles Material mit $v = V$ an. Der gesuchte Kraft-Verschiebungs-Verlauf ist in der Abb. 1.11 visualisiert.

Mit wachsender Verschiebung u wächst die Druckkraft im Stab. Hierfür muss zunächst auch die vertikale Kraft gesteigert werden. Wegen $F \rightarrow 0$ für $\varphi \rightarrow 0$ muss es zwischen der unverformten Lage φ_0 und $\varphi = 0$ eine Zwischenlage mit maximaler Kraftaufnahme $F = F_{\max}$ geben. Bei $\varphi = 0$ befindet sich der Stab für $F = 0$ in einer instabilen Gleichgewichtslage, in der die Stabkraft ausschließlich von der horizontalen Kontaktkraft am beweglichen Lager aufgenommen wird. Der Stab schlägt aus dieser instabilen Gleichgewichtslage direkt in eine der Lagen $\pm F_{\max}$ durch, wenn dies nicht durch eine Kraft F in Gegenrichtung zur sprunghaften Bewegung verhindert wird.

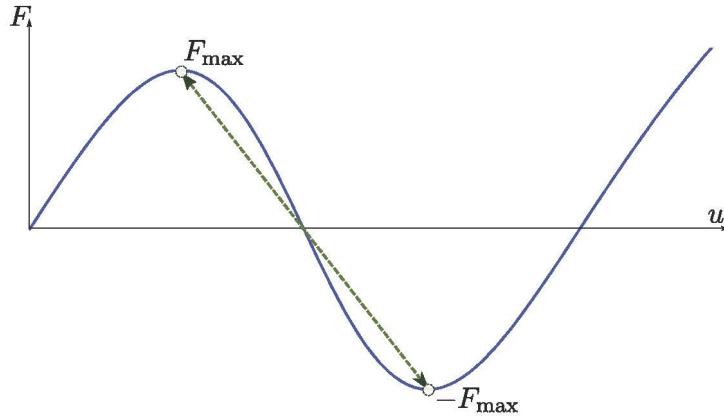


Abbildung 1.11: Kraft-Weg Kurve für das Durchschlagproblem

1.6.3 Nichtlinearitäten

Beispiel 1.5.

Bei großen Verschiebungen des Biegebalkens kann die Dehnung der Mittellinie nicht mehr vernachlässigt werden. Dieser Dehnung entsprechen Normalkräfte N . Bei der Kräftebilanz am verformten Balken wirken die vertikalen Komponenten der Normalkräfte gegen die äußere Vertikalkraft, wie in Abb. 1.12 gezeigt.

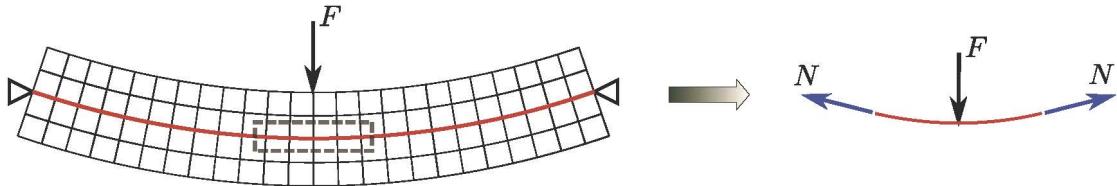


Abbildung 1.12: Biegung eines Balkens mit großen Verschiebungen und Rotationen (links), Gleichgewicht am verformten Körper (rechts)

Die Berücksichtigung dieser Kräfte führen zu einer *Versteifung* des Berechnungsmodells, die sich in einem überlinearen Verlauf der Kraft-Weg-Kurve repräsentiert. Diese sogenannte Spannungsversteifung ist ein geometrisch nichtlinearer Effekt.

Die relative Längenänderung der Mittellinie kann z.B. mit der Green-Lagrange Dehnung

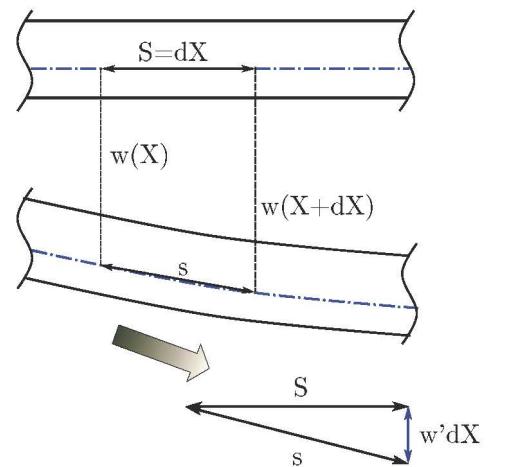
$$E = \frac{s^2 - S^2}{2S^2}$$

gemessen werden. Darin sind s bzw. S die Längen vor und nach der Verformung. Wird für S die infinitesimale Länge dX gewählt so gilt nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = dX^2 + dw^2$ und somit, nach Grenzübergang $dX \rightarrow 0$,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dX} \right)^2.$$

Der geometrisch nichtlineare Effekt wird analytisch durch die quadratische Abhängigkeit der Längsdehnung von der Querverschiebung ausgedrückt.

Für große Dehnungen an dicken Balken wird in den Randfasern die Fließspannung erreicht bzw. überschritten. Die entsprechende Materialerweichung führt zu einem zunehmenden Steifigkeitsverlust des



Balkens, wodurch die Kraft-Dehnungskurve in einen unterlinearen Anstieg übergeht. Die Materialerweichung durch lokales Fließen ist ein physikalisch nichtlinearer Effekt.

In der Abb. 1.13 sind die Prinzipverläufe von simulierten Kraft-Verschiebungsdiagrammen für Balken unterschiedlicher Biegesteifigkeit zusammengestellt. Resultate entsprechender Simulationen finden sich z.B. in [11]. Für die Profile hoher Biegesteifigkeit sind die Verschiebungen relativ gering, so daß die Span-

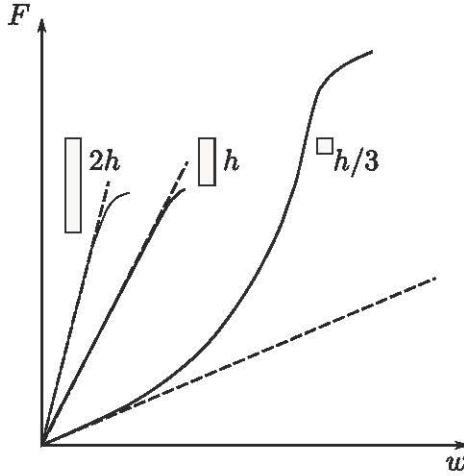


Abbildung 1.13: Kraft-Weg Diagramme für Kragbalken unterschiedlicher Biegesteifigkeit (Prinzipskizzen nach Fig. 5 aus [11])

nungserweichung in den äußeren Fasern schon bei geometrisch linearem Verhalten eintritt. Am Profil mit geringer Biegesteifigkeit ist hingegen vor Eintreten der Plastifizierung eine ausgeprägte Spannungsversteifung zu beobachten.

1.6.4 Lösungsverfahren

Beispiel 1.6.

Wir berechnen die Tangentensteifigkeit für das Durchschlagsproblem 1.4. Dazu leiten wir die Gleichung (1.3) nach \mathbf{x} ab. Dabei ist die Abhängigkeit $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ über die Kettenregel zu berücksichtigen. Nach einigen Schritten erhalten wir

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \underbrace{\frac{a}{l} (E - 2\sigma) \frac{x^2}{l^2}}_{\mathbf{k}_u} + \underbrace{\frac{\sigma a}{l}}_{\mathbf{k}_\sigma} = \mathbf{k}_u + \mathbf{k}_\sigma \quad (1.4)$$

Der erste Summand kann mit $\sin \varphi = x/l$ als Transformation

$$\frac{a}{l} (E - 2\sigma) \sin^2 \varphi$$

der aktuellen Stabsteifigkeit aus der Stabrichtung in die Kraftrichtung interpretiert werden. Für die unverformte Lage erhalten wir mit $\sigma = 0$ und $\varphi = \varphi_0$ den aus der linearen FEM bekannten Ausdruck

$$\mathbf{k}_u = \frac{EA}{L} \sin^2 \varphi_0.$$

Der zweite Summand drückt die Spannungsversteifung durch die Normalkraft im Stab aus. Die Abb. 1.14 zeigt die Tangentensteifigkeiten zusammen mit der Kraft-Weg Kurve. Die Steifigkeit \mathbf{k} ist maximal in der unverformten Lage und sinkt mit zunehmender Druckspannung $\sigma < 0$ im Stab. Am Maximum der vertikalen Kraftaufnahme geht \mathbf{k} durch das Nullniveau in den negativen Bereich über. Der Betrag von \mathbf{k} ist maximal im Nulldurchgang des Stabes, was der maximalen Druckspannung im Stab entspricht. Danach kann sich der Stab wieder entspannen und der Betrag $|\mathbf{k}|$ sinkt. Die vertikale Transformation \mathbf{k}_u der Normalsteifigkeit ist im Nulldurchgang des Stabes wegen $\sin \varphi = 0$ ebenfalls gleich Null.

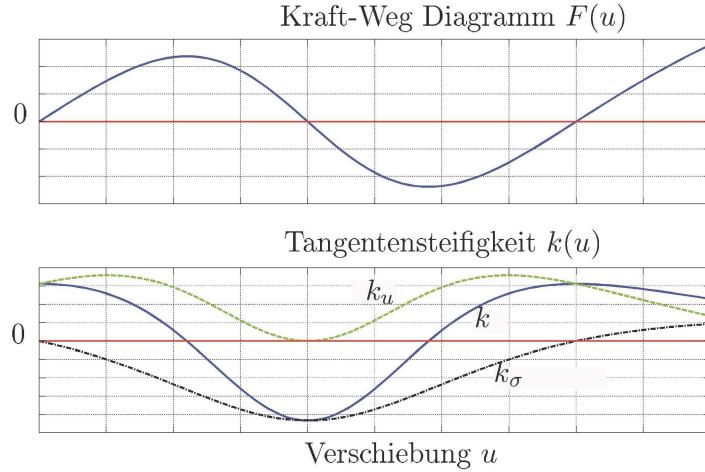
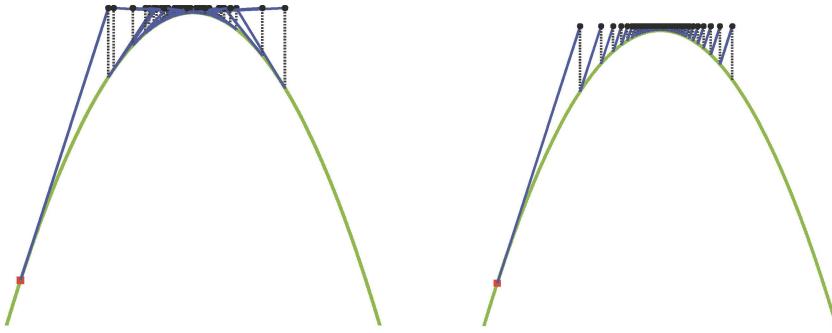


Abbildung 1.14: Tangentensteifigkeit des Durchschlagproblems

Beispiel 1.7.

Wir untersuchen das Verhalten der Newton-Methoden und des Bogenlängenverfahrens am Modellproblem $f(u) = 4 - 4(u - 1)^2$ nach Rust [19]. Dieses Modellproblem hat das Maximum $f = 4$. Für den Startwert $f_n = 3.4$ mit $\Delta f = 0.61$ divergieren die Newton-Verfahren (Abb. 1.15).

Abbildung 1.15: Divergenz für $f_{n+1} > f_{\max}$

Das Bogenlängenverfahren konvergiert hingegen auch bei signifikanter Überschreitung des Maximums durch das vorgegebene Lastniveau \bar{f}^0 . Für den Startwert $f^0 = 3.4$ und $\Delta^0 f = 0.75$ konvergiert das Bogenlängenverfahren in drei Schritten zu einem Gleichgewichtspunkt jenseits von f_{\max} (Abb. 1.16).

1.7 Aufgaben

Aufgabe 1.1.

Zeigen Sie, daß die analytische Lösung für den ebenen Spannungszustand aus Abb. 1.10 die Gleichgewichtsbeziehung (1.1) erfüllt.

Aufgabe 1.2.

Zeigen Sie, daß das Newmark Verfahren für $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$ auf das explizite zentrale Differenzenverfahren führt. Hinweis:

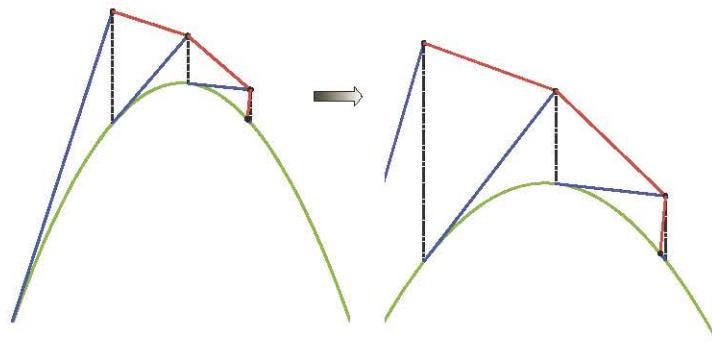


Abbildung 1.16: Iterationsverlauf des Bogenlängenverfahrens am Beispiel $f(u) = 4 - 4(u - 1)^2$. Für den Startwert $f_n = 3.4$ mit $\Delta f = 0.75$ konvergiert die Iteration in vier Schritten zum Gleichgewichtspunkt $\{1.1376, 3.9244\}$. Der vorgegebene obere Lastwert wird gesenkt von $\bar{f}^0 = 4.15$ auf $\bar{f}^4 = 3.9244$.

Kapitel 2

Operatoren und Tensoren

Die Gesetzmäßigkeiten der höheren Festkörpermechanik werden für Tensoren formuliert. Tensoren sind mechanische Größen, die in jedem Koordinatensystem durch eine bestimmte Anzahl von Zahlen (Komponenten) dargestellt werden. Dieses Kapitel führt in die formalen Grundlagen der Tensorrechnung ein. Im Kontext der Finite-Elemente-Methoden beginnen wir mit den Begriffen der kontinuierlichen und der diskreten Menge.

2.1 Kontinuierliche und diskrete Mengen

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} als *kontinuierliche Menge* oder Kontinuum. Offene oder geschlossene Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sind ebenfalls kontinuierliche Mengen, ebenso Produktmengen wie z.B. der Euklid'sche Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$. In der Kontinuumsmechanik werden Körper mit beschränkten und abgeschlossenen Untermengen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ identifiziert. Der Einheitswürfel $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ist eine kontinuierliche Untermenge und zugleich ein Beispiel für die Kreuzmenge dreier abgeschlossener Intervalle.

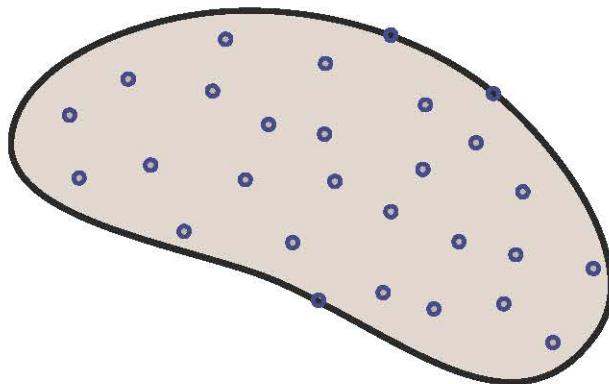


Abbildung 2.1: Kontinuierliche Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und diskrete Untermenge (Punktmenge o)

Eine Untermenge D des Kontinuums \mathbb{R} heißt *diskret*, wenn ihre Elemente räumlich voneinander isolierbar sind, d.h. für jedes Element aus $d \in D$ kann ein kontinuierliches Intervall gelegt werden, in dem sich außer d kein weiteres Element der Untermenge D befindet. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ bilden eine *diskrete Untermenge* der reellen Zahlen. Während kontinuierliche Mengen immer unendlich viele Elemente haben, können diskrete Mengen endlich oder (abzählbar) unendlich sein. Beschränkte diskrete Mengen (z.B. Berechnungsgitter auf endlichen Berechnungsbereichen) sind immer endlich.

Die Finite-Elemente-Methode heißt Diskretisierungsverfahren weil die Elementknoten eine diskrete Untermenge des kontinuierlichen Berechnungsgebietes sind.

2.2 Funktionen

Eine *eindeutige* Zuordnung von Elementen $x \in M_1$ auf $y = f(x) \in M_2$ wird als *Abbildung* oder *Funktion* $f : M_1 \rightarrow M_2$ bezeichnet.¹

Die *Rampenfunktion*

$$\langle x \rangle := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

filtert den nichtnegativen Wertebereich einer Variablen heraus. Sie ist eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, ebenso wie die Betragsfunktion

$$|x| := \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

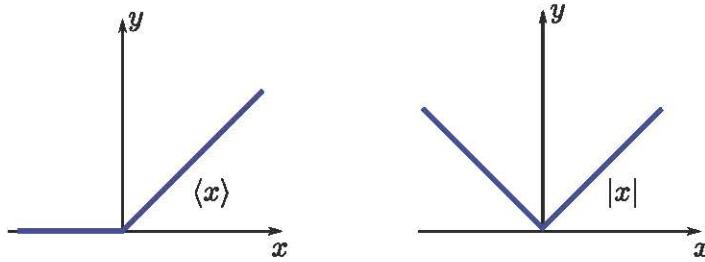


Abbildung 2.2: Rampenfunktion und Betragsfunktion

Die *Heaviside'sche Sprungfunktion*

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

und die *Signum-Funktion*.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

bilden die kontinuierliche Menge \mathbb{R} auf die diskreten Untermengen $\{0, 1\}$ bzw. $\{-1, 0, 1\}$ ab.

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{2}(|x| + x) \\ |x| &= x \operatorname{sgn}(x) \\ \langle x \rangle &= x H(x) \end{aligned}$$

Die Funktionen sind im klassischen Sinn nicht bzw. nicht überall differenzierbar. Die folgenden Regeln gelten im Sinn der verallgemeinerten Ableitung aus der Distributionstheorie

$$\begin{aligned} \langle x \rangle' &= H(x) \\ |x|' &= \operatorname{sgn}(x) \\ H'(x) &= \delta(x). \end{aligned}$$

¹ Die Zuordnung ist eindeutig wenn für alle $x \in M_1$ die Folgerung $y = f(x) \wedge z = f(x) \Rightarrow y = z$ gilt.

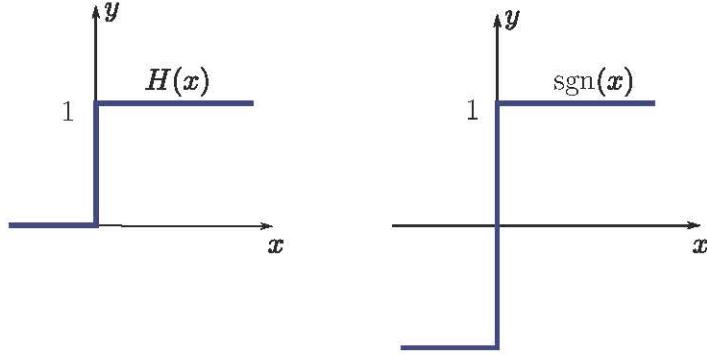


Abbildung 2.3: Heaviside- und Signumfunktion

Durch Umkehrung der Gleichungen erhalten wir Regeln für die unbestimmte Integration verallgemeinerter Funktionen.

Funktionen können auch auf diskreten Mengen definiert werden. Das *Kroneckersymbol*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

definiert eine Abbildung $\delta_{ij} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$. Die Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols auf

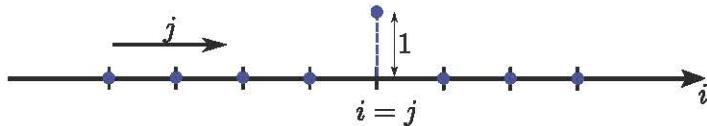


Abbildung 2.4: Ein Index j läuft über die Indexmenge \mathcal{I} . Für jedes fixierte $i \in \mathcal{I}$ hat die Kronecker Delta Funktion δ_{ij} bei $j = i$ den Wert 1 und ist ansonsten gleich Null.

die kontinuierliche Grundmenge heißt *Dirac Funktion*. Die Dirac Funktion $\delta(x, x_0)$ ist überall gleich Null außer im Punkt $x = x_0$, wo sie den Wert $+\infty$ annimmt.

$$\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{0, \infty\}, \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

Die exakte Definition wird durch die Distributionstheorie gegeben. Für die praktische Anwendung sind die folgenden Regeln ausreichend.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

$$f(x) \equiv 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) dx = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

(2.8)

Man schreibt auch $\delta_y(x)$ statt $\delta(x - y)$, oder kurz $\delta(x)$ für den in $y = 0$ zentrierten Puls.

Die *Permutation* \mathcal{P} bildet eine geordnete endliche diskrete Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ durch eine beliebige Änderung der Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ auf sich selbst ab. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Elemente der Menge paarweise voneinander verschieden sind. Je nach Anzahl der für die Umordnung minimal benötigten Tauschvorgänge $i \leftrightarrow j$ unterscheidet man zwischen *geraden* und *ungeraden* Permutationen, s. Abb. 2.6.

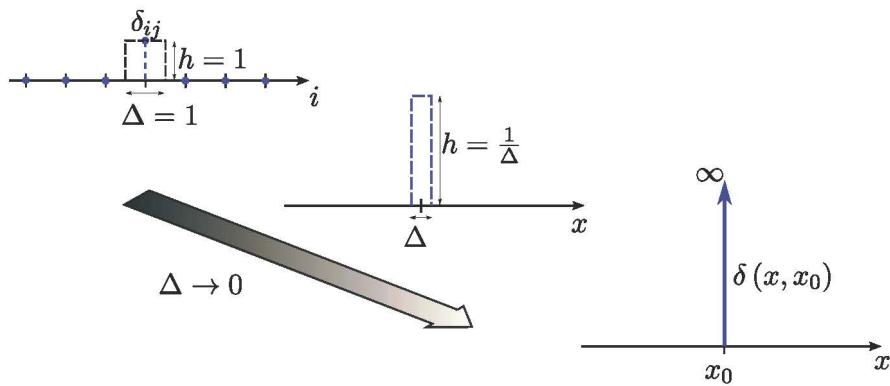
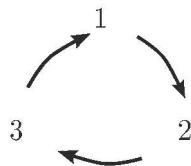


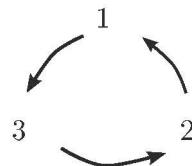
Abbildung 2.5: Dirac Funktion $\delta(x - x_0)$ als Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols

gerade

ungerade



123, 231, 312



132, 321, 213

Abbildung 2.6: Permutationen der Grundmenge $\{1, 2, 3\}$.

Das *Permutationssymbol* bildet die Menge der Permutationen von i, j, k auf die Zahlenmenge $\{-1, 0, 1\}$ ab:

$$\epsilon_{ijk} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad \epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ bilden eine gerade Permutation} \\ 0 & \text{keine Permutation} \\ -1 & i, j, k \text{ bilden eine ungerade Permutation} \end{cases}$$

Der Wert Null wird zugeordnet wenn die Bedingung der paarweisen Ungleichheit verletzt ist, also z.B. falls $ijk \rightarrow iki$.

2.3 Analytische und diskrete Modelle der Mechanik

Die analytischen Modelle der Kontinuumsmechanik können als Randwertprobleme (starke Formulierung) oder als Variationsprobleme (schwache Formulierung) gegeben sein. Sie können abstrakt als Operatoren \mathcal{L} dargestellt werden, die gesuchte Funktionen (z.B. Verschiebungen von Festkörpern) auf gegebene Funktionen (z.B. äußere Lasten) abbilden. Werden zur numerischen Lösung *Diskretisierungsmethoden* wie die FEM oder das Differenzenverfahren verwendet, so berechnet man die gesuchten Funktionen näherungsweise auf diskreten Mengen (Knoten) Ω_h . Die Operatoren \mathcal{L} werden durch Operatoren \mathcal{L}_h approximiert.

Für die analytischen Modelle der Kontinuumsmechanik werden die Operatoren der Tensoranalyse verwendet. Die diskreten Modelle werden für die numerische Berechnung als Matrix-Vektor Beziehungen implementiert. Diese Beziehungen sind Gegenstand der linearen Algebra.

Tabelle 2.1: Analytische und numerische Modelle für Berechnung und Simulation

	Analytisch	Numerisch
Grundmenge	$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (kontinuierlich)	$\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$ (diskret)
Gegeben	$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$	$f_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$
Gesucht	$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$	$u_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$
Modell	$\mathcal{L}u = f$	$\mathcal{L}_h u_h = f_h$
Lösung	z.B. Fourier-Analyse	z.B. Gauß-Algorithmus

2.4 Funktionale und Operatoren

Für die Abbildung von Funktionen sind die Namen Funktional und Operator gebräuchlich. Funktionale bilden Funktionen auf Zahlen ab. Bestimmte Integrale von Funktionen können als Funktionale aufgefaßt werden. Operatoren bilden Funktionen auf Funktionen ab. Beispiele sind Differential- oder Integraloperatoren, z.B. der Laplace-Operator Δf oder die Laplace- und die Fouriertransformation.

Tabelle 2.2: Zu den Begriffen: Funktion, Funktional, Operator

Begriff	Abbildung	Beispiel
Funktion	Zahl \rightarrow Zahl	$\sin(\pi/2) = 1$
Funktional	Funktion \rightarrow Zahl	$\int_0^\pi \sin(x) dx = 2$
Operator	Funktion \rightarrow Funktion	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 + 2xy^2 + 3y) = 6x$

Die Funktion

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

heißt *Laplacetransformierte* der Funktion $f(t), t \in \mathbb{R}_+$; der Operator \mathcal{L} heißt *Laplacetransformation*. (Dabei wird vorausgesetzt, daß das Integral auf der rechten Seite der Definitionsgleichung existiert.) Umgekehrt ist die Funktion $f(t)$ die *Laplace-Rücktransformation* der Funktion $F(s)$. Die Laplacetransformation ist für die elementaren Funktionen (Polynome, harmonische Funktionen, etc.) tabelliert. Wir geben hier nur einen Auszug von Formeln an, die in den mechanischen Untersuchungen benötigt werden.

Offenbar ist \mathcal{L} ein linearer Operator, d.h. es gilt $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$. Weiterhin

Tabelle 2.3: Laplace Transformation ausgewählter Funktionen

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
$H(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - a)$	e^{-as}
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

gelten der

- *Differentiationssatz:*

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dt} f \right) = s\mathcal{L}(f) - f(0), \quad (2.2)$$

- *Integrationssatz:*

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t f(\bar{t}) d\bar{t} \right) = \mathcal{L}(f) / s, \quad (2.3)$$

- *Faltungssatz*²

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g). \quad (2.4)$$

Die Beweise der Sätze ergeben sich direkt aus den Regeln der Differential- und Integralrechnung. So erhält man z.B. den Differentiationssatz aus der partiellen Integration

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \left(\frac{d}{dt} e^{-st} \right) dt.$$

²Das bestimmte Integral

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{t}) g(t - \bar{t}) d\bar{t}$$

wird als *Faltung* der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ bezeichnet.

Die Transformierte der Dirac-Funktion ist konstant gleich 1,

$$\int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1.$$

Wegen $\delta(t) = \dot{H}(t)$ erhalten wir dieses Ergebnis auch nach dem Differentiationssatz aus $\mathcal{L}(H)$.

2.5 Matrizen und Vektoren

Vektoren können als Funktionen von diskreten Indexmengen aufgefaßt werden. Matrizen bilden Vektoren auf Vektoren ab und sind somit diskrete Operatoren. Im Kontext mit der Finite-Elemente Methode sind insbesondere die Eigenschaften symmetrischer und positiv definiter Matrizen von Interesse.

2.5.1 Definition und Regeln

Eine tabellarische Anordnung von mn Zahlen in m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heißt *Matrix*. Das Symbol $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet die Menge aller reell-wertigen Matrizen der Dimension $m \times n$. Eine Matrix der Dimension $1 \times n$ bzw. $m \times 1$ heißt *Vektor*. Wir werden Vektoren als *Spaltenvektoren* $m \times 1$ angeben. Die in Abb. 2.7 illustrierte Multiplikation zweier Matrizen lässt sich kurz mit Hilfe der *Summationskonvention* ausdrücken.

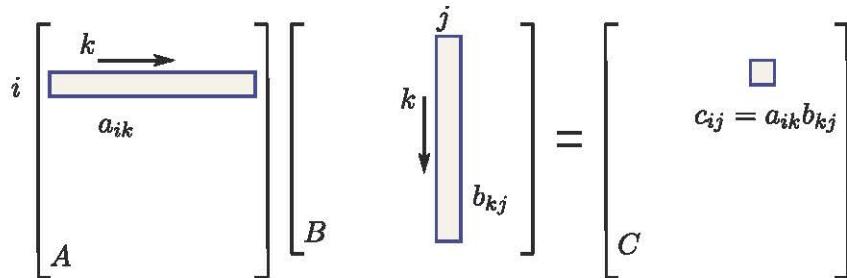


Abbildung 2.7: Multiplikation von Matrizen

Regel: Über *doppelt auftretende* Indizes wird summiert:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}$$

Für eine Matrix $A_{m \times n}$ sind definiert

- die Matrix-Summe: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ für beliebige $B_{m \times n}$,
- das Produkt mit Skalar: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- das Matrix-Produkt: $AB = [a_{ik} b_{kj}]_{m \times l}$ für beliebige $B_{n \times l}$.

Regeln: Sind die unten stehenden Operationen für Matrizen A, B, C jeweils definiert so gilt

- $A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$ (Kommutativität und Assoziativität)
- $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativität der Multiplikation)
- $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$ (Links- bzw. Rechtsdistributivität)

Das Kommutativgesetz gilt *nicht* für das Matrix-Produkt, i.d.R. ist $AB \neq BA$.

Die obigen Rechenregeln für Matrizen werden aus den Rechenregeln für reelle Zahlen begründet. Wir zeigen als Beispiel die Assoziativität. Mit der Summationskonvention lautet diese Regel in Komponentenschreibweise $(a_{ik}b_{kj})c_{jl} = a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$. In jedem Summanden gilt die Assoziativität des Zahlenprodukts. Wir können also die Klammern streichen. Die formale Gleichheit der Summanden folgt dann durch den Tausch der Indizes $j \leftrightarrow k$.

Die Matrix $A^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt *Transponierte* von $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Regeln:

- $(A^T)^T = A$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Als weitere Übung der Kurznotation weisen wir die zweite Regel nach. Sie lautet ausgeschrieben $a_{ik}b_{kj} = b_{ki}a_{jk}$. Die formale Gleichheit ergibt sich hier durch Tausch der Faktoren in der rechten Summe und Indextausch $j \leftrightarrow i$.

Die Produkte AA^T und A^TA existieren für beliebige Matrizen A . Insbesondere für Vektoren sind definiert

- das *innere Produkt (Skalarprodukt)* $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_i x_i$,
- das *äußere Produkt (Tensorprodukt)* $\mathbf{x} \mathbf{x}^T = [x_i x_j]_{n \times n}$.

2.5.2 Spezielle Matrizen

Mechanische Anwendungen führen häufig auf Matrizen mit speziellen Eigenschaften. Eine quadratische Matrix A heißt:

- *symmetrisch* wenn $A^T = A$;
- *schiefsymmetrisch* wenn $A^T = -A$;
- *diagonal* wenn $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$;
- *Einheitsmatrix I* wenn $A = [\delta_{ij}]$;
- *orthogonal* wenn $A^T A = I$;

Satz 2.1.

Für beliebige Matrizen $A_{m \times n}$ sind die Produkte $A^T A = [a_{ji}a_{ik}]_{n \times n}, \quad AA^T = [a_{ij}a_{jk}]_{m \times m}$ symmetrische Matrizen.

Beweis: Zu zeigen ist $(A^T A)^T = A^T A$. Dies folgt direkt aus den Regeln zur Matrix-Transposition.

Satz 2.2.

Eine beliebige quadratische Matrix A kann als Summe aus einer symmetrischen Matrix S und einer schiefsymmetrischen Matrix W dargestellt werden.

$$\text{Beweis: } A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_S + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_W.$$

Zwei Vektoren x, y heißen zueinander *orthogonal* wenn $x^T y = 0$. Eine Menge von Vektoren gleicher Länge $\{x_1, \dots, x_n\}$ heißt *orthonormiert* falls $x_i^T x_j = \delta_{ij}$.

Satz 2.3.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal.
- b) Die Spalten von A bilden ein orthonormiertes System.
- c) Die Zeilen von A bilden ein orthonormiertes System.

Beweis: Die Äquivalenz folgt direkt aus den Regeln der Matrix-Multiplikation für die Produkte $A^T A = I$ bzw. $AA^T = I$. Wir haben noch zu zeigen daß $AA^T = I$ wenn $A^T A = I$. Hierfür verwenden wir die inverse Matrix A^{-1} . Man zeigt leicht daß diese für orthogonale Matrizen immer existiert. Aus $A^T A = I$ folgt dann durch rechtsseitige Multiplikation $A^T = A^{-1}$, und daraus durch linksseitige Multiplikation mit A die Behauptung.

Beispiel 2.1.

Die ebene Drehmatrix

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

ist orthogonal.

Existiert für eine quadratische Matrix A eine Matrix A^{-1} mit $A^{-1}A = I$, so heißt sie die zu A *inverse Matrix*.

Beispiel 2.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Offenbar gilt für beliebige Matrizen die Gleichung $AI = IA = A$. Man kann zeigen, daß diese Gleichung nur für die oben definierte Matrix $I = [\delta_{ij}]$ gilt, d.h. die Einheitsmatrix ist eindeutig bestimmt. Multipliziert man die Gleichung $A^{-1}A = I$ von rechts mit A^{-1} , so folgt aus der Assoziativitätsregel die Gleichung $AA^{-1} = I$. Orthogonale Matrizen Q erfüllen laut Definition die Gleichung $QQ^T = I$, daraus folgt $Q^{-1} = Q^T$. Für die Inverse des Matrix-Produkts beliebiger Matrizen gilt die

Regel:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (2.1)$$

2.5.3 Spur und Determinante

Die *Spur* einer quadratischen Matrix A ist die Summe der Diagonalwerte.

$$\text{tr}(A) = a_{kk}.$$

Regeln:

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A) \quad (2.2)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (2.3)$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der zweiten Regel wenn man sich klarmacht daß $\text{tr}(AB) = a_{ij}b_{ji}$

Die *Determinante* einer quadratischen Matrix A ist definiert als

$$\det(A) = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}. \quad (2.4)$$

Zum Beispiel ist für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\det(A) = \epsilon_{11} a_{11} a_{12} + \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{21} a_{12} + \epsilon_{22} a_{21} a_{22} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Regeln

$$\det A^T = \det A, \quad (2.5)$$

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (2.6)$$

Beispiel 2.3.

Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ist $\text{tr}(A) = 4$ und $\det A = 0$.

2.5.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 2.4.

Ein (komplexwertiger) Vektor x heißt *Eigenvektor* einer quadratischen Matrix A wenn eine Zahl λ mit

$$Ax = \lambda x$$

existiert. Die Zahl λ heißt *Eigenwert* der Matrix A .

Matrizen der Dimension n haben genau n Eigenpaare (λ_j, x_j) . Für kleine Dimension n können die Eigenwerte aus der Bedingung $\det(A - \lambda I) = 0$ berechnet werden.

Beispiel 2.4.a) Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergeben sich aus der Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= \\ (1-\lambda) \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{array} \right| - (-1) \left| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{array} \right| &= \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) = 0 \end{aligned}$$

als $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Die jeweils zu λ_i gehörenden Eigenvektoren \mathbf{x}_i erhält man aus der Lösung der Gleichungssysteme

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{x}_i = 0.$$

Das Ergebnis lautet

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Man prüft leicht, daß die Matrizen

$$\Lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Gleichung (2.8) erfüllen.³

b) Analog berechnen wir für

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}/2$. Die Matrix \mathbf{B} ergibt sich aus Matrix \mathbf{A} durch Streichen der ersten Zeile und Spalte. Mechanisch ist dies äquivalent zu einer Einspannung der ersten Masse. Damit wird die Starrkörperbewegung des Gesamtsystems verhindert. Das System wird zudem "verstimmt", d.h. es ändern sich die Eigenformen und -frequenzen.

c) Für

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir die komplexen Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

In den obigen Beispielen haben wir gesehen, daß die Eigenwerte der *symmetrischen Matrizen* \mathbf{A} und \mathbf{B} reell sind. Die zugehörigen Eigenvektoren sind ebenfalls reell. Sie bilden darüber hinaus ein orthogonales System mit $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$. Demgegenüber sind die Eigenpaare der nichtsymmetrischen Matrix \mathbf{C} komplexwertig. Wir zeigen nun, daß sich die ersten beiden Beobachtungen verallgemeinern lassen, also symmetrischen Matrizen immer reelle Eigenpaare haben.

Lemma 2.5.

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch so gilt $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ für beliebige Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Beweis: Das Produkt $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ ist eine Matrix 1×1 , also eine Zahl. Das Produkt ändert sich also nicht bei Transposition, d.h. $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}$. Wegen $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ folgt die Behauptung.

Satz 2.6.

Alle Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen reellen Matrix sind reell.

³Die Matrix \mathbf{A} kann mechanisch als Steifigkeitsmatrix eines Kettenschwingers aus drei dimensionslosen Massen $\mathbf{m} = \mathbf{1}$ und Federsteifigkeiten $\mathbf{k} = \mathbf{1}$ interpretiert werden. Die Eigenwerte sind dann gleich den Quadraten der Eigenkreisfrequenzen, die Eigenvektoren zeigen die dazugehörigen Schwingformen. Da das System nicht gelagert ist, erhalten wir eine Starrkörperbewegung mit der Eigenfrequenz $\lambda_1 = 0$ und dem Eigenvektor \mathbf{x}_1 . Die höheren Eigenfrequenzen sind mit Streckungen bzw. Stauchungen der Federn verknüpft.

Beweis: Wir nehmen an dass λ und x komplex sind. Dann gilt

$$Ax = \lambda x \quad \text{und} \quad \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x};$$

der Überstrich bezeichnet die komplex Konjugierten. Da A reell ist gilt $\bar{A} = A$. Wir multiplizieren die Gleichungen jeweils von links mit \bar{x}^T bzw. x^T und subtrahieren sie:

$$\bar{x}^T Ax - x^T A\bar{x} = \lambda \bar{x}^T x - \bar{\lambda} x^T \bar{x}.$$

Die linke Seite ist laut Lemma gleich Null und man sieht leicht daß $\bar{x}^T x = x^T \bar{x}$ gilt. Daraus folgt $\bar{\lambda} = \lambda$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

Angenommen x ist komplex, dann sind für reellwertige A und λ sowohl der Realteil $y = \operatorname{Re} x$ als auch der Imaginärteil $y = \operatorname{Im} x$ Lösungen des *reellwertigen* Eigenwertproblems $Ay = \lambda y$.

Satz 2.7.

Sind die Eigenwerte einer Matrix symmetrischen und reellen Matrix A paarweise verschieden, so bilden die Eigenvektoren ein orthogonales System.

Beweis: Wir multiplizieren die Gleichungen $Ax_i = \lambda_i x_i$, $Ax_j = \lambda_j x_j$ jeweils x_j^T bzw. x_i^T von links und subtrahieren, dann ist

$$x_j^T Ax_i - x_i^T Ax_j = \lambda_i x_j^T x_i - \lambda_j x_i^T x_j.$$

Die linke Seite ist wiederum gleich Null aufgrund des Lemmas, und rechts kann $x_j^T x_i = x_i^T x_j$ ausgeklammert werden. Damit ist $0 = (\lambda_i - \lambda_j) x_i^T x_j$, also $x_i^T x_j = 0$ für $i \neq j$.

Man kann zeigen, daß auch bei mehrfach auftretenden Eigenwerten die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind; vgl. [13, Satz 1.2.3, S.35]. Eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ heißt *linear unabhängig* wenn die “Nullsumme”

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

nur im trivialen Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ möglich ist. Andernfalls heißt die Menge *linear abhängig*.

2.5.5 Spektrale Zerlegung

Faßt man die Eigenwerte und -vektoren in den Matrizen

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(spaltenweiser Eintrag der Eigenvektoren) zusammen, so gilt

$$AX = X\Lambda. \quad (2.8)$$

Für symmetrische Matrizen A ist die Matrix X orthogonal. Durch Multiplikation der Gleichung mit X^T von rechts erhalten wir die *spektrale Zerlegung*

$$A = X\Lambda X^T \quad (2.9)$$

einer symmetrischen Matrix A mit der orthogonalen reellen Matrix X und diagonalen reellen Matrix Λ .

Beispiel 2.5.

Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

hatten wir bereits

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

berechnet. Allerdings ist X keine orthogonale Matrix, da die Zeilen bzw. Spalten noch nicht normiert sind. Nach Division durch die Beträge der Vektoren erhalten wir

$$X = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Man prüft leicht, daß die Matrizen Λ und X die Gleichung (2.9) erfüllen.

2.6 Lineare Räume und lineare Abbildungen

2.6.1 Definition

Lineare Räume sind Mengen von Vektoren, die bezüglich der algebraischen Operationen "Addition" und "Multiplikation mit reellen Zahlen" abgeschlossen sind. Auf die ausführliche Definition kann an dieser Stelle verzichtet werden. Die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden einen Vektorraum, ebenso die Produktmenzen \mathbb{R}^n für beliebige n . Für die Tensorrechnung ist insbesondere der Euklid'sche Raum \mathbb{R}^3 von Bedeutung. Weitere Beispiele linearer Räume sind:

- a) $\mathbb{R}^{m \times n}$: die Menge aller Matrizen der Dimension $m \times n$.
- b) P^n : die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$.
- c) $C^0[a, b], C^n[a, b]$: die Menge der auf $[a, b]$ stetigen bzw. stetig differenzierbaren Funktionen.
- d) $L^p(a, b)$: die Menge der auf (a, b) absolut integrierbaren Funktionen, $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$.
- e) Jede Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ erzeugt den linearen Raum

$$V = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\} := \text{span } \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Offensichtlich spannen n Vektoren nicht notwendig den Raum \mathbb{R}^n auf, z.B. erzeugen drei Vektoren aus \mathbb{R}^2 entweder \mathbb{R} oder \mathbb{R}^2 aber nicht \mathbb{R}^3 .

Eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ heißt *Basis* des Vektorraums V wenn alle Vektoren in V als Superposition der Basisvektoren darstellbar sind,

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Die Zahl n heißt *Dimension* des linearen Raumes V . Man zeigt leicht, daß die Basisdarstellung (2.1) eindeutig ist. Eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ heißt *orthonormiert* oder *kartesisch* wenn $e_i^T e_j = \delta_{ij}$.

Beispiel 1. Die Vektoren $[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, 0, \dots, 1]$ werden als *kanonische Basis* des Raumes \mathbb{R}^n bezeichnet.

2.6.2 Basistransformation

Für einen Vektorraum V seien zwei Basen $E = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ und $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \dots \tilde{e}_n\}$ gegeben. Dann existiert lt. Definition für jeden Vektor aus \tilde{E} eine eindeutige Basisdarstellung bzgl. E :

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ \tilde{e}_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ &\dots \\ \tilde{e}_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n\end{aligned}\quad \boxed{\tilde{e}_j = a_{kj}e_k}$$

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

stellt eine *Basistransformation* des Vektorraumes V dar. Trägt man die Basisvektoren jeweils als Spaltenvektoren in Matrizen E bzw. \tilde{E} ein, so gilt

$$\tilde{E} = EA.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren ist die Matrix A invertierbar und $E = \tilde{E}A^{-1}$. Ist $E = I$ die kanonische Basis, so gilt insbesondere $A = \tilde{E}$, d.h. die Matrix A besteht aus den spaltenweise eingetragenen Basisvektoren \tilde{E} .

Satz 2.8.

Basistransformationen zwischen kartesischen Basen werden durch orthogonale Matrizen dargestellt.

Beweis: Da kartesische Basen durch orthogonale Matrizen dargestellt werden, gilt $A = E^T\tilde{E}$. Man zeigt leicht, daß das Produkt beliebiger orthogonaler Matrizen wiederum orthogonal ist.

2.6.3 Skalarprodukt und Norm

Das *Skalarprodukt* \cdot ist eine Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

S.1 Kommutativität: $\forall x, y \in V : x \cdot y = y \cdot x$

S.2 Bilinearität:

$$\begin{aligned}\alpha(x \cdot y) &= (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z\end{aligned}$$

S.3 Definitheit: $x \cdot x \geq 0 \quad \wedge \quad x \cdot x = 0 \implies x = 0$

Beispiele 2.

a) \mathbb{R}^n : $(x, y) = x \cdot y = x_i y_i$.

b) $\mathbb{R}^{n \times n}$: $(A, B) = A : B = a_{ij} b_{ij}$.

c) $L^2(0, 1)$: $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Die *Norm* $\| \cdot \|$ ist eine Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

N.1 Definitheit: $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \implies x = 0$

N.1 Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

N.3 Dreiecks-Ungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ist in V ein Skalarprodukt definiert, dann ist $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ eine Norm. Man spricht dann von der *induzierten* Norm.

2.6.4 Lineare Abbildungen und Darstellungssatz

Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ heißt *lineare Abbildung (Operator)* von einem Vektorraum U auf einen Vektorraum V wenn für alle $u \in U$ ein Element $v \in V$ mit $v = f(u)$ existiert und die Superpositionsbedingung

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist.

Beispiel 2.6.a) Projektion: $U = \mathbb{R}^3 \rightarrow V = \mathbb{R}^2, f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1, x_2]^T$

- b) Einbettung: $U = \mathbb{R}^2 \hookrightarrow V = \mathbb{R}^3, f([x_1, x_2]^T) = [x_1, x_2, 0]^T$
- c) Identische Abbildung $I : U \rightarrow U : I(u) = u \quad \forall u \in U$
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bildet die variablen Vektoren $[x, y, z]^T$ auf $[x, y + 2z, z - 3x]^T$ ab.
- e) Basistransformationen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- f) $U = \mathbb{R}^m, V = \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - Matrix $n \times m; f(u) = Au$.
- g) Für einen beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ ist mit $f_u(v) = u \cdot v$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.
- h) Für beliebige $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ist mit $f_{(u,v)}(w) = (u \cdot v)w$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert.

Man sieht leicht, daß die Menge der linearen Abbildungen zwischen zwei linearen Räumen U und V die Bedingungen V1–V6 erfüllt. Die linearen Abbildungen bilden also ihrerseits einen linearen Raum $\mathcal{L}(U, V)$.

Satz 2.9.

(Darstellungssatz) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann in jeder beliebigen Basis der Räume durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels $f(x) = AX$ dargestellt werden.

Der Beweis ergibt sich aus der Basisdarstellung der Vektoren in Verkettung mit der Matrixdarstellung der Basistransformation.

Beispiel 2.7.a) Projektion $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Identische Abbildung $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f([x, y, z]^T) = [x, y + 2z, z - 3x]^T$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7 Tensoren

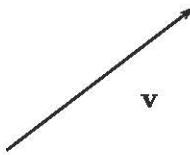
Die Festkörpermechanik betrachtet die Bewegung bzw. Verformung von Körpern unter der Einwirkung von Kräften. Zur formalen Beschreibung der Effekte werden *Tensoren* unterschiedlicher Stufen definiert. Der wesentliche Aspekt der tensoriellen Betrachtungsweise ist die *koordinatenfreie Definition der Objekte und Operationen*. Ein Tensor 0. Stufe ist eine Zahl, deren Wert unabhängig vom Koordinatensystem des Raumes ist. Beispiele sind die Temperatur ϑ oder die Dichte ρ eines Körpers. Die Tensoren 1. Stufe sind durch die drei *geometrischen Eigenschaften* Betrag, Richtung und Richtungssinn definiert. Tensoren 2. Stufe sind lineare Abbildungen von Tensoren 1. Stufe usw.

2.7.1 Tensoren 1. Stufe

Definitionen

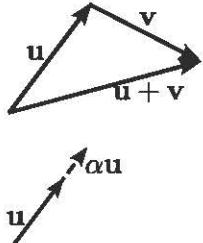
Tensoren 1. Stufe (Vektoren) sind räumliche physikalische Größen \mathbf{v} mit den Eigenschaften

1. Betrag $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \in \mathbb{R}$,
2. Richtung,
3. Richtungssinn .



Vektoren können als gerichtete Strecken symbolisiert werden. Vektoren mit dem Betrag $\mathbf{v} = 0$ bzw. $\mathbf{v} = 1$ heißen *Nullvektoren* $\mathbf{0}$ bzw. *Einheitsvektoren* \mathbf{e} . Die Eigenschaften eines Vektors sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Für das Rechnen Vektoren sind folgende Operationen *koordinatenfrei* definiert:

1. Addition "+": Betrag, Richtung und Richtungssinn des Vektors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ergeben sich aus der Dreiecksregel:
2. Multiplikation mit Zahlen: für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\alpha\mathbf{v}$ der Vektor mit dem Betrag $\alpha|\mathbf{v}|$, der Richtung von \mathbf{v} und dem Richtungssinn gleich oder entgegengesetzt von \mathbf{v} je nachdem ob $\alpha \geq 0$.



Durch Skalierung mit einer negativen Zahl ist auch die Differenz von Vektoren definiert: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

Satz 2.10.

Die Summenbildung von Vektoren ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \\ \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Der geometrische Beweis der Rechenregeln ist in Abb. 2.8 gezeigt.

Folgerung 2.11.

Die Tensoren 1. Stufe bilden einen linearen Raum.

Basisdarstellung

Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß drei beliebige linear unabhängige Vektoren eine Basis des euklidschen Raumes bilden. Wir betrachten hier nur kartesische Basen, d.h. Systeme von

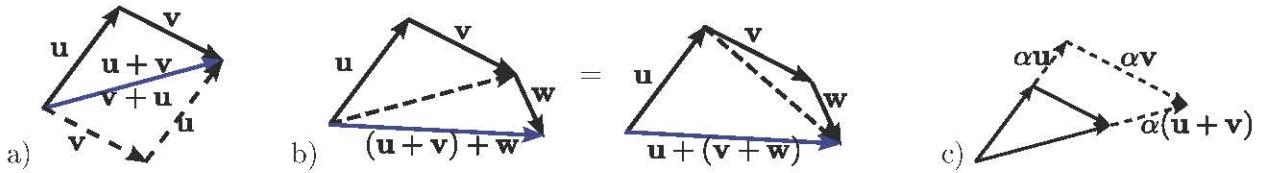


Abbildung 2.8: Regeln der Tensorrechnung: Geometrischer Beweis.

drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Tensoren in kartesischen Basissystemen heißen kurz "kartesische Tensoren".

Satz 2.12.

(Basisdarstellung:) In einer beliebigen kartesischen Basis des euklidschen Raumes hat jeder Vektor \mathbf{v} die eindeutige Basisdarstellung

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \quad v_i \in \mathbb{R}$$

mit den Komponenten (Koordinaten) $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$.

Produkte

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren ist die reelle Zahl

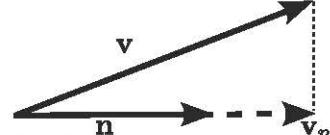
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})).$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) &= \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2, \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0 \quad : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 &\implies \mathbf{u} \perp \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Die *Projektion* des Vektors \mathbf{v} auf den Richtungsvektor \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$) ist der Vektor

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$



In der Basisdarstellung werden die Projektionen des Vektors auf die Einheitsvektoren summiert; es gilt $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$.

Das *Vektorprodukt* zweier Vektoren ist der Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ mit den Eigenschaften:

1. Betrag: $w = uv \sin(\angle u, v)$ (Arcal des von u, v gebildeten Parallelogramms),
2. Richtung: $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$,
3. Richtungssinn: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bilden ein Rechtssystem.

Die Zahl $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ heißt *Spatprodukt* der Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Wir wollen Berechnungsformeln für die Produkte, ausgehend von den Komponentendarstellungen der Vektoren in einer kartesischen Basis angeben. Hierzu betrachten wir zunächst die Produkte der Basisvektoren:

$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}_1	1	0	0
\mathbf{e}_2	0	1	0
\mathbf{e}_3	0	0	1

$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}_1	0	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_2$
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_3$	0	\mathbf{e}_1
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_1$	0

Diese Tabellen können mittels der Summationskonvention und dem Kronecker- bzw. dem Perturbationssymbol kurz geschrieben werden als

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k.$$

Daraus folgt für die Basisdarstellungen zweier Vektoren $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (2.2)$$

Nach der Definition der Determinante (2.4) kann das Vektorprodukt aus

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

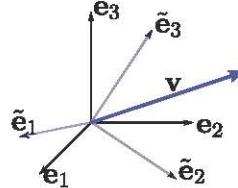
berechnet werden. Daraus folgt für das Spatprodukt die Regel

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Basistransformation

Jeder Tensor 1. Stufe ist durch die drei Eigenschaften Betrag, Richtung und Richtungssinn gegeben. Diese Eigenschaften müssen in jedem Koordinatensystem gleich sein. Um die entsprechenden Transformationsregeln zu finden, betrachten wir einen Vektor \mathbf{v} in zwei verschiedenen kartesischen Basissystemen. Die entsprechenden Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = v_j \mathbf{e}_j \\ &= \tilde{v}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{v}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3 = \tilde{v}_j \tilde{\mathbf{e}}_j, \end{aligned}$$



notieren wir in der Form $[\mathbf{v}] = [v_1, v_2, v_3]^T$ und $[\mathbf{v}]_{\sim} = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3]^T$.

Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen beiden Darstellungen schreiben wir die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_i$ im System \mathbf{e}_i auf:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \tilde{c}_{11} \mathbf{e}_1 + \tilde{c}_{21} \mathbf{e}_2 + \tilde{c}_{31} \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \tilde{c}_{12} \mathbf{e}_1 + \tilde{c}_{22} \mathbf{e}_2 + \tilde{c}_{32} \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &= \tilde{c}_{13} \mathbf{e}_1 + \tilde{c}_{23} \mathbf{e}_2 + \tilde{c}_{33} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad \boxed{\tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{c}_{kj} \mathbf{e}_k} \quad (2.3)$$

Trägt man die Koeffizienten der Basisvektoren jeweils *spaltenweise* in Matrizen \mathbf{E} bzw. $\tilde{\mathbf{E}}$ ein, so gilt $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{Q}}$ mit $\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{c}_{kj}]$. Umgekehrt erhält man analog $\mathbf{e}_j = c_{kj} \tilde{\mathbf{e}}_k$ bzw. $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q} = [c_{kj}]$. Da die Basisvektoren orthonormale Systeme bilden, sind \mathbf{Q} und $\tilde{\mathbf{Q}}$ orthogonale Matrizen. Da die Transformationen zueinander invers sind, gilt außerdem $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^T$.

Die Komponenten der Transformationsmatrix sind die Kosinus-Werte der Raumwinkel zwischen den gegeneinander verdrehten Achsen,

$$\tilde{c}_{ji} = \cos(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j).$$

Dies folgt durch skalare Multiplikation der Basisdarstellungen im jeweils anderen Koordinatensystem mit einem der Basisvektoren, z.B.

$$\cos(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_j) = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \tilde{c}_{ki} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \tilde{c}_{ki} \delta_{kj} = \tilde{c}_{ji}.$$

Es sei angemerkt daß diese geometrische Interpretation über die Raumwinkel in der praktischen Anwendung nur in einfachen Fällen (z.B. cbcne Rotation) hilfreich ist. Es empfiehlt sich vielmehr, die Matrizen über die Basisdarstellungen 2.3 zu berechnen.

Mit der Koordinatentransformation $\mathbf{e}_j = c_{kj} \tilde{\mathbf{e}}_k$ ergibt sich aus $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = v_j c_{kj} \tilde{\mathbf{e}}_k$ die Beziehung $\tilde{v}_j = v_k c_{jk}$ bzw.

$$[\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{Q}[\mathbf{v}]. \quad (2.4)$$

Für die inverse Transformation gilt

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{Q}^T [\mathbf{v}]_{\sim}. \quad (2.5)$$

Die Transformationen sind in Abb. 2.9 veranschaulicht.

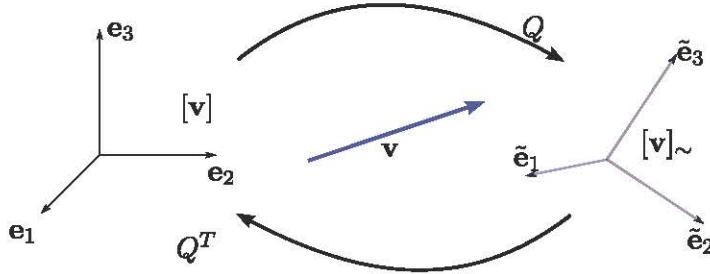


Abbildung 2.9: Tensortransformation

Beispiel 2.8.

Das Koordinatensystem $1', 2', 3' = 3$ wird mittels Drehung des Ausgangssystems $1, 2, 3$ um die 3. Achse erzeugt. Für den skizzierten Fall daß die Achse $1'$ im ersten Quadranten des Ausgangssystems liegt, lesen wir ab

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{1'} &= \cos \alpha \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} &= \sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{3'} &= \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Durch spaltenweisen Eintrag der Vektoren ergibt sich die Matrix \mathbf{Q}^T :

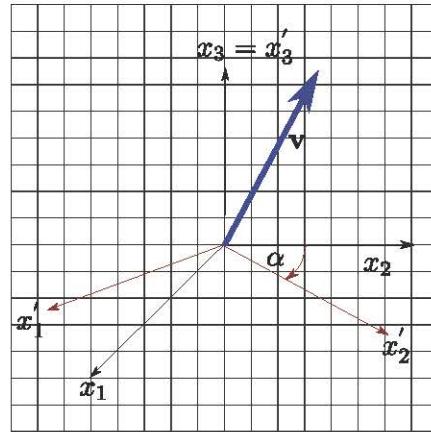


Abbildung 2.10: Drehung des Koordinatensystems

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{bmatrix} c \\ -s \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{2'} = \begin{bmatrix} s \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{3'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Abkürzungen $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$. Wir berechnen als Beispiel die Darstellung des Vektors $\mathbf{v} = [2, 2, 1]^T$ im $1', 2', 3'$ -System:

$$[\mathbf{v}]' = \mathbf{Q}[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(c-s) \\ 2(c+s) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

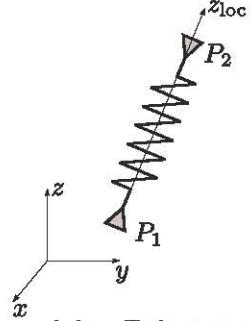
Für $\alpha = \pi/4$ ist $c = s = \sqrt{2}/2$ und somit $\mathbf{v} = [0, 2\sqrt{2}, 1]^T$. Tatsächlich liegt dann die $1, 2$ -Projektion des Vektors \mathbf{v} auf der $2'$ -Achse. Der Betrag $|\mathbf{v}|$ bleibt bei der Transformation erhalten.

Beispiel 2.9.

In technischen Berechnungsmodellen müssen vielfach die Koordinatensysteme einzelner Bauteile (hier als "local" bezeichnet) in das Koordinatensystem der Gesamtkonstruktion ("global") transformiert werden. Man erhält z.B. die Transformationsmatrix \mathbf{Q}^T ("loc2glob"), indem man die Koeffizienten der "lokalen" Basisvektoren bzgl. des "globalen" Systems *spaltenweise* einträgt. Die Matrix \mathbf{Q} stellt dann die inverse Transformation "glob2loc" dar.

Als Beispiel seien die Federkennwerte eines Lagers im lagereigenen Koordinatensystem gegeben. Der Ursprung dieses Systems liegt im unteren Montagepunkt der Feder, die lokale z -Achse ist identisch mit der Federachse, d.h. sie führt zum oberen Montagepunkt. Die Lage der lokalen x - und y -Achsen ist beliebig in der zur z -Achse normalen Ebene (Das Lager ist axialsymmetrisch zur Federachse). Beziiglich des globalen Koordinatensystems der Maschine haben die Montagepunkte der Feder die Koordinaten

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} 80 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 90 \\ 550 \\ 60 \end{bmatrix}.$$



Wir berechnen zunächst die Koordinatentransformation zwischen Maschinen- und dem Federsystem. Den Einheitsvektor der lokalen z -Achse erhalten wir aus

$$\tilde{\mathbf{e}}_z = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{\|P_1 P_2\|} = \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Man sieht leicht, dass dieser Vektor mit den Vektoren

$$\tilde{\mathbf{e}}_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \tilde{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{186}} \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ein kartesisches System bildet. Durch spaltenweisen Eintrag folgt

$$\mathbf{Q}^T = \frac{1}{\sqrt{186}} \begin{bmatrix} -62 & -11 & 3 \\ 62 & -15 & -7 \\ 62 & 18 & -4 \end{bmatrix}$$

2.7.2 Tensoren 2. Stufe

Ein *Tensor 2. Stufe* \mathbf{T} ist eine lineare Abbildung des Euklidischen Raumes auf sich selbst,

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Aus dem Darstellungssatz der linearen Algebra folgt dann, daß der Tensor \mathbf{T} in jeder Basis des \mathbb{R}^3 als Matrix $[\mathbf{T}]_{3 \times 3}$ dargestellt wird. Die *neun* Komponenten der Matrix $[\mathbf{T}]$ heißen *Koordinaten* des Tensors \mathbf{T} in dieser Basis.

Bei einer räumlichen Drehung des Koordinatensystems gilt für Tensoren 2. Stufe die Transformationsregel

$$[\mathbf{T}]_\sim = \mathbf{Q} [\mathbf{T}] \mathbf{Q}^T \quad \boxed{\tilde{t}_{ij} = t_{kl} c_{ik} c_{jl}} \quad (2.6)$$

Zur Begründung dieser Regel sei \mathbf{v} ein beliebiger Vektor und $\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v}$. Für die Darstellungen in zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen gilt dann

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}][\mathbf{v}] &= [\mathbf{w}] \\ [\mathbf{T}]_{\sim}[\mathbf{v}]_{\sim} &= [\mathbf{w}]_{\sim}. \end{aligned}$$

Die Regel (2.6) folgt nun durch Transformation der Tensoren 1. Stufe \mathbf{v}, \mathbf{w} in der unteren Gleichung nach (2.4).

Als spezielle Tensoren 2. Stufe werden definiert:

- der *transponierte Tensor* durch die Bedingung $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$,
- der *Einheitstensor* \mathbf{I} durch $\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}$,
- der *inverse Tensor* \mathbf{T}^{-1} durch die inverse Abbildung $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}$ für $\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
- der *orthogonale Tensor* \mathbf{Q} durch: $(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Die Darstellung erfolgt durch entsprechende Matrizen, d.h. $[\mathbf{T}^T] = [\mathbf{T}]^T$ usw.

Ein Tensor 2. Stufe \mathbf{T} heißt *symmetrisch* wenn $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ bzw. *schiefsymmetrisch* oder *antimetrisch* wenn $\mathbf{T}^T = -\mathbf{T}$. Tensoren 2. Stufe können mit

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T),$$

als Summe aus einem symmetrischen und einem antimetrischen Tensor dargestellt werden.

Innere Produkte

Das innere Produkt zweier Vektoren (Tensoren 1. Stufe) ist das Skalarprodukt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Wir definieren analoge Produkte für Tensoren höherer Ordnung.

Das innere *Produkt* eines Tensors 2. Stufe \mathbf{T} mit einem Tensor 1. Stufe \mathbf{v} ist der Tensor 1. Stufe $\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v}$, d.h. das Bild der linearen Abbildung \mathbf{T} . Das innere *Produkt* zweier Tensoren 2. Stufe \mathbf{A}, \mathbf{B} ist der Tensor 2. Stufe \mathbf{AB} mit $(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{Bu})$.

Nach dem Darstellungssatz gilt $[\mathbf{u}] = [\mathbf{T}][\mathbf{v}]$ und $[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]$, d.h. die Produkte von Tensoren 2. Stufe mit Tensoren 2. bzw. 1. Stufe werden durch das Matrix-Vektor-Produkt bzw. das Matrixprodukt dargestellt.

Analog zu den Tensoren 1. Stufe ist auch für Tensoren 2. Stufe ein Skalarprodukt, d.h. die Produktabbildung auf eine Zahl, definiert. Die *Doppelkontraktion* zweier Tensoren 2. Stufe wird berechnet aus

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = a_{ij} b_{ij}. \quad (2.7)$$

Regeln:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T \quad (2.8)$$

$$\mathbf{AB} : \mathbf{C} = \mathbf{A}^T : \mathbf{BC}^T = \mathbf{A} : \mathbf{CB}^T \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{BC} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} : \mathbf{C} = \mathbf{AC}^T : \mathbf{B} \quad (2.10)$$

Wir beweisen beispielhaft die erste Gleichung aus (2.10):

$$\mathbf{A} : \mathbf{BC} = a_{ij} (b_{ik} c_{kj}) = (a_{ij} b_{ik}) c_{kj} = (b_{ik} a_{ij}) c_{kj} = (b_{ki} a_{kj}) c_{ij} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} : \mathbf{C},$$

da in jedem Summand des Skalarprodukts das Assoziativitätsgesetz und das Kommutativitätsgesetz gelten und die Indizes $i \rightarrow k, k \rightarrow i$ getauscht werden können. Analog ergibt sich die zweite Gleichung

$$(b_{ki} a_{kj}) c_{ij} = (a_{kj} c_{ij}) b_{ki} = (a_{ik} c_{jk}) b_{ij} = \mathbf{AC}^T : \mathbf{B}$$

durch Indextausch $j \rightarrow i, i \rightarrow j$.

Dyadisches (äußeres) Produkt

Komplementär zu den inneren Produkten von Tensoren werden äußere Produkte definiert. Während die innere Multiplikation auf Tensoren niederer Stufe führt, wird bei der äußeren Multiplikation die Ordnung erhöht. Insbesondere ist das äußere Produkt zweier Tensoren 1. Stufe ein Tensor 2. Stufe. Die formale Definition ist über das dyadische Produkt gegeben.

Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} ist der mittels

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w} = \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad (2.11)$$

definierte Tensor 2. Stufe $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$.

Wir berechnen als Beispiel die dyadischen Produkte der Basisvektoren. Laut Definition ist $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \delta_{jk}$. Also bildet z.B. für $i = 1, j = 2$ die Dyade $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ den Vektor \mathbf{e}_2 auf \mathbf{e}_1 und die Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_3 auf den Nullvektor ab. In der kanonischen Basis hat der Tensor $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ somit die Matrix-Darstellung

$$[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allgemein wird die Dyade $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ in der kanonischen Basis durch eine Nullmatrix mit der Komponente 1 an der Stelle i, j dargestellt.

Aus dem Beispiel folgt, daß jeder Tensoren 2. Stufe \mathbf{T} in einer beliebigen Basis \mathbf{e}_i des euklidischen Raums in der dyadischen Darstellung

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

geschrieben werden kann. Die dyadischen Produkte der Einheitsvektoren bilden die kanonische Basis für die Tensoren 2. Stufe.

Die Matrixdarstellung des dyadischen Produkts ist gleich dem äußeren Produkt der Vektor-darstellungen

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}] = [\mathbf{u}] [\mathbf{v}]^T = [u_i v_j].$$

Diese einfache Regel ergibt sich aus der Definition des dyadischen Produkts und der Assoziativität des Matrixprodukts:

$$[(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{w}] = [\mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] = [\mathbf{u}] ([\mathbf{v}]^T [\mathbf{w}]) = ([\mathbf{u}] [\mathbf{v}]^T) [\mathbf{w}].$$

Hauptachsen und Hauptwerte

Ein Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ heißt *Hauptachse oder Hauptrichtung* des Tensors \mathbf{T} wenn $\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} \parallel \hat{\mathbf{x}}$ bzw. $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} = \lambda \hat{\mathbf{x}}$. Die Zahl λ heißt *Hauptwert* des Tensors.

Die Hauptwerte und Hauptrichtungen können als Eigenwerte und -vektoren einer beliebigen Matrixdarstellung der Tensoren berechnet werden. In den mechanischen Anwendungen spielen symmetrische Tensoren eine besondere Rolle. Da diese durch symmetrische Matrizen dargestellt werden, sind die *Hauptwerte und -richtungen symmetrischer Tensoren 2. Stufe reell*. Die Hauptrichtungen bilden zudem ein kartesisches Dreibein, das als *Hauptachsensystem* oder kurz *Hauptsystem* bezeichnet wird.

Mit der Matrix $\mathbf{X} = [\hat{\mathbf{x}}_1 | \hat{\mathbf{x}}_2 | \hat{\mathbf{x}}_3]$ der normierten Eigenvektoren erhält man die *spektrale Zerlegung* des Tensors \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{X} \Lambda \mathbf{X}^T. \quad (2.12)$$

Umgekehrt gilt die *Hauptachsentransformation*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{X}^T \mathbf{T} \mathbf{X}. \quad (2.13)$$

d.h. \mathbf{X} rotiert den Tensor \mathbf{T} in das Hauptsystem, in welchem er als Diagonalmatrix der Eigenwerte $\boldsymbol{\Lambda}$ dargestellt wird. Die Hauptwerte des Tensors sind gleich den Eigenwerten seiner Darstellung, $[\mathbf{T}][\hat{\mathbf{x}}] = \boldsymbol{\lambda}[\hat{\mathbf{x}}]$. In dyadischer Schreibweise gilt

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i.$$

Abschließend wollen wir noch zeigen, daß die Hauptwerte und Hauptrichtungen von Tensoren 2. Stufe bleiben bei einer beliebigen orthogonalen Transformation des Basissystems erhalten bleiben.

Es sei $\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}\hat{\mathbf{x}}$; zeige $[\mathbf{T}]_\sim[\hat{\mathbf{x}}]_\sim = \boldsymbol{\lambda}[\hat{\mathbf{x}}]_\sim$. Tatsächlich ist

$$[\mathbf{T}]_\sim[\hat{\mathbf{x}}]_\sim = (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{T} \underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}}_{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda}\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}[\hat{\mathbf{x}}]_\sim. \quad \square$$

Invarianten symmetrischer Tensoren 2. Stufe

Wir haben gesehen, daß die Hauptwerte symmetrischer Tensoren *invariant* bezüglich der Basistransformation sind. Daraus folgt, daß auch die *Koeffizienten der kubischen Bestimmungsgleichung* $\det[\mathbf{T} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}] = 0$ in jeder Darstellung des Tensors gleich sein müssen. Schreibt man die Gleichung in der Form des *charakteristischen Polynoms*

$$p_T(\lambda) = \lambda^3 - I_T\lambda^2 - II_T\lambda - III_T = 0, \quad (2.14)$$

so lauten die *Invarianten*

$$\begin{aligned} I_T &= \text{tr } \mathbf{T}, \\ II_T &= \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) - (\text{tr } \mathbf{T})^2] = \frac{1}{2} (\mathbf{T} : \mathbf{T} - I_T^2), \\ III_T &= \det \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

bzw. für die Darstellung im Hauptsystem

$$\begin{aligned} I_T &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ II_T &= -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1), \\ III_T &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jeder Tensor 2. Stufe erfüllt seine eigene charakteristische Gleichung, d.h. es gilt

$$p_T(\mathbf{T}) = \mathbf{T}^3 - I_T\mathbf{T}^2 - II_T\mathbf{T} - III_T = 0 \quad (2.17)$$

Dieser Zusammenhang folgt aus dem *Cayley-Hamilton Theorem* der linearen Algebra. Dort wird gezeigt, daß $p_A(A) = 0$ für beliebige quadratische Matrizen A gilt; vgl. z.B. [12, p.86].

Kugeltensoren und isotrope Tensoren

Ein Tensor der Form $\alpha\mathbf{I}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *Kugeltensor*. Da die Einheitsmatrix bei Koordinatentransformationen identisch erhalten bleibt, werden Kugeltensoren in alle Koordinatensystemen durch dieselbe Diagonalmatrix dargestellt. Tensoren, deren Komponenten sich bei beliebigen Koordinatentransformationen nicht ändern, heißen *isotrop*. Man kann zeigen, daß die Kugeltensoren die einzigen isotropen Tensoren zweiter Stufe sind. Tensoren 0. Stufe sind per Definition isotrop. Unter den Tensoren 1. Stufe hat nur der Null-Tensor $\mathbf{0}$ diese Eigenschaft.

Visualisierung von Tensoren

Tensoren 1. Stufe (Vektoren) werden als Pfeile mit den drei Eigenschaften Betrag, Richtung und Richtungssinn visualisiert.

Symmetrische Tensoren 2. Stufe haben drei zueinander orthogonale Hauptrichtungen. In diesem Hauptsystem wird ein Tensor \mathbf{T} als Diagonalmatrix

$$[\mathbf{T}]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

der Hauptwerte dargestellt. Ein beliebiger Richtungsvektor \mathbf{n} wird durch \mathbf{T} auf den Vektor $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ abgebildet. Die Darstellungen im Hauptsystem lauten

$$[\mathbf{n}]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [\mathbf{t}_n]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} \lambda_1 n_1 \\ \lambda_2 n_2 \\ \lambda_3 n_3 \end{bmatrix}.$$

Da \mathbf{n} ein Einheitsvektor ist, gilt $1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ und folglich auch

$$1 = \frac{\lambda_1^2 n_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2 n_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^2 n_3^2}{\lambda_3^2} = \frac{t_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{t_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{t_3^2}{\lambda_3^2}.$$

Diese Gleichung beschreibt einen Ellipsoiden mit den Halbachsen λ_1 , λ_2 und λ_3 . Die Spitzen aller vom Tensor generierten Vektoren $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ bilden den in der Abb. 2.11 gezeigten *Tensorellipsoiden*. Die Halbachsen des Ellipsoiden zeigen in die Hauptrichtungen des Tensors, ihre Länge ist gleich dem Betrag der Hauptwerte. Die Beziehung $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ kann als geometrische Abbildung

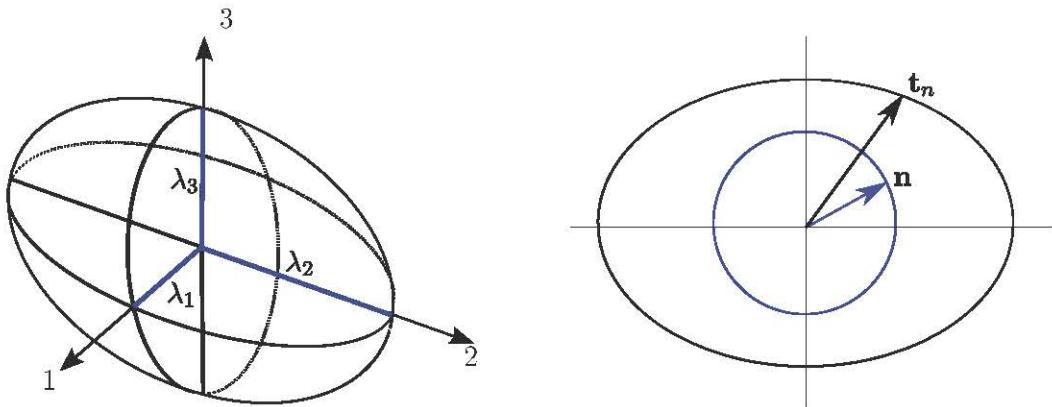


Abbildung 2.11: Die linke Skizze zeigt den Tensorellipsoiden mit den Hauptwerten λ_1 , λ_2 , λ_3 . Die rechte Skizze verdeutlicht, daß die Spitzen aller Abbildungen $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ auf dem Ellipsoiden liegen.

von der Einheitskugel aller Raumrichtungen auf den von \mathbf{T} definierten Ellipsoid interpretiert werden.

2.7.3 Tensoren höherer Stufe

Tensoren 2. Stufe bilden Vektoren auf Tensoren 1. Stufe ab. Analog dazu werden Tensoren der Stufe $n+1$ definiert als lineare Abbildung von Vektoren auf Tensoren der Stufe n .

Tensoren 3. Stufe

Definition 2.13.

Ein *Tensor 3. Stufe* ist eine lineare Abbildung eines Vektors auf einen Tensor 2. Stufe.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{T}, \quad a_{ijk}u_k = t_{ij}$$

Bei einer Basistransformation gilt $\mathbf{AQ}^T[\mathbf{u}]_\sim = \mathbf{Q}^T[\mathbf{T}]_\sim \mathbf{Q}$. Daraus folgt $\mathbf{Q}\mathbf{AQ}^T[\mathbf{u}]_\sim \mathbf{Q}^T = [\mathbf{T}]_\sim$ bzw. in Komponentenschreibweise $c_{li}a_{ijk}c_{mj}\tilde{u}_n c_{nk} = \tilde{t}_{ij}$. Nach Umordnung erhält man die Transformationsregel

$$\tilde{a}_{lmn} = a_{ijk}c_{li}c_{mj}c_{nk}. \quad (2.18)$$

Beispiele und Anwendungen

1. Die $3^3 = 27$ Komponenten des Tensors kann man sich in räumlicher Anordnung als $3 \times 3 \times 3$ Würfel vorstellen, wobei jede Würfelebene eine Permutationsmatrix 3×3 enthält, s. Abb. 2.12.

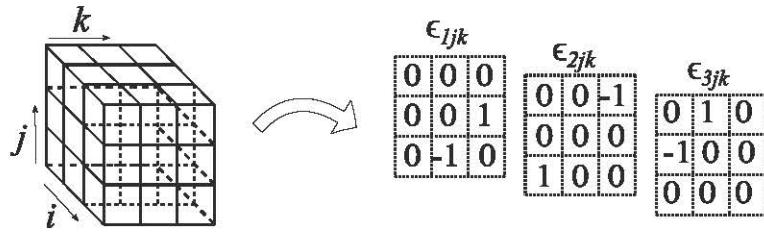


Abbildung 2.12: Permutationstensor

2. Das dreifache dyadische Produkt $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ ist definiert als lineare Abbildung

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \mathbf{x} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$$

Ein beliebiger Tensor 3. Ordnung hat somit die Basisdarstellung

$$\mathbf{A} = A_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

mit $3^3 = 27$ Koordinaten. Für den Permutationstensor ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

3. Der Permutationstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ bildet einen Vektor \mathbf{u} auf einen schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe ab.

$$\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{u} = [\epsilon_{ijk}u_k]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist gleich dem Produkt eines der Vektoren mit einem schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe. Aus der Definition $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk}a_i b_j \mathbf{e}_k$ folgt direkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{a})^T \mathbf{b} = (\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{b})\mathbf{a}$. In der Matrix-Vektor-Darstellung lauten die Gleichungen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Tensoren 4. Stufe

Tensoren 4. Stufe haben die Koordinatendarstellung

$$\mathcal{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

mit $3^4 = 81$ Koordinaten.

Beispiel 2.10.

In isotropem elastischem Material ist der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei kleinen Verformungen gegeben durch ([7, S.98]):

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon$$

mit den Lamé'schen Materialkonstanten λ, μ . Diese Gleichung lautet in Tensor-Notation

$$\sigma = \mathcal{C} : \varepsilon; \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

2.7.4 Formeln zur Tensoralgebra

Koordinatentransformation

Basistransformation:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = c_{ij} \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{e}_i = c_{ji} \tilde{\mathbf{e}}_j$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{Q} \mathbf{E}^T$$

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{Q}$$

Tensoren 1. Stufe:

$$\tilde{t}_i = t_j c_{ij}$$

$$t_i = \tilde{t}_j c_{ji}$$

$$[\mathbf{t}]_\sim = \mathbf{Q}[\mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{t}] = \mathbf{Q}^T [\mathbf{t}]_\sim$$

Tensoren 2. Stufe:

$$\tilde{t}_{ij} = t_{kl} c_{ik} c_{jl}$$

$$t_{ij} = \tilde{t}_{kl} c_{ki} c_{lj}$$

$$[\mathbf{T}]_\sim = \mathbf{Q}[\mathbf{T}] \mathbf{Q}^T$$

$$[\mathbf{T}] = \mathbf{Q}^T [\mathbf{T}]_\sim \mathbf{Q}$$

Tensoren n. Stufe:

$$\tilde{t}_{i_1 \dots i_n} = t_{j_1 \dots j_n} c_{i_1 j_1} \dots c_{i_n j_n}$$

$$t_{i_1 \dots i_n} = \tilde{t}_{j_1 \dots j_n} c_{j_1 i_1} \dots c_{j_n i_n}$$

Produkte von Tensoren.

Für Tensoren 1. und 2. Stufe sind definiert:

- das äußere Produkt = dyadisches Produkt.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{1.Stufe} \otimes \text{1.Stufe} & = & \text{2.Stufe} \\
 \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} & = & u_i v_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 \text{2.Stufe} \otimes \text{1.Stufe} & = & \text{3.Stufe} \\
 \mathbf{A} \otimes \mathbf{u} & = & A_{ij} u_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \\
 \text{2.Stufe} \otimes \text{2.Stufe} & = & \text{4.Stufe} \\
 \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} & = & A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l
 \end{array}
 \left. \right\} m+n$$

- das *innere Produkt* = Skalarprodukt = *Kontraktion*.

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{1.Stufe} \cdot \text{1.Stufe} & = & \text{0.Stufe(Zahl)} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & = & u_i v_i \\ \text{2.Stufe} \cdot \text{1.Stufe} & = & \text{1.Stufe} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} & = & T_{ij} v_j \mathbf{e}_i \\ \text{2.Stufe} \cdot \text{2.Stufe} & = & \text{2.Stufe} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & = & A_{ij} B_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \end{array} \right\} m+n-2$$

Für Tensoren 2. (und höherer) Stufe ist außerdem definiert

- die *Doppelkontraktion*.

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{2.Stufe} : \text{2.Stufe} & = & \text{0.Stufe(Zahl)} \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} & = & A_{ij} B_{ij} \\ \text{4.Stufe} : \text{2.Stufe} & = & \text{2.Stufe} \\ \mathbf{C} : \mathbf{T} & = & C_{ijkl} T_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{array} \right\} m+n-4$$

Die Doppelkontraktion kann analog auf beliebige Vielfachkontraktion von Tensoren höherer Ordnung erweitert werden, z.B. für zwei Tensoren 4. Ordnung

$$\mathcal{A} \cdots \mathcal{B} = \mathcal{A}_{ijkl} \mathcal{B}_{ijkl}.$$

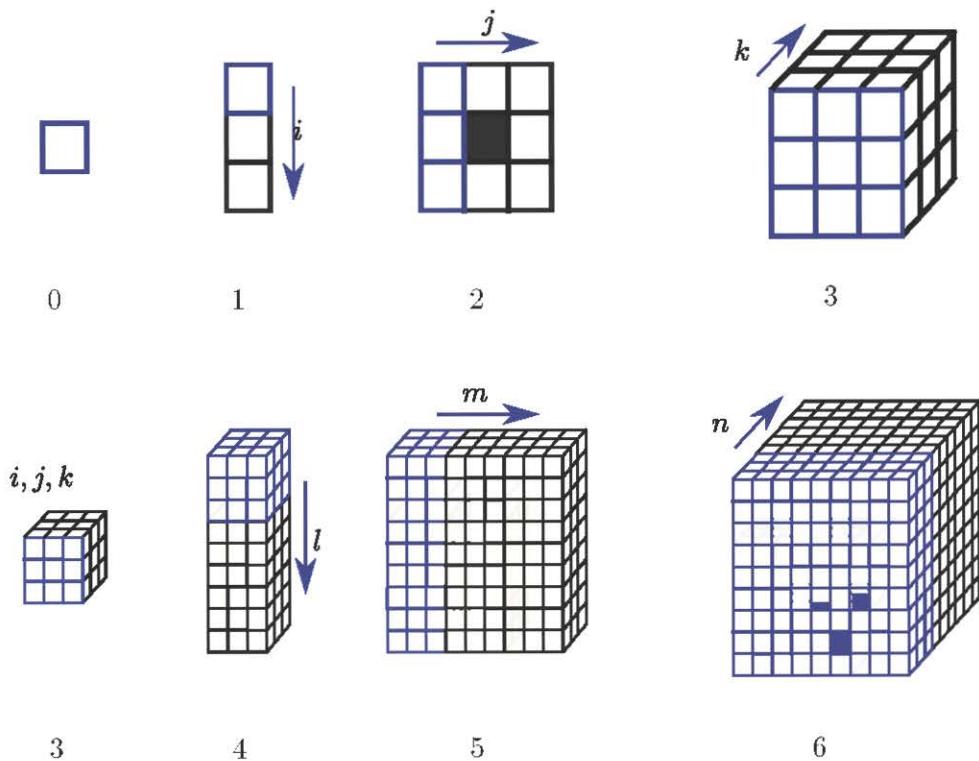


Abbildung 2.13: Darstellung von Tensoren der Stufen 0-6

2.7.5 Tensoranalysis

Tensorielle Größen sind häufig ortsabhängig und können nach den Ortsvariablen \mathbf{x} differenziert und integriert werden. Tensoren mit variablen Koeffizienten $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ werden auch als *Felder* bezeichnet. Je nach der Stufe 0,1 oder 2 des Tensors spricht man von skalaren Feldern, Vektor- oder Tensorfeldern.

Die Komponenten der ortsabhängigen Tensoren werden nach den üblichen Regeln differenziert. Die Ergebnisse werden auf unterschiedliche Weise zu neuen Tensoren zusammengefaßt. Insbesondere unterscheiden wir zwischen dem Gradienten und der Divergenz von Tensoren. Die Differentiationsregeln können kompakt im Nabla-Kalkül geschrieben werden. Wir führen auch in die Differentiation von Tensorfunktionen ein und geben Integralsätze für Tensoren an.

Gradient und Divergenz

Der Gradient und die Divergenz sind Differentialoperatoren, die Felder der Stufe n auf Felder der Stufe $n+1$ bzw. $n-1$ abbilden.

Skalares Feld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, z.B.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3 - 4.$$

Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_2 \\ 3x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, z.B.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ 3x_2^2 - x_3 \\ x_1 + x_2^2 + x_3^3 - 4 \end{bmatrix}.$$

Die *Divergenz* des Vektorfeldes \mathbf{u} ist das skalare Feld

$$\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = 2 + 6x_2 + 3x_3^2.$$

Der *Gradient* des Vektorfeldes \mathbf{u} ist das Tensorfeld

$$\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \text{grad } u_1 \\ \text{grad } u_2 \\ \text{grad } u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6x_2 & -1 \\ 1 & 2x_2 & 3x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Tensorfeld $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, z.B.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 3 & 0 \\ x_3^2 & 4x_2 + 5 & -1 \\ 1 & x_2 + x_3 & 3x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

Die *Divergenz* des Tensorfeldes ist das Vektorfeld

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \operatorname{div} T_1. \\ \operatorname{div} T_2. \\ \operatorname{div} T_3. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der Gradient eines Tensorfeldes 2. Stufe ist ein variabler Tensor dritter Stufe.

Wir fassen die Regeln für Felder 0. bis 2. Stufe in der Tab. 2.4 zusammen. Die Divergenz und der Gradient für Tensorfelder beliebiger Stufe $n > 2$ werden analog zu dieser Tabelle als Tensoren der Stufe $n - 1$ bzw. $n + 1$ definiert.

Tabelle 2.4: Differentiation von Tensorfeldern

Stufe \mathbf{T}	$\operatorname{grad} \mathbf{T}$	Stufe	$\operatorname{div} \mathbf{T}$	Stufe
0	$\frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$	1	-	-
1	$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	2	$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij}$ bzw. $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	0
2	$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$	3	$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$	1

Der Nabla-Kalkül

Zur kompakten Zusammenfassung der Differentiationsregeln führen wir den *Nabla-Operator*

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T$$

als symbolischen Tensor 1. Stufe ein. Es seien \mathbf{T} allgemein ein Tensorfeld der Stufe n und speziell $f(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ Felder der Stufen 0,1,2.

- Gradient und Divergenz:

$$\operatorname{grad} \mathbf{T} = \mathbf{T} \otimes \nabla \quad (2.19)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \nabla \quad (2.20)$$

- Produktregeln:

$$\nabla(f\mathbf{u}) = f\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla f \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = f\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (2.22)$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \mathbf{u} \quad (2.23)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} : \nabla\mathbf{u} \quad (2.26)$$

- Regel

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}) \quad (2.27)$$

- Rotation von Vektorfeldern

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \left[\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]^T. \quad (2.28)$$

Tensorfunktionen

Tensorfunktionen bilden Tensoren auf Tensoren ab.

a) Tensorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}), \dots$ sind Tensorfunktionen des Ortsvektors \mathbf{x} (Tensor 1. Stufe).

b) Die Dehnungsenergie (strain energy) linear-elastischer Körper

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}$$

bildet Tensoren 2. Stufe auf einen Tensor 0. Stufe ab.

c) Die Invarianten I_T, II_T, III_T sind skalare Funktionen (0. Stufe) des Tensors 2. Stufe \mathbf{T} .

d) In der Plastizitätstheorie wird die Fließfunktion $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \mathbf{k}^2$ als Funktion des Spannungstensors (bzw. des Deviators) definiert.

Für Tensorfunktionen f , $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ der Stufen 0,1,2 definieren wir formal die Ableitungen nach Tensoren \mathbf{u}, \mathbf{A} der Stufen 1,2 entsprechend

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial u_i} \mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial u_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial f}{\partial A_{ij}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial v_i}{\partial A_{jk}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial A_{kl}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (2.30)$$

Beispiel 2.11.a) Für Tensorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{v}, \mathbf{B}$ ergeben die Gl. (2.29) mit $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ jeweils die Gradienten $\operatorname{grad} f$ usw.

b) In linear-elastischem Material gilt $\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma}$ und $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathcal{C}$, also folgt $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} = \mathcal{C}$.

c) Zur Ableitung der Invarianten von Tensoren 2. Stufe zeigt man

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial (\operatorname{tr}\mathbf{T})^2}{\partial \mathbf{T}} = 2\operatorname{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I}, \quad \frac{\partial (\operatorname{tr}\mathbf{T}^2)}{\partial \mathbf{T}} = 2\mathbf{T}^T, \quad \frac{\partial [\operatorname{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})]}{\partial \mathbf{T}} = 2\mathbf{T} \quad (2.31)$$

und

$$\frac{\partial \det(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-T} \det \mathbf{T}. \quad (2.32)$$

Für den Nachweis der Gleichungen (2.31) notieren wir zunächst die Ableitung der Komponenten

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & i = k \wedge j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für die erste der drei Gleichungen erhalten wir nun

$$\frac{\partial (t_{kk})}{\partial t_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{kj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{I}.$$

Die zweite Beziehung ergibt sich daraus mit der Kettenregel der Differentiation. Für die dritte Beziehung gilt

$$\frac{\partial (\text{tr} \mathbf{T}^2)}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial (t_{ij}t_{ji})}{\partial t_{kl}} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = (\delta_{ik}\delta_{jl}t_{ji} + t_{ij}\delta_{jk}\delta_{il}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = 2t_{lk}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = 2\mathbf{T}^T.$$

Die vierte Formel ergibt sich aus $\text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{T}) = \mathbf{T} : \mathbf{T} = t_{ij}t_{ij}$ durch Anwendung der Kettenregel. Zum Beweis von (2.32) verweisen wir auf Holzapfel [10, p.42].

Gauß' scher Integralsatz

Satz 2.14.

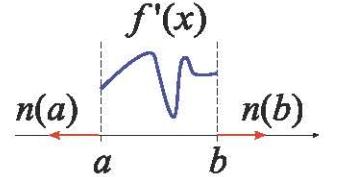
Für die Integration eines Vektorfeldes $\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA, \quad (2.33)$$

wobei $\partial\Omega$ den Rand des Gebietes Ω und \mathbf{n} die Randnormale bezeichnen.

Der Integralsatz verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reeller Funktionen auf die Integration von Tensorfeldern. Für die skalare Variable $x \in \mathbb{R}$ ist $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\partial\Omega = \{a, b\}$. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$



Die rechte Seite dieser Gleichung kann geschrieben werden als Summe $f(a)n(a) + f(b)n(b)$, denn auf der x -Achse ist $n(a) = -1, n(b) = 1$.

Faustregel: Den Integralsatz erhält man durch skalare Multiplikation von

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (2.34)$$

mit dem Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Analog ergeben sich die Gleichungen für Tensoren 0. und 2. Stufe durch Multiplikation mit einem Skalarfeld $f(\mathbf{x})$ bzw. einem Tensorfeld $\mathbf{A}((\mathbf{x}))$.

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dV = \int_{\partial\Omega} f \mathbf{n} \, dA, \quad (2.35)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dA. \quad (2.36)$$

Beispiel 2.12.

Wir wollen die schwache Formulierung für das Gleichgewicht an einem Festkörper herleiten. An jedem Punkt des Volumens \mathbf{v} erfüllen der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und der Vektor \mathbf{f} der inneren Kräfte die lokale Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{v}.$$

Ein Teil der Oberfläche $\partial\mathbf{v}$ ist über die kinematische Bedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbf{v}_u$$

für den Verschiebungsvektor \mathbf{u} fest cingespannt. Auf der Restfläche $\partial\mathbf{v}_t = \partial\mathbf{v} \setminus \partial\mathbf{v}_u$ sind Lasten \mathbf{t}_{ext} gegeben. Dort gilt die kinetische Randbedingung

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{ext}$$

mit der nach außen gerichteten Flächennormalen \mathbf{n} .

Zur Herleitung der schwachen Formulierung multiplizieren wir die Gleichgewichtsbedingung mit einer vektoriellen *Testfunktion* $\delta\mathbf{u}$ und integrieren die Produkte über das Volumen \mathbf{v} . Die Testfunktion hat die Maßeinheit des Verschiebungsvektors und erfüllt die kinematische Randbedingung auf $\partial\mathbf{v}_u$.

$$\int_{\mathbf{v}} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathbf{v} = 0.$$

Auf den ersten Integranden wenden wir die Produktregel (2.26) an:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{u}.$$

Der erste Summand kann dann mit dem Satz von Gauß in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden.

$$\int_{\mathbf{v}} \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{v} = \int_{\partial\mathbf{v}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} da = \int_{\partial\mathbf{v}_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} da = \int_{\partial\mathbf{v}_t} \mathbf{t}_{ext} \cdot \mathbf{u} da.$$

Dabei haben wir sowohl die kinematische als auch die kinetische Randbedingung berücksichtigt. Wir setzen den Ausdruck in das Gleichgewicht der Kräfte ein und erhalten nach Umstellung das Ergebnis

$$\boxed{\int_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \delta\mathbf{u} d\mathbf{v} - \int_{\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathbf{v} = \int_{\partial\mathbf{v}_t} \mathbf{t}_{ext} \cdot \delta\mathbf{u} da,}$$

das auch als *schwache Formulierung* der Gleichgewichtsbeziehung bzw. des Randwertproblems (Gleichgewicht + kinematische + kinetische Randbedingung) bezeichnet wird.

Für die mechanische Interpretation gehen wir noch einen Schritt weiter. Wegen der Symmetrie des Spannungstensors gilt $\boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \delta\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \delta\mathbf{u})^T$ und somit auch

$$\boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad} \delta\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : \left[\frac{1}{2} ((\operatorname{grad} \delta\mathbf{u}) + (\operatorname{grad} \delta\mathbf{u})^T) \right] = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}.$$

In der Festkörpermekanik wird die Testfunktion \mathbf{u} als *virtuelle Verschiebung* bezeichnet. Der Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ kennzeichnet dann, unter der zusätzlichen Voraussetzung $|\delta\mathbf{u}| \ll 1$, die virtuellen Dehnungen. Die Gleichung

$$\boxed{\delta W_{int} = \int_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} d\mathbf{v} - \int_{\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\mathbf{v} = \int_{\partial\mathbf{v}_t} \mathbf{t}_{ext} \cdot \delta\mathbf{u} da = \delta W_{ext}.}$$

wird in der Mechanik axiomatisch als *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* eingeführt. Die Integrale auf der linken und rechten Seite können jeweils als die virtuelle Arbeit interpretiert werden, welche von den (realen) inneren bzw. äußeren Kräften bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ aus der realen Gleichgewichtslage \mathbf{u} geleistet wird.

Kapitel 3

Verformungskinematik

Dieses Kapitel führt in die Kontinuumsmechanik der Festkörper ein. Feste Körper sind *formstabil*, d.h. sie haben eine ursprüngliche Geometric (Form), die sich nur bei äußerer Belastung ändert. Die Formänderung wird durch den *Deformationstensor* und die davon abgeleiteten Verzerrungstensoren analytisch beschrieben. Die Komponenten dieser Tensoren hängen von den Ortskoordinaten bzw. den geometrischen Verschiebungen der Körperfunkte ab. Diese Abhängigkeit ist i.A. nichtlinear. Die entsprechenden nichtlinearen Beziehungen in numerischen Berechnungsmodellen werden als *geometrische Nichtlinearität* bezeichnet. und

3.1 Annahmen und Einführungsbeispiele

Wir betrachten einen Festkörper, der sich - z.B. unter Einwirkung äußerer Lasten - verformt. In der Kinematik wird zunächst nur die Verformung, unabhängig von deren Ursachen, beschrieben. Hierfür gelten folgende Annahmen:

A1: Die Formänderung wird als zeitabhängiger Prozess für $t \geq 0$ betrachtet.¹ Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Körper unverformt und frei von äußeren Kräften. Die inneren Bindungskräfte werden im unverformten Zustand als Null gesetzt.

A2: Der Körper \mathbf{K} nimmt zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ ein begrenztes und endliches Volumen $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ des euklidischen Raumes ein. Das unverformte Volumen wird mit $\mathbf{V} = \mathbf{v}(0)$ bezeichnet. Die Masse \mathbf{m} des Körpers bleibt bei der Verformung konstant.

A3: Das Material des Körpers \mathbf{K} füllt das Volumen $\mathbf{v}(t)$ vollständig aus, d.h. die materiellen Punkte $\mathbf{P} \in \mathbf{K}$ sind im Volumen *dicht* verteilt.²

A4: Die Verformung wird bezüglich eines ortsfesten kartesischen Koordinatensystems beschrieben. Die Punkte $\mathbf{P} \in \mathbf{K}$ haben in diesem Basissystem zum Zeitpunkt t die Ortsvektoren

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{x} = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T .$$

Die Koordinaten bei Beginn der Verformung werden mit

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T = \mathbf{x}(0)$$

¹In statischen Anwendungen ist die Variable t i.A. eine *dimensionslose* Größe, die z.B. die Abfolge der Last- bzw. Iterationsschritte bei einer nichtlinearen FE-Berechnung symbolisiert.

²Diese Annahme kennzeichnet die Kontinuumsmechanik als *makroskopische* Theorie, in der von *mikroskopischen* Effekten wie Poren und Gefügestrukturen im Werkstoff abstrahiert wird.

bezeichnet. Während der Verformung bewegt sich der Punkt \mathbf{P} auf einer räumlichen Bahn $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$. Die Vektoren

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.1)$$

kennzeichnen die *Verschiebung* der Punkte \mathbf{P} aus ihrer Ausgangslage zum Zeitpunkt t .

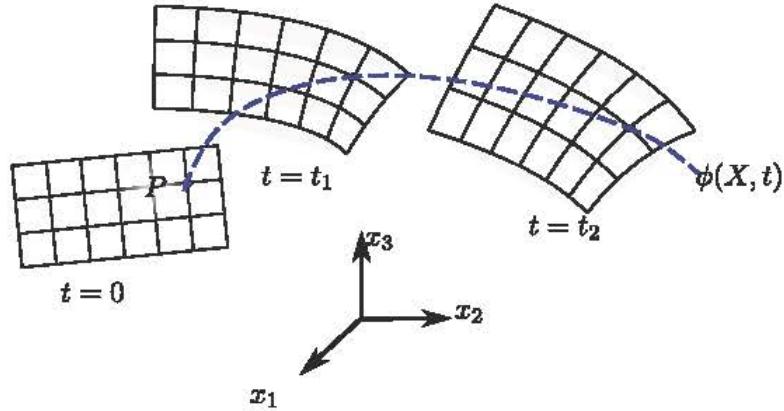


Abbildung 3.1: Bahn $\phi(\mathbf{X}, t)$ eines Punktes \mathbf{P} bei der Verformung des Körpers \mathbf{K} : unverformte Ausgangslage bei $t = 0$ und zwei verformte Konfigurationen für $t = t_1$ und $t = t_2$ (links). Ortsvektoren und Verschiebungsvektor (rechts).

In Abb. 3.1 ist die Verformung eines Körpers \mathbf{K} und die dabei beschriebene Bahn eines ausgewählten Punktes $\mathbf{P} \in \mathbf{K}$ illustriert. Die Abb. 3.2 zeigt die Ortsvektoren \mathbf{X} und $\mathbf{x}(t)$ und den zugehörigen Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}$.

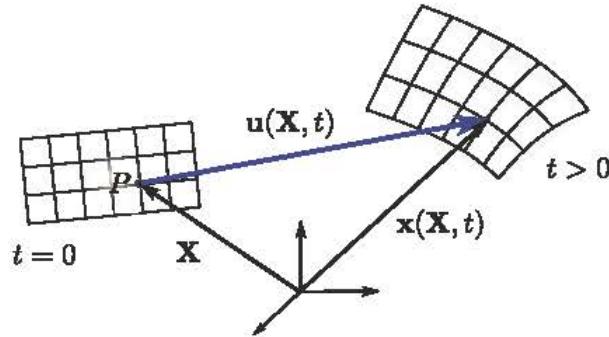


Abbildung 3.2: Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ ist die Differenz der Ortsvektoren \mathbf{X} und $\mathbf{x}(t)$.

Als Einführungsbeispiele wollen wir Verformungen in der 1,2-Ebene betrachten. Der Quotient $\tilde{t} = t/t_0$ ist eine dimensionslose Zeitvariable, die in inkrementellen Verfahren den Stand der Laststeigerung bis zur Endlast bei $t = t_0$ notiert.

Beispiel 3.1.

Ein Quadrat wird zu einem Drachenviereck verformt. Die Abb. 3.3 zeigt die Verformung zum Zeitpunkt $\tilde{t} = 1$. Die rechte obere Ecke wird aus der Ausgangslage im Punkt $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = 2$ bei $t = 0$ in den Punkt $\mathbf{x}_1 = 3, \mathbf{x}_2 = 2.5$ verschoben. Die Bewegungsbahnen $\phi(\mathbf{X}, t)$ der Eckpunkte (Punkt-Strich-Markierung) sind für diese Verformung geradlinig.

Der Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ lautet für dieses Beispiel

$$\mathbf{u}(t) = \left[\frac{\mathbf{X}_2}{2} \frac{t}{t_0}, \frac{\mathbf{X}_1}{4} \frac{t}{t_0}, 0 \right]^T.$$

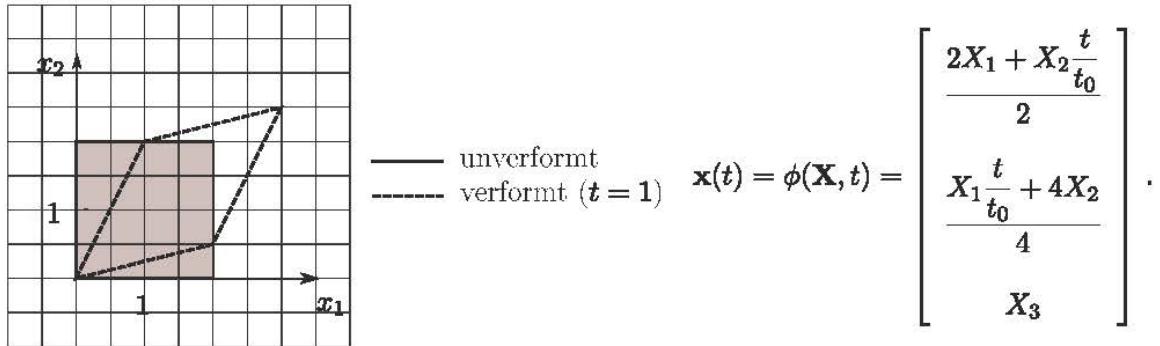


Abbildung 3.3: Verformung eines Quadrats zum Drachenviereck.

Daraus ergeben sich z.B. für die Eckpunkte bei $t = t_0$ die Verschiebungen $[0, 0, 0]^T, [0, 0.5, 0]^T, [1, 1.5, 0]^T, [1, 0, 0]^T$ (von links unten im Uhrzeigersinn).

Beispiel 3.2.

Die Schubverzerrung eines Quadrats mit starren Seitenlängen wird in der Abb. 3.4 illustriert. Die Bewegungsbahnen $\phi(\mathbf{X}, t)$ der Eckpunkte sind in diesem Fall gekrümmmt.

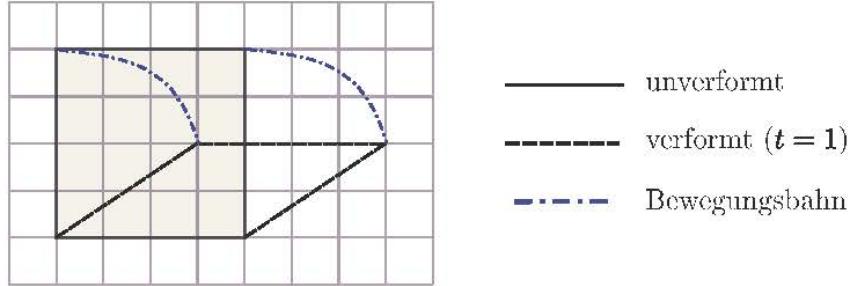


Abbildung 3.4: Schubverzerrung eines Quadrats mit starren Seiten.

Aus der Bewegungsbahn

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \sin \alpha(t) \\ X_2 \cos \alpha(t) \\ X_3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ als

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = [X_2 \sin \alpha(t), X_2(\cos \alpha(t) - 1), 0]^T$$

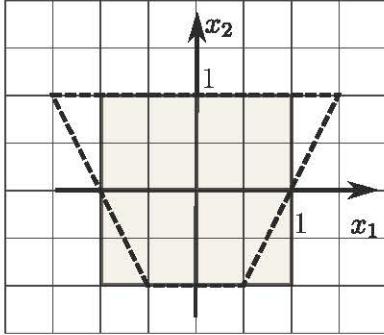
Die Punkte auf der Grundlinie $\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ des Quadrats werden nicht verschoben.

Beispiel 3.3.

In der Finite-Elemente-Methode ist der "Hourglass"-Effekt bekannt. Dabei wird ein Quadrat zu einem Trapez verformt wie in Abb. 3.5 gezeigt. Das Bezugssystem liegt bei diesem Beispiel im Mittelpunkt des Ausgangsquadrats. Der Verschiebungsvektor ist

$$\mathbf{u}(t) = \left[X_1 X_2 \frac{t}{t_0}, 0, 0 \right]^T$$

Die Punkte verschieben sich nur in die 1-Richtung, wobei der Betrag der Verschiebung jeweils linear von beiden Koordinaten abhängt. Die Punkte auf den Mittellinien $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ und insbesondere auch der Mittelpunkt $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ des Quadrats werden nicht verschoben.



$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.5: “Hourglass”-Verformung eines Quadrats.

Für diese einfachen Beispiele wurde die Funktionen $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ analytisch angegeben. Bei praktischen Anwendungen der Kontinuumsmechanik ist dies in der Regel nicht möglich und auch nicht erforderlich. In Finite-Elemente Simulationen werden z.B. die Momentankoordinaten jeweils zu diskreten “Zeitpunkten” t_k aus dem Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften am verformten Körper berechnet.

3.2 Euler'sche und Lagrange'sche Beschreibung der Bewegung

Entsprechend der Annahme **A4** hat jeder Punkt $P \in K$ zum Zeitpunkt t in einem raumfesten kartesischen System die Koordinaten $\mathbf{x}(t)$. Diese Koordinaten werden als *Euler'sche* oder räumliche Koordinaten bezeichnet. Die Koordinaten $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0)$ der Punkte zum Zeitpunkt $t = 0$ heißen *Lagrange'sche* oder *materielle* Koordinaten. Beide Koordinaten sind in demselben raumfesten kartesischen System gegeben.

Die Bewegung von Punkten kann auf zweierlei Weise beschrieben werden. In der *Lagrange'schen* Beschreibung werden die Punkte zu jedem Zeitpunkt t mit den Ausgangskoordinaten \mathbf{X} identifiziert. Die momentanen Euler Koordinaten $\mathbf{x}(t)$ werden als Funktion

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t)$$

der Ausgangskoordinaten angesehen. Die Betrachtung selektiert also Punkte \mathbf{X} in der unverformten Lage des Körpers und verfolgt die Bahn $\mathbf{x}(t)$ dieser Punkte über die Zeitspanne der Verformung.

Umgekehrt werden in der Eulerschen Betrachtungsweise raumfeste Punkte \mathbf{x} fixiert. Für jeden Zeitpunkt t wird die materielle Koordinate \mathbf{X} desjenigen Punktes angegeben, der sich zu diesem Zeitpunkt in der Position \mathbf{x} befindet. Diese Betrachtung kann als inverse Abbildung

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

aufgefaßt werden. Für Festkörper wird die Lagrange'sche Beschreibung bevorzugt, da die Punkte ihre materiellen Koordinaten während der Verformung beibehalten. In der Strömungsmechanik wird hingegen der Fluss des Kontinuums an fixierten ortsfesten Punkten beobachtet. Hierfür ist die Euler'sche Beschreibung geeignet.³

³Bei sehr großen Verzerrungen kann die Euler'sche Beschreibung auch für Festkörper vorteilhaft sein. Für die numerische Modellierung wurden daher ALE (Arbitrary Lagrange Eulerian) Techniken entwickelt, in denen beide Betrachtungsweisen vereint werden.

Beispiel 3.4.

Wir illustrieren die Begriffe an der Bewegung von Fahrzeugen. Straßenfahrzeuge werden an ihren Nummernschildern identifiziert. In der Zulassungsdatei werden die Kennzeichen wiederum mit der Adresse des Eigentümers verknüpft. Die Wagen eines Hamburger Transportunternehmens seien mit "HH-xxx" in Hamburg registriert. Wir fassen das Kennzeichen bzw. die damit verknüpften räumlichen Ortskoordinaten des Betriebshofs als Lagrange-Koordinaten \mathbf{X} eines Fahrzeugs auf. Diese Koordinaten sind bei jeder Fahrt (Bewegung) fest mit dem Fahrzeug verbunden. Die Euler-Koordinaten $\mathbf{x}(t)$ des Fahrzeugs bezeichnen die jeweilige Position (z.B. als GPS-Koordinaten) während der Touren. Zur Zeit $t = 0$ starten die Wagen vom Betriebshof. Zu diesem Zeitpunkt sind Euler- und Lagrange-Koordinaten identisch, $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{X}$. Die Tour wird vom Betriebshof aus verfolgt und protokolliert, z.B. über Funk oder GPS-Tracker. Damit wird die Bewegung als Funktion $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ erfasst.⁴

Die Fahrzeuge passieren auf den Touren Mautstellen oder anderen Verkehrskameras. Diese sind jeweils ortsfest (Koordinate $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$) montiert und protokollieren für jeden Zeitpunkt t , welche Fahrzeuge (Koordinate \mathbf{X}) gerade die Position \mathbf{x} passieren. Das Protokoll der Aufnahmen kann als inverse Funktion $\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ aufgefasst werden. In der Skizze ist das beispielhaft an der "Mautstelle" $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ illustriert.

Eine Behörde, die an der Bewegung eines bestimmten Fahrzeugs über einen bestimmten Zeitraum interessiert ist, könnte diese Information entweder direkt aus den Unterlagen der Firma einschalten oder auch durch das Data-Mining der Protokolle aller Messstellen eines Gebiets rekonstruieren. Im ersten Fall wird die Funktion $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ direkt beschlagenahmt, während die Rekonstruktion als zweifache Invertierung $\mathbf{x} = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t))$ aufgefasst werden kann.

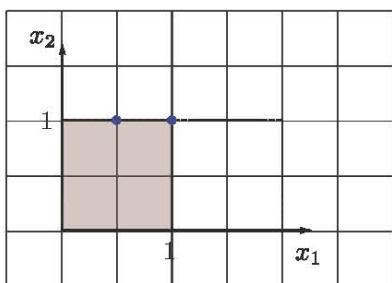
Beispiel 3.5.

Die Streckung eines Quadrats in 1-Richtung wird in der 1-2 Ebene durch die Abbildung

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} (1 + \tilde{t})X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t + t_0}{t_0} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

mit $\tilde{t} = t/t_0$ beschrieben. Die inverse Abbildung ist die Stauchung:

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{1 + \tilde{t}} \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 t_0}{t + t_0} \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Lagrange Notation

$$X_1(x_1 = 1, x_2 = 1, t = 0) = 1 \quad x_1(X_1 = 1, X_2 = 1, t = 0) = 1$$

$$x_1(1, 1, \tilde{t} = 1) = 2 \quad X_1(1, 1, \tilde{t} = 1) = \frac{1}{2}$$

$$x_1\left(\frac{1}{2}, 1, \tilde{t} = 1\right) = 1 \quad X_1(2, 1, \tilde{t} = 1) = 1$$

Euler Notation

Die Skizze zeigt den Körper zu den Zeiten $t = 0$ und $\tilde{t} = 1$. In der Tabelle sind die jeweiligen Eulerschen und Lagrangeschen Koordinaten der Punkte $X_1 = 0.5$, $X_2 = 1$ und $X_1 = X_2 = 1$ in beiden Konfigurationen aufgelistet. In der unverformten Konfiguration bei $t = 0$ sind die Koordinaten aller Punkte in beiden Betrachtungsweisen identisch. Der rechte obere Eckpunkt hat die Koordinaten $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t = 0) = [1, 1]$. In der Lagrange'schen Betrachtungsweise wird zu jedem Zeitpunkt die aktuelle raumfeste Koordinate des Eckpunkts $\mathbf{X} = [1, 1]$ notiert. Für $\tilde{t} = 1$ ist z.B. $\mathbf{x} = [2, 1]$. In der Eulerschen Betrachtungsweise wird bei $\tilde{t} = 1$ notiert, daß sich am raumfesten Beobachtungspunkt $\mathbf{x} = [1, 1]$ der Seitenmittelpunkt des gestreckten Quadrats befindet. Dieser wird mit der Koordinate $\mathbf{X} = [0.5, 1]$ aus der Ausgangskonfiguration assoziiert, also $\mathbf{X} = [0.5, 1] = \phi^{-1}(\mathbf{x}, \tilde{t} = 1)$.

3.3 Funktionen und Ableitungen

3.3.1 Funktionen

Wir betrachten einen Körper \mathbf{K} zu verschiedenen Zeitpunkten der Deformation. Den Körperfunktionen $\mathbf{P} \in \mathbf{K}$ werden dabei physikalische Eigenschaften mit mathematischen Funktionen $f(P, t)$ zugeordnet. Beispiele solcher Funktionen sind die Temperatur des Körpers im Punkt \mathbf{P} oder die Verschiebung \mathbf{u} des Punktes bei der Verformung. Die Funktionen können als Tensoren 0., 1. oder 2. Stufe (Skalar, Vektor, Tensor) gegeben sein.

Stufe	Funktion f
0	Temperatur θ , Dichte ρ
1	Koordinaten \mathbf{X}, \mathbf{x} , Verschiebung \mathbf{u} , Geschwindigkeit \mathbf{v}
2	Spannungen $\underline{\sigma}$, Dehnungen $\underline{\mathbf{E}}$, Dehnrate $\dot{\underline{\mathbf{E}}}$

Die Position des Punktes \mathbf{P} kann in den Momentankoordinaten \mathbf{x} oder den Ausgangskoordinaten \mathbf{X} angegeben werden. Die Funktionen $f(P, t)$ können sowohl nach den Ortskoordinaten als auch nach der Zeitkoordinate abgeleitet werden. Dabei ist zu beachten, daß die Momentankoordinaten \mathbf{x} wiederum von der Zeit abhängen.

3.3.2 Ableitung nach den Ortskoordinaten

Auch bei der Ortsableitung von Funktionen $f(P, t)$ ist zu unterscheiden, ob der Punkt \mathbf{P} in Momentan- oder Ausgangskoordinaten gegeben ist. Es ist zweckmäßig, für die Operatoren der Tensoranalysis die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\text{Grad } f &= \left[\frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2}, \frac{\partial f}{\partial X_3} \right]^T \\ \text{grad } f &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]^T\end{aligned}$$

und entsprechend **Div** bzw. **div** für den Divergenzoperator einzuführen. Die Operatoren beziehen sich auch für zeitabhängige Funktionen immer nur auf die Raumkoordinaten. Aus der Definition ergeben sich die einfachen Beziehungen

$$\text{Grad } \mathbf{X} = \left[\frac{\partial X_i}{\partial X_j} \right] = [\delta_{ij}] = \underline{\mathbf{I}} = \text{grad } \mathbf{x}$$

und

$$\text{Grad } \mathbf{x} \cdot \text{grad } \mathbf{X} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right] = \underline{\underline{I}}$$

mit dem Einheitstensor $\underline{\underline{I}}$.

Beispiel 3.6.

Für die Hourglass-Verformung ist

$$\text{Grad } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t}X_2 & \tilde{t}X_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{grad } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \tilde{t}x_2} & -\frac{\tilde{t}x_1}{(1 + \tilde{t}x_2)^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Durch Ausmultiplizieren und Einsetzen des Bewegungsgesetzes ersieht man $\text{Grad } \mathbf{x} \cdot \text{grad } \mathbf{X} = \underline{\underline{I}}$.

3.3.3 Ableitung nach der Zeit

In der Lagrange'schen Darstellung sind die Körperpunkte durch ihre Ausgangskoordinaten \mathbf{X} gegeben. Die Zeitableitung einer Funktion $f(P, t) = f(\mathbf{X}, t)$ ist dann gleich der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

In der Eulerschen Betrachtung ist $f(P, t) = f(\mathbf{x}, t) = f(\phi(\mathbf{X}, t), t)$. Gemäß der Kettenregel ist dann die *totale Zeitableitung*

$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial t} = \frac{Df(\mathbf{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

zu bilden. In Kurzschreibweise lautet diese Gleichung

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f \quad (3.1)$$

Die totale Ableitung in räumlichen Koordinaten und die partielle Ableitung in materiellen Koordinaten beschreiben immer dasselbe physikalische Feld, d.h.

$$\frac{Df(\mathbf{x}(t))}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Wir schreiben für die Zeitableitung der Funktion kurz

$$\dot{f} = \frac{\partial f(P, t)}{\partial t}.$$

Die Kurzform \dot{f} kann also sowohl für die partielle als auch die totale Zeitableitung der Funktion f stehen, je nachdem ob die Position des Punkt P in materiellen Koordinaten \mathbf{X} oder in räumlichen Koordinaten \mathbf{x} gegeben ist.

Beispiel 3.7.

Die Momentankoordinaten und die Verschiebungen der Punkte $P \in K$ eines Festkörpers sind Vektorfunktionen $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ bzw. $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ der Lagrange-Koordinaten. Für die Zeitableitung dieser Funktionen gilt daher

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt}.$$

Das Einheitsquadrat wird in der 1-2 Ebene gemäß der Beziehung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1(1+t) \\ X_2 \end{bmatrix}$$

gestreckt. Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{t}^2 x_1 + 2\tilde{t}x_2^2.$$

nach der dimensionslosen Zeitvariablen \tilde{t} .

Für die Darstellung der Funktion in den örtlichen Ausgangskoordinaten setzen wir die Verformungsvorschrift $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, \tilde{t})$ in die Funktionsdefinition ein und erhalten

$$f(\mathbf{X}, \tilde{t}) = \tilde{t}^3 X_1 + 2\tilde{t}X_2^2.$$

Daraus ergibt sich direkt die Zeitableitung

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = 3\tilde{t}^2 X_1 + 2X_2^2.$$

Alternativ berechnen wir die totale Ableitung für die Funktion in Momentankoordinaten:

$$\frac{Df}{D\tilde{t}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f = 2tx_1 + 2x_2^2 + \begin{bmatrix} \tilde{t}^2 \\ 4\tilde{t}x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\tilde{t}^2 X_1 + 2X_2^2.$$

Beide Zeitableitungen sind identisch.

Beispiel 3.8.

Für die Hourglass-Verformung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, \tilde{t}) = \begin{bmatrix} X_1(1+X_2\tilde{t}) \\ X_2 \end{bmatrix}$$

ist die Ableitung der Funktion

$$f(\mathbf{x}, \tilde{t}) = \tilde{t}|\mathbf{x}| = \tilde{t}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

nach \tilde{t} gesucht.

Wir bilden zuerst die totale Ableitung:

$$\frac{Df}{D\tilde{t}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \begin{bmatrix} \tilde{t} \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} \\ \tilde{t} \frac{x_2}{|\mathbf{x}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 X_2 \\ 0 \end{bmatrix} = |\mathbf{x}| + \tilde{t} \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} X_1 X_2.$$

Zum Vergleich überführen wir die Funktionsvorschrift in die Ausgangskoordinaten

$$f(\mathbf{X}, \tilde{t}) = \tilde{t}\sqrt{X_1^2(1+X_2\tilde{t})^2 + X_2^2}.$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \sqrt{X_1^2(1+X_2\tilde{t})^2 + X_2^2} + \tilde{t} \frac{2X_1^2(1+X_2\tilde{t}) X_2}{2\sqrt{X_1^2(1+X_2\tilde{t})^2 + X_2^2}} = |\mathbf{x}| + \tilde{t} \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} X_1 X_2$$

ist identisch mit der totalen Zeitableitung der Funktion in Momentankoordinaten.

3.4 Deformations- und Verschiebungsgradient

Bei Starrkörperbewegungen bleibt die die Länge beliebiger Streckenvektoren

$$\overrightarrow{PP'} \equiv \text{constant}$$

zwischen zwei Körperpunkten $P, P' \in K$ konstant. Es liegt daher nahe, die *Verformung* von Körpern durch die Änderung der Streckenvektoren $\overrightarrow{PP'}$ zu charakterisieren.

3.4.1 Deformationsgradient

Wir betrachten einen beliebigen Punkt P und den Streckenvektor $\overrightarrow{PP'}$ zu einem infinitesimal benachbarten Hilfspunkt P' wie in Abb. 3.6 gezeigt.

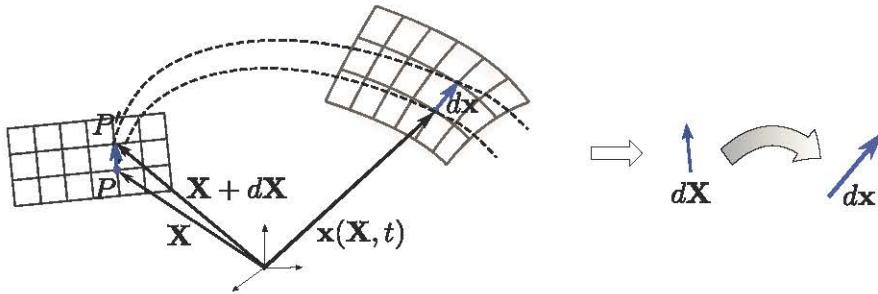


Abbildung 3.6: Längen- und Richtungsänderung einer differentiellen Strecke bei Verformung

Es sei $\overrightarrow{PP'} = d\mathbf{X}$ in der unverformten Ausgangslage und $\overrightarrow{PP'} = d\mathbf{x}$ in der verformten Lage. Unter der Voraussetzung, daß die Abbildung $\phi(\mathbf{X}, t)$ differenzierbar ist, gilt laut Kettenregel

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese Beziehung kann in Matrix-Vektor-Schreibweise geschrieben werden als

$$d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}} d\mathbf{X} \quad (3.1)$$

mit dem *Deformationsgradienten*

$$\underline{\underline{F}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]. \quad (3.2)$$

Der Tensor $\underline{\underline{F}}$ ist eine lineare Abbildung $\mathbf{F} : d\mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{x}$, welche die Änderung eines infinitesimalen Streckenvektors bei der Verformung des Körpers beschreibt.

Wir nehmen an, daß die Verformungen nicht entartet sind. Dann wird der Deformationstensor durch nichtsinguläre Matrizen mit $\det \underline{\underline{F}} \neq 0$ dargestellt. Unter dieser Voraussetzung existiert der inverse Tensor

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X} = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right].$$

Dieser Tensor stellt die inverse Abbildung von der verformten auf die unverformte Strecke $d\mathbf{X} = \underline{\underline{F}}^{-1}d\mathbf{x}$ dar.

Entsprechend der Gleichung 3.1 können die Zeilen des Deformationsgradienten als die (nicht normierten) Basisvektoren desjenigen (i.a. schiefwinkligen) Koordinatensystems interpretiert werden, in dem der Vektor $\overrightarrow{PP'}$ die Komponenten $d\mathbf{X} = [dX_1, dX_2, dX_3]^T$ hat. Man spricht von einem *konvektiven* Koordinatensystem, da es sich mit einem differentiellen Element mitverformt. Im konvektiven System bleiben die Koordinaten des Streckenvektors über den gesamten Zeitraum der Verformung konstant auf dem Wert bei $t = 0$. Im Sinn dieser Interpretation werden sie als *materielle* Koordinaten bezeichnet. Die materiellen Koordinaten sind konstant, da sie sich auf Basisvektoren beziehen, die sich zusammen mit dem Material des Körpers verformen.

3.4.2 Verschiebungsgradient

Die partielle Ableitung des Verschiebungsvektors \mathbf{u} nach den materiellen Koordinaten \mathbf{X}

$$\underline{\underline{D}} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

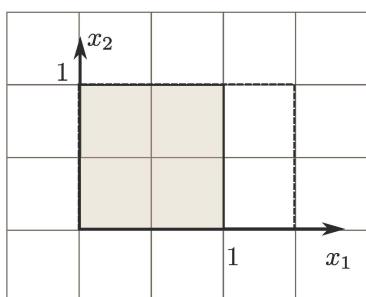
heißt *Verschiebungsgradient*. Aus $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ folgt

$$\underline{\underline{D}} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] - \left[\frac{\partial X_i}{\partial X_j} \right] = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}.$$

bzw. $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}}$.

3.4.3 Beispiele

Beispiel 3.9.



Streckung: Für die reine Streckung $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} (1+\tilde{t})X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ist der Deformationsgradient

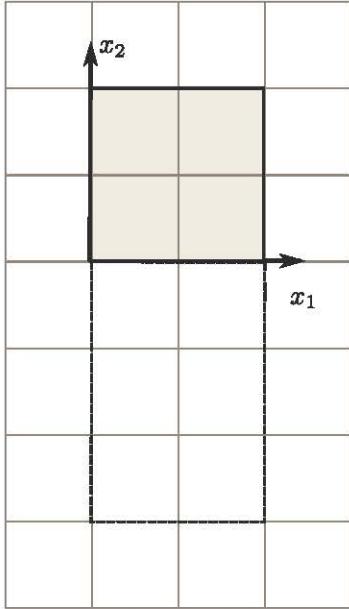
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1+\tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ein diagonaler Tensor. Aus $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}$ ergibt sich der Verschiebungsgradient

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \tilde{t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis erhält man auch über die partiellen Ableitungen des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(t) = [X_1\tilde{t}, 0]^T$.

Beispiel 3.10.



Streckung und Rotation: In diesem Beispiel wird das Quadrat nach der Streckung noch rotiert. Die skizzierte Verformung wird durch die Abbildung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} X_2 \\ -(1+t)X_1 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Daraus folgen der Deformationsgradient

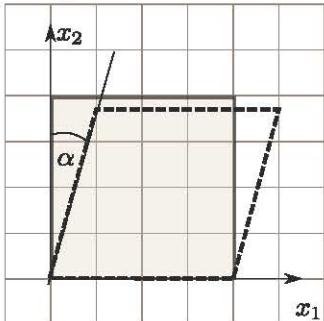
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+t) & 0 \end{bmatrix}.$$

und der Verschiebungsgradient

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -(1+t) & -1 \end{bmatrix}.$$

In den weiteren ebenen Beispielen werden die Komponenten in der Raumdimension 3 nicht mehr ausgeschrieben.

Beispiel 3.11.



Schub 1: Bei Schub mit starren Seitenlängen verformt sich das Quadrat gemäß

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} X_1 + \sin \alpha(t) X_2 \\ \cos \alpha(t) X_2 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

3.5 Cauchy-Green Tensoren und Strecktensoren

3.5.1 Definitionen

Wir haben den Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ als lineare Abbildung von Streckenvektoren $d\mathbf{X}$ auf $d\mathbf{x}$ eingeführt. Zur Berechnung der Länge $s = |d\mathbf{x}|$ des verformten Streckenvektors bilden wir das Skalarprodukt

$$s^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}) d\mathbf{x}.$$

Der symmetrische Tensor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}. \tag{3.1}$$

heißt *rechter Cauchy-Green* (C-G) Tensor.

Der Tensor

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T \tag{3.2}$$

heißt *linker Cauchy-Green* Tensor oder *Finger* Tensor. Dieser Tensor ist geometrisch durch die inverse Längenberechnung

$$S^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^T (\underline{\underline{F}}^{-1} d\mathbf{x}) d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{b}}^{-1} d\mathbf{x}$$

motiviert.

Die Cauchy-Green Tensoren sind symmetrisch und positiv definit. Die Eigenwerte α_i der Tensoren sind somit positiv und reell. Führen wir diese Eigenwerte als *Quadrat* positiver reeller Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ein, so kann die spektrale Zerlegung des linken C-G Tensors in der Form

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{N}} \Lambda^2 \underline{\underline{N}}^T \quad (3.3)$$

mit der diagonalen Matrix

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

und dem orthogonalen Tensor $\underline{\underline{N}}$ der normierten Eigenvektoren angegeben werden.

Die Tensoren $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ und $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T$ haben dasselbe Spektrum. Für den Nachweis multiplizieren wir die Eigenwertgleichung $\underline{\underline{C}} \underline{\underline{N}} = \alpha \underline{\underline{N}}$ von links mit dem Deformationstensor.

$$\underline{\underline{F}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{N}} = \alpha \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{N}}.$$

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation folgt nun, daß α auch ein Eigenwert des Tensors $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T$ ist. Somit hat der Finger Tensor die spektrale Darstellung

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{n}} \Lambda^2 \underline{\underline{n}}^T \quad (3.4)$$

mit Eigenwerten λ_i und zugehörigen normierten Eigenvektoren $\underline{\underline{n}}$.⁵

Linker und Rechter Strecktensoren

Die Strecktensoren $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{v}}$ werden formal als Wurzeln aus dem linken bzw. rechten C-G Tensor definiert.

$$\underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{N}} \Lambda \underline{\underline{N}}^T, \quad (3.5)$$

$$\underline{\underline{v}} = \sqrt{\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T} = \underline{\underline{n}} \Lambda \underline{\underline{n}}^T. \quad (3.6)$$

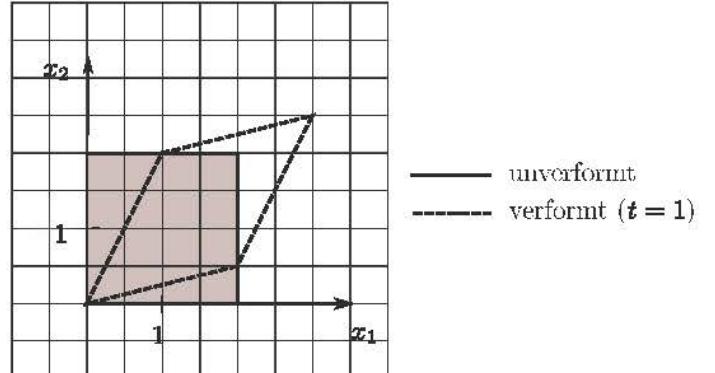
Die Komponenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Diagonalmatrix Λ heißen *Streckungen*.

3.5.2 Beispiele

Beispiel 3.12.

Wir betrachten die Verformung aus dem Einführungsbeispiel

$$\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} \frac{2X_1 + X_2 \tilde{t}}{2} \\ \frac{X_1 \tilde{t} + 4X_2}{4} \\ X_3 \end{bmatrix}.$$



Der Deformationstensor $\underline{\underline{F}}(\tilde{t} = 1)$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

⁵Der Finger Tensor wird mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet, weil er sich auf die verformte Konfiguration bezieht.

bildet die Strecke $d\mathbf{X} = [1, 0]^T$ auf $d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{X} = [1, \frac{1}{4}]^T$ ab. Daraus erhalten wir

$$s^2 = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}.$$

Der rechte Cauchy-Green Tensor ergibt sich zu

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{16} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Für den Vektor $\mathbf{X} = [0, 1]^T$ ergibt sich die Länge s des verformten Vektors alternativ aus der Gleichung

$$s^2 = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{C}} d\mathbf{X} = \frac{17}{16}.$$

Wir berechnen noch den Finger Tensor und dessen Inverse

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{16} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{b}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{68}{49} & \frac{-48}{49} \\ \frac{-48}{49} & \frac{80}{49} \end{bmatrix}.$$

Durch weitere Berechnung überzeugt man sich leicht von dem Ergebnis $d\mathbf{X}^T \underline{\underline{d}\mathbf{X}} = 1 = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{B}}^{-1} d\mathbf{x}$.

Beispiel 3.13.

Streckung: Der Deformationsgradient der reinen Streckung

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} (1 + \tilde{t}) & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist symmetrisch, daher sind die C-G Tensoren $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}}^2$ identisch.

Streckung und Rotation: Aus dem Deformationsgradienten

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \tilde{t}) & 0 \end{bmatrix}.$$

erhalten wir

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} (1 + \tilde{t})^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 + \tilde{t})^2 \end{bmatrix}.$$

Ein Vergleich mit dem Beispiel "Streckung" zeigt, daß die rechten C-G Tensoren für beide Verformungen gleich sind. Die zusätzliche Starrkörperrotation im Beispiel "Streckung und Rotation" ist im Tensor $\underline{\underline{C}}$ nicht mehr enthalten bzw. "herausgerechnet". Diese Beobachtung mittels der polaren Zerlegung auf beliebige Verformungen verallgemeinert werden.

3.6 Polare Zerlegung des Deformationstensors

Der Deformationstensor stellt die lineare Abbildung von Streckenvektoren zwischen zwei Konfigurationen im Verformungsprozess dar. Diese Vektoren ändern im Allgemeinen sowohl ihre Länge als auch ihre Richtung, d.h. sie werden gestreckt oder gestaucht und gedreht. Diese Anschauung kann rechnerisch in der *polaren Zerlegung* des Deformationsgradienten erfaßt werden.

3.6.1 Polare Zerlegung und Rotationstensor

Aus den linken und rechten Strecktensoren \underline{U} und \underline{v} erhalten wir die linken und rechten *polaren Zerlegungen* des Deformationstensors

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}, \quad (3.1)$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \underline{\underline{R}}. \quad (3.2)$$

Der Tensor

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{v}}^{-1} \underline{\underline{F}} \quad (3.3)$$

heißt *Rotationstensor*.

Der Rotationstensor ist ein orthogonaler Tensor. Tatsächlich ist

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{U}}^2 \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{I}}.$$

Wir haben bereits gesehen, daß der linke und der rechte C-G Tensor dieselben Eigenwerte haben. Die zugehörigen normierten Eigenwerte werden durch den Rotationstensor ineinander transformiert. Um dies zu zeigen, sei α ein Eigenwert des linken C-G-Tensors mit dem normierten Eigenvektor \mathbf{N} , also

$$\underline{\underline{C}} \mathbf{N} = \alpha \mathbf{N}.$$

Wir ersetzen $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$ und multiplizieren die Gleichung von links mit dem Rotationstensor $\underline{\underline{R}}$:

$$\alpha \underline{\underline{R}} \mathbf{N} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}^2 \mathbf{N} = \underbrace{\underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}}_{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{U}} \mathbf{N} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} \mathbf{N} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{R}} \mathbf{N}.$$

In der Gleichungskette haben wir die Symmetrie des Strecktensors und die Orthogonalität des Rotationstensors genutzt. Damit ist bewiesen daß α ein Eigenwert des rechten C-G Tensors mit dem Eigenvektor $\mathbf{n} = \underline{\underline{R}} \mathbf{N}$ ist. Es ist leicht zu zeigen daß die Euklidsche Norm eines Vektors sich bei Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix nicht ändert, folglich ist auch \mathbf{n} ein Einheitsvektor.

Zu zeigen ist schließlich noch die Gleichung $\underline{\underline{v}}^{-1} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}$ für $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}$. Tatsächlich ist

$$\underline{\underline{v}}^{-1} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{n}} \Lambda^{-1} \underline{\underline{n}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{N}} \Lambda^{-1} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}},$$

wobei wir noch die Transformation $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{R}} \mathbf{N}$ verwendet haben.

3.6.2 Beispiele

Mit der polaren Zerlegung wird die allgemeine Deformation als eine Superposition von Starrkörperdrehung (vermittels des Roatationstensors) und einer winkelgetreue Streckung *in den Hauptrichtungen* der C-G Tensoren dargestellt.

Beispiel 3.14.

Der Deformationstensor der reinen Streckung

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist diagonal. Der Körper wird in Richtung des Vektors \mathbf{E}_1 mit dem Faktor $\lambda_1 = 1+t$ gestreckt.

In diesem Fall erübrigts sich das "Quadrieren" zur Berechnung des C-G Tensors und das "Wurzelziehen" in dessen spektraler Zerlegung. Offenbar gilt $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$ und $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{F}}$ sowie $\mathbf{N}_i = \mathbf{E}_i$, d.h. die Eigenvektoren des C-G Tensors liegen auf den Koordinatenachsen. Vektoren parallel zu den Basisvektoren \mathbf{E}_i

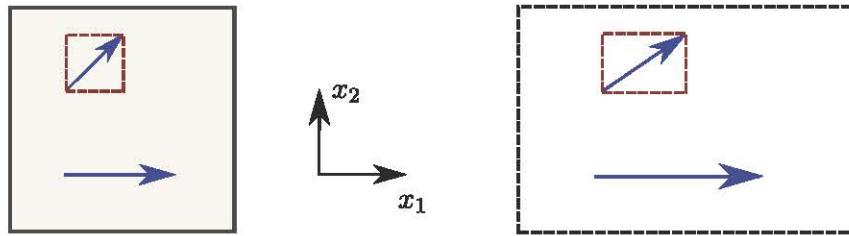


Abbildung 3.7: Reine Streckung eines Körpers in 1-Richtung. Der in Streckrichtung markierte Vektor $d\mathbf{X}$ ändert nur seine Länge. Ein unter Winkel herausgeschnittener Vektor $d\tilde{\mathbf{X}}$ ändert sowohl seine Länge als auch seine Richtung. Das in den Hauptrichtungen der Streckung herausgeschnittene Quadrat wird winkelgetreu gestreckt.

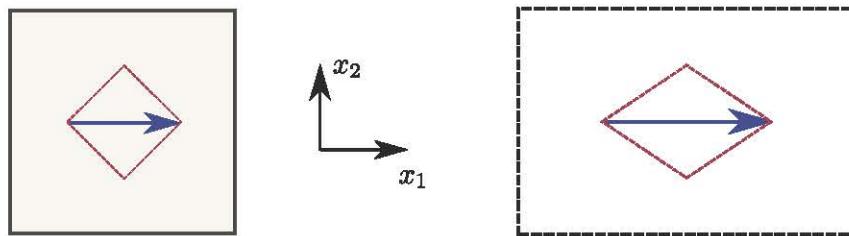


Abbildung 3.8: Winkelverzerrung bei reiner Streckung. Ein unter Winkel zur Streckrichtung herausgeschnittenes Quadrat wird nicht winkelgetreu verformt.

werden mit den Faktoren λ_i richtungstreu gestreckt bzw. gestaucht. Vektoren in allgemeiner Lage ändern dagegen auch bei einer reinen Streckung des Körpers ihre Richtung. Ein parallel zu den Hauptrichtungen herausgeschnittenes Quadrat wird winkelgetreu zu einem Rechteck gestreckt, wobei aber die Diagonale auch die Richtung ändert; vgl. Abb. 3.7.

Ein beliebig herausgeschnittenes Quadrat wird bei der Verformung winkelverzerrt wie Abb. 3.8 zeigt. Der Tensor $\underline{\underline{U}}$ ist in der Regel voll besetzt. Bei Koordinatentransformation in die Hauptrichtungen reduziert sich die Darstellung auf eine Diagonalmatrix.

Beispiel 3.15.

Streckung und Rotation: Der Deformationstensor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\tilde{t}) & 0 \end{bmatrix}$$

liefert den Cauchy-Green Tensor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} (1+\tilde{t})^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

also dasselbe Ergebnis wie für die reine Streckung. Tatsächlich gilt allgemein

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$$

d.h. der C-G Tensor erfasst jeweils nur die Streckungen und ist "frei" von der in $\underline{\underline{F}}$ ggf. noch enthaltenen Starrkörper-Rotation.

Der rechte Strecktensor

$$\underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} 1+\tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entspricht einer Streckung in 1-Richtung.

Die formale Berechnung des Rotationstensors

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix}$$

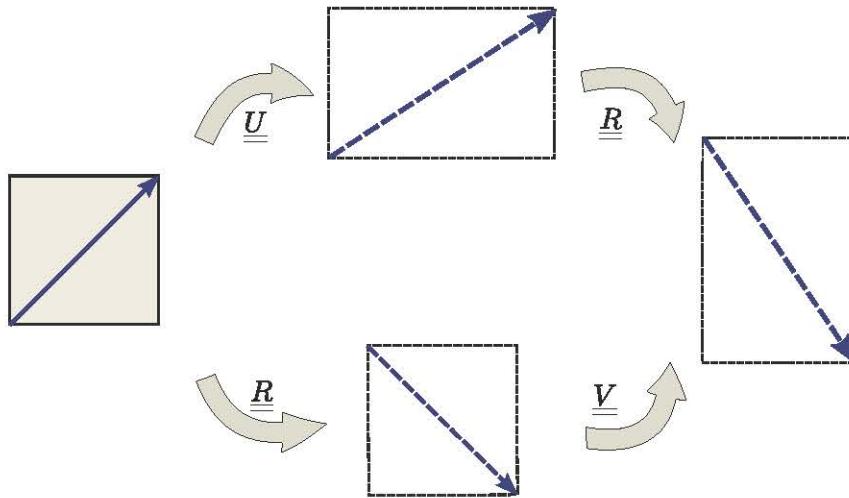


Abbildung 3.9: Streckung und Rotation: linker und rechter Streckensor. Die Verformung von $d\mathbf{X}$ auf $\mathbf{dx} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{X}$ kann als Abfolge von Streckung und Drehung $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{U}}d\mathbf{X}$ oder umgekehrt als Streckung nach Drehung $\underline{\underline{V}}\underline{\underline{R}}d\mathbf{X}$ aufgefasst werden.

zeigt, daß dieser eine Drehung um 90° darstellt. Der linke Streckensor

$$\underline{\underline{v}} = \sqrt{\underline{\underline{FF}^T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{t} \end{bmatrix}$$

gibt eine Streckung in die 2-Richtung an. Dies ist plausibel, da die linke Streckung gemäß $\mathbf{dx} = \underline{\underline{v}}\underline{\underline{R}}d\mathbf{X}$ nach der Rotation ausgeführt wird, wie in Abb. 3.9 illustriert.

Beispiel 3.16.

Im Beispiel **Schub 1** (konstante Seitenlängen) erhalten wir aus dem Deformationstensor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

den C-G Tensor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}^T}\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2}^2 = 1 \pm \sin \alpha$ und den Eigenvektoren

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Hauptrichtungen des C-G Tensors sind um 45° gegenüber den Koordinatenachsen gedreht.

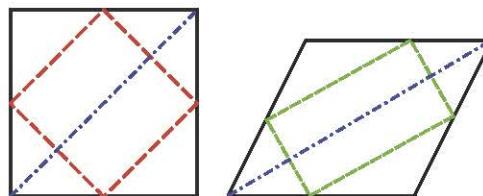


Abbildung 3.10: Schubverformung mit starren Seitenlängen für $\alpha = 30^\circ$. Ein in den Hauptrichtungen herausgeschnittenes Quadrat wird winkelgetreu zu einem Rechteck verzerrt.

Die Abb. 3.10 zeigt die Schubverformung des Einheitsquadrats, welchem ein Quadrat den Hauptrichtungen des C-G Tensors einbeschrieben ist. Die Eckpunkte des inneren Quadrats liegen mittig auf den

Kanten des unverformten Körpers. Die verformte Konfiguration wurde für $\alpha = 30^\circ$ berechnet. Die Kantenmitten werden wiederum auf die Mittelpunkte der verformten Kanten abgebildet. Das in den Hauptrichtungen einbeschriebene Quadrat wird winkelgetreu zu einem Rechteck verformt. Die Kantenlängen dieses Rechtecks ergeben sich aus den Eigenwerten $\lambda_{1,2}^2$ des C-G Tensors bzw. aus dem Strecktensor. Dieser wird aus der spektralen Zerlegung (mit $s = \sin \alpha$)

$$\underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \sqrt{1-s} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+s} \end{bmatrix} \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{1-s} + \sqrt{1+s} & \sqrt{1+s} - \sqrt{1-s} \\ \sqrt{1+s} - \sqrt{1-s} & \sqrt{1-s} + \sqrt{1+s} \end{bmatrix}$$

berechnet. Für $\alpha = 30^\circ$ sind die Streckungen $\lambda_1 = \sqrt{1.5}, \lambda_2 = \sqrt{0.5}$. Der Rotationstensor $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{U}}^{-1}$ stellt eine Drehung um 15° dar. Die geometrische Anschauung zeigt, daß dieses Gradmaß genau gleich der Winkeldifferenz zwischen den Hauptrichtungen \mathbf{N}_i und \mathbf{n}_i in der unverformten bzw. der verformten Konfiguration ist. Es gilt also $\mathbf{n}_i = \underline{\underline{R}} \mathbf{N}_i$ wie bereits theoretisch gezeigt.

3.6.3 Verallgemeinerung auf die räumliche Deformation

Die Beobachtungen an den ebenen Beispielen können auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden. Durch die polare Zerlegung wird die Verformung eines Volumenelements als Verkettung aus Starrkörperrotation und Formänderung dargestellt. Die Formänderung umfaßt i.A. sowohl eine Volumenänderung als auch eine Winkelverzerrung. Ein in den Hauptrichtungen des C-G Tensors herausgeschnittener Quader wird bei der Verformung des Körpers rotiert und gestreckt, aber nicht winkelverzerrt; siehe Abb. 3.11

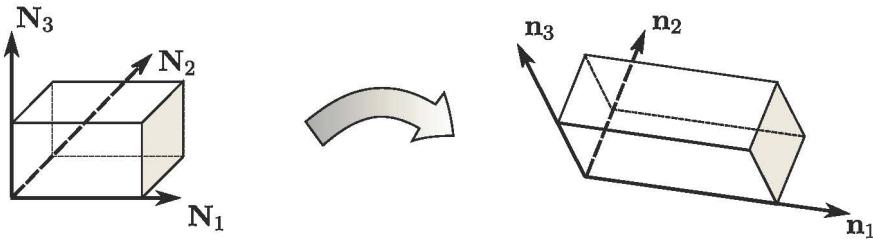


Abbildung 3.11: Ein räumlich in den Hauptrichtungen herausgeschnittener Quader wird winkelgetreu gestreckt und rotiert.

Der Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$ ist ein unsymmetrischer Tensor 2. Ordnung mit *neun* unabhängige Komponenten. Die Strecktensoren $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{V}}$ sind symmetrisch, haben also *sechs* unabhängigen Komponenten, die geometrisch als drei Streckungen und drei Winkelverzerrungen interpretiert werden können. Der orthogonale Tensor $\underline{\underline{R}}$ enthält *drei* unabhängige Komponenten, die den Raumwinkeln der Starrkörper-Rotation entsprechen.

3.7 Dehnungstensoren

Es ist üblich, die Verformung von Körpern über die Längenänderungen infinitesimaler Strecken zu charakterisieren. Je nach Anwendung werden lineare oder nichtlineare Maße verwendet. Im räumlichen Fall wird die Verzerrung in Dehnungstensoren gemessen.

3.7.1 Einachsige Dehnungsmaße

Aus der Technischen Mechanik ist die *technische Dehnung*

$$\varepsilon = \frac{s - S}{S}$$

für die einachsige Dehnung einer Streckenlänge $S = |\mathbf{d}\mathbf{X}|$ auf $s = |\mathbf{dx}|$ bekannt. Die Dehnung kann alternativ über die Quadrate der Streckenlängen werden, jeweils mit Bezug auf die unverformte oder auch auf die verformte Länge:

$$E = \frac{s^2 - S^2}{2S^2}, \quad e = \frac{s^2 - S^2}{2s^2}.$$

Beide Größen reduzieren sich für $s \rightarrow S$ mit $s^2 - S^2 = (s - S)(s + S)$ und $s + S \approx 2S$ auf die technische Dehnung. In der Werkstoffprüfung wird häufig die sogenannte *wahre* oder logarithmische Dehnung

$$E_H = \int_L^l \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} d\bar{s} = \ln \frac{l}{L} = \ln \lambda$$

verwendet. Darin bezeichnet $\lambda = l/L$ die *Streckung* des Probestücks. Für kleine Verformungen ergibt sich auch hier die technische Dehnung ε .⁶. Die Abb. 3.12 zeigt die technische Dehnung ε im Vergleich zur logarithmischen Dehnung E_H und der G-L Dehnung E_G .

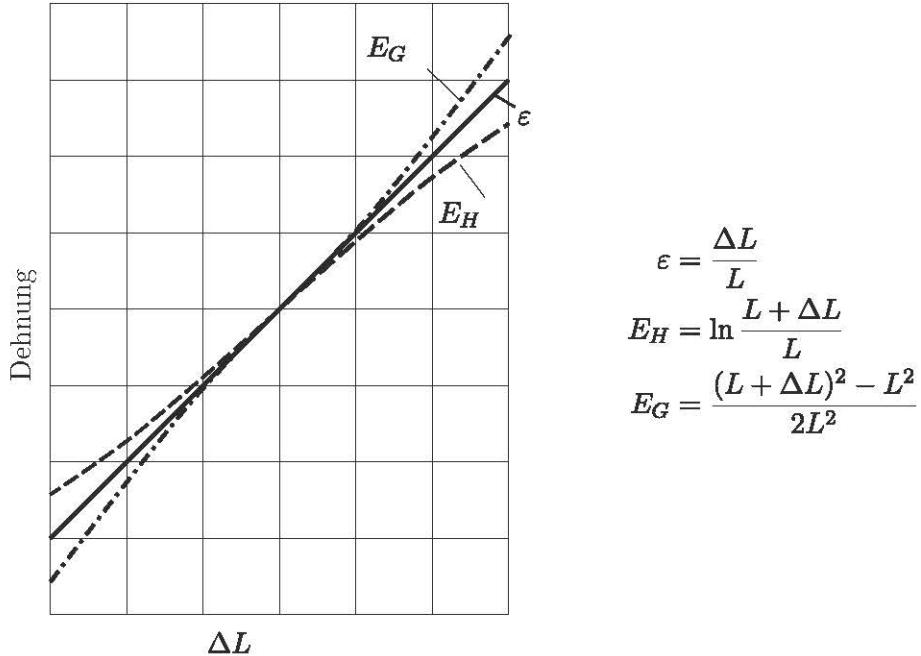


Abbildung 3.12: Technische Dehnung und nichtlineare Dehnungsmaße bei Zug

3.7.2 Green'sche Dehnungstensoren

Für die Analyse der räumlichen Verformung werden die einachsigen Dehnungsmaße E und e auf die Lagrange'schen Dehnungstensoren \underline{E} und \underline{e} verallgemeinert. Mit $s^2 = \mathbf{dx}^T \mathbf{dx}$ und $\mathbf{dx} = \underline{F} \mathbf{d}\mathbf{X}$

⁶Man setze $l = L + \Delta L$ und wende die Taylor-Formel an

gilt

$$s^2 - S^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T \underline{\underline{I}} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \underbrace{[\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}]}_{2\underline{\underline{E}}} d\mathbf{X}.$$

Wir definieren hieraus den *Green-Lagrange'schen* (G-L) Dehnungstensor

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{I}}). \quad (3.1)$$

Umgekehrt wird durch den *Green-Almansi* (G-A) Dehnungstensor

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{v}}^2) \quad (3.2)$$

die Längendifferenz $s^2 - S^2 = 2d\mathbf{x}^T \underline{\underline{e}} d\mathbf{x}$ auf die verformte Konfiguration bezogen. In der Definition ist $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T$ der Finger Tensor aus (3.2). Offenbar gelten zwischen den Green'schen Dehnungstensoren die Beziehungen

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}^{-1}. \quad (3.3)$$

Durch Einsetzen von $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{I}}$ in (3.1) wird mit

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}}) \quad (3.4)$$

der G-L Tensor über den Verschiebungstensor ausgedrückt. Diese Gleichung lautet in Komponentenschreibweise

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}. \quad (3.5)$$

Durch Linearisierung, d.h. Streichen der quadratischen Terme, erhalten wir die Dehnungs-Verschiebungs-Relationen der technischen Mechanik,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (3.6)$$

3.7.3 Beispiele

Beispiel 3.17.

Für einfache ebene Beanspruchungen eines Stabes reduziert sich der Green'sche Dehnungstensor auf die skalare Größe E_G , welche auch aus direkter geometrischer Betrachtung hergeleitet werden kann. Die Komponenten u_i des Verschiebungstensors werden hier mit u, v, w bezeichnet.

Wir betrachten zunächst den einachsigen Zug in x -Richtung mit der zugehörigen Verschiebung $u(x)$. Setzen wir in das einachsige quadratische Dehnungsmaß

$$E_G = \frac{s^2 - S^2}{2S^2}$$

die Größen $S = dX$ und $s = dX + du$ ein, so ergibt sich mit

$$E_G = \frac{du(X)}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{du(X)}{dX} \right)^2,$$

die eindimensionale Reduktion der Gleichung (3.5).

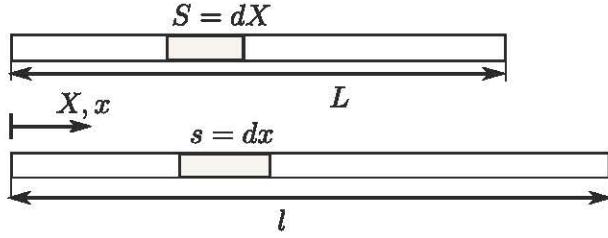


Abbildung 3.13: Längenänderungen am Zugstab

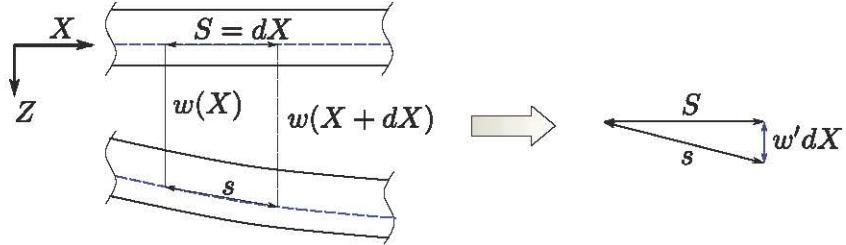


Abbildung 3.14: Längenänderung der neutralen Faser bei ebener Biegung

Ebene Biegung: Bei groÙe Durchsenkungen w kann die Dehnung der neutralen Faser nicht mehr vernachlässigt werden. Am Vektordreieck erhalten wir $s^2 = S^2 + (w_{,X})^2 dX^2$ und daraus, mit $S = dX$, das einachsige MaÙ

$$E_G = \frac{s^2 - S^2}{2S^2} = \frac{1}{2} w_{,X}^2 .$$

Die Dehnung in den parallelen Fasern erhalten wir durch Superposition von E_G mit der Biegedehnung aus der Rotation der Querschnitte um die neutrale Faser. Für *kleine Rotationen* tritt in den parallelen Fasern die technische Dehnung $\varepsilon = u_{,X}$ auf. Somit ergibt sich die Gesamtdehnung

$$E_x(X, Z) = \frac{du(X, Z)}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw(X, 0)}{dX} \right)^2 ,$$

Die aus der direkten geometrischen Anschauung gewonnenen Beziehungen sind jeweils Sonderfälle der allgemeinen Definition (3.5). Die nichtlineare Dehnungskomponente in X-Richtung ist

$$E_X = E_{11} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] .$$

Mit $v = w = 0$ folgt für Zug/Druck in X -Richtung die Gleichung

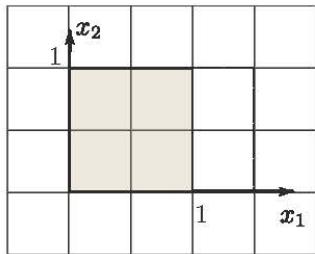
$$E_X = E_{11} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 .$$

Bei ebener Biegung ist $v = 0$, und für kleine Rotationen kann wegen $u \ll w$ der Term $u_{,X}^2 \ll w_{,X}^2$ vernachlässigt werden. Damit erhalten wir die, bereits direkt geometrisch hergeleitete, Balkendehnung

$$E_X = u_{,X} + \frac{1}{2} w_{,X}^2$$

als Spezialfall von (3.5).

Beispiel 3.18.



Streckung: Aus dem Deformationstensor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir den Green-Lagrange Tensor

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \tilde{t})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Tensor zeigt eine Dehnung in 1-Richtung an.

Mit $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T$, also $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{C}}$, folgt der Green-Almansi Tensor

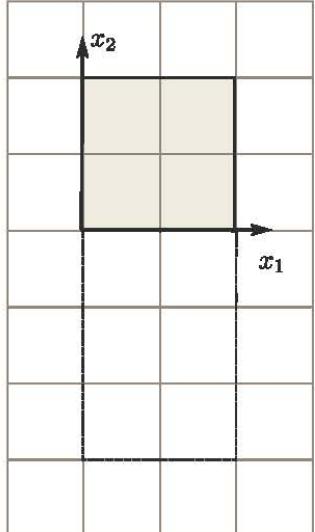
$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{(1 + \tilde{t})^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

der einer Stauchung in 1-Richtung (aus der verformten in die unverformte Konfiguration) entspricht. Eine einfache Nachrechnung daß die Tensoren über den allgemeinen Zusammenhang

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}$$

verknüpft sind.

Beispiel 3.19.



Streckung und Rotation: Da die Cauchy-Green Tensoren von der Rotation nicht beeinflußt werden, sind auch die Green-Lagrange Dehnungstensoren von "Streckung" und "Streckung und Rotation" gleich. Die Rotation hat keinen Einfluss auf den Green-Lagrange Tensor, da in der rechten polaren Zerlegung der gedachte Zustand rotiert wird. Demgegenüber erhalten wir den Green-Almansi Tensor mit

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 + \tilde{t})^2 \end{bmatrix},$$

als

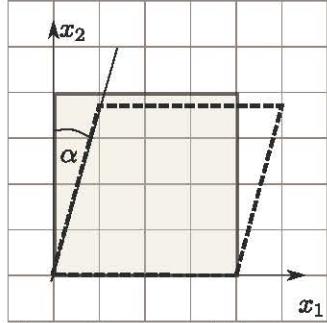
$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{(1 + \tilde{t})^2} \end{bmatrix},$$

Auch hier bestätigt die Nachrechnung mit

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \tilde{t}) & 0 \end{bmatrix}$$

den allgemeinen Zusammenhang (3.3).

Beispiel 3.20.



Schub 1: Aus dem Deformationstensor

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

(mit den Kürzeln c bzw. s für $\sin \alpha$ bzw. $\cos \alpha$) folgt der Green-Lagrange Tensor

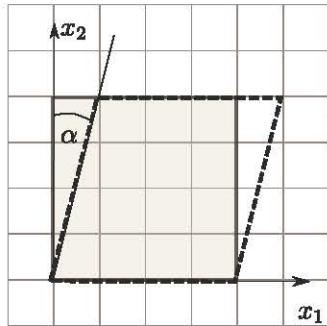
$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}.$$

Dieser Tensor enthält nur Schubverzerrungen. Der Green-Almansi Tensor ergibt sich zu

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & -2\gamma^2 \end{bmatrix}$$

mit $\gamma = \tan \alpha = s/c$. Der Zusammenhang (3.3) wird durch Nachrechnung bestätigt.

Beispiel 3.21.



Schub 2: Aus dem Deformationsgradienten

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgen die Green Tensoren

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & -\gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Diese enthalten sowohl sowohl Schub- als auch Streckungs- bzw. Stauchungseinträge. Durch Nachrechnung bestätigen wir wiederum $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}$.

Beispiel 3.22.

Hourglassing: Der Green-Lagrange Tensor lautet

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\tilde{t}X_2)^2 + 2\tilde{t}X_2 & tX_1(1 + \tilde{t}X_2) \\ \tilde{t}X_1(1 + \tilde{t}X_2) & (\tilde{t}X_1)^2 \end{bmatrix}.$$

Für $X_1 = 0, X_2 = 0$ werden alle Einträge zu 0, d.h. im Mittelpunkt des Quadrats wird keine Dehnung bzw. Verzerrung gemessen. In der FEM werden bei Anwendung reduzierter numerischer Integration die Element-Integrale von Flächenelementen nur im Mittelpunkt numerisch ausgewertet. Die Hourglass-Verformung wird für solche Elemente als "energiefreie Mode" bezeichnet. Die Dehnungsenergie ist proportional zum Quadrat des Dehnungstensors, wird also bei hourglass-Verformung reduzierter Elemente zu Null.

3.7.4 Verallgemeinerte Dehnungstensoren

Die spektralen Zerlegungen der Green'schen Dehnungstensoren

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \underline{\underline{N}} \left[\frac{1}{2} (\Lambda^2 - \underline{\underline{I}}) \right] \underline{\underline{N}}^T \\ \underline{\underline{e}} &= \underline{\underline{n}} \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \Lambda^{-2}) \right] \underline{\underline{n}}^T \end{aligned}$$

können als Spezialfälle für $m = 2$ der allgemeinen Dehnungstensoren

$$\underline{\underline{E}}^{(m)} = \underline{\underline{N}} \left[\frac{1}{m} (\mathbf{\Lambda}^m - \mathbf{I}) \right] \underline{\underline{N}}^T \quad (3.7)$$

$$\underline{\underline{e}}^{(m)} = \underline{\underline{n}} \left[\frac{1}{m} (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}^m) \right] \underline{\underline{n}}^T \quad (3.8)$$

aufgefaßt werden. Als weiteren Spezialfall von (3.7) ergibt sich für $m = 1$ der *Biot* Tensor

$$\underline{\underline{E}}^{(1)} = \underline{\underline{N}} (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}) \underline{\underline{N}}^T = \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}. \quad (3.9)$$

Für $m = 0$ erhalten wir jeweils den *logarithmischen* Tensor

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \underline{\underline{N}} \ln(\mathbf{\Lambda}) \underline{\underline{N}}^T \quad (3.10)$$

$$\underline{\underline{e}}^{(0)} = \underline{\underline{n}} \ln(\mathbf{\Lambda}) \underline{\underline{n}}^T \quad (3.11)$$

in Bezug auf die unverformten bzw. die verformte Konfiguration.⁷ Der Tensor $\underline{\underline{E}}^{(0)}$ ist auch als *Hencky'scher* Dehnungstensor $\underline{\underline{E}}_H$ bekannt.

Führt man die spektralen Zerlegungen wieder auf die Strecktensoren zurück, so kann man die Gleichungen für $m > 0$ auch einfacher als

$$\underline{\underline{E}}^{(m)} = \frac{1}{m} (\underline{\underline{U}}^m - \mathbf{I}), \quad \underline{\underline{e}}^{(m)} = \frac{1}{m} (\mathbf{I} - \underline{\underline{v}}^m)$$

schreiben. Für $m = 0$ ergibt sich formal

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \ln \underline{\underline{U}}, \quad \underline{\underline{e}}^{(0)} = \ln \underline{\underline{v}},$$

wobei diese Gleichungen nur über die spektrale Zerlegung rechnerisch auswertbar sind.

3.8 Dyadische Darstellung der Tensoren

Alle Tensoren 2. Stufe können als dyadische Produkte geschrieben werden. Mit diesem formalen Aspekt der Tensoralgebra wird verdeutlicht, auf welches Koordinatensystem sich die jeweilige Darstellung des Tensors bezieht. Alle Tensoren können in den Bezugssystemen $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ bzw. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dargestellt werden. Symmetrische Tensoren sind darüber hinaus bezüglich ihrer Hauptrichtungen darstellbar.

3.8.1 Basisvektoren des raumfesten Bezugssystems

Gemäß der Annahme A4 wird die Verformung des Körpers im Bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem beschrieben. Zur formalen Unterscheidung der Konfigurationen bezeichnen wir die Basisvektoren dieses Systems sowohl mit $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ als auch mit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; je nachdem ob sich ein in dieser Basis dargestellter Tensor auf die verformte oder die unverformten Konfiguration bezieht. So sind z.B. $\mathbf{x}(t) = x_k(t)\mathbf{e}_k$ bzw. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X} = X_k \mathbf{E}_k$ die Ortsvektoren eines Punktes P in der verformten bzw. der unverformten Konfiguration; vgl. Abb. 3.15. Es soll noch einmal betont werden, daß die Unterscheidung der Basisvektoren rein formal ist. Zu jeder Zeit t gilt $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$.

⁷Für den Übergang von der Potenz zum Logarithmus berechne man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\lambda_\alpha^n - 1) = \ln \lambda_\alpha$ mit der Regel von L'Hospitalle.

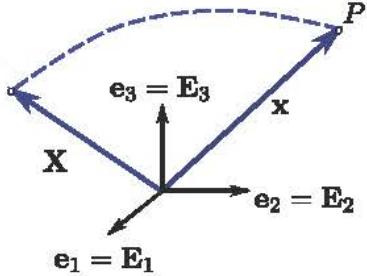


Abbildung 3.15: Ortsvektoren eines Punktes P in der unverformten und der verformten Konfiguration.

3.8.2 Darstellung im Basissystem

Mit $d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{e}_k$ und $d\mathbf{X} = dX_k \mathbf{E}_k$ hat der Deformationstensor die dyadische Darstellung

$$\underline{\underline{F}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \frac{dx_i}{dX_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (3.1)$$

Der Tensor $\underline{\underline{F}}$ bezieht sich also sowohl auf die verformte als auch die unverformte Konfiguration. Tensoren dieser Art heißen *Zweifußtensoren*. Der inverse Deformationstensor ist ebenfalls ein Zweifußtensor mit dem umgekehrten Bezug

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{x}} = \frac{dX_i}{dx_j} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Der linke C-G Tensor fußt zweifach auf der unverformten Konfiguration

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = (F_{ji} \mathbf{E}_j \otimes \mathbf{e}_i) (F_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_k) = F_{ji} F_{jk} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k, \quad (3.2)$$

ebenso der linke Strecktensor $\underline{\underline{U}}$ und der Green-Lagrange Tensor $\underline{\underline{E}}$.⁸

Umgekehrt beziehen sich der rechte C-G Tensor $\underline{\underline{b}}$, der rechte Strecktensor $\underline{\underline{v}}$ und der Green-Almansi Tensor $\underline{\underline{e}}$ mit beiden "Füßen" auf die verformte Konfiguration, z.B.

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = (F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j) (F_{kj} \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}_j) = F_{ji} F_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.3)$$

Der Rotationstensor $\underline{\underline{R}} = R_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j$ ist wiederum ein Zweifußtensor mit demselben Bezug wie der Deformationstensor.

3.8.3 Darstellung bezüglich der Hauptachsen

Die Eigenvektoren von symmetrischen Tensoren 2. Stufe bilden ein kartesisches Koordinatensystem, in dem die Tensoren als Diagonalmatrizen dargestellt werden. Die Achsen dieses Systems heißen Hauptachsen. Die Hauptachsen des Cauchy-Green Tensors sind identisch mit denen des Green-Lagrange Tensors $\underline{\underline{E}}$, da die Subtraktion des Kugeltensors $\underline{\underline{I}}$ das Hauptsystem nicht ändert. Wir bezeichnen die normierten Eigenvektoren dieser Tensoren mit Großbuchstaben \mathbf{N}_i . Die Eigenvektoren des Finger Tensors und des Green-Almansi Tensors werden mit den Kleinbuchstaben \mathbf{n}_i bezeichnet. Im Kontext der polaren Zerlegung hatten wir die Beziehung $\mathbf{n}_i = \underline{\underline{R}} \mathbf{n}_i =$

⁸Zur Veranschaulichung sei das Tensorprodukt $(\mathbf{E}_j \otimes \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_k) = \mathbf{E}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j \mathbf{E}_k^T = \mathbf{E}_j \delta_{ij} \mathbf{E}_k^T = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^T = \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_k$ hier ausgeführt

gezeigt; vgl. a. Abb. 3.11. Damit können die spektralen Zerlegungen in der Form

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, & \underline{\underline{U}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \\ \underline{\underline{E}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i\end{aligned}$$

als Summen von Dyaden ausgedrückt werden. Die reellen λ_i sind die Eigenwerte des Strecktensors $\underline{\underline{U}}$.

Mit $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}^T$ und $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}^T$ folgen die Spektraldarstellungen

$$\begin{aligned}\underline{\underline{b}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, & \underline{\underline{v}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \\ \underline{\underline{F}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i, \\ \underline{\underline{e}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.\end{aligned}$$

Die verallgemeinerten *Dehnungstensoren m. Ordnung* lauten dann

$$\underline{\underline{E}}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} (\lambda_i^m - 1) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad \underline{\underline{e}}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m} (1 - \lambda_i^{-m}) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

mit den Grenzfällen für $m = 0$

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad \underline{\underline{e}}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i.$$

3.9 Volumen- und Flächenänderung

Das statische Gleichgewicht im Festkörper wird für die Spannungen und Volumenkräfte in der verformten Konfiguration aufgestellt. Hierzu sind Formeln für die Flächen- und Volumenbestimmung erforderlich. Wir leiten Rechenregeln für die Verformung differentieller Volumen- und Flächenelemente her.

3.9.1 Volumenverhältnis

In Abb. 3.16 ist die Verformung eines beliebigen infinitesimalen Volumenelements dV skizziert. Die Volumeninhalte dV und dv können als Spatprodukte der Kantenvektoren berechnet werden.

$$dV = d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3); \quad dv = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3). \quad (3.1)$$

Für das Spatprodukt gilt die Berechnungsvorschrift

$$d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) = \det [d\mathbf{x}_1 \ d\mathbf{x}_2 \ d\mathbf{x}_3].$$

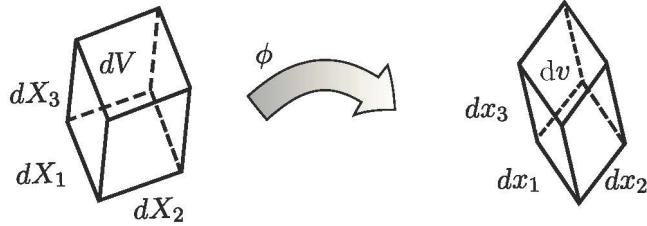


Abbildung 3.16: Verformung eines Volumenelements

Auf der rechten Seite wird mit $[dx_1 \ dx_2 \ dx_3]$ die Matrix der spaltenweise notierten Streckenvektoren bezeichnet. Aus $dx_i = \underline{F} d\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ folgt

$$dv = \det [dx_1 \ dx_2 \ dx_3] = \det F \det [d\mathbf{x}_1 \ d\mathbf{x}_2 \ d\mathbf{x}_3] = \det F dV$$

und somit das Volumenverhältnis

$$J = \frac{dv}{dV} = \det \underline{F}. \quad (3.2)$$

Die Determinante J des Deformationstensors wird auch als *Jacobi-Determinante* bezeichnet.

Da die Masse des materiellen Volumenelements bei der Verformung erhalten bleibt, ergibt sich mit $dm = \rho_0 dV = \rho dv$ die Beziehung

$$\rho = \rho_0 J^{-1}. \quad (3.3)$$

Mit der Bedingung $\det \underline{F} = 1$ wird eine *inkompressible* Verformung gekennzeichnet. Im allgemeinen Fall beschreibt der *isochore* Tensor

$$\hat{\underline{F}} = \underline{F} J^{-\frac{1}{3}} \quad (3.4)$$

den volumenkonstanten Anteil des Deformationstensors.

Ein in den räumlichen Hauptrichtungen des Strecktensors \underline{U} herausgeschnittenes Volumenelement verformt sich winkelgetreu wie in Abb. 3.17 gezeigt. Die Hauptwerte des Tensors sind

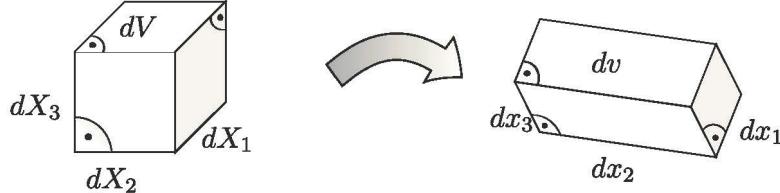


Abbildung 3.17: Verformung eines Volumenelements in den Hauptachsen

gleich den Streckungen der Kanten des Quaders:

$$\lambda_i = \frac{dx_i}{dX_i}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (\text{keine Summierung}).$$

Die Invarianten I_U, II_U, III_U können jeweils als Summe der Streckungen (Längenquotienten), Summe der Flächenquotienten des Quaders bzw. als Volumenquotient interpretiert werden:

$$\begin{aligned} I_U &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}}{L_{\alpha}} \quad (\text{Kanten}), \\ II_U &= -(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) = -\sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}}{A_{\alpha}} \quad (\text{Flächen}), \\ III_U &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = J = \frac{v}{V} \quad (\text{Volumen}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Beispiel 3.23.

Streckung, Streckung und Rotation: Für die Verformungen “Streckung” sowie “Streckung und Rotation” ergibt sich aus

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \tilde{t}) & 0 \end{bmatrix}$$

jeweils das Volumenverhältnis $J = \det \underline{\underline{F}} = 1 + \tilde{t}$. Das Verhältnis J ist unabhängig von der Starrkörperrotation.

Beispiel 3.24.

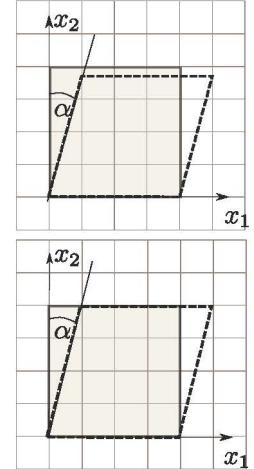
Schub 1 und 2: Beim Schub mit konstanten Seitenlängen folgt aus

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

das Volumenverhältnis $\det \underline{\underline{F}} = \cos \alpha$. Das Ergebnis entspricht der Anschauung, wonach der Volumeninhalt für $\alpha > 0$ monoton abnimmt und bei $\alpha = 90^\circ$ den Wert Null erreicht. Demgegenüber erhalten wir für den Schub mit konstanter Höhe (“Schub 2”) aus

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

das plausible Ergebnis $J = \det \underline{\underline{F}} = 1$.



3.9.2 Flächenänderung

Bei der Definition des Spannungstensors werden infinitesimale Teilflächen $d\mathbf{a}$ an einem ebenen Schnitt durch den verformten Körper betrachtet. Die Richtung des Schnitts ist durch die Schnittnormale \mathbf{n} gekennzeichnet. Das Produkt $d\mathbf{a} = d\mathbf{a}\mathbf{n}$ wird als *Flächenvektor* bezeichnet. Die Kantenvektoren $d\mathbf{l}_1$ und $d\mathbf{l}_2$ des Flächenstücks bilden zusammen mit beliebigen, nicht koplanaren, Vektoren $d\mathbf{l}$ das Volumen $dV = d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$. Die Urbildern $d\mathbf{L}_1$ und $d\mathbf{L}_2$ bezüglich der Abbildung $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ bilden in der unverformten Konfiguration ein Areal dA mit der Flächennormalen \mathbf{N} , welches zusammen mit $d\mathbf{L}$ das Volumen dV formt; s. Abb. 3.18.

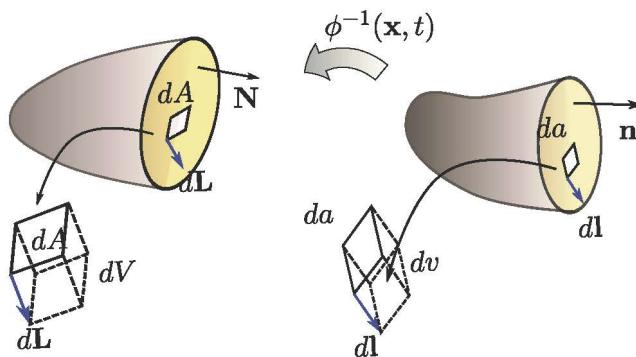


Abbildung 3.18: Definition des Flächenvektors

Mit den Relationen $d\mathbf{l} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{L}$ und $dV = JdV$ erhalten wir die Gleichungskette

$$dV = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{a} = (\underline{\underline{F}}d\mathbf{L}) \cdot d\mathbf{a} = (\underline{\underline{F}}d\mathbf{L})^T d\mathbf{a} = d\mathbf{L}^T (\underline{\underline{F}}^T d\mathbf{a}) = J dV = J d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{L}^T (J d\mathbf{A})$$

und folgern

$$\underline{d}\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{F}}^{-T} d\underline{\underline{A}}. \quad (3.6)$$

3.10 Verformungs- und Dehngeschwindigkeit

In viskosen Werkstoffen sind die Materialgesetze abhängig von der Geschwindigkeit (Rate; von engl: rate) der Verformung. Diese Geschwindigkeit wird über Zeitableitungen der Dehnungstensoren gemessen. Für die Berechnung dieser Ableitungen betrachten wir die Verformung eines Körpers in zwei zeitlich benachbarten Konfigurationen, wie in Abb. 3.19 gezeigt. Die analytische

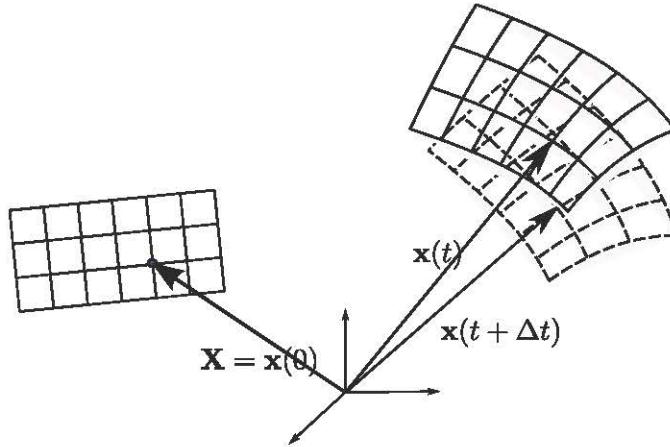


Abbildung 3.19: Verformte Konfigurationen zu den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$

Form der Ableitung erhalten wir durch Grenzwertbildung $\Delta t \rightarrow 0$. Bei der numerischen Lösung werden die Zeitableitungen als endliche Inkremente interpretiert. Daher werden auch ratenunabhängige Materialgesetze oft über Zeitableitungen formuliert.

In der Lagrange'schen Betrachtungsweise sind die räumlichen Koordinaten $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ der verformten Konfiguration eine Funktion der materiellen Koordinaten \mathbf{X} . Die materiellen Koordinaten hängen nicht von der Zeit ab. In den betrachteten Konfigurationen hat jeder Punkt \mathbf{P} des Körpers dieselben Koordinaten \mathbf{X} . Dahingegen ändern sich in der benachbarten Konfiguration i.A. die Werte aller Verformungsmaße, unabhängig davon ob sie sich auf die verformte oder die unverformte Konfiguration beziehen. Für Größen, die unmittelbar als Funktion der materiellen Koordinaten gegeben sind, ist die partielle Ableitung gleich der totalen Ableitung. So gilt z.B. für die räumlichen Koordinaten $D\mathbf{x}/Dt = \partial\mathbf{x}/\partial t$.

3.10.1 Geschwindigkeitsgradient

Aus

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)]$$

erhalten wir mit $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ und $\dot{\mathbf{X}} = 0$ die *Verformungsgeschwindigkeit*

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^T. \quad (3.1)$$

Aus der Verformungsgeschwindigkeit erhalten wir die *Geschwindigkeit der Volumendehnung*

$$\mathbf{j} = J \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (3.2)$$

Diese Gleichung folgt durch Anwendung der Produktregel in

$$\underline{j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial dv}{dV} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial dx_1 dx_2 dx_3}{dX_1 dX_2 dX_3} \right).$$

Der Gradient der Verformungsgeschwindigkeit

$$\underline{l} = \mathbf{grad} \mathbf{v} = \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right]. \quad (3.3)$$

heißt *Geschwindigkeitsgradient*. Anders als der Deformationsgradient wird der Geschwindigkeitsgradient bezüglich der Momentankoordinaten gebildet. Den Rückbezug auf die raumfesten Koordinaten erhalten wir mittels Kettenregel:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}},$$

also

$$\underline{l} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}. \quad (3.4)$$

Der Geschwindigkeitsgradient fußt auf der verformten Konfiguration, die dyadische Darstellung ist

$$\underline{l} = l_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

3.10.2 Deformationsrate und Spintensor

Der Tensor 2. Stufe \underline{l} kann additiv in einen symmetrischen und einen antimetrischen Tensor zerlegt werden.

$$\underline{l} = \underline{d} + \underline{w}. \quad (3.5)$$

Der symmetrische Anteil

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\underline{l} + \underline{l}^T). \quad (3.6)$$

heißt *Deformationsrate* oder *Dehngeschwindigkeit*. In der Komponentenschreibweise gilt

$$\underline{d} = [d_{ij}] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right];$$

die Dehngeschwindigkeit ist also gleich der Zeitableitung der technischen Dehnungen (in den Momentankoordinaten). Der schiefsymmetrische Anteil

$$\underline{w} = \frac{1}{2} (\underline{l} - \underline{l}^T) \quad (3.7)$$

heißt *Spintensor*.

Die Deformationsrate ist über

$$\underline{d} = \underline{F}^{-T} \dot{\underline{E}} \underline{F}^{-1}$$

mit der Zeitableitung des Green-Lagrange Tensors verknüpft, denn

$$2\underline{\dot{E}} = \dot{\underline{F}}^T \underline{F} + \underline{F}^T \dot{\underline{F}} = \underline{F}^T \left(\underline{F}^{-T} \dot{\underline{F}}^T + \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \right) \underline{F}.$$

Beispiel 3.25.

Durch Einsetzen der polaren Zerlegung $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}$ in die Gleichung (3.3) erhalten wir die Summe

$$\underline{l} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} = (\dot{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{R}} \dot{\underline{\underline{U}}}) \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{R}}^T = \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{R}}^T + \underline{\underline{R}} \dot{\underline{\underline{U}}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{R}}^T = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Der erste Summand \mathbf{A} ist schiefsymmetrisch, da der Rotationstensor $\underline{\underline{R}}$ durch orthogonale Matrizen dargestellt wird.⁹ Falls der zweite Summand \mathbf{B} symmetrisch ist, gilt $\mathbf{A} = \underline{\underline{w}}$. Der Strecktensoren hat die spektrale Zerlegung $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{N}} \underline{\Lambda} \underline{\underline{N}}^T$. Für $\dot{\underline{\underline{N}}} = \mathbf{0}$ erhalten wir daraus $\dot{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{N}} \dot{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{N}}^T$ und somit ist

$$\mathbf{B} = \underline{\underline{R}} \dot{\underline{\underline{U}}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{N}} \dot{\underline{\Lambda}} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{n}} \dot{\underline{\Lambda}} \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\underline{n}}^T.$$

symmetrisch. Die Voraussetzung $\dot{\underline{\underline{N}}} = \mathbf{0}$ ist erfüllt, wenn die Hauptrichtungen der Verzerrung konstant bleiben, z.B. bei einer einachsigen Streckung. In diesem Fall hat der Spin-Tensor die einfache Form $\underline{\underline{w}} = \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{R}}^T$

3.10.3 Beispiele**Beispiel 3.26.**

Streckung: Für die reine Streckung

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} (1 + \tilde{t}) X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

erhalten wir über

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \dot{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{t_0}{t + t_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den Geschwindigkeitsgradienten

$$\underline{l} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t + t_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir können den Geschwindigkeitsgradienten auch direkt aus der Abbildung ϕ berechnen. Mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{t_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und $X_1 = x_1 / (1 + \tilde{t})$ ergibt sich

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{t + t_0} \implies \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{1}{t + t_0},$$

alle anderen Komponenten werden zu Null. Der Geschwindigkeitsgradient symmetrisch, und daher $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{l}}$ und $\underline{\underline{w}} = \mathbf{0}$.

Dieses Ergebnis ist plausibel, da das Quadrat nur gestreckt und nicht rotiert wird. Die rechte Seite des Quadrats bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v} \equiv \frac{1}{t_0}$. Der Deformationstensor ist gleich dem Strecktensoren

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 + vt & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \dot{\underline{\underline{F}}} = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Dehnrate I_{11} ist gleich v bei $t = 0$. Diese Rate sinkt mit zunehmender Streckung, da der relative Zuwachs der Länge für $t > 0$ abnimmt.

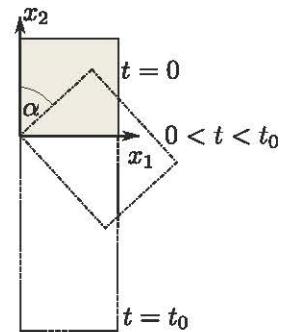
⁹Produkte der Form $\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$ oder $\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}$ sind für orthogonale Matrizen \mathbf{Q} schiefsymmetrisch. Dies folgt unmittelbar durch Zeitableitung der Definitionsgleichung $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$.

Beispiel 3.27.

Streckung und Rotation: Ein Quadrat wird in 1-Richtung gestreckt und gleichzeitig um den Eckpunkt O rotiert. Zur Zeit $t = t_0$ ist $\lambda_1 = 2$ und $\alpha = \pi/2$. Diese Bedingungen werden vom Deformati-onstensor $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{R}}(t)\underline{\underline{U}}(t)$ mit

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha(\tilde{t}) & \sin \alpha(\tilde{t}) \\ -\sin \alpha(\tilde{t}) & \cos \alpha(\tilde{t}) \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und $\alpha(\tilde{t}) = \frac{\pi}{2}\tilde{t}$, $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$ erfüllt.



Für die Zeitableitung des Deformationsgradienten gilt die Produktregel

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = \dot{\underline{\underline{R}}}\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{R}}\dot{\underline{\underline{U}}} = \begin{bmatrix} -\omega s \frac{t+t_0}{t_0} + \frac{c}{t_0} & \omega c \\ -\omega c \frac{t+t_0}{t_0} - \frac{s}{t_0} & -\omega s \end{bmatrix}$$

mit $\omega = \dot{\alpha}$. Für $t = t_0$ ist $c = \cos \alpha = 0, s = \sin \alpha = 1$. Damit erhalten wir den Geschwindigkeitsgradienten

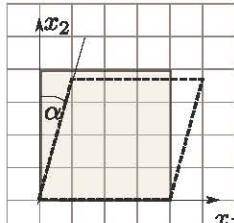
$$\underline{\underline{l}} = \dot{\underline{\underline{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & \frac{1}{t+t_0} \end{bmatrix}.$$

In der additiven Zerlegung gilt somit offensichtlich

$$\underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t+t_0} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.28.

Schub 1: Wir nehmen in



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} X_1 + \sin \alpha(t) X_2 \\ \cos \alpha(t) X_2 \end{bmatrix}.$$

für den Winkel $\alpha(t) = \omega t$ eine lineare Zeitabhängigkeit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω an. Dann erhalten wir

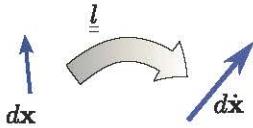
$$\dot{\mathbf{x}} = \omega \begin{bmatrix} X_2 \cos \alpha \\ -X_2 \sin \alpha \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \tan \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{l}} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\tan \alpha \end{bmatrix}.$$

Aus $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{F}}} = \omega \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix}$ folgt nach einfacher Rechnung wiederum $\dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{l}}\underline{\underline{F}}$. Der Dehnungsgradient und der Spintensor ergeben sich als

$$\underline{\underline{d}} = \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\tan \alpha \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{w}} = \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.29.

Streckenvektor $\dot{\mathbf{x}}$: Wegen $d\mathbf{X} = \text{const.}$ ist die Verformungsgeschwindigkeit des Streckenvektors nach Gl. (3.3)

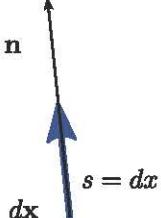


$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\dot{\mathbf{F}}} \underline{d\mathbf{X}} = \underline{\dot{\mathbf{F}}} \underline{F}^{-1} d\mathbf{x} = \underline{l} d\mathbf{x}.$$

Der Geschwindigkeitsgradient bildet den Streckenvektor auf die Verformungsgeschwindigkeit ab. Aus der additiven Zerlegung des Gradienten folgt

$$d\mathbf{x} = \underline{dd\mathbf{x}} + \underline{w} d\mathbf{x}.$$

Beispiel 3.30.



Additive Zerlegung: Für eine geometrische Interpretation der additiven Zerlegung stellen wir den Streckenvektor $d\mathbf{x} = s\mathbf{n}$ als Produkt der Streckenlänge s und eines Einheitsvektors \mathbf{n} dar. Dann ist

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\mathbf{n} + s\dot{\mathbf{n}}.$$

Die zeitliche Änderung des Streckenvektors ist somit die Summe aus der Längenänderung \dot{s} bei Richtungserhalt und Richtungsänderung $\dot{\mathbf{n}}$ bei konstanter Länge s .

Für die Längenänderung erhalten wir aus der Ableitung von $s^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$ über $2s\dot{s} = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T \dot{d\mathbf{x}} = d\mathbf{x}^T (\underline{l}^T + \underline{l}) d\mathbf{x}$ die Gleichung

$$\dot{s} = \frac{1}{s} d\mathbf{x}^T \underline{d} d\mathbf{x}.$$

Die Richtungsänderung eines Einheitsvektors bei Drehung um den Winkel $\varphi(t)$ wird nach der elementaren Starrkörpermechanik über $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$ mit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ berechnet. Das Kreuzprodukt kann wiederum durch einen schiefsymmetrischen Tensor 2. Stufe \underline{w} dargestellt werden. Also gilt

$$d\mathbf{x} = \dot{s}\mathbf{n} + s\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{s} (d\mathbf{x}^T \underline{dd\mathbf{x}}) d\mathbf{x} + s\underline{w}\mathbf{n} = s d\mathbf{n}^T \underline{d} + \underline{w} d\mathbf{x} = (\underline{d} + \underline{w}) d\mathbf{x}.$$

Der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten beschreibt die Geschwindigkeit der Streckung der Richtung des Streckenvektors, während der schiefsymmetrische Anteil die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Streckenvektors (ohne Längenänderung) beschreibt.

3.11 Koordinatentransformation und Objektivität

Tensoren werden unabhängig von Koordinatensystemen definiert. Sie werden in Koordinatensystemen durch Komponenten *dargestellt*, wobei zwischen den Darstellungen in unterschiedlichen Systemen bestimmte Transformationsregeln gelten. In praktischen Anwendungen der Kontinuumsmechanik ist es häufig zweckmäßig, die deformierte Konfiguration in einem "mitbewegten" Koordinatensystem zu beschreiben. So können z.B. die Spannungen und Verzerrungen in den Rotorblättern einer Windkraftanlage in einem mitrotierenden System $\tilde{\mathbf{x}}$ berechnet und dann in ein raumfestes Bezugssystem \mathbf{x} transformiert werden. Wir sprechen in solchen Fällen von Relativ- und Absolutkoordinaten.

3.11.1 Koordinatentransformation

Die Abb. 3.20 zeigt einen Körper in der unverformten und der verformten Konfiguration. Die verformte Konfiguration wird in zwei unterschiedlichen Systemen beschrieben. Jeder Punkt P eines Körpers hat zum Zeitpunkt t die Euler-Koordinaten $\mathbf{x}(t)$ im Absolutesystem und $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ im

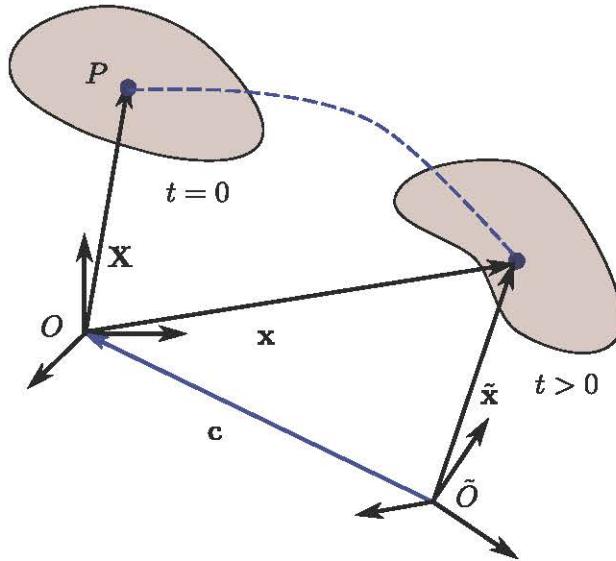


Abbildung 3.20: Verformung eines Körpers mit Absolut- und Relativkoordinaten

Relativsystem. Zwischen den Euler-Koordinaten gilt die Transformationsgleichung (Euklid'schen Transformation)

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}(t)]_{\sim} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}(t), \quad (3.1)$$

die eine Superposition aus Rotation und Translation darstellt. Beide Bewegungen werden als zeit-abhängig aufgefasst. Die Gleichung (3.1) beschreibt die Umrechnung eines beliebigen Ortsvektors bei der Transformation des ortsfesten Absolutsystems [] in ein bewegtes Relativsystem []_~. In der Skizze ist links ein Körperpunkt P in der unverformten Konfiguration mit dem Ortsvektor \mathbf{X} markiert. Derselbe Punkt hat in der verformten Konfiguration zum Zeitpunkt t die Ortskoordinaten $\mathbf{x}(t) = \overrightarrow{OP}$ bezüglich des Absolut- und $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{O'P}$ bezüglich des Relativsystems. Für die Lagrange-Koordinaten gilt $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(0)$, d.h. bei $t = 0$ sollen Absolut- und Relativsystem dieselbe Lage haben.

3.11.2 Begriff der Objektivität

Eine mechanische Größe heißt *objektiv*, wenn ihre messbaren Eigenschaften in allen Koordinatensystemen gleich sind.

Beispiel 3.31.

Betrag eines Vektors: Für Vektoren \mathbf{v} ist der Betrag v als messbare Größe definiert. Für eine Koordinatendarstellung kann der Betrag aus

$$v = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{[\mathbf{v}]^T [\mathbf{v}]}$$

berechnet werden. Ist für den Vektor \mathbf{v} eine zweite Darstellung $[\mathbf{v}]_{\sim}$ gegeben, so bleibt der Betrag erhalten, wenn zwischen den Darstellungen die Transformation $[\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{Q}(t)[\mathbf{v}]$ mit einer orthogonalen Matrix \mathbf{Q} gilt, denn dann ist

$$\sqrt{[\mathbf{v}]_{\sim}^T [\mathbf{v}]_{\sim}} = \sqrt{[\mathbf{v}]^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} [\mathbf{v}]} = v.$$

Entsprechend der allgemeinen Begriffsbildung nennen wir Tensoren 1. bzw. 2. Stufe \mathbf{v} bzw. $\underline{\underline{T}}$ *objektiv*, wenn sie bei einer Euklidischen Koordinaten-Transformation (3.1) nach den Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{v} \quad (3.2)$$

$$\tilde{\underline{\underline{T}}} = [\underline{\underline{T}}]_{\sim} = \mathbf{Q}(t)\underline{\underline{T}}\mathbf{Q}(t)^T \quad (3.3)$$

transformiert werden. Aus der Tensoralgebra ist bekannt, daß in diesem Fall die messbaren Größen des Tensors in unterschiedlichen Koordinatensystemen denselben Wert haben.

3.11.3 Objektivität kinematischer Tensoren

Tensoren 1. Stufe

Offenbar sind Ortsvektoren \overrightarrow{OP} nur objektiv bei einer reinen Rotation mit $\mathbf{c} \equiv \mathbf{0}$. Für Abstandsvektoren $\overrightarrow{PP'}$ mit $P, P' \neq O$ gilt dahingegen

$$[\overrightarrow{PP'}]_{\sim} = \tilde{\mathbf{x}}_{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_P = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}_{P'} - \mathbf{x}_P) = \mathbf{Q}(t)\overrightarrow{PP'}.$$

Daraus folgt, daß insbesondere die infinitesimalen Abstandsvektoren $d\mathbf{x}$ in der verformten Konfiguration objektiv sind; d.h. bei einer Euklid'schen Transformation gilt $d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$. Für die Rückrechnung auf die (nicht transformierte) unverformte Konfiguration gilt $d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{X}$ bzw. $\tilde{\mathbf{x}} = \underline{\underline{F}}\mathbf{x}$. Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich

$$\underline{\underline{\tilde{F}}} = \mathbf{Q}\underline{\underline{F}} \quad (3.4)$$

als Transformationsbeziehung des Deformationstensors¹⁰.

Tensoren 2. Stufe

Der Deformationstensor ist laut Gl. (3.4) *nicht objektiv*. Für den Green Tensor folgt aus der Definition und (3.4) die Beziehung

$$\underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{\tilde{F}}}^T \underline{\underline{\tilde{F}}} = \underline{\underline{F}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}}.$$

Der Green Tensor $\underline{\underline{\tilde{C}}}$, und somit auch der Green-Lagrange Dehnungstensor $\underline{\underline{\tilde{E}}}$, bleiben also bei einem Wechsel des Koordinatensystems unverändert. Sie sind im Sinn der Definition (3.3) nicht objektiv. Altenbach [1] unterscheidet zwischen raumbezogener Objektivität nach Gleichung (3.3) und körperbezogener Objektivität. Der Green Tensor und der Green-Lagrange Tensor sind körperbezogen objektiv. Es ist leicht zu sehen, daß der Finger Tensor $\underline{\underline{\tilde{b}}}$ die Gleichung (3.3) erfüllt und somit (raumbezogen) objektiv ist. Da die Eigenschaft der Objektivität bei einer Tensor-Inversion erhalten bleibt, ist auch der Green-Almansi Dehnungstensor $\underline{\underline{\tilde{e}}}$ objektiv.

Die Transformationsregeln für Dehnungstensoren können auch unmittelbar aus deren Definitionen (3.1, 3.2) abgelesen werden. Die skalare Größe $s^2 - S^2$ ist bei der Koordinatentransformation invariant, also gilt

$$[s^2 - S^2]_{\sim} = d\mathbf{X}^T [\underline{\underline{E}}]_{\sim} d\mathbf{X} = s^2 - S^2 = d\mathbf{X}^T \underline{\underline{E}} d\mathbf{X}$$

und somit $[\underline{\underline{E}}]_{\sim} = \underline{\underline{E}}$. Für den Green-Almansi Tensor erhalten wir

$$[s^2 - S^2]_{\sim} = [d\mathbf{x}]_{\sim}^T [\underline{\underline{e}}]_{\sim} [d\mathbf{x}]_{\sim} = s^2 - S^2 = d\mathbf{x}^T \underline{\underline{e}} d\mathbf{x}.$$

¹⁰Diese Beziehung erhalten wir auch direkt durch Anwendung der Kettenregel $\underline{\underline{\tilde{F}}} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\mathbf{X}} = \frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{x})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\underline{\underline{F}}$.

Setzt man nun die Transformation $\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T [\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x}]_{\sim}$ ein so folgt $[\underline{\underline{e}}]_{\sim} = \mathbf{Q}\underline{\underline{e}}\mathbf{Q}^T$.

Für die Umrechnung des Geschwindigkeitsgradienten $\tilde{\underline{\underline{l}}}$ gilt mit

$$\tilde{\underline{\underline{l}}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{Q}d\mathbf{x}}{d\tilde{\mathbf{x}}} \right) = \dot{\mathbf{Q}} \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{Q}^{-1}} + \mathbf{Q} \underbrace{\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{x}}}_{\underline{\underline{l}}} \frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\underline{\underline{l}}\mathbf{Q}^T$$

die Beziehung

$$[\underline{\underline{l}}]_{\sim} = \mathbf{Q}\underline{\underline{l}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (3.5)$$

Setzen wir für $\underline{\underline{l}}$ die additive Zerlegung ein so gilt

$$[\underline{\underline{l}}]_{\sim} = [\underline{\underline{d}}]_{\sim} + [\underline{\underline{w}}]_{\sim} = \mathbf{Q}(\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}})\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$$

Da die Matrix

$$\Omega = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (3.6)$$

für beliebige orthogonale Matrizen \mathbf{Q} schiefsymmetrisch ist, folgt

$$[\underline{\underline{d}}]_{\sim} = \mathbf{Q}\underline{\underline{d}}\mathbf{Q}^T \quad (3.7)$$

$$[\underline{\underline{w}}]_{\sim} = \mathbf{Q}\underline{\underline{w}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (3.8)$$

Der Deformationstensor $\underline{\underline{d}}$ ist also objektiv und der Spintensor $\underline{\underline{w}}$ ist nicht objektiv.

Zusammenfassung

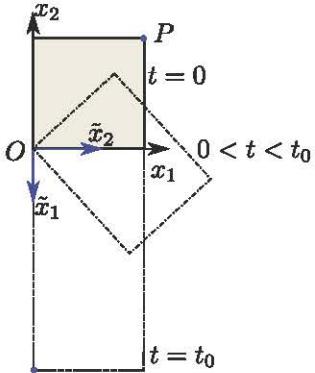
Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen (s.a. Altenbach [1, Tabelle 6.1]):

Tabelle 3.1: Objektivität kinematischer Tensoren 2. Stufe

	$\tilde{\underline{\underline{T}}} = \mathbf{Q}\underline{\underline{T}}\mathbf{Q}^T$	$\tilde{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{T}}$	keine
Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$			x
Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$			x
Green-Lagrange Tensor $\underline{\underline{E}}$			x
Finger-Tensor $\underline{\underline{b}}$	x		
Green-Almansi Tensor $\underline{\underline{e}}$	x		
Geschwindigkeitssgradient $\underline{\underline{l}}$			x
Deformationsrate $\underline{\underline{d}}$	x		
Spintensor $\underline{\underline{w}}$			x

3.11.4 Beispiel

Beispiel 3.32.



Streckung und Rotation: Wir geben den Deformationstensor wieder in der polaren Zerlegung $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{R}}(t)\underline{\underline{U}}(t)$ mit

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha(\tilde{t}) & \sin \alpha(\tilde{t}) \\ -\sin \alpha(\tilde{t}) & \cos \alpha(\tilde{t}) \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und $\alpha(\tilde{t}) = \frac{\pi}{2}\tilde{t}$, $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$ an. Das Relativsystem \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 rotiert mit dem Körper. Wir betrachten die Verformung bei $\tilde{t} = 1$ mit den bereits berechneten Tensoren

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Relativsystem hat sich zu diesem Zeitpunkt um $\pi/2$ gedreht. Diese Drehung des Koordinatensystems wird durch die Transformation $[\mathbf{x}]_{\sim} = \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$, mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}^T$$

beschrieben. So hat z.B. die Raumdiagonale $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten $\mathbf{v} = [1, 1]^T$. Die Koordinaten dieser Diagonale im gedrehten System sind

$$[\mathbf{v}]_{\sim} = \mathbf{Q}\mathbf{v} = [-1, 1]^T.$$

Wird das Quadrat (ohne Streckung) gedreht so hat die Raumdiagonale nach Drehung die Koordinaten $\underline{\underline{R}}\mathbf{v} = [1, -1]^T$ im Absolut- und $\mathbf{Q}\underline{\underline{R}}\mathbf{v} = [1, 1]^T$ im Relativsystem.

Der Deformationsgradient lautet im Relativsystem

$$\underline{\underline{F}}_{\sim} = \mathbf{Q}\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dieser Tensor beschreibt im mitdrehenden System eine reine Streckung, $\underline{\underline{F}}_{\sim} = \underline{\underline{U}}$.

Der Diagonalenvektor \mathbf{v} hat die materiellen Koordinaten $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = 1$. In der Momentankonfiguration $\tilde{t} = 1$ sind die Koordinaten laut Skizze $[\mathbf{x}] = [1, -2]$ im Absolut- und $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]_{\sim} = [2, 1]$ im Relativsystem. Damit werden die Regeln

$$[\mathbf{x}] = [\underline{\underline{F}}][\mathbf{X}], \quad [\mathbf{x}]_{\sim} = [\underline{\underline{F}}]_{\sim}[\mathbf{X}]$$

verifiziert.

3.11.5 Objektive Zeitableitungen objektiver Tensoren 2. Stufe

Die zeitliche Ableitung eines Tensors 2. Stufe heißt objektiv, wenn sie selbst wiederum ein objektiver Tensor 2. Stufe ist, d.h. die Gleichung (3.3) erfüllt. Leiten wir die Transformation eines zeitabhängigen Tensors $\underline{\underline{T}}(t)$ formal ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} [\underline{\underline{T}}]_{\sim} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{Q}\underline{\underline{T}}\mathbf{Q}^T) = \dot{\mathbf{Q}}\underline{\underline{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\underline{\underline{T}}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\underline{\underline{T}}\dot{\mathbf{Q}}^T.$$

Die Ableitung $\dot{\underline{\underline{T}}}$ ist also nur objektiv für $\mathbf{Q} \equiv \text{const.}$ Dagegen ist die Jaumann Ableitung

$$\underline{\underline{T}}^{VJ} = \dot{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{w}}\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}\underline{\underline{w}} \quad (3.9)$$

objektiv. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
 [\underline{\underline{T}}^{\nabla J}]_{\sim} &= [\dot{\underline{\underline{T}}}]_{\sim} - [\underline{\underline{w}}]_{\sim} [\underline{\underline{T}}]_{\sim} - [\underline{\underline{T}}]_{\sim} [\underline{\underline{w}}]_{\sim} \\
 &= \dot{\mathbf{Q}} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \dot{\underline{\underline{T}}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \underline{\underline{T}} \dot{\mathbf{Q}}^T - [\mathbf{Q} \underline{\underline{w}} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T] \mathbf{Q} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T [\mathbf{Q} \underline{\underline{w}} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T] \\
 &= \mathbf{Q} [\dot{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{w}} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}} \underline{\underline{w}}] \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T - \dot{\mathbf{Q}} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \underline{\underline{T}} \underbrace{\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}}_{-\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \\
 &= \mathbf{Q} \underline{\underline{T}}^{\nabla J} \mathbf{Q}^T,
 \end{aligned}$$

wobei Gleichung (3.8) für die Ableitung des Spintensors $\underline{\underline{w}}$ eingesetzt wurde.

Hängt der Tensor $\underline{\underline{T}}$ auch von der Ortsvariablen \mathbf{x} ab, so ist in der Definition und ihrer Begründung der Ausdruck $\dot{\underline{\underline{T}}}$ als die totale Ableitung des Tensors zu interpretieren. Da die Matrix \mathbf{Q} in jedem Fall nur eine Funktion der Zeit t ist, bezeichnet $\dot{\mathbf{Q}}$ jeweils die einfache Zeitableitung.

Auf gleiche Weise zeigt man die Objektivität der Truesdell Ableitung [5]

$$\underline{\underline{T}}^{\nabla T} = \dot{\underline{\underline{T}}} + \text{tr}(\underline{l}) \underline{\underline{T}} - \underline{l} \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}} \underline{l}^T, \quad (3.10)$$

der Green-Naghdi Ableitungen [5]

$$\underline{\underline{T}}^{\nabla G} = \dot{\underline{\underline{T}}} - \underline{\Omega}_R \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}} \underline{\Omega}_R^T \quad (3.11)$$

mit

$$\underline{\Omega}_R = \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{R}}^T.$$

und der Olroyd Ableitungen [9]

$$\underline{\underline{T}}^{\nabla O} = \dot{\underline{\underline{T}}} + \underline{l} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}} \underline{l}^T, \quad (3.12)$$

$$\underline{\underline{T}}^{\Delta O} = \dot{\underline{\underline{T}}} - \underline{l} \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}} \underline{l}^T, \quad (3.13)$$

Beispiel 3.33.

Die Deformationsrate ist die Olroyd-Ableitung des Green-Almansi Tensors,

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{d}} &= \underline{\underline{e}}^{\nabla O} \\
 \underline{\underline{e}}^{\Delta O} &= -\underline{\underline{d}}
 \end{aligned}$$

Wir zeigen dies durch Ableitung der Gleichung $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}$. Nach der Produktregel ist

$$\dot{\underline{\underline{E}}} = \dot{\underline{\underline{F}}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \dot{\underline{\underline{e}}} \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \dot{\underline{\underline{F}}}.$$

Multiplizieren wir nun von links und rechts mit $\underline{\underline{F}}^{-T}$ bzw. $\underline{\underline{F}}^{-1}$, so erhalten wir mit $\underline{l} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1}$ und $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \dot{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{F}}^{-1}$ das gewünschte Ergebnis.

3.12 Push-forward, Pull-back und Lie-Ableitung

Zu Beginn des Kapitels hatten wir die Abbildung $\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{X}, t)$ zwischen den Eulerschen und Lagrangeschen Koordinaten der Körperpunkte eingeführt. Ausgehend von dieser Abbildung definieren wir zwei neue Abbildungen, die wie ϕ bzw. ϕ^{-1} zwischen der Momentan- und der Ausgangskonfiguration wirken, aber nun sowohl für Tensoren erster als auch zweiter Stufe definiert sind.

$$\begin{array}{c} d\mathbf{x} \\ \Phi_* \uparrow \downarrow \Phi^* \\ d\mathbf{X} \end{array}$$

Abbildung 3.21: Push-forward und Pull-back Abbildung des Streckenvektors. Die verformte Konfiguration steht “oben”.

3.12.1 Push-forward und Pull-back Abbildungen

Gemäß der Skizze in Abb. 3.21 bezeichnen wir mit “push-forward” - deutsch “Hochschieben” - die Abbildung von der Ausgangs- auf die Momentankonfiguration. Die umgekehrte Abbildung von der Momentan- auf die Ausgangskonfiguration wird mit “pull-back” - “Herunterziehen” - bezeichnet. Die Formelzeichen sind Φ_* für die push-forward und Φ^* für die pull-back Abbildung.

Die Streckenvektoren werden gemäß der Gleichung $d\mathbf{x} = \underline{\underline{F}}d\mathbf{X}$ transformiert. Dementsprechend werden die P-b-Abbildungen durch den Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ bzw. den inversen Tensor $\underline{\underline{F}}^{-1}$ vermittelt. Für *Tensoren 1. Stufe* gilt

$$\Phi_* \sim \underline{\underline{F}}; \quad \Phi^* \sim \underline{\underline{F}}^{-1}.$$

Für *kinematische Tensoren 2. Stufe* gilt die Regel

$$\Phi_* \sim \underline{\underline{F}}^{-T}(\cdot) \underline{\underline{F}}^{-1}; \quad \Phi^* \sim \underline{\underline{F}}^T(\cdot) \underline{\underline{F}}.$$

So korrespondieren z.B. die Green'schen Dehnungstensoren $\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{e}}$ über

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}; \quad \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}}^{-1}.$$

Für *kinetische Tensoren 2. Stufe* (Spannungstensoren) gilt die komplementäre Regel

$$\Phi_* \sim \underline{\underline{F}}(\cdot) \underline{\underline{F}}^T; \quad \Phi^* \sim \underline{\underline{F}}^{-1}(\cdot) \underline{\underline{F}}^{-T}.$$

So erhält man z.B. den 2. Piola-Kirchhoff Tensor erhält durch das Herunterziehen (Pull-back) des Kirchhoff Tensors, $\underline{\underline{S}} = \Phi^*(\underline{\underline{\tau}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}$.

Die Abbildungen Φ_* und Φ^* sind zueinander invers, d.h. die Verkettungen $\Phi_*(\Phi^*)$ und $\Phi^*(\Phi_*)$ sind gleich der identischen Abbildung.

3.12.2 Lie-Ableitung

Wir benutzen nun die soeben eingeführten Abbildungen, um eine spezielle Zeitableitung für Eulersche Tensoren $\underline{\underline{t}}(\mathbf{x}, t)$ zu definieren. Die materielle Zeitableitung Eulerscher Tensoren lautet

$$\frac{d\underline{\underline{t}}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{\underline{t}}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\underline{t}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{\underline{t}}}{\partial t} + \text{grad } \underline{\underline{t}} \mathbf{v}.$$

In Materialgesetzen wird anstelle dieser Ableitung häufig die *Lie-Ableitung* verwendet. Wir erhalten diese Ableitung, indem wir den Eulerschen Tensor zunächst auf den korrespondierenden Lagrangeschen Tensor herunterziehen, diesen im örtlichen Bezugssystem nach der Zeit ableiten und das Ergebnis wieder hochschieben. Die Prozedur ist in Abb. 3.22 illustriert.

Dementsprechend ist die *Lie-Ableitung* eines Eulerschen Tensors 2. Stufe definiert als

$$\mathcal{L}_\Phi(\underline{\underline{t}}) = \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi^*(\underline{\underline{t}}) \right). \quad (3.1)$$

Durch diese Prozedur wird die konvektiven Ableitung umgangen, da in Lagrangeschen Koordinaten die partielle Ableitung gleich der totalen Ableitung ist.

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\underline{t}}(\mathbf{x}, t) & & \mathcal{L}(\underline{\underline{t}}) \\
 \Phi^* \downarrow & & \uparrow \Phi_* \\
 \underline{\underline{T}}(\mathbf{X}, t) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} & \frac{\partial \underline{\underline{T}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}
 \end{array}$$

Abbildung 3.22: Definition der Lie-Ableitung mittels Push-forward und Pull-back Abbildung.

3.12.3 Beispiele

Beispiel 3. (Green Tensoren). Der Green-Lagrange-Tensor ist der push-forward des Green-Almansi Tensors,

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{e}} \underline{\underline{F}} = \Phi_*(\underline{\underline{e}}).$$

Die partielle Zeitableitung $\dot{\underline{\underline{E}}}$ erhalten wir aus der Definition des Tensors zu

Aus $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \dot{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{F}}^{-1}$ folgt durch Umkehrung der Zusammenhang

$$\Phi_*(\dot{\underline{\underline{E}}}) = \underline{\underline{d}}.$$

und somit

$$\mathcal{L}_\Phi(\underline{\underline{e}}) = \Phi_*(\dot{\underline{\underline{E}}}) = \Phi_*(\Phi^*(\underline{\underline{d}})) = \underline{\underline{d}}.$$

Die Deformationsrate $\underline{\underline{d}}$ ist die Lie-Ableitung des Green-Almansi Tensors.

Beispiel 4. (Schub 2). Aus vorherigen Beispielen benutzen wir

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{s}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{E}}} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

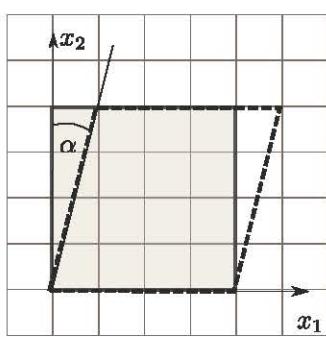
und berechnen daraus

$$\mathcal{L}(\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \dot{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\omega}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\frac{s}{c} \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis ist gleich der Deformationsrate $\underline{\underline{d}}$ (s. vorheriges Beispiel).

3.13 Beispiele

Beispiel 3.34.



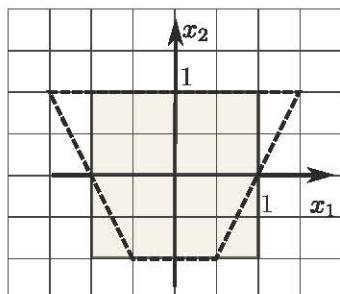
Schub 2: Die Winkelverzerrung mit konstanter Höhe wird durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} X_1 + \gamma X_2 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

mit $\gamma(t) = \tan \alpha(t)$ beschrieben. Es folgt

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bei dieser Schubverformung verschieben sich die Punkte nur in 1-Richtung.

Beispiel 3.35.

Hourgassing: Für die skizzierte Lage des Koordinatensystems im Mittelpunkt des Quadrats ergibt sich aus der Verformung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} X_1(1 + \tilde{t}X_2) \\ X_2 \end{bmatrix}$$

der Deformationsgradient zu

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \tilde{t}X_2 & \tilde{t}X_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für $X_1 = 0, X_2 = 0$ reduziert sich der Deformationsgradient auf den Einheitstensor. Im Mittelpunkt des Quadrats wird keine Verformung gemessen!

Kapitel 4

Spannungen und Gleichgewicht

Festkörper bestehen aus formerhaltendem Material. Diese Eigenschaft wird durch innere Bindungs Kräfte auf der mikroskopischen Skala realisiert. In Metallen sind dies z.B. die Bindungs Kräfte im Metallgitter, in Polymeren wirken Bindungs Kräfte innerhalb von und zwischen Molekülketten usw. Entsprechend dem allgemeinen Homogenisierungsansatz der Kontinuumsmechanik werden diese Bindungs Kräfte auf der makroskopischen Skala durch das Schnittprinzip summarisch "freigelegt". Die inneren Kräfte pro Flächeneinheit werden als Spannungen bezeichnet.¹

Mit dem Schnittprinzip werden die inneren Kräfte zu äußeren Kräften am Teilvolumen. Diese Kräfte erfüllen am Volumenelement die Hauptsätze der klassischen (Starrkörper-)Mechanik, insbesondere den Kräfte- und Momentensatz. Bei geometrisch nichtlinearer Betrachtung ist das Kräftegleichgewicht grundsätzlich im verformten Zustand aufzustellen (Theorie 2. Ordnung). Die Gleichungen am inneren Volumenelement beschreiben das *lokale* Gleichgewicht der dort wirkenden inneren Kräfte. Die Wirkung der äußeren Kräfte wird über kinetische Randbedingungen hinzugefügt. Durch Anwendung geeigneter Variationsprinzipien gelangt man zur Formulierung des *globalen* Gleichgewichts. Globale Formulierungen beschreiben Gleichgewicht der aufsummierten inneren Kräfte mit den aufsummierten äußeren Kräften.

4.1 Betrachtung in der Momentankonfiguration

Die wahren Spannungen werden über das Schnittprinzip am verformten Körper definiert. Die Komponenten des Spannungstensors stehen an jedem inneren Punkt des Körpers im lokalen Gleichgewicht mit den Volumenkräften. Am Rand des Körpers gelten entsprechende Bedingungen zum Gleichgewicht mit den äußeren Kräften. Durch Integration über das Volumen des Körpers gelangt man zur sogenannten schwachen bzw. globalen Formulierung des Gleichgewichts.

4.1.1 Cauchy Spannungstensor

Durch den verformten Körper wird eine gedachte Schnittebene mit der Normalen \mathbf{n} gelegt. An der Schnittfläche wirken kontinuierlich verteilte Schnittkräfte pro Flächeneinheit $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Auf jedem infinitesimalen Teilstück der Schnittfläche wirken Kräfte $d\mathbf{f}_a = \mathbf{t}da$. Das Integral dieser Kräfte über die Schnittfläche steht im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften an der Oberfläche des Körpers. In einem beliebigen Punkt P der Schnittfläche ist der *Cauchy Spannungstensor* $\underline{\sigma}$ definiert als lineare Abbildung

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}. \quad (4.1)$$

¹ Präziser gesagt bemessen die Spannungen den Zuwachs der inneren Bindungs Kräfte bei äußerer Beanspruchung.

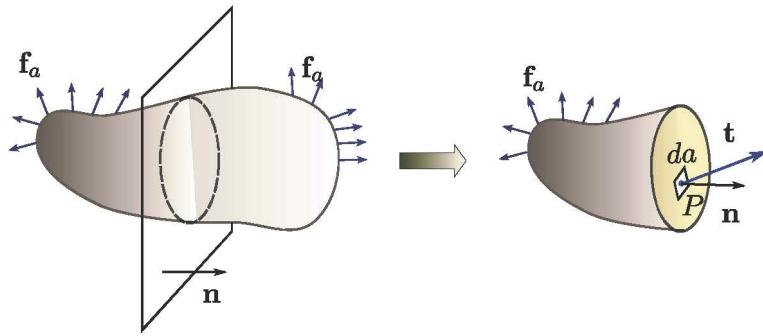


Abbildung 4.1: Spannungs- und Normalenvektor am Schnitt durch die verformte Konfiguration.

Zur Darstellung des Tensors in einem kartesischen Koordinatensystem führen wir drei Schnitte orthogonal zu den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (s. Abb. 4.3) und tragen die Spannungsvektoren spaltenweise in eine Matrix ein.

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Auf der Diagonalen stehen die senkrecht zur Schnittfläche gebildeten Komponenten der Spannungsvektoren (*Normalspannungen*). Die Einträge $i \neq j$ sind tangentiale Komponenten der Spannungsvektoren (*Schubspannungen*).

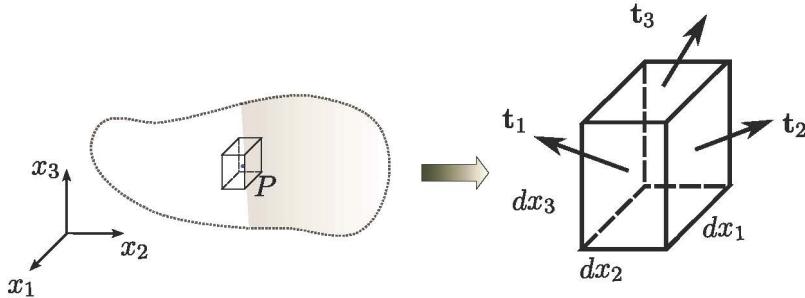


Abbildung 4.2: Quaderförmiges Schnittvolumen zur Darstellung des Spannungstensors.

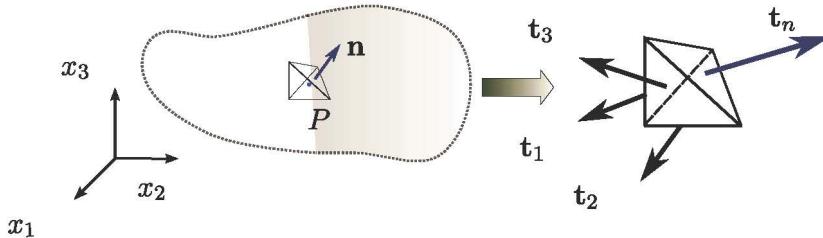


Abbildung 4.3: Pyramidales Schnittvolumen zum Beweis des Spannungssatzes.

Durch Anwendung des Kräfthesatzes am pyramidalen Schnittvolumen (s. Abb. 4.4) kann gezeigt werden, daß die Darstellung (4.1) die Gleichung (4.1) für beliebige Schnittrichtungen \mathbf{n}

erfüllt. In diesem Sinn wird den Spannungszustand am Punkt \mathbf{P} vom Tensor $\underline{\sigma}$ vollständig, d.h. für alle Schnittrichtungen, beschreibt.

Beispiel 4.1.

Wir illustrieren die Gleichung (4.1) am Zugstab. Die Richtung 1 liegt in der Achse des Stabes. Die dazu senkrechte Schnittebene hat die Normalenrichtung $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$. Zum Vergleich betrachten wir den Schnitt unter 60° zur Achse mit der Normalen $\mathbf{n}_2 = [1/2, 0, 1/\sqrt{3}]$. Die zugehörigen Schnittflächen sind \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 . Offenbar gilt $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$. Die Spannungsvektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 haben an beiden Schnitten dieselbe Richtung und Richtungssinn, jeweils in der Wirkungslinie und entgegen der äußeren Kraft \mathbf{T} . Die Beträge der Vektoren sind unterschiedlich,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{a}_1} = 2 \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{a}_2} = 2\mathbf{t}_2.$$

Der Spannungstensor hat im System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Darstellung

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1$ am Schnitt $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1$. Das System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ist ein Hauptsystem, da die Darstellung eine diagonale Matrix ist. Am Schnitt \mathbf{n}_2 hat der Tensor im System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dieselbe Darstellung mit $\mathbf{t} = \mathbf{t}_2$. Es gilt also $\underline{\sigma}\mathbf{n}_1 = \mathbf{t}_1$ und $\underline{\sigma}\mathbf{n}_2 = \mathbf{t}_2$.

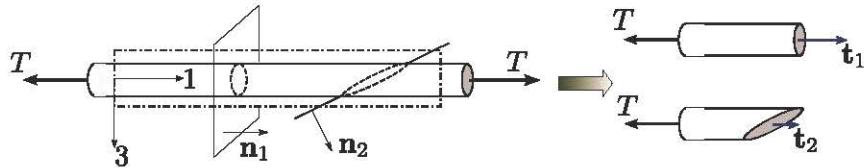


Abbildung 4.4: Zwei Schnitte am Zugstab.

Aus dem Momentengleichgewicht am infinitesimalen Quader um den Punkt \mathbf{P} folgt die *Symmetrie* des Cauchy Tensors

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T.$$

Durch die Lösung des Eigenwertproblems

$$[\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}] \mathbf{n}$$

erhalten wir die *Hauptspannungen* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die *Hauptrichtungen* $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ des Cauchy Tensors. Damit lautet die dyadische Darstellung

$$\underline{\sigma} = \sum_{\alpha_1}^3 \sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha. \quad (4.3)$$

4.1.2 Lokales Gleichgewicht

Das lokale Gleichgewicht der inneren Kräfte wird am differentielles Volumenelement $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ um einen beliebigen inneren Punkt \mathbf{P} gebildet.

Kräftesatz

An den Seiten des in Abb. 4.4 gezeigten quaderförmigen Volumenelements $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ greifen jeweils Schnittkräfte $\mathbf{t}da$ an. Auf die Masse können Volumenkräfte (z.B. Gravitations- oder Trägheitskräfte) \mathbf{b} wirken. Nach dem Kräftesatz gilt (zur Vereinfachung der Notation wird im Weiteren das Volumenelement dv als v bezeichnet)

$$\int_{\partial v} \mathbf{t}da + \int_v \mathbf{b}dv = \mathbf{0}.$$

Setzt man im ersten Integral die Beziehung $\mathbf{t} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ein und wandelt mit dem Gauß'schen Integralsatz in ein Volumenintegral um so folgt

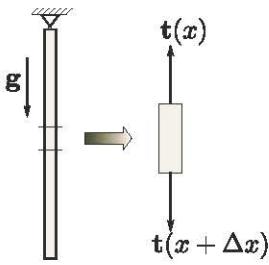
$$\int_v \operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{b}dv = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung kann für beliebige Schnittvolumen nur erfüllt sein wenn der Integrand identisch verschwindet. Daraus folgt das lokale Kräftegleichgewicht in der Form

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Dieses Kräftegleichgewicht ist in jedem inneren Punkt erfüllt. Greifen an einem Teil des Randes äußere Lasten \mathbf{t}_n an, so erhalten wir durch analoge Betrachtungen am Randvolumen die kinetischen Randbedingungen $\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_n$. Am eingespannten Teil des Körpers müssen kinetische Randbedingungen für die Verschiebungen \mathbf{u} erfüllt sein.

Beispiel 4.2.



Die Schnittgrößen am verformten Volumenelement $v = adx$ des Zugstabs mit der Dichte ρ sind im Gleichgewicht mit der statischen Volumenkraft wenn

$$a(t(x+dx) - t(x)) + \rho adx g = 0 \implies \frac{t(x+dx) - t(x)}{dx} = \rho g$$

gilt. Der Spannungsvektor $\mathbf{t} = [\sigma, 0, 0]^T$ ist parallel zum Vektor \mathbf{g} . Mit $dx \rightarrow 0$ folgt

$$\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

als Spezialfall der lokalen Gleichgewichtsbeziehung (4.4).

Momentensatz

Wir bilden das Moment der inneren Kräfte bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes O mit dem Vektor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$.

$$\int_{\partial v} \mathbf{r} \times (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) da + \int_v (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) dv = \mathbf{0}.$$

Der erste Integrand kann in Indexschreibweise als

$$\mathbf{r} \times (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \epsilon_{ijk} x_i (\sigma_{jl} n_l) \mathbf{e}_k = (\epsilon_{ijk} x_i \sigma_{jl} \mathbf{e}_k) n_l$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial v} \mathbf{r} \times (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) da &= \int_v \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_i \sigma_{jl} \mathbf{e}_k) = \\ &= \int_v (\epsilon_{ijk} \delta_{il} \sigma_{jl} \mathbf{e}_k + \epsilon_{ijk} x_i \sigma_{jl,l} \mathbf{e}_k) dv = \int_v \boldsymbol{\epsilon} : \underline{\sigma}^T dv + \int_v \mathbf{r} \times \operatorname{div} \underline{\sigma} dv. \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Ausgangsgleichung ein so folgt unter Berücksichtigung des lokalen Kräftegleichgewichts (4.4) die Gleichung

$$\int_v \underline{\epsilon} : \underline{\sigma}^T dv = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung ist wiederum für beliebige Teilvolumen v nur dann erfüllt wenn der Integrand

$$\underline{\epsilon} : \underline{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

gleich dem Nullvektor ist. Aus dem Momentensatz folgt die Symmetrie des Spannungstensors.

4.1.3 Globales Gleichgewicht

Das lokale Gleichgewicht ist als Randwertproblem für eine Differentialgleichung formuliert. In modernen numerischen Methoden werden Variationsformulierungen dieses Randwertproblems bevorzugt. Diese Formulierungen sind für das gesamte Berechnungsgebiet gegeben und vereinen die inneren Größen mit den Randbedingungen in einer Gleichung. Man spricht daher vom globalen Gleichgewicht. Die globalen Formulierungen für das mechanische Gleichgewicht werden in der mechanischen Literatur häufig axiomatisch als Prinzipien eingeführt.

Beim Übergang vom Randwertproblem zur Variationsformulierung werden die unbekannten Funktionen partiell integriert. Dadurch sinkt die Ordnung der höchsten Ableitungen. Für die numerische Lösung bedeutet dies eine größere Freiheit in der Auswahl von Approximationsfunktionen.

Je nach Anwendung sind unterschiedliche Variationsformulierungen des lokalen Gleichgewichts möglich. Wir gehen hier auf das Prinzip der virtuellen Arbeiten und das Prinzip der virtuellen Leistungen ein. Die Prinzipien werden zunächst für das Gleichgewicht in der verformten Konfiguration formuliert. Die Rückrechnung auf die unverformte Konfiguration erfolgt dann mit den bekannten Beziehungen für die Spannungs- und Dehnungstensoren in beiden Konfigurationen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten

Wir nehmen an, daß an jedem Punkt P des verformten Körpers das lokale Gleichgewicht (4.4) gilt. Für das Prinzip der virtuellen Arbeit wird eine Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ aus der aktuellen Gleichgewichtslage \mathbf{x} der Körperpunkte P angenommen wie in Abb. 4.5 gezeigt. Bei der virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ leisten die realen inneren Kräfte \mathbf{f} die virtuelle Arbeit $\delta w = \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u}$. Durch Integration der Arbeiten über das gesamte verformte Volumen v erhalten wir aus dem lokalen Kräftegleichgewicht $\operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ die skalare Gleichung

$$\int_v \operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} dv + \int_v \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dv = 0.$$

Für den ersten Integranden gilt laut Produktregel

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} = \operatorname{div} (\underline{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u}) - \underline{\sigma} : \operatorname{grad} (\delta\mathbf{u}).$$

Wandelt man das Volumenintegral über den ersten Summanden mit dem Gauß'schen Integralsatz in ein Oberflächenintegral so folgt nach Umordnung die Gleichung

$$\int_v \underline{\sigma} : \operatorname{grad} (\delta\mathbf{u}) dv = \int_v \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t}_n \cdot \delta\mathbf{u} da. \quad (4.5)$$

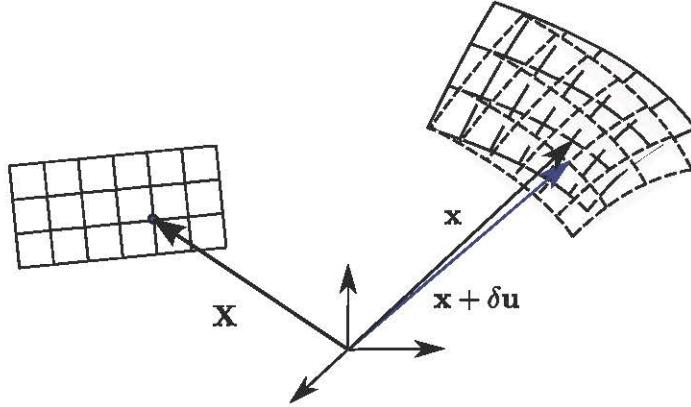


Abbildung 4.5: Inkrementelle Verschiebung aus der verformten Konfiguration

Bei der Umwandlung haben wir die Beziehungen $(\underline{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u}$ und die Randbedingung $\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_n$ verwendet. Diese Randbedingung gilt am belasteten Teil der Oberfläche. Am gelagerten Teil der Oberfläche wird $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ gefordert. Die Lagerreaktionen verrichten somit keine virtuelle Arbeit. Die virtuelle Arbeit am Rand wird nur über die nicht gelagerte Teilfläche des Randes berechnet.

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors gilt $\underline{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) = \underline{\sigma} : (\text{grad}(\delta \mathbf{u}))^T = \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon}$ mit

$$\delta \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right). \quad (4.6)$$

Wir können die Gleichung (4.5) also äquivalent in der Form

$$\int_v \underline{\sigma} : \delta \underline{\epsilon} dv = \int_v \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{u} da. \quad (4.7)$$

angeben

Die virtuelle Arbeit der Spannungen ist das Skalarprodukt des Cauchy-Tensors mit dem virtuellen Dehnungstensor $\delta \underline{\epsilon}$.² Die Gleichungen (4.7) ist eine globale Formulierung des Gleichgewichts. Sie wird in der Literatur auch axiomatisch als *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* postuliert.

Beispiel 4.3.

Das lokale Gleichgewicht des Zugstabs unter Eigengewicht wird für alle Punkte x auf der Längsachse durch die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

beschrieben. Am Rand $x = 0$ gilt die Einspannbedingung $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$. Der Rand $x = l$ ist unbelastet, also $\sigma(l) = 0$.

Unter der Wirkung des Eigengewichts verschieben sich die Punkte x um $\mathbf{u}(x)$. Die entsprechenden inneren Kräfte σ erfüllen die lokale Gleichgewichtsbedingung. Wir multiplizieren diese Gleichung mit einer virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}(x)$ und integrieren über die Länge des Stabes.

$$\int_0^l \sigma' \delta u dx + \int_0^l \rho g \delta u dx = 0$$

²Die virtuelle Verschiebung wird als kleine Größe angenommen, dementsprechend wird für die virtuellen Dehnungen die lineare Approximation des Dehnungstensors verwendet.

Der erste Term kann partiell integriert werden

$$\int_0^l \sigma' \delta u dx = [\sigma \delta u]_0^l - \int_0^l \sigma \delta u' dx.$$

Die virtuelle Verschiebung erfüllt die kinematische Randbedingung $\delta u(0) = 0$. Nach Einsetzen der Randbedingungen für u und δu erhalten wir mit $u' = \varepsilon$ schließlich

$$\int_0^l \sigma \delta \varepsilon dx = \int_0^l \rho g \delta u dx$$

für das globale Gleichgewicht.

4.1.4 Das Prinzip der virtuellen Leistungen

Wir können globale Gleichgewicht analog über die virtuellen *Leistungen* $\delta p = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v}$ beschreiben. Dafür wird das lokale Kräftegleichgewicht mit virtuellen Verformungsgeschwindigkeiten $\delta \mathbf{v} = \delta \dot{\mathbf{u}}$ multipliziert. Mit denselben Schritten wie oben kommen wir zu den Formulierungen

$$\int_v \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{l}} dv = \int_v \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} da \quad (4.8)$$

bzw. wegen der Symmetrie $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$

$$\int_v \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{d}} dv = \int_v \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} da. \quad (4.9)$$

Darin wurden aus der Kinematik die Bezeichnungen $\underline{\underline{l}} = \text{grad } \mathbf{v}$ für den Geschwindigkeitsgradienten und $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^T)$ für den symmetrischen Teil von $\underline{\underline{l}}$ verwendet.

4.2 Rückrechnung auf die Ausgangskonfiguration

Für den Fall daß das Materialverhalten in der unverformten Konfiguration beschrieben wird, müssen die Gleichgewichtsprinzipien aus der Momentankonfiguration zurückgerechnet werden. Hierzu gehen wir zunächst auf die Rückrechnung der Spannungstensoren ein.

4.2.1 Spannungen

Das Produkt aus dem Cauchy Tensor und dem differentiellen Flächenelement da ergibt die differentielle Schnittkraft

$$df_a = \underline{\underline{\sigma}} \cdot da. \quad (4.1)$$

Wird diese Schnittkraft nun auf die *unverformte* Schnittfläche bezogen, so erhalten wir mit

$$df_a = \underline{\underline{P}} da. \quad (4.2)$$

die Definition des *1.Piola-Kirchhoff* (1. PK) Tensors $\underline{\underline{P}}$. Aus der kinematischen Beziehung $da = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{F}}^{-T} dA$ folgt

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}. \quad (4.3)$$

In der Werkstoffkunde werden die 1. PK Spannungen auch als *Nominalspannungen* bezeichnet. Zur Illustration siehe auch die Abb. 4.6.

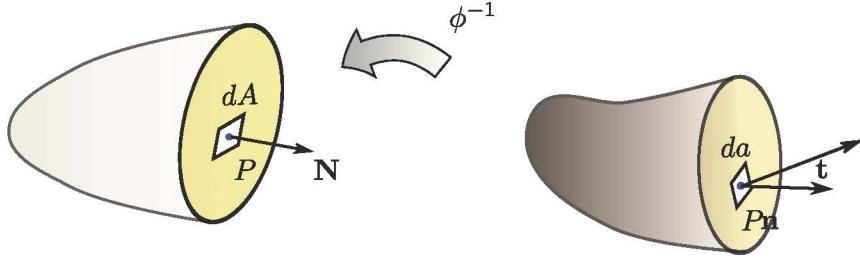


Abbildung 4.6: Der 1. Piola-Kirchhoff Tensor kann als Rücktransformation des wahren Spannungsvektors auf die unverformte Konfiguration verstanden werden. Für die wahre Schnittkraft gilt $d\mathbf{f}_a = \underline{\underline{\sigma}} \cdot da = d\mathbf{f}_a = \underline{\underline{P}} \cdot d\mathbf{A}$.

Der 1. PK Tensor ist nicht symmetrisch. Um einen symmetrischen Tensor zu erhalten, multipliziert man in Gl. (4.3) von links mit $\underline{\underline{F}}^{-1}$. Der Tensor

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}. \quad (4.4)$$

heißt 2. Piola-Kirchhoff Tensor. Durch Umkehrung von (4.4) folgt

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T. \quad (4.5)$$

Die Größe $\underline{\underline{S}}da$ kann als eine unphysikalische Kraft $d\mathbf{F} = \underline{\underline{F}}^{-1}d\mathbf{f}$ interpretiert werden. Der 1. PK Tensor ist ein Zweifußtensor, der sich sowohl auf die verformte als auch die unverformte Konfiguration bezieht. Der 2. PK Tensor bezieht sich nur auf die unverformte Konfiguration. Wir fassen die Beziehungen zwischen den Spannungstensoren in der Tabelle zusammen.

Tabelle 4.1: Umrechnung der Spannungstensoren

	$\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{\underline{\tau}}$	$\underline{\underline{P}}$	$\underline{\underline{S}}$
$\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{\tau}}$	$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T$	$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T$
$\underline{\underline{\tau}}$	$\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}$	$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}}^T$	$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{F}}^T$
$\underline{\underline{P}}$	$\underline{\underline{P}} = J \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T}$	$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}$	$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}$	$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}}$
$\underline{\underline{S}}$	$\underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T}$	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}$	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{P}}$	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}$

4.2.2 Gleichgewicht

Wir wollen die virtuelle Leistung der inneren Kräfte $\int_v \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} d\underline{v}$ bezüglich der Ausgangskonfiguration angeben. Wegen $d\underline{v} = J dV$ und $\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}}$ gilt

$$\int_v \underline{\underline{\sigma}} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) d\underline{v} = \int_V \underline{\underline{\tau}} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV.$$

Damit wird zunächst die Integration auf das unverformte Volumen bezogen. Der Kirchhoff Tensor ist durch $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}$ bzw. $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}$ mit den PK Tensoren verknüpft. Im Weiteren benutzen wir die Regeln (2.10) für das Skalarprodukt von Tensoren 2. Stufe. Damit gilt

$$\underline{\underline{P}} : \delta \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}) : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^T) = \underline{\underline{\tau}} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}).$$

Dabei haben wir $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{u}$ und die kinematische Umrechnung

$$\delta \underline{\underline{F}} = \delta \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \right) = \frac{d\delta \mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \frac{d\delta \mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \underline{\underline{F}}$$

benutzt. Weiterhin wird eine Formel für das Inkrement des Green-Lagrange Tensors benötigt. Durch Variation der Gleichung (3.4)

$$2\delta \underline{\underline{E}} = \delta \underline{\underline{D}} + \delta \underline{\underline{D}}^T + \delta \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T \delta \underline{\underline{D}}$$

folgt mit $\mathbf{I} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{F}}$ die Gleichung

$$\delta \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{D}} + \delta \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{F}}). \quad (4.6)$$

Mit der Kettenregel $\delta \underline{\underline{D}} = \text{Grad } \delta \mathbf{u} = \text{grad } \delta \mathbf{u} \underline{\underline{F}}$ ergibt sich daraus

$$\delta \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \frac{1}{2} (\text{grad } \delta \mathbf{u} + [\text{grad } \delta \mathbf{u}]^T) \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{F}}.$$

Damit können wir nun zeigen daß

$$\underline{\underline{S}} : \delta \underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T}) : (\underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{F}}) = \underline{\underline{\tau}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Wir verwenden zunächst die Regel $\mathbf{A} : \mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}^T : \mathbf{B}$ und erhalten

$$\underbrace{(\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{F}}^{-T})}_{\mathbf{A}} : \underbrace{\underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{\varepsilon}}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\underline{\underline{F}}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{(\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\tau}})}_{\mathbf{AC}^T} : \underbrace{\underline{\underline{F}}^T \delta \underline{\underline{\varepsilon}}}_{\mathbf{B}}.$$

Das gewünschte Ergebnis folgt aus $\mathbf{AC}^T : \mathbf{B} = \mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ und der Symmetrie des Kirchhoff Tensors.

Für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gilt somit

$$\delta w_i = \int_v \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} d\underline{v} = \int_V \underline{\underline{\tau}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} dV = \int_V \underline{\underline{P}} : \delta \underline{\underline{F}} dV = \int_V \underline{\underline{S}} : \delta \underline{\underline{E}} dV. \quad (4.7)$$

Man sagt daß die Tensorenpaare $(\underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{\varepsilon}})$, $(\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{F}})$ und $(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{E}})$ arbeitskonjugiert bezüglich der unverformten Konfiguration V sind.

Analog können wir für die Leistung der inneren Kräfte die Gleichungen

$$\delta p_i = \int_v \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{d}} d\underline{v} = \int_V \underline{\underline{\tau}} : \delta \underline{\underline{d}} dV = \int_V \underline{\underline{P}} : \delta \dot{\underline{\underline{F}}} dV = \int_V \underline{\underline{S}} : \delta \dot{\underline{\underline{E}}} dV. \quad (4.8)$$

zeigen (s.a. [5, p.146f]). Bezuglich der unverformten Konfiguration sind also die Paare $(\underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{d}})$, $(\underline{\underline{P}}, \dot{\underline{\underline{F}}})$ und $(\underline{\underline{S}}, \dot{\underline{\underline{E}}})$ leistungskonjugiert.

Tabelle 4.2: Arbeits- und leistungskonjugierte Tensoren

	$\underline{\sigma}$	\underline{P}	\underline{S}		$\underline{\sigma}$	\underline{P}	\underline{S}
$\underline{\varepsilon}$	x			\underline{d}	x		
\underline{F}		x		$\dot{\underline{F}}$		x	
\underline{E}			x	$\dot{\underline{E}}$			x

4.3 Objektivität der Spannungstensoren

Da die Flächennormale ein freier Vektor ist, gilt bei einer Euklid'schen Transformation des Bezugssystems die Gleichung $[\mathbf{n}]_{\sim} = \mathbf{Q}\mathbf{n}$. Der Normalenvektor ist also objektiv. Ebenso gilt für den Spannungsvektor $[\mathbf{t}]_{\sim} = \mathbf{Q}\mathbf{t}$. Der Cauchy'sche Spannungstensor ist definiert als lineare Abbildung der Flächennormalen auf den Spannungsvektor. Aus $[\underline{\sigma}]_{\sim} [\mathbf{n}]_{\sim} = [\mathbf{t}]_{\sim}$ folgt mit

$$[\underline{\sigma}]_{\sim} = \mathbf{Q} \underline{\sigma} \mathbf{Q}^T. \quad (4.1)$$

die Objektivität des Cauchy-Spannungstensors.

Die Spannungstensoren werden über den Deformationsgradienten transformiert. Mit $\tilde{\underline{F}} = \mathbf{Q}\underline{F}$ ist leicht zu sehen, daß für die PK-Tensoren die Gleichungen

$$[\underline{P}]_{\sim} = \mathbf{Q} \underline{P} \quad [\underline{S}]_{\sim} = \underline{S},$$

gelten. Damit ist der erste PK Tensor nicht objektiv. Der 2. PK Tensor bleibt bei der Transformation erhalten.

Für die Formulierung viskoser Materialverhaltens in der verformten Konfiguration werden objektive Zeitableitungen des Cauchy Spannungstensors benötigt. Durch Ableitung der Gleichung (4.1) sieht man unmittelbar, daß die Zeitableitung $\dot{\underline{\sigma}}$ des Cauchy-Tensors nicht objektiv ist. Räumlich objektive Spannungsgeschwindigkeiten erhält man durch Verwendung objektiver Zeitableitungen wie der Jaumann-, Olroyd- oder Truesdell Rate. Wir fassen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

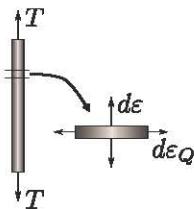
Tabelle 4.3: Objektivität der Spannungstensoren

$\tilde{\underline{T}} = \mathbf{Q} \underline{\underline{T}} \mathbf{Q}^T$	$\tilde{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}$	keine
Cauchy Tensor $\underline{\sigma}$	x	
1. Piola-Kirchhoff Tensor $\underline{\underline{P}}$		x
2. Piola-Kirchhoff Tensor $\underline{\underline{S}}$	x	
Spannungsgeschwindigkeit $\dot{\underline{\sigma}}$		x
Jaumann Rate $\underline{\sigma}^{\nabla J}$	x	
Truesdell Rate $\underline{\sigma}^{\nabla T}$	x	

4.4 Beispiele

Wir rekapitulieren die allgemeinen Zusammenhänge an einem Zugstab mit Kreisquerschnitt. Im ersten Beispiel stellen wir die kinematischen Beziehungen bereit. Anschließend berechnen wir die Spannungstensoren und geben unterschiedliche Formulierungen für das globale Gleichgewicht an.

Beispiel 4.4.



Für einen Stab mit Kreisquerschnitt sind die Länge L und der Querschnittsradius R im unverformten Zustand gegeben. Der Stab wird auf die Länge l gedehnt. Für die inkrementellen Dehnungszuwächse in axialer und radialer Richtung wird

$$\nu = -\frac{d\epsilon_Q}{d\epsilon}$$

angenommen. Das Material ist homogen und isotrop. Für die Werte

$$L = 1\text{m}, \lambda = \frac{l}{L} = 1.4, R = 4\text{cm}, \nu = 0.3.$$

berechne man

- den Radius r des verformten Querschnitts,
- das Volumenverhältnis $J = \frac{v}{V}$.
- die Dehnungstensoren (Green-Lagrange, Green-Almansi, Hencky).

Lösung: Aus $d\epsilon_Q = \frac{dr}{r} = -\nu \frac{dl}{l}$ folgt

$$\int_R^r \frac{d\bar{r}}{\bar{r}} = \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -\nu \int_L^l \frac{d\bar{l}}{\bar{l}} = -\nu \ln \lambda \Rightarrow \frac{r}{R} = \lambda^{-\nu}.$$

Mit den gegebenen Werten berechnen wir daraus den Radius $r = R\lambda^{-\nu} = 3.616\text{cm}$.

Zur Berechnung des Volumenverhältnisses geben wir zunächst den Deformationsgradienten an. Die Streckung des Stabes wird in kartesischen Koordinaten mit der 1-Achse in Stabrichtung durch

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\nu} \end{bmatrix}$$

beschrieben. Daraus erhalten wir $J = \det \underline{\underline{F}} = \lambda^{1-2\nu}$. Für $\nu = 0.5$ ergibt sich auch hier die inkompressible Verformung mit $J = 1$.

Die Dehnungstensoren ergeben sich aus dem Deformationstensor zu:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2\nu} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2\nu} - 1 \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{e}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^{2\nu} \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{E_H}} &= \frac{1}{2} \ln (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}) = \begin{bmatrix} \ln \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \ln \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \ln \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten aus dem vorigen Beispiel erhalten wir:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0 & 0 \\ 0 & -0.091 & 0 \\ 0 & 0 & -0.091 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0.245 & 0 & 0 \\ 0 & -0.112 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0112 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{E}_H} = \begin{bmatrix} 0.337 & 0 & 0 \\ 0 & -0.101 & 0 \\ 0 & 0 & -0.101 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 4.5.

An dem Stab mit Kreisquerschnitt greift die Zugkraft $T = 200\text{kN}$ an. Man berechne die Spannungstensoren (Cauchy, Kirchhoff, PK1, PK2).

Lösung: Die Zugkraft bewirkt im Stab einen einachsigen Spannungszustand. Die 1. PK Spannung erhalten wir unmittelbar aus dem gegebenen Größen mit $A = \pi R^2 = 5026.5\text{mm}^2$ als

$$P_{11} = \frac{F}{A} = 39.8\text{MPa}.$$

Die Cauchy-Spannung bezieht sich auf den verformten Querschnitt $a = \pi r^2$. Wir erhalten $\sigma_{11} = 48.7\text{MPa}$. Wegen $r = R\lambda^{-\nu}$ gilt $a = A\lambda^{-2\nu}$ und somit $\sigma_{11} = P_{11}\lambda^{2\nu}$. Die 2. PK-Spannung ist

$$S_{11} = \frac{P_{11}}{F_{11}} = \frac{T}{\lambda A} = 28.4\text{MPa}.$$

Dieselben Ergebnisse erhalten wir durch formale Berechnung nach den allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \begin{bmatrix} T/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa,} \\ \underline{\underline{P}} &= J\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\lambda^{-2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \\ \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1}P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 4.6.

Man zeige die Gleichungen

$$\underline{\underline{P}} : \delta\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{S}} : \delta\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\tau}} : \delta\underline{\underline{E}_H}.$$

und stelle das Gleichgewicht nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf.

Lösung: Zum Nachweis der Gleichungen sind nur die 1,1-Komponenten der Tensoren relevant. Für die Spannungen erhalten wir aus (4.2–4.4)

$$P_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda^{2\nu}} = \lambda S_{11}.$$

Die Variation der Dehnungstensoren führt auf

$$\begin{aligned} \delta F_{11} &= \delta\lambda = \frac{\delta l}{L} \\ \delta E_{H,11} &= \delta(\ln(\lambda)) = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta l}{l} \\ \delta E_{G,11} &= \delta\left(\frac{1}{2}F_{11}^2\right) = \lambda\delta\lambda \end{aligned}$$

Daraus folgt einerseits

$$S_{11}\delta E_{G,11} = \frac{1}{\lambda}P_{11}\lambda\delta\lambda = P_{11}\delta F_{11}$$

und andererseits

$$P_{11}\delta F_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda^{2\nu}}\delta\lambda = \sigma_{11}\lambda^{1-2\nu}\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \tau_{11}\delta E_{H,11} .$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist

$$\delta W_i = \int_V S_{11}\delta E_{G,11} dV = \int_V P_{11}\delta\lambda dV = AL\frac{T}{A}\delta\lambda = T\delta l = \delta W_a .$$

Mit den gezeigten Beziehungen ist zudem

$$\delta W_i = \int_V S_{11}\delta E_{G,11} dV = \int_V \tau_{11} : \delta E_{H,11} dV = \int_v \sigma_{11} : \delta E_{H,11} dV .$$

Kapitel 5

Rheologische Modelle

Die Kontinuumsmechanik beschreibt die Verformungen von Körpern bei äußerer Beanspruchung. Diese Verformungen hängen wesentlich vom Material des Körpers ab. Das Materialverhalten wird traditionell durch Werkstoffprüfungen an standardisierten Zugproben, d.h. unter einachsiger Belastung, beschrieben. Die daraus resultierenden Spannungs-Dehnungs-Diagramme können mit einfachen Modellen aus Federn und Dämpfern nachgebildet werden. Diese *rheologischen* Modelle sind geeignet zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens. Wir geben zunächst eine Übersicht zum Verhalten von Werkstoffen in der Materialprüfung und stellen dann rheologische Modelle zur Beschreibung der beobachteten Phänomene vor.

5.1 Werkstoffe im physikalischen Experiment

Für die meisten technischen Werkstoffe sind kleine Verformungen nahezu komplett reversibel, d.h. der Körper nimmt nach dem Wegfall äußerer Beanspruchung wieder seine ursprüngliche Form an. Werkstoffe mit dieser Eigenschaft heißen *elastisch*. Elastische Materialien mit linearem Spannungs-Dehnungs Diagramm heißen *linear-elastisch*. Metalle sind in der Regel bei kleinen Verformungen linear-elastisch, während an Elastomeren schon bei relativ geringer Beanspruchung ein nichtlineares σ - ϵ -Diagramm aufgezeichnet wird. Bei der Charakterisierung des elastischen Materials ist noch zu unterscheiden, ob die Rückbildung zur ursprünglichen Form über einen sehr kurzen Zeitraum (d.h. momentan) oder über einen längeren Zeitraum erfolgt. Werkstoffe der zweiten Kategorie heißen *visko-elastisch*.¹

Bei großer Beanspruchung kommt es auf mikroskopischer Ebene zum Versagen der inneren Bindungsmechanismen.² In diesem Fall können sich die Verformungen nach Wegfall der äußeren Kräfte nicht mehr komplett zurückbilden. Diese Materialeigenschaft wird als *plastisch* bezeichnet. Ist das Verhalten im plastischen Bereich zeitabhängig bzw. abhängig von der Dehngeschwindigkeit, so spricht man von *visko-plastischen* Materialverhalten.

Die Abb. 5.1 zeigt die vier Grundformen des Materialverhaltens anhand von Spannungs-Dehnungs bzw. Dehnungs-Zeit-Diagrammen bei einachsiger Beanspruchung:

- Elastisch (hier: linear-elastisch): Be- und Entlastung verlaufen auf demselben Pfad des Spannungs-

¹ Viskosität ist eine mikroskopische Materialeigenschaft, die den Grad der inneren Reibung in Fluiden kennzeichnet. Makroskopische Messungen zeigen, dass die Widerstandskraft bei der Bewegung von Starrkörpern in viskosen Fluiden proportional zur Geschwindigkeit der Bewegung ist. Ausgehend davon wird das Wort "viskos" in der Mechanik allgemein für geschwindigkeits-proportionale Phänomene, z.B. für die viskose Dämpfung in Schwingungssystemen, verwendet. In visko-elastischen Materialmodellen wird eine innere Kraft proportional zur Dehngeschwindigkeit angesetzt.

² In bestimmten Materialien wie z.B. Knete ist dies schon bei sehr kleiner Beanspruchung der Fall.

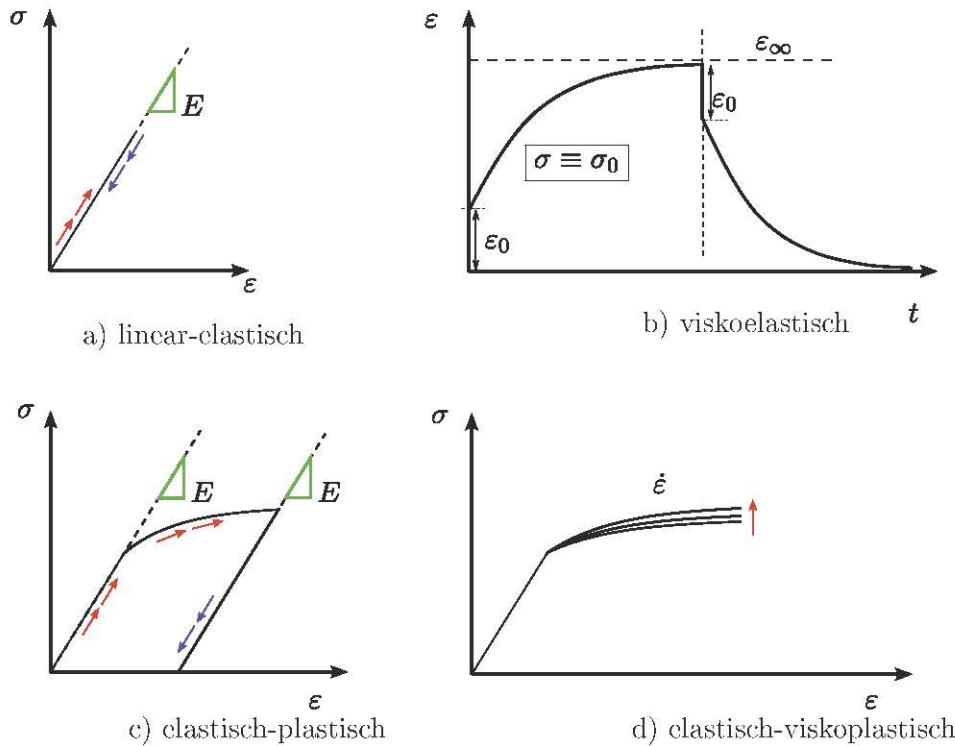


Abbildung 5.1: Vier Kategorien des Materialverhaltens. Die Materialkurven b) und d) sind ratenabhängig.

Dehnungs-Diagramms. Nach vollständiger Entlastung geht auch die Verformung vollständig zurück. Die Be- und Entlastungseffekte treten momentan, d.h. ohne zeitlichen Verzug, auf. Die Skizze zeigt linear-elastisches Materialverhalten mit dem Sekantenmodul (Elastizitätsmodul) E .

- b) Viskoelastisch: Das Diagramm zeigt schematisch ((nach [18, Bild 8.6, S.264]) den zeitlichen Anstieg bzw. Abfall der Dehnung $\varepsilon(t)$ bei sprunghaftem Aufbringen einer Belastung σ_0 (linker Teil des Diagramms) bzw. nach sprunghafter Entlastung (rechter Teil). Nach ausreichend langer Zeit bleiben keine bleibenden Verformungen zurück.
- c) (Elastisch-)Plastisch: Das Diagramm gibt das Verhalten einer Aluminium-Legierung (nach [14, Fig. 5.2, p. 165]) wieder. Nach Überschreiten einer Grenzspannung (Fließgrenze) kommt es zu einem abrupten Steifigkeitsabfall des Materials. Die Entlastung vollzieht sich wieder entlang einer geraden Linie mit dem Anstieg E . Bei vollständiger Entlastung schneidet das Diagramm die Abzisse $\sigma = 0$ bei einem Wert $\varepsilon_p > 0$. Dieser Wert kennzeichnet die Größe der bleibenden Verformung und wird als plastische Dehnung bezeichnet.
- d) (Elastisch-)Viskoplastisch: Das Diagramm (nach [14, Fig. 6.2., p.255]) zeigt das Verhalten einer Aluminiumlegierung bei einem Zugtest mit unterschiedlichen Dehngeschwindigkeiten. Mit wachsender Dehnrate erhöht sich die Steifigkeit im plastischen Bereich. Auf das elastische Verhalten hat die Dehnrate keinen Einfluss.

In der englischen Literatur werden Plastizität und Viskoplastizität auch als “rate-independent” bzw. “rate-dependent plasticity” bezeichnet. Die Viskoplastizität kann auch mit Viskoelastizität gekoppelt sein.

In den Diagrammen wurden die Begriffe Spannung und Dehnung benutzt, wie sie aus der technischen Mechanik bekannt sind. Im Zugversuch wird in der Materialprobe ein einachsiger Spannungszustand mit der Normalspannung

$$\sigma = \frac{F}{a}$$

erzeugt. Wird mit a der Querschnitt der *verformten* Probe bezeichnet, so heißt σ *wahre Spannung*, im Unterschied zur *Nominalspannung*

$$\sigma_0 = \frac{F}{A},$$

die bezüglich des unverformten Querschnitts A berechnet wird. Bei der Dehnung unterscheidet man zwischen der *technischen Dehnung*

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta l}{l_0},$$

als Relation der Längenänderung $\Delta l = l - l_0$ zur unverformten Länge l_0 und der *wahren Dehnung* (nach Hencky)

$$\varepsilon_H = \ln \frac{l}{l_0}.$$

Die wahre Dehnung ist gleich dem Integral über die "technischen Dehnungen" der infinitesimalen Teillängen \bar{l}

$$\varepsilon_H = \int_{l_0}^l \frac{dl}{\bar{l}}$$

bei der Streckung des Gesamtstabes von der Ursprungslänge l_0 auf die verformte Länge l .

5.2 Rheologische Elemente

Rheologischen Modelle bestehen aus Elementen, mit denen die Grundeigenschaften Elastizität, Viskosität und Plastizität abgebildet werden.

5.2.1 Das Hooke Element

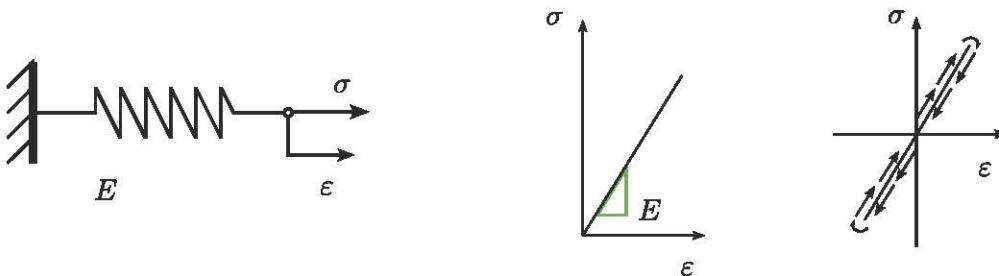


Abbildung 5.2: Ideal elastisches Element: Hooke Element (links), Abbildung des Zugversuchs (Mitte), Abbildung des Zug-Druck-Versuchs (rechts).

Das Hooke Element ist eine linear-elastische Feder mit der Federzahl E . Die Spannung ist proportional zur Dehnung. Das Element stellt ideal-elastisches Materialverhalten dar. Be- und Entlastung verlaufen entlang derselben Linie im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Die elastische

Spannung ist eine konservative Rückstellkraft. Die gespannte Feder hat das Potential $U = \frac{1}{2}E\epsilon^2$. Dieses Potential ist gleich der gespeicherte Dehnungsenergie, die bei Wegfall der äußeren Kraft zum selbstgesteuerten Zurückstellen der Feder, und somit zum Wegfall der Verformung, führt.

5.2.2 Das Newton Element

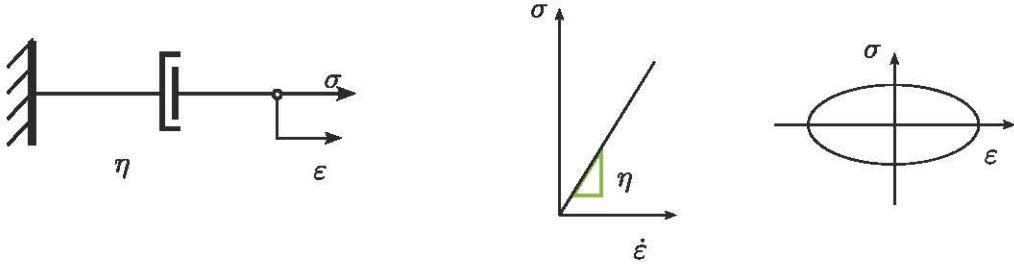


Abbildung 5.3: Ideal viskos Element: Newton Element (links), Abbildung des Zugversuchs (Mitte), Abbildung des Zug-Druck-Versuchs (rechts).

Das Newton-Element ist ein viskoser Dämpfer mit der Dämpfungskonstante η . Die Spannung ist proportional zur Dehnungsrate, $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$. Die viskose Spannung ist eine Widerstandskraft. Die Arbeit dieser Kraft wird nicht als mechanische Energie gespeichert, sondern dissipiert.

Für den zyklischen Versuch nehmen wir eine Dehnung der Form $\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$ an. Die Spannung ist dann $\sigma = \eta\dot{\epsilon} = \eta\omega\epsilon_0 \cos \omega t$. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich die Gleichung

$$\left(\frac{\sigma}{\eta\omega\epsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2 = 1, \quad (5.1)$$

die eine Ellipse im $\sigma - \epsilon$ Diagramm beschreibt. Die Halbachsen der Ellipse sind ϵ_0 und $\eta\omega\epsilon_0$. Das Areal $A = \pi\eta\omega\epsilon_0^2$ dieser Ellipse ist gleich dem Betrag der in einem Zyklus dissipierten Arbeit. Dieser Betrag ist proportional zur Dämpfungskonstante; insbesondere ist $A = 0$ für $\eta = 0$.

5.2.3 Das St.-Venant Element

Mit dem St.-Venant Element wird ideal-plastisches Materialverhalten modelliert. Das Modell symbolisiert die Coulomb'schen Haftungs- bzw. Reibungsgesetze, wobei die Konstanten $\mu_0 = \mu$ gleich gesetzt werden. Bei Steigerung der Spannung von Null bleibt der Mechanismus unbeweglich bis zum Erreichen der Haftgrenze $\sigma_0 = \mu$. Danach bewegt sich das System so lange bis die Spannung wieder unter die Haftgrenze fällt. Während der Bewegung wirkt eine konstante Widerstandskraft. Die Hysteresefläche ist in diesem Fall das in der Abb. 5.4c) skizzierte Rechteck. Das Areal der Fläche ist wieder ein Maß für die, während eines Zyklus dissipierte, Verlustarbeit.

Wie das Newton-Element ermöglicht auch das St.-Venant Element unbegrenzte Dehnung bei konstanter Spannung. Die bei zyklischer Belastung geleistete Arbeit der Spannung wird dissipiert. Beim Newton-Element hängt der Betrag der dissipierten Arbeit von der Dehnrate und somit von der Frequenz der zyklischen Belastung ab. Das St.-Venant Element ist auch bei statischer Belastung dissipativ. Unter energetischem Aspekt ist also zwischen viskosem Kriechen und plastischem Kriechen oder auch Kriechen und Gleiten zu unterscheiden. Zur Abbildung von Energiedissipation bei statischer Belastung ist nur das St.-Venant Element geeignet. Anders als das Newton-Element kann das St.-Venant Element oberhalb der Haftgrenze keine äußere Kraft mehr aufnehmen.

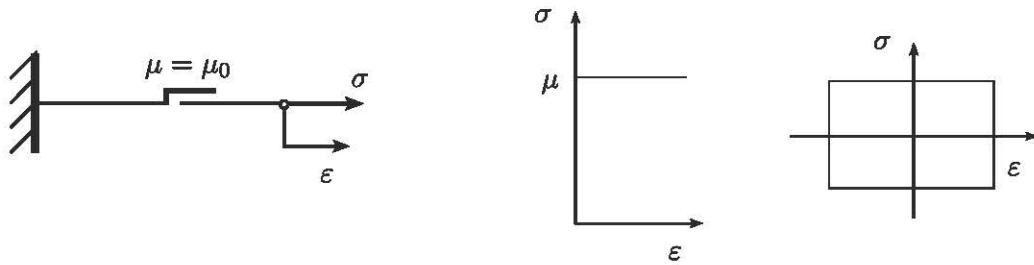


Abbildung 5.4: Ideal plastisches Element: St.-Venant Element (links), Abbildung des Zugversuchs (Mitte), Abbildung des Zug-Druck-Versuchs (rechts).

5.3 Elastizität und Viskoelastizität

Ein Material verhält sich elastisch, wenn bei kompletter Entlastung keine Verformung zurückbleibt. Ein elastisches Material heißt viskoelastisch, wenn die Rückverformung erst nach einem gewissen Zeitraum abgeschlossen ist. Das linear-elastische Materialverhalten wird durch Hooke'sche Elemente modelliert. Die Elemente können in Parallel- oder Reihenschaltung kombiniert werden. Die Spannungen und Dehnungen in diesen Körpern sind über lineare algebraische Gleichungen verknüpft.

Viskoelastizität wird durch die Kombination von Hooke- und Newton-Elementen abgebildet. Die Parallelschaltung dieser Elemente heißt Kelvin-Voigt Körper, die Reihenschaltung - Maxwell Körper. Die Spannungen und Dehnungen sind zeitabhängig. Die Materialgesetze sind lineare Differentialgleichungen. Die Lösung dieser Differentialgleichungen führt auf Kriech- bzw. Relaxationsfunktionen. Der allgemeine Zusammenhang zwischen den Spannungen $\sigma(t)$ und den Dehnungen $\varepsilon(t)$ wird in Form von Integralgleichungen dargestellt. Die Zwei-Element-Körper können jeweils nur einzelne Aspekte des Kriech- oder des Relaxationsverhaltens abbilden. Zur Modellierung weiterer Effekte können beliebig viele Elemente in rheologischen Körpern kombiniert werden.

5.3.1 Linear-elastische Körper

Linear-elastisches Materialverhalten wird durch das Hooke-Element (s. Abb. 5.2) abgebildet. Die Materialgleichung lautet

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (5.1)$$

Auch Kombinationen von Hooke-Elementen ergeben linear-elastische Materialgesetze. Wir betrachten als Beispiel die Parallel- und Reihenschaltung zweier Elemente.

Beispiel 5.1.

Wir untersuchen die und Reihen- und Parallelschaltung zweier Hooke-Elemente nach den Regeln "gleiche Kraft" bzw. "gleicher Weg". Bei der Reihenschaltung ist die Schnittkraft in beiden Elementen gleich der angreifenden Spannung σ . Die Gesamtdehnung ergibt sich als Summe der Einzeldehnungen:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2} = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma$$

Daraus folgt die gekoppelte Steifigkeit

$$\frac{1}{E_{12}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}.$$

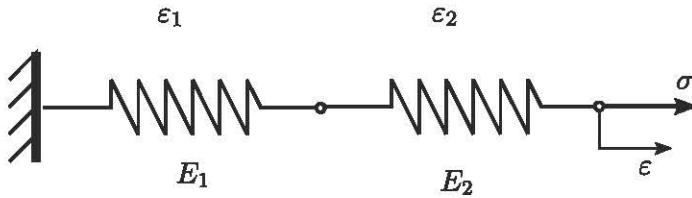


Abbildung 5.5: Elastischer Körper als Reihenschaltung von Hooke-Elementen

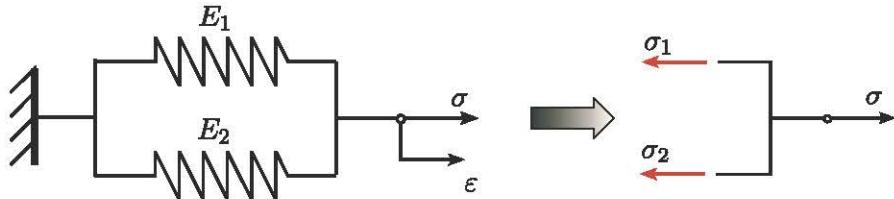


Abbildung 5.6: Elastischer Körper als Parallelschaltung von Hooke-Elementen.

In der Parallelschaltung ist die Summe der Federkräfte gleich der äußeren Kraft σ . Beide Federn werden gleich gedehnt (“gleicher Weg”). Es gilt

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = E_1 \epsilon + E_2 \epsilon = (E_1 + E_2) \epsilon.$$

Die Gesamtsteifigkeit ist gleich der Summe der Einzelsteifigkeiten.

$$E_{12} = E_1 + E_2$$

Für $E_1 = E_2$ ist $E_{\text{para}} = 2E$ und $E_{\text{reihe}} = E/2$ (Abb. 5.7). In der Parallelschaltung muss für die Dehnung

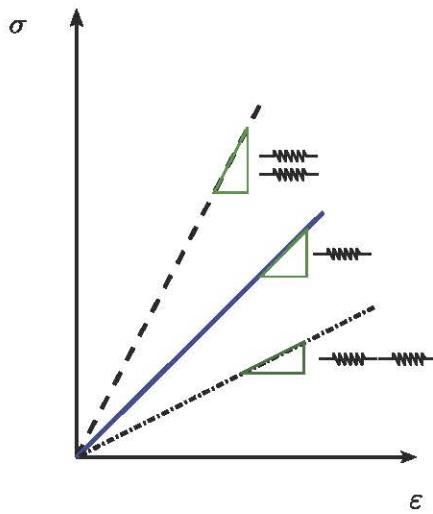


Abbildung 5.7: Elastischer Körper als Parallelschaltung von Hooke-Elementen.

ϵ die Kraft 2σ aufgewendet werden; in der Reihenschaltung bewirkt die Kraft σ eine Dehnung 2ϵ .

5.3.2 Der Kelvin-Voigt Körper

Im Kelvin-Voigt Körper sind ein Hooke-Element und Newton-Element parallel angeordnet.

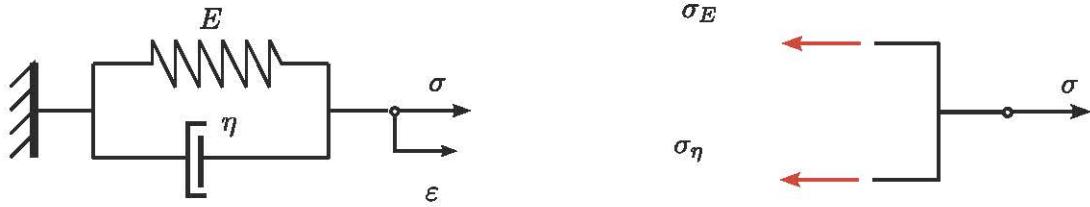


Abbildung 5.8: Schaltbild des Kelvin-Voigt Körpers (links); Zerlegung der Spannung (rechts).

Aus dem skizzierten Freischnitt folgt $\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta$; mit den entsprechenden Materialgleichungen ergibt sich

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (5.2)$$

Wir werten diese Gleichung zunächst für den *Kriechversuch* aus. In diesem Versuch wird sprunghaft eine Spannung σ_0 auf den unverformten Körper aufgebracht. Die Anfangsbedingung für die Dehnung ist dann $\varepsilon(0) = 0$. Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = \sigma_0$$

ist die Summe aus der homogenen Lösung ε_h und der Partikulärlösung $\varepsilon_p = \sigma_0/E$. Die homogene Lösung wird mit dem Ansatz $\varepsilon_h(t) = Ce^{\lambda t}$ berechnet. Die Gleichung

$$0 = C(E + \lambda\eta)e^{\lambda t}$$

hat nichttriviale Lösungen nur für

$$\lambda = -\frac{1}{\tau}.$$

mit der *Retardationszeit*

$$\tau = \frac{\eta}{E}.$$

Den Parameter C aus der homogenen Lösung

$$\varepsilon_h = Ce^{-\frac{t}{\tau}}.$$

berechnen wir aus der Anfangsbedingung für $\varepsilon = \varepsilon_h + \varepsilon_p$. Aus

$$0 = C + \frac{\sigma_0}{E} \implies C = -\frac{\sigma_0}{E}$$

folgt

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (5.3)$$

Mit Einführung der *Kriechfunktion*

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (5.4)$$

gilt

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t).$$

Die Kriechfunktion $J(t)$ beschreibt die Reaktion des Körpers auf die äußere Spannung.

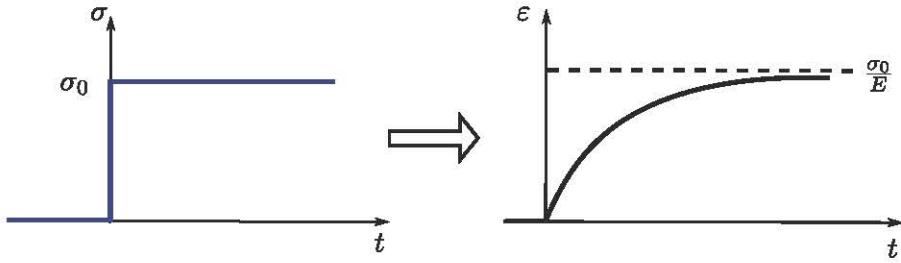


Abbildung 5.9: Reaktion des Kelvin-Voigt Körpers auf den Kriechversuch.

Der Verlauf der Dehnung aus Gl. (5.3) ist in Abb. 5.9 (oben) skizziert. Die Kriechfunktion bildet das Verhalten von Kunststoffen (Polymere, Elastomere) im Kriechversuch phänomenologisch korrekt ab [14, p.103]. Die sprunghaft aufgebrachte Spannung wird zunächst komplett vom Dämpfer aufgenommen. Dieser verhindert in der Parallelschaltung die unmittelbare Dehnung der Feder bei $t = 0$. Für $t > 0$ dehnen sich der viskose Dämpfer und die Feder mit konstanter Dehnrate. Mit wachsender Dehnung wird ein zunehmender Anteil der Spannung von der Feder aufgenommen. Für $t \rightarrow \infty$ nähert sich die Dehnung dem elastischen Grenzwert σ_0/E an.

Wird die Last σ_0 zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ wieder sprunghaft zurückgenommen, so reagiert der Körper mit einer Kombination aus Kriechen bis zur Dehnung $\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0)$ und anschließendem Rückkriechen. Für $t > t_0$ gilt für die Dehnung $\varepsilon(t - t_0)$ die homogene Differentialgleichung

$$\dot{\varepsilon} + \tau \dot{\varepsilon} = 0$$

mit der Anfangsbedingung $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Die Lösung ist dann

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}};$$

s. Abb. 5.10.

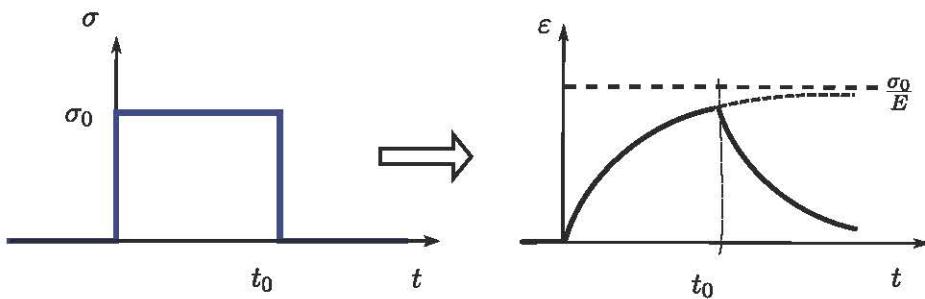


Abbildung 5.10: Reaktion des Kelvin-Voigt Körpers auf den Kriechversuch mit Be- und Entlastung

Wird auf den Körper sprunghaft eine Dehnung $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ aufgebracht, so ist die Reaktion die zeitlich konstante Spannung $\sigma \equiv E\varepsilon_0$ wie in Abb. 5.11 skizziert. In viskoelastischen Materialien wird bei konstanter Dehnung die anfängliche Spannung ganz oder teilweise abgebaut. Dieser Effekt wird als *Relaxation* oder Entspannung bezeichnet. Mit dem Kelvin-Voigt-Körper kann dieses Verhalten nicht abgebildet werden.

Viskoclastische Materialien werden verbreitet in der Schwingungstechnik eingesetzt. Hierfür ist das Verhalten des KV-Köpfers im zyklischen Versuch relevant. Die Modellierung der Material-

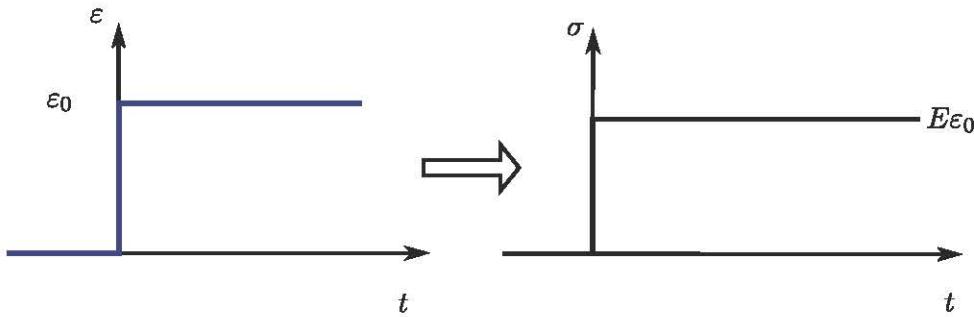


Abbildung 5.11: Reaktion des Kelvin-Voigt Körpers auf den Relaxationsversuch

oder Strukturdämpfung nach der KV-Analogie führt auf den “komplexifizierten” Elastizitätsmodul

$$\tilde{E} = E(1 + i\alpha).$$

Beispiel 5.2.

Für eine Dehnungs-gesteuerte zyklische Belastung der Form $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = E\varepsilon + \eta\omega\varepsilon_0 \cos\varphi$$

mit $\varphi = \omega t$. Wir formen die obige Gleichung um in

$$(\sigma - E\varepsilon)^2 = E^2\varepsilon_0^2(\eta\omega)^2(1 - \sin^2\varphi)$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\sigma^2 - 2E\sigma\varepsilon + [E^2 + (\eta\varepsilon)^2]\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2(\tau\omega)^2$$

In den Grenzfällen $\eta = 0$ bzw. $E = 0$ ergibt sich hieraus mit $\sigma = E\varepsilon$ die Gleichung des Hooke-Elements bzw. die Gleichung (5.1) für das Newton-Element. Im allgemeinen Fall stellt die Gleichung eine in der $\sigma - \varepsilon$ Ebene rotierte Ellipse dar.

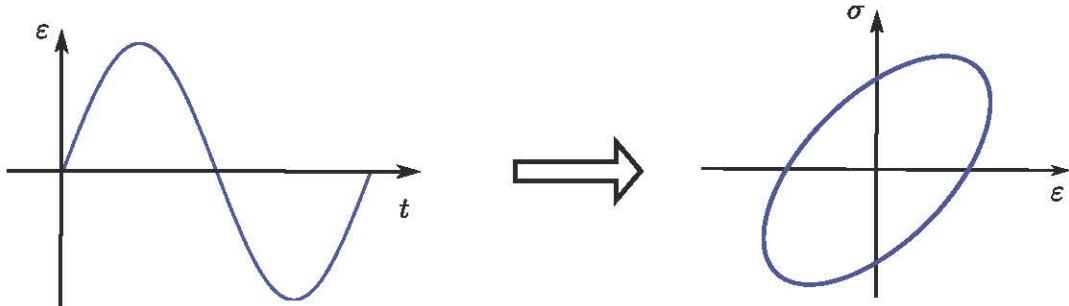


Abbildung 5.12: Reaktion des Kelvin-Voigt Körpers auf zyklische Belastung

5.3.3 Der Maxwell Körper

Eine elastische Feder und ein viskoser Dämpfer sind in Reihe angeordnet. Die Gesamtdehnung ist die Summe der Einzeldehnungen; in beiden Elementen wirkt dieselbe Schnittkraft σ . Durch Einsetzen der Materialgesetze in der Summe $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_\eta$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (5.5)$$

Wir lösen diese Gleichung für den Relaxationsversuch $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ mit der Anfangsbedingung $\sigma(0) = \sigma_0 = E\varepsilon_0$. Die Schritte der mathematischen Lösung sind dieselben wie für den KV-Körper. Das Ergebnis ist der Spannungsverlauf

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.6)$$

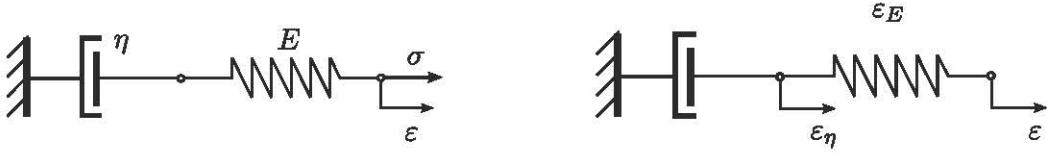


Abbildung 5.13: Schaltbild des Maxwell Körpers (links), Zerlegung der Dehnung (rechts).

Die Spannung kann alternativ in der Form

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)R(t)$$

mit der *Relaxationsfunktion*

$$R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.7)$$

geschrieben werden. Der zeitliche Verlauf dieser Spannung ist in der Abb. 5.14(rechts) illustriert. Die sprunghaft aufgebrachte Dehnung wird zunächst nur von der Feder aufgenommen, die sich anschließend in dem Maß entspannt, wie die Dehnung im viskosen Element wächst. Bei $t \rightarrow \infty$ ist die aufgebrachte Dehnung komplett im viskosen Element enthalten.

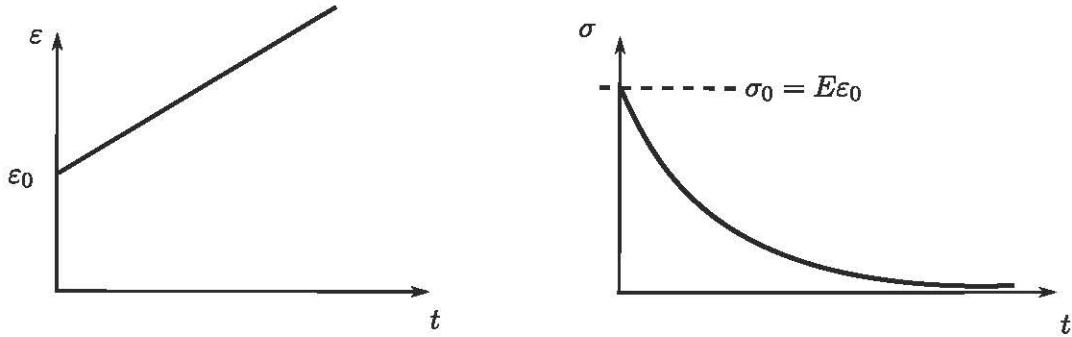


Abbildung 5.14: Verhalten des Maxwell-Körpers im Kriechversuch (links) und im Relaxationsversuch (rechts)

Wir untersuchen noch die Reaktion des Maxwell-Körpers auf den Kriechversuch. Einsetzen der Spannung $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ ³ in die Differentialgleichung (5.5) führt auf

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}.$$

Nach Integration und Einsetzen der Anfangsbedingung $\varepsilon(0) = \sigma_0/E$ ergibt sich

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E},$$

und schließlich nach Umformung die Lösung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right). \quad (5.8)$$

³ $H(t)$ bezeichnet die Heaviside'sche Sprungfunktion

Der zeitliche Verlauf der Lösung ist in der Abb. 5.14(links) gezeigt. Der Spannungssprung bei $t = 0$ wird unmittelbar nur von der Feder mit der Anfangsdehnung $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ aufgenommen. Dieser *Anfangselastizität* E ist für $t > 0$ die lineare *Dehnrate*, also das Wachstum der Dehnung entsprechend dem viskosen Materialgesetz, superponiert. Bei anhaltender konstanter Last wächst die Dehnung $t \rightarrow \infty$ unbegrenzt. Das Modell ist für die Modellierung kompressibler viskoser kompressibler Fluide oder für "soft solids"[14, 3.3.3], z.B. thermoplastische Polymere oder Metalle nahe der Schmelztemperatur, geeignet.

5.3.4 Kriech- und Relaxationsfunktion

Das viskoelastische Materialverhalten wird - je nach Versuchsgestaltung - durch Kriech- oder Relaxationsfunktionen beschrieben. Im Kriechversuch wird die Materialprobe sprunghaft durch die Spannung

$$\sigma(\bar{t}) = \sigma_0 H(\bar{t})$$

beansprucht und die Dehnung $\varepsilon(\bar{t})$ über eine Zeitdauer $0 < \bar{t} < t$ gemessen. Die Funktion

$$J(\bar{t}) = \frac{\varepsilon(\bar{t})}{\varepsilon_0}. \quad (5.9)$$

heißt *Kriechfunktion*. Analog dazu wird für den Relaxationsversuch mit der aufgebrachten Dehnung

$$\varepsilon(\bar{t}) = \varepsilon_0 H(\bar{t})$$

die Spannung $\sigma(\bar{t})$, $0 < \bar{t} < t$ gemessen und die *Relaxationsfunktion*

$$R(\bar{t}) = \frac{\sigma(\bar{t})}{\sigma_0}. \quad (5.10)$$

definiert.

Beispiel 5. (Kelvin-Voigt-Körper und Maxwell-Körper): Die Kriechfunktion des Kelvin-Voigt-Körpers ergibt sich aus der Gleichung (5.3) als

$$J_{KV}(\bar{t}) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}} \right).$$

Die Kriechfunktion des Maxwell-Körpers finden wir aus (5.8) als

$$J_M(\bar{t}) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{\bar{t}}{\tau} \right),$$

und aus (5.6) ergibt sich die Relaxationsfunktion

$$R_M(\bar{t}) = E e^{\frac{-\bar{t}}{\tau}}.$$

Der Parameter

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

heißt Kriechzeit (auch: Retardationszeit) bzw. Relaxationszeit.

Die Funktionen sind in Abb. 5.15 skizziert. Die Kriechkurve hat den Startpunkt $J(0) = 0$ und nähert sich für $t \rightarrow \infty$ der horizontalen Asymptote $J = E^{-1}$ an. Die Relaxationsfunktion nähert sich von $R(0) = E$ aus der Asymptote $R = 0$ an. Die Tangenten $\dot{J}(0)t + J(0)$ bzw. $\dot{R}(0)t + R(0)$ an die Startpunkte der Funktionen schneiden die horizontalen Asymptotenlinien bei $t = \tau$. Zu diesem Zeitpunkt sind die Werte der Funktionen jeweils um den Faktor $1/e$, d.h. ca. 37%, vom asymptotischen Wert, entfernt.

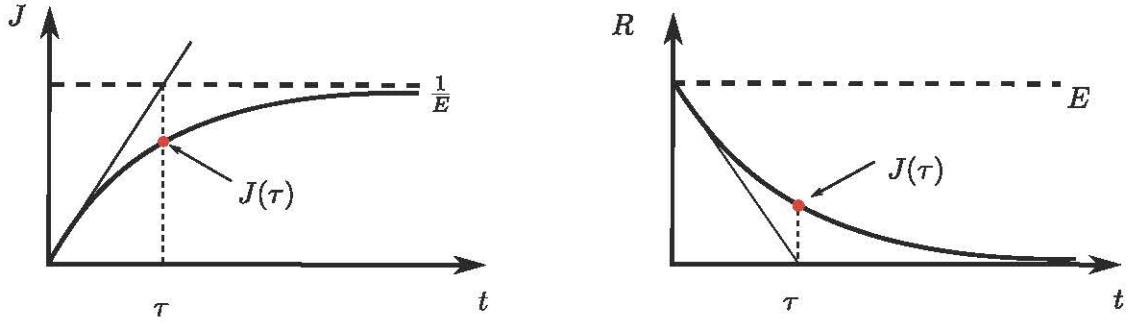


Abbildung 5.15: Kriechfunktion des Kelvin-Voigt Körpers (links), Relaxationsfunktion des Maxwell-Körpers (rechts)

Beispiel 6. (Hooke Körper und Newton Körper): Die Ein-Element-Körper können als Grenzfall der Zwei-Element-Körper betrachtet werden. Aus der Reaktion des Federelements auf Kriech- bzw. Relaxationsversuch leiten wir ab:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &\equiv \sigma_0/E \implies J(t) \equiv 1/E \\ \sigma(t) &\equiv E\varepsilon_0 \implies R(t) \equiv E\end{aligned}$$

Zwischen den Funktionen gilt der einfache Zusammenhang

$$J = \frac{1}{R}.$$

Für die Laplace-Transformierten der Funktionen gilt mit $\mathcal{L}(1) = s$ die Beziehung

$$s\mathcal{L}(J) = \frac{1}{s\mathcal{L}(R)}.$$

Für das Newton-element folgen aus $\dot{\sigma} = \eta\varepsilon$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_0^t \frac{\sigma_0}{\eta} d\bar{t} \implies J(t) \equiv \frac{t}{\eta} \\ \sigma(t) &= \eta \frac{d}{dt} (\varepsilon_0 H(t)) \implies R(t) = \eta \delta(t)\end{aligned}$$

Aus der Tabelle der Laplace-Transformierten erschen wir auch in diesem Fall die Gültigkeit der Gleichung

$$s\mathcal{L}(J) = \frac{1}{s\mathcal{L}(R)}.$$

5.3.5 Integraldarstellung des viskoelastischen Materialverhaltens

Mit Hilfe der Kriech- bzw. Relaxationsfunktion können das viskoelastische Materialgesetze in integraler Form angegeben werden. Die Darstellungen lauten

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)J(t) + \int_0^t J(t-\bar{t}) \frac{d\sigma(\bar{t})}{d\bar{t}} d\bar{t} \quad (5.11)$$

mit der Kriechfunktion J und

$$\sigma(t) = \sigma(0)R(t) + \int_0^t R(t-\bar{t}) \frac{d\varepsilon(\bar{t})}{d\bar{t}} d\bar{t} \quad (5.12)$$

mit der Relaxationsfunktion R . Die Gleichungen sind generell für beliebige integrierbare Funktionen R und J gültig. Die Spannung $\sigma(t)$ bzw. Dehnung $\varepsilon(t)$ werden über Integralgleichungen berechnet, in denen die Kriech- bzw. Relaxationsfunktion als Kerne von Faltungsintegralen auftreten. Als Beispiel für die Integraldarstellungen von Kriech- und Relaxationsgesetz betrachten wir den Maxwell-Körper.

Beispiel 5.3.

Wir wollen die Differentialgleichung des Körpers zunächst für einen bekannten Dehnungs-Verlauf $\varepsilon = \varepsilon(\bar{t}), 0 \leq \bar{t} < t$ nach der Spannung $\sigma(t)$ zum Zeitpunkt t lösen. Hierfür bringen wir die Ausgangsgleichung (5.5) in die Form

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma = E \frac{d\varepsilon}{dt}$$

und multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit dem Faktor $e^{\bar{t}/\tau}$. Die sich ergebende Gleichung

$$\underbrace{\frac{d\sigma}{dt} e^{\frac{\bar{t}}{\tau}} + \frac{1}{\tau} e^{\frac{\bar{t}}{\tau}} \sigma}_{\frac{d}{d\bar{t}} [\sigma(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{\tau}}]} = E \frac{d\varepsilon}{dt} e^{\frac{\bar{t}}{\tau}}$$

integrieren wir auf dem Intervall $0 < \bar{t} < t$ mit dem Ergebnis

$$[\sigma(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{\tau}}]_0^t = \int_0^t E e^{\frac{\bar{t}}{\tau}} d\bar{t}$$

Wir setzen auf der linken Seite die Integrationsgrenzen ein

$$[\sigma(\bar{t}) e^{\frac{\bar{t}}{\tau}}]_0^t = \sigma(t) e^{\frac{t}{\tau}} - \sigma(0),$$

und dividieren die Gleichung anschließend wieder durch den Term $e^{\bar{t}/\tau}$. Das Ergebnis

$$\sigma(t) = \sigma(0) e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t E e^{\frac{\bar{t}}{\tau}} d\bar{t}$$

können wir mit

$$R(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

in der Form (5.12) schreiben. Die gesuchte Spannung zum Zeitpunkt t ergibt sich als Summe aus der Anfangsbedingung $\sigma(0)$ und einem sogenannten *Faltungsintegral* über den Dehnungsverlauf $\varepsilon(\bar{t}), 0 \leq \bar{t} < t$.

Beispiel 5.4.

Für einen bekannten Spannungsverlauf $\sigma(\bar{t}), 0 \leq \bar{t} < t$ erhalten wir die Gleichung (5.11)

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) J(t) + \int_0^t J(\bar{t}) \frac{d\sigma(\bar{t})}{d\bar{t}} d\bar{t}$$

mit der Kriechfunktion

$$J_M(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right).$$

Für die Herleitung (nach [7]) approximieren wir den Verlauf $\sigma(t)$ zunächst durch eine Treppenfunktion wie in Abb. 5.16 skizziert. Den approximierten Spannungsverlauf schreiben wir als Summe von Sprungfunktionen

$$\sigma(\bar{t}) \approx \sigma_0 H(\bar{t}) + \sum_j \Delta \sigma_j H(\bar{t} - \bar{t}_j)$$

Für den Kriechtest mit der Heaviside'sche Sprungfunktion $\sigma = \sigma_0 H(t)$ hatten wir die Lösung

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$$

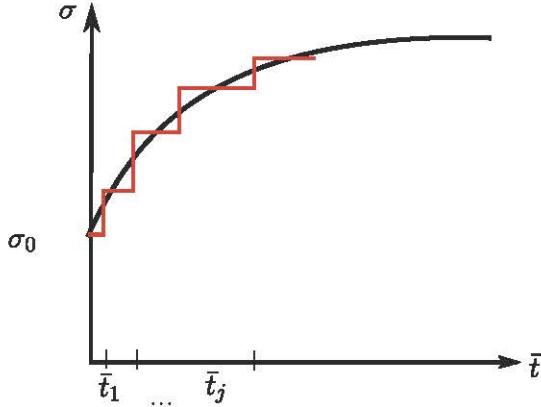


Abbildung 5.16: Approximation des Spannungsverlaufs

mit $\sigma_0 = E\varepsilon(0)$ und der Kriechfunktion $J = J_M$ aus dem vorigen Beispiel erhalten. Als Reaktion des Körpers auf die Approximation des Spannungsverlaufs ist somit

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sum_j \Delta\sigma_j J(t - \bar{t}_j)$$

Wir erweitern unter der Summe mit dem Zeitintervall $\Delta\bar{t}_j$

$$\Delta\sigma_j = \frac{\Delta\sigma_j}{\Delta\bar{t}_j} \Delta\bar{t}_j$$

und gehen zum Grenzwert $\Delta\bar{t} \rightarrow 0$ über. Dadurch wird der Differenzenquotient zur Ableitung und die Summe zum Integral; wir erhalten schließlich das Ergebnis

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(t - \bar{t}) \frac{d\sigma}{d\bar{t}} d\bar{t}.$$

Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformierten der Kriech- bzw. Relaxationsfunktion des Maxwell-Körpers sind

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(J) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right] = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\tau s^2}\right] \\ \mathcal{L}(R) &= \mathcal{L}\left(Ee^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{s + \frac{1}{\tau}}.\end{aligned}$$

Damit gilt der Zusammenhang

$$s\mathcal{L}(J) = \frac{1}{s\mathcal{L}(R)}, \quad (5.13)$$

den wir schon in den Beispielen für das Hookes- und das Newton-Element konstatiert hatten. Im allgemeinen Fall folgt diese Gleichung unmittelbar aus den Laplace-Transformationen der Gleichungen (5.11) und (5.12) sowie dem Differentiations- und dem Faltungssatz,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sigma) &= \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\varepsilon * J\right) = s\mathcal{L}(J)\mathcal{L}(\varepsilon) \\ \mathcal{L}(\varepsilon) &= \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\sigma * R\right) = s\mathcal{L}(R)\mathcal{L}(\sigma).\end{aligned}$$

Die Beziehung (5.13) folgt nun durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung und einfache Umformung. Die entsprechende Relation im Zeitbereich lautet (für die Herleitung s. z.B. [7, Kap.6])

$$\frac{d}{dt} \int_0^t J(t-\bar{t}) R(\bar{t}) d\bar{t} = H(t). \quad (5.14)$$

Es ist leicht zu sehen daß die Gl. (5.13) durch Laplace-Transformation aus Gl. (5.14) folgt.

5.3.6 Der viskoelastische Standardkörper

Bisher haben wir rheologische Elemente und Zwei-Element-Körper untersucht. Diese Grundbausteine können generell beliebig miteinander in komplexen rheologischen Modellen kombiniert werden. Kombinationen aus drei Elementen werden als Standardkörper bezeichnet. Die Abb. 5.17 zeigt zwei Varianten des vibroelastischen Standardkörpers. In den Varianten ist jeweils ein Hooke-Element mit einem Kelvin-Voigt Körper in Reihe bzw. mit einem Maxwell-Körper parallel geschaltet.⁴

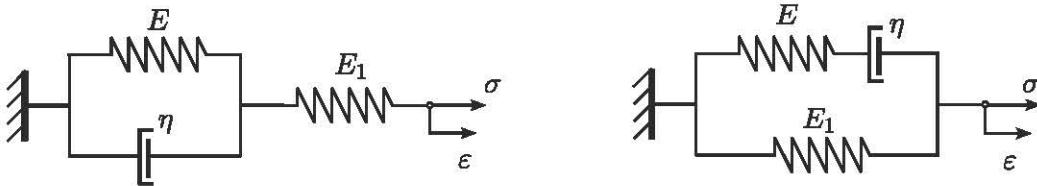


Abbildung 5.17: Viskoelastische Standardkörper: verallgemeinerter Kelvin-Voigt-Körper (links) und verallgemeinerter Maxwell-Körper (rechts)

Der erweiterte Kelvin-Voigt-Körper

Wir betrachten zunächst den in der Abb. 5.17 (links) gezeigten erweiterten KV-Körper. Die Gesamtdehnung der Reihenschaltung ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E_1}.$$

In der Parallelschaltung sind die Spannungen zu addieren,

$$\sigma = E\varepsilon_0 + \eta\dot{\varepsilon}_0.$$

Durch Elimination von ε_0 erhalten wir aus diesen Beziehungen die Materialgleichung

$$\left(1 + \frac{E}{E_1}\right)\sigma + \frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma} = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Zur Berechnung der Kriechfunktion setzen wir $\sigma = \sigma_0 H(t)$ und erhalten

$$\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{E}{E_1}\right)$$

mit

$$\tau = \tau_K = \frac{\eta}{E}$$

⁴In der englischen Literatur werden die Körper auch als Zener-Körper und Anti-Zener-Körper bezeichnet; s. z.B. [15]

als Kriech- bzw. Retardationszeit des KV-Körpers. Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist $\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_P$ mit

$$\varepsilon_H = Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \varepsilon_P = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0.$$

Der freie Parameter C ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Bei Aufbringen der Last wird σ_0 unmittelbar nur von der Feder E_1 aufgenommen. Mit $\varepsilon_0(0) = 0$ und $\varepsilon_1(0) = \sigma_0/E_1$ erhalten wir

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1} \implies C = -\frac{\sigma_0}{E}$$

und daraus schließlich die Lösung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

Wir schreiben die Lösung in der Form $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$ mit der Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.16)$$

Die in Abb. 5.18 skizzierte Funktion zeigt die Reaktion des Standard-Körpers im Kriechtest. Die

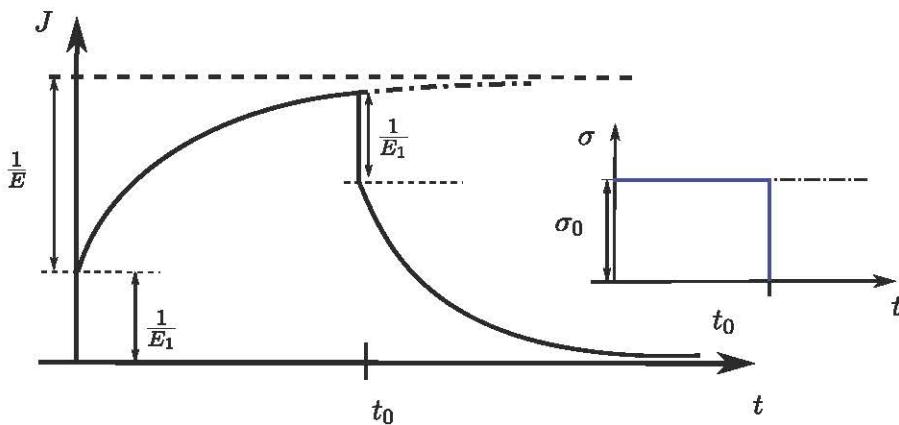


Abbildung 5.18: Kriechfunktion des verallgemeinerten KV-Körpers

bei $t = 0$ sprunghaft aufgebrachte Spannung wird unmittelbar von der Feder E_1 aufgenommen. Der weitere Verlauf bis $t = t_0$ wiederspiegelt das Kriechverhalten des KV-Körpers. Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Fließfunktion gegen die Summe $1/E + 1/E_1$, also die inverse Steifigkeit der Reihenschaltung.

Bei sprunghafter Entlastung zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird das Verhalten des Standardkörpers für $t > t_0$ durch die Superposition der Krichfunktionen $J(t)$ und $-J(t - t_0)$ beschrieben. Wir erhalten

$$J^+(t) = \frac{1}{E} \left(-e^{\frac{-t}{\tau}} + e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}} \right) = \frac{1}{E} \left(e^{\frac{t_0}{\tau}} - 1 \right) e^{\frac{-t}{\tau}}, \quad t > t_0.$$

Für $t = t_0$ ist

$$J(t_0) - J^+(t_0) = \frac{1}{E_1}.$$

Dieses Resultat ist physikalisch plausibel. In der Reihenschaltung aus dem Kelvin-Voigt Körper E, η mit dem Hooke-Element E_1 entspannt sich das Hooke-Element momentan, während im Kelvin-Voigt Körper eine Spannungsrelaxation eingeleitet wird.

Der erweiterter Maxwell-Körper

Die Differentialgleichung des in Abb. 5.17 (rechts) skizzierten Körpers lautet

$$\left(1 + \frac{E_1}{E}\right)\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (5.17)$$

Wird auf den Körper sprunghaft die Dehnung $\varepsilon_0 H(t)$ aufgebracht so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{E_1}{\eta}\varepsilon_0$$

mit der Anfangsbedingung $\sigma(0) = (E + E_1)\varepsilon_0$ (die Anfangsdehnung wird unmittelbar von den parallel geschalteten Federn aufgenommen). Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_P = C e^{-\frac{t}{\tau_R}} + E_1 \varepsilon_0$$

mit der Relaxationszeit

$$\tau_R = \frac{\eta}{E}.$$

Der freie Parameter C wird aus der Anfangsbedingung bestimmt. Wir erhalten schließlich die Lösung $\sigma = \varepsilon_0 R(t)$ mit der Relaxationsfunktion

$$R(t) = E_1 + E^{\frac{-t}{\tau_R}}. \quad (5.18)$$

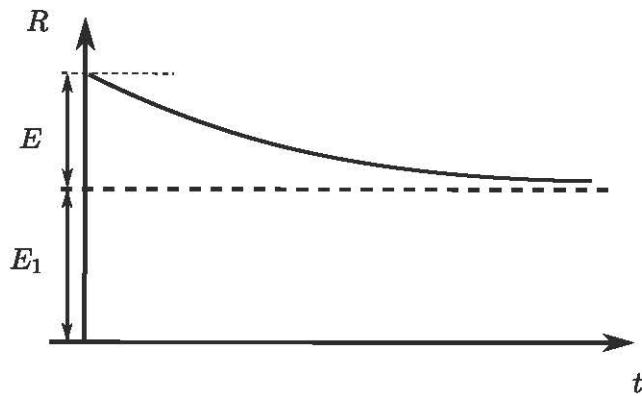


Abbildung 5.19: Relaxationsfunktion des verallgemeinerten Maxwell-Körpers

5.3.7 Der Burgers Körper

Die aus der Parallel oder Reihenschaltung von Maxwell- und Kelvin-Voigt Körpern erzeugten Vier-Element Kombinationen werden Burgers Körper genannt.

Für die in Abb. 5.20 gezeigte Reihenschaltung gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma &= E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{\dot{\sigma}}{E_2} + \frac{\sigma}{\eta_2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

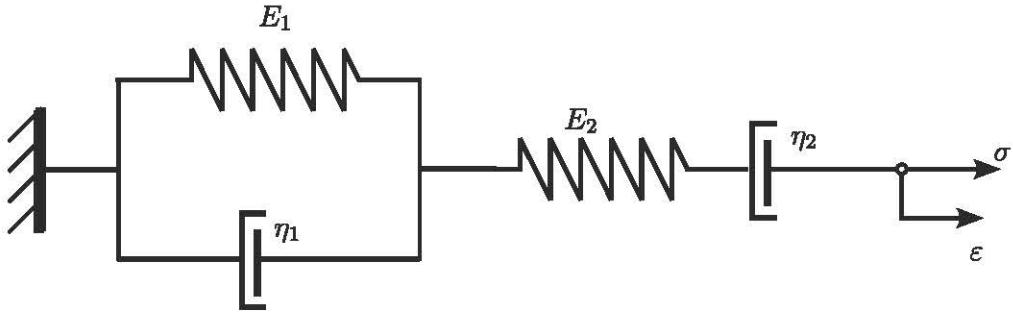


Abbildung 5.20: Burgers Körper

Damit sind drei Gleichungen für die vier Unbekannten $\sigma, \epsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ gegeben. Die “äußere Kraft” σ und der “äußere Weg” werden als externe Variable des Modells bezeichnet. Die Elimination der internen Variablen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ führt auf die Differentialgleichung

$$\sigma + \left[\eta_1 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) + \frac{\eta_2}{E_2} \right] \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1} \ddot{\epsilon} \quad (5.20)$$

Für den Kriechtest mit $\sigma = \sigma_0 H(t)$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_1} \ddot{\epsilon} + \eta_1 \dot{\epsilon} = \sigma_0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \epsilon(0) &= \frac{\sigma_0}{E_2} \\ \dot{\epsilon}(0) &= \sigma_0 \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) \end{aligned}$$

Mit der Lösung

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \underbrace{\left[\frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right]}_{J(t)} \quad \text{mit } \tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1}.$$

ist implizit die Kriechfunktion $J(t)$ definiert. Die Ableitung der Kriechfunktion

$$J'(t) = \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

gibt die Steigung der Asymptoten an. Die Funktion ist in Abb. 5.21 skizziert. Die sprunghaft aufgebrachte Spannung bewirkt bei $t = 0$ unmittelbar die Dehnung der Feder E_2 . Dieser Dehnung werden zwei Kriechprozesse aus dem Element η_2 und dem Kelvin-Voigt Körper überlagert. Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Kriechfunktion zur linearen Asymptote des viskosen Prozesses.

Wird bei $t = t_0$ sprunghaft entlastet, ergibt sich die Kriechfunktion für $t > t_0$ aus der Superposition von $J(t)$ und $-J(t-t_0)$ (vgl. Kelvin-Voigt-Körper). Wir erhalten

$$J^+(t) = \frac{t_0}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(e^{\frac{t_0}{\tau_1}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \quad t > t_0.$$

Die bis t_0 im viskosen Element η_2 aufgebaute Kriechdehnung wird auch nach Entlastung mangels Relaxationsmechanismus in der Reihenschaltung nicht mehr abgebaut.

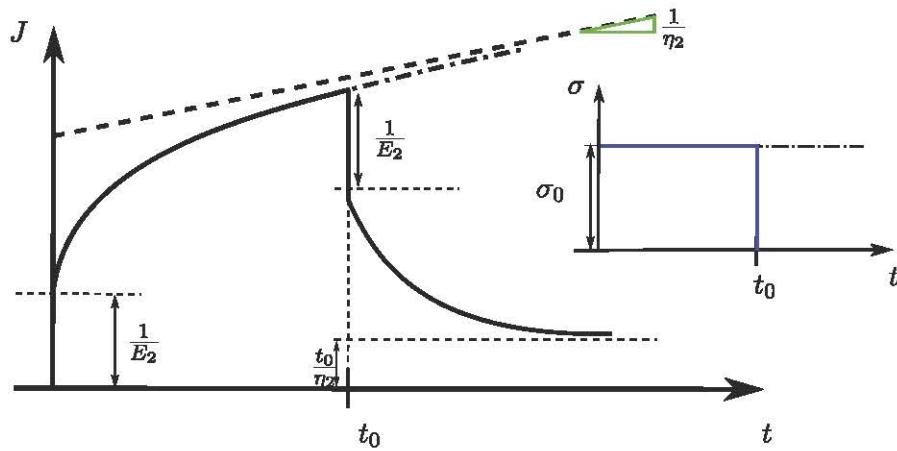


Abbildung 5.21: Kriechfunktion des Burgers Körpers

5.3.8 Verallgemeinerte Körper

Die bisher untersuchten Körper bestanden aus bis zu vier Elementen. Generell können beliebig viele Elemente zu rheologischen Materialmodellen kombiniert werden. So reagieren z.B. Materialien im Experiment mit mehreren Kriech- bzw. Relaxationszeiten τ . Als Beispiele für die n -Element-Modelle betrachten wir hier die verallgemeinerten KV- bzw. Maxwell-Körper.

Der verallgemeinerte Kelvin-Voigt Körper

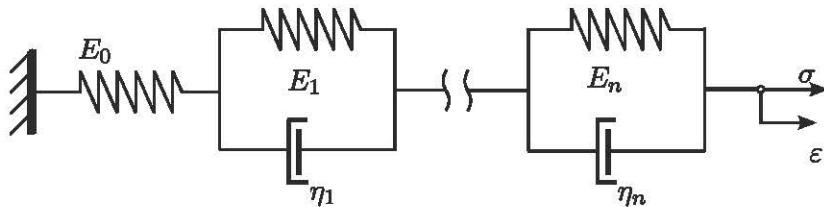


Abbildung 5.22: Verallgemeinerter Kelvin-Voigt-Körper

Für die in Abb. 5.22 gezeigte Reihenschaltung von KV-Körpern gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0 + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n \\ \sigma &= E_0 \epsilon_0 \\ \sigma &= E_j \epsilon_j + \eta_j \dot{\epsilon}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Wir schreiben das Gleichungssystem in der Form

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \quad (5.21)$$

$$\epsilon_j + \tau_j \dot{\epsilon}_j = \frac{\sigma}{E_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.22)$$

Die internen Variablen ε_j erfüllen jeweils jeweils eine Differentialgleichung mit individueller Kriechzeit τ_j . Die Kriechfunktion des Gesamtkörpers ergibt sich als Superposition der Kriechfunktionen für die Glieder der Reihenschaltung (Feder und n KV-Körper).

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right). \quad (5.23)$$

Der verallgemeinerte Maxwell-Körper

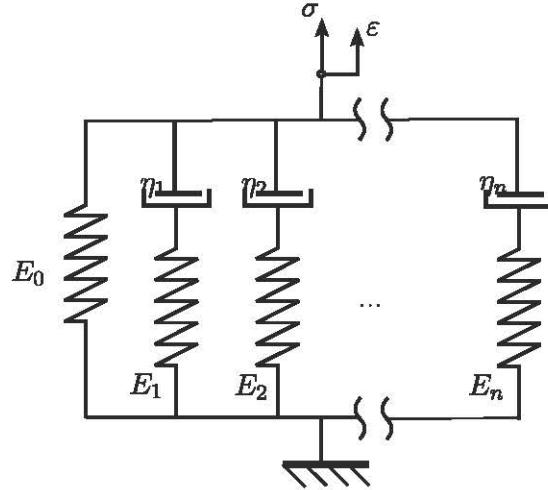


Abbildung 5.23: Verallgemeinerter Maxwell-Körper

Für das in Abb. 5.23 skizzierte Modell gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_n \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0}{E_0} \\ \dot{\varepsilon} &= E_j \varepsilon_j + \eta_j \dot{\varepsilon}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

mit den internen Variablen σ_j . Wir erhalten daraus das System von Differentialgleichungen

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \quad (5.24)$$

$$\sigma_j + \tau_j \dot{\sigma}_j = E_j \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.25)$$

Die Relaxationsfunktion des verallgemeinerten Maxwell-Körpers ist die Superposition

$$R(t) = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j e^{-\frac{t}{\tau_j}} \quad (5.26)$$

der einzelnen Relaxationsfunktionen.

5.4 Plastizität

Das plastische Fließen wird durch das St-Venant Element abgebildet. Durch die Kombination mit Hooke-Körpern können verschiedene Arten des elastisch-plastischen Materialverhaltens modelliert werden. So stellt der Prandtl Körper, als Reihenschaltung von Hooke und St-Venant Element, das elastisch-idealplastische Materialverhalten dar. Im elastisch-plastischen Standardkörper und seinen Erweiterungen wird auch die Verfestigung von Werkstoffen modelliert. In diesem Abschnitt wird nur die ratenunabhängige Plastizität (“rate-independent plasticity”) betrachtet.

5.4.1 Prandtl-Körper

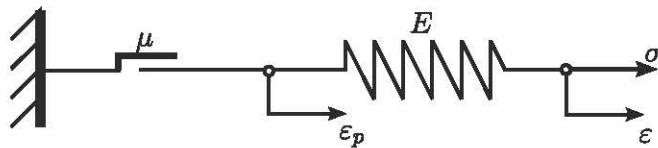


Abbildung 5.24: Prandtl-Körper

Die Reihenschaltung von elastischem und ideal-plastischem Element wird als Prandtl-Körper bezeichnet. Mit dem Körper wird elastisches-idealplastische Werkstoffverhalten modelliert. Nach dem Prinzip “Gleiche Kraft” wirkt in beiden Elementen der Reihenschaltung die gleiche Spannung. Vor Erreichen der Haftgrenze ist das St.-Venant-Element geblockt, das Hooke-Element wird nach dem linear-elastischen Gesetz mit der elastischen Dehnung $\varepsilon = \varepsilon_e$ gedehnt. Die dabei geleistete Arbeit $W = 1/2E\varepsilon^2$ wird als potentielle Energie in der Feder gespeichert. Im St.-Venant Element wirkt die Spannung als Haftkraft, die keine Arbeit verrichtet. Bei Erreichen der Haftgrenze löst sich das St.-Venant Element und beginnt zu gleiten. Der Körper wird zum verschieblichen Mechanismus, der sich bei konstanter Spannung $\sigma = \mu$ bewegt.⁵ Zu der bis dahin erreichten elastischen Dehnung $\varepsilon_e = \mu/E$ wird nun die plastische Dehnung ε_p addiert,

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p.$$

Die bei der Bewegung des St.-Venant Elements geleitete Arbeit der Reibkraft $W = \mu\varepsilon_p$ wird dissipiert. Sobald die äußere Kraft wieder unter den Wert μ fällt, wird das Reibelement geblockt. Die Feder kann sich bei weiterer Rücknahme der Spannung entlang der Materialtangente E entspannen. Im Druckbereich kann die Feder eine Last bis $\sigma = -\mu$ aufnehmen. An dieser Grenze löst sich der Kontakt und das St.-Venant Element wird “zurückgeschoben”, d.h. die plastische Dehnung wird wieder abgebaut. Die dabei geleistete Arbeit $W = \mu\varepsilon_p$ wird wiederum dissipiert. Bei zyklischer Belastung wird auf diese Weise eine Hysterese durchlaufen, deren Areal $2\mu\varepsilon_p$ gleich dem summarischen Betrag der während des Zyklus dissipierten Reibarbeit ist. Die Reihenschaltung von elastischer Feder und Reibelement steht für das elastisch-idealplastische Materialverhalten. Mit der Parallelschaltung kann der Effekt der plastischen Verfestigung illustriert werden.

Beispiel 5.5.

Die in Abb. 5.26 skizzierte Parallelschaltung kann auch nach Überschreiten der Fließspannung noch Kraft in der Feder aufnehmen. Die Federkonstante H wird als *plastischer Modul* bezeichnet. Die äußere Kraft σ ist die Summe aus der Federkraft $\sigma_H = H\varepsilon$ und der Reibkraft $\sigma_\mu \equiv \mu$. Dieses Verhalten ist in der Abb. 5.27 (links) skizziert.

⁵Da in der Reihenschaltung die Spannungen gleich sind, kann auch die Feder keine höhere Spannung aufnehmen.

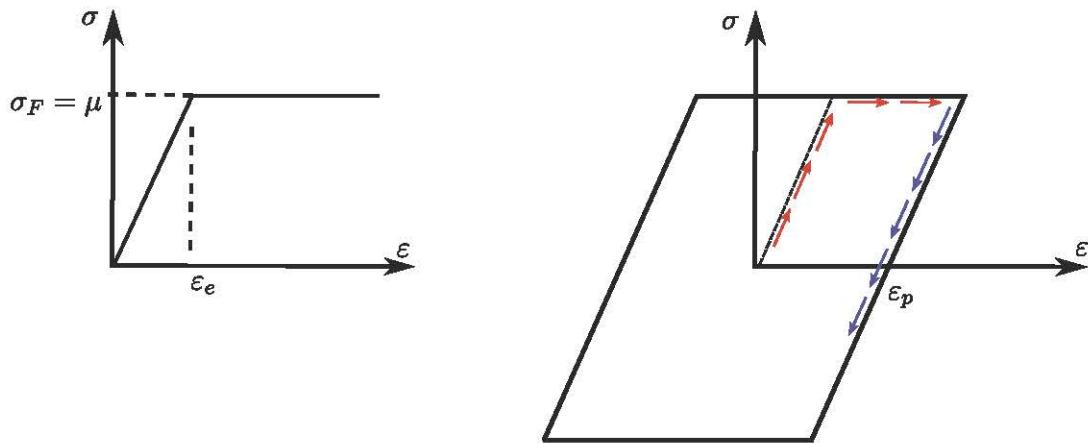


Abbildung 5.25: Verhalten des Prandtl-Körpers im Zugversuch (links) und im zyklischen Versuch (rechts)

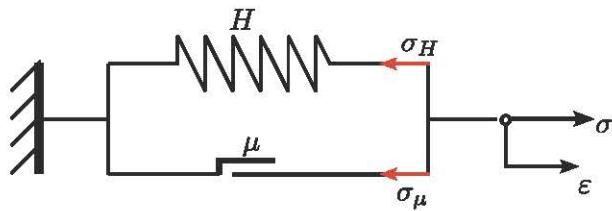


Abbildung 5.26: Parallelschaltung von Hooke- und St.-Venant Element

Bei zyklischer Beanspruchung bleibt das System bei Entlastung $\sigma < \mu$ solange mit der plastischen Dehnung ε_p stehen, bis im Druckbereich die Spannung $\mu - H\varepsilon_p$ erreicht ist. Durch Halten dieser Spannung wird dann die plastische Dehnung "zurückgedrückt", so daß sich die in der Abb. 5.27 (rechts) skizzierte Hysterese-Schleife ergibt.

5.4.2 Elastisch-plastischer Standardkörper

Die in der Abb. 5.28 skizzierter Anordnung wird als elastisch-plastischer Standardkörper bezeichnet. Die Federkonstante E heißt *elastischer Modul*, die Konstante H ist der *plastische Modul*. In

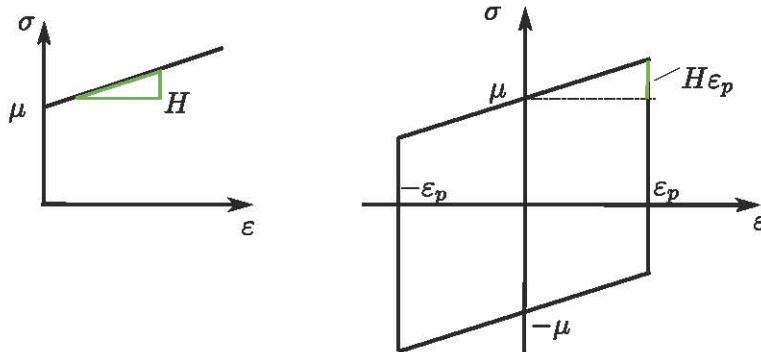


Abbildung 5.27: Materialverhalten im Zugversuch (links) und bei zyklischer Belastung (rechts)

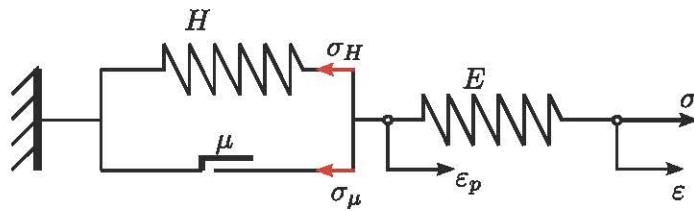


Abbildung 5.28: Elastisch-plastischer Standardkörper

dieser Konfiguration ist die Gesamtdehnung gleich der Summe

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (5.1)$$

der Dehnungen der Federn H und E . Die Feder H kann sich erst dehnen wenn die Spannung den Wert μ erreicht hat. Die Dehnung dieser Feder wird als *plastische Dehnung* ε_p bezeichnet. Die Dehnung ε_e der Feder E heißt *elastische Dehnung*

Die Gleichung drückt eine Grundannahme der Plastizitätstheorie für kleine Verformungen aus, wonach die Gesamtdehnung die Summe aus elastischer und plastischer Dehnung ist.

Per Definition ist die plastische Dehnung der Anteil der Gesamtdehnung, welcher nach kompletter Entlastung im Modell verbleibt. Wir wollen uns überzeugen, daß die Dehnung ε_p diese Definition erfüllt. In der Reihenschaltung gilt das Prinzip "gleiche Kraft". Zunächst wird nur das Hooke-Element E gedehnt, da die Parallelschaltung Erreichen der "Haftgrenze" $\sigma = \mu$ gesperrt ist. Nach Überschreiten dieser Grenze (Punkt ① in Abb. 5.29) wird die Feder H gedehnt, gleichzeitig steigt auch die Dehnung der Feder E weiter mit wachsendem σ an. Der Tangentenmodul E_T der Fließkurve ergibt sich dabei nach dem Gesetz der Reihenschaltung zweier Hooke-Elemente aus der Regel

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}. \quad (5.2)$$

In der Parallelschaltung gilt für $\sigma \geq \mu$ die Gleichung

$$\sigma = \sigma_\mu + \sigma_H = \mu + H\varepsilon_p;$$

die Spannung teilt sich additiv in die Reibkraft μ und die Federkraft $H\varepsilon_p$ auf.

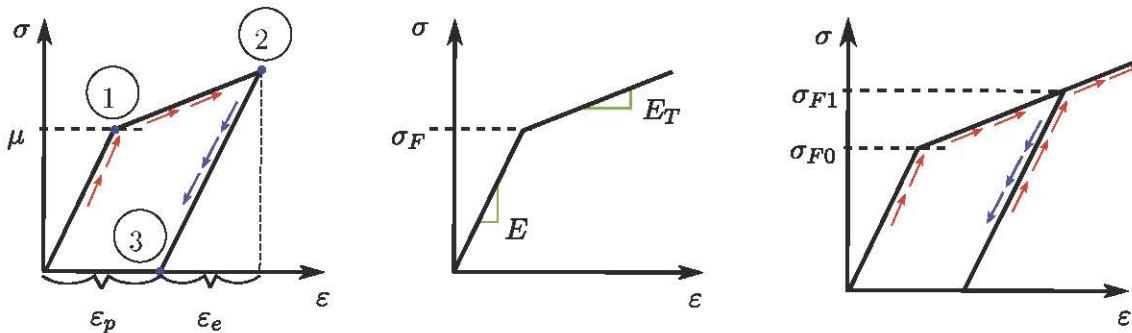


Abbildung 5.29: Materialkurve für Be- und Entlastung (links), Fließgrenze und Tangentenmodul (Mitte), Verfestigungseffekt (rechts)

Wird die äußere Spannung von einem Wert $\sigma > \mu$ zurückgefahrt (Punkt ① in Abb. 5.29), so sinkt die Spannung im Reibelement unter die Haftgrenze μ und das Prandtl-Element wird

gesperrt. Da die Dehnung nunmehr nur im Hooke-Element abgebaut wird, verläuft die Entlastung entlang des Tangentenmoduls E bis zur Entspannung der Feder E bei $\sigma = 0$. In Punkt ③ des Diagramms ist die Dehnung ϵ_e komplett abgebaut. Im Prandtl-Element ist die Dehnung ϵ_p verblieben. Dieser Anteil ist per Definition gleich der plastischen Dehnung des Standardkörpers. Durch die Parallelschaltung ist in der Feder zu diesem Zeitpunkt noch elastische Energie gespeichert. Diese wird erst im Druckbereich freigesetzt.

Die Spannung, für die jeweils im Zugbereich die Bewegung des Prandtl-Körpers einsetzt, heißt *Fließspannung* σ_F . Bei erstmaliger Belastung gilt $\sigma_F = \mu = \sigma_{F0}$. Bei Entlastung speichert die Feder des Prandtl-Körpers die Restspannung $H\epsilon_p$. Der Körper kann sich bei erneuter Laststeigerung erst wieder bewegen, wenn die äußere Spannung die Grenze $\sigma = \mu + H\epsilon_p$ überschritten hat. Die Fließspannung ist dementsprechend auf den Wert $\sigma_{F1} = \sigma_{F0} + H\epsilon_p > \sigma_{F0}$ gewachsen. Dieser Effekt wird als *Verfestigung* bezeichnet; s. Abb. 5.29(rechts).

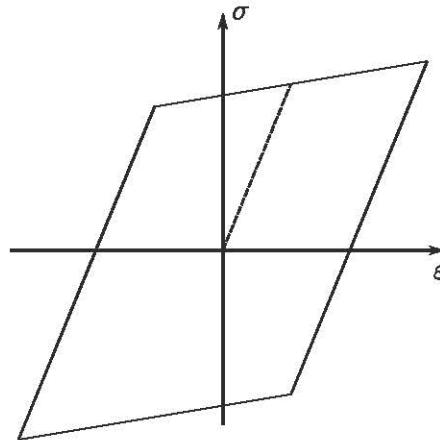


Abbildung 5.30: Materialkurve für zyklische Belastung des elastisch-plastischen Standardkörpers

Der gesamte Vorgang von Be- und Entlastung ist in der Abb. 5.30 skizziert. Bei der Lastumkehr löst sich das Reibelement im Druckbereich bereits bei einer Spannung $\mu - H\epsilon_p$, da die im plastischen Modul H gespeicherte *Rückspannung* (englisch: *back stress*) $\alpha = H\epsilon_p$ dem äußeren Druck zu überlagern ist. Unter der Voraussetzung, daß die Federsteifigkeiten H und E und die aufgebrachten Spannungen im Zug- und Druckbereich gleich sind, durchläuft der Körper eine geschlossene Kurve wie in Abb. 5.30 gezeigt.

Beispiel 5.6.

Der plastische Modul H kennzeichnet den linearen Zusammenhang zwischen der Spannung und der plastischen Dehnung ϵ_p ; s. Abb. 5.31 (links). Der Tangentenmodul kennzeichnet den Anstieg im Verfestigungsbereich des bilinearen $\sigma - \epsilon$ -Diagramms. Die Module sind in der Gleichung (5.2) verknüpft. Die Gleichung kann auch aus der rechten Skizze in Abb. 5.31 gewonnen werden.

Wir lesen ab

$$H\epsilon_p = \sigma_{F1} - \mu = E_T (\epsilon_p + \epsilon_{e1})$$

mit $\epsilon_{e1} = (\sigma_{F1} - \mu) / E$. Es folgt

$$E_T \epsilon_p = \sigma_{F1} - \mu - E_T \epsilon_{e1} = (\sigma_{F1} - \mu) \left(1 - \frac{E_T}{E} \right)$$

Einsetzen von $\sigma_{F1} - \mu = H\epsilon_p$ und Umstellen führt auf

$$E_T = \frac{EH}{E + H}.$$

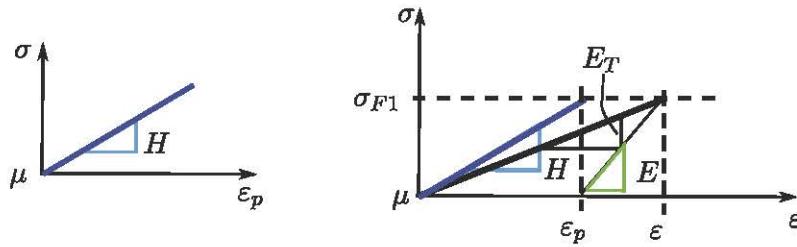


Abbildung 5.31: Tangentenmodul und plastischer Modul

5.4.3 Verallgemeinerter elastisch-plastischer Körper

Der in der Abb. 5.32 gezeigte Körper modelliert ein multilinäres Materialgesetz.

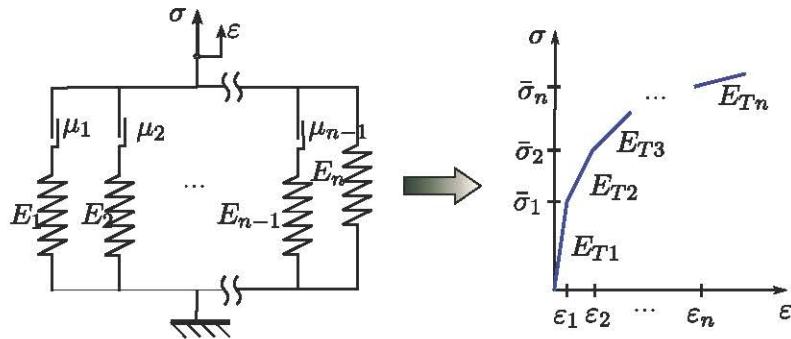


Abbildung 5.32: Verallgemeinerter elastisch-plastischer Körper

Die Tangentenmodule ergeben sich aus den Federsteifigkeiten gemäß

$$\begin{aligned} E_{T1} &= \sum_{j=1}^n E_j \\ E_{T2} &= \sum_{j=2}^n E_j \\ &\dots \\ E_{Tn} &= E_n \end{aligned} \quad (5.3)$$

Für die Spannungspunkte gilt

$$\bar{\sigma}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j + \frac{\mu_k}{E_k} \sum_{j=k}^n E_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Wir plausibilisieren die Formeln an einem Standardkörper aus drei Elementen.

Beispiel 7. Bilineares Material: Der in der Abb. 5.33 skizzierte Standardkörper aus drei Elementen ergibt eine bilineare Fließkurve.

In der Parallelschaltung wird nach dem Prinzip "gleicher Weg" die Kraft aufgeteilt, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. In der Reihenschaltung gilt im Bereich ① zunächst die Gleichung $\sigma_1 = E_1 \varepsilon$. Das Reibelement bleibt in Ruhe bis die Spannung im Zweig 1 die Haftgrenze erreicht, also $\sigma_1 = \mu_1$. Die Dehnung bei dieser Spannung ist

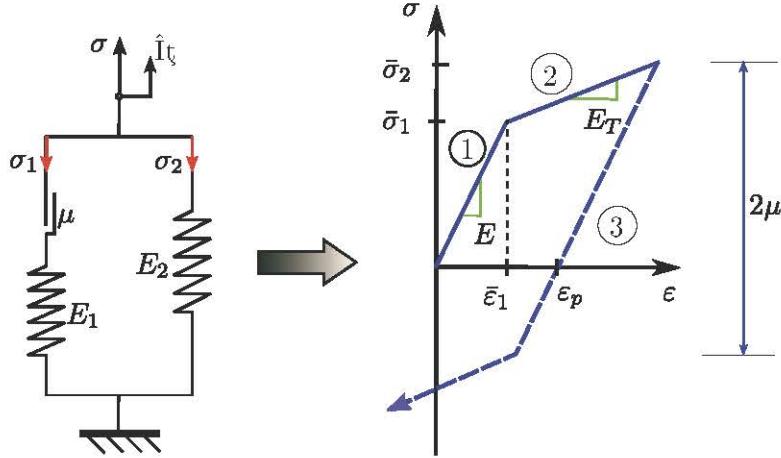


Abbildung 5.33: Elastisch-plastischer Standardkörper in Parallelschaltung

$\varepsilon = \mu_1/E_1$. Die Gesamtspannung beträgt

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \mu_1 + E_2 \varepsilon = \mu_1 + E_2 \frac{\mu_1}{E_1} = \frac{E_1 + E_2}{E_1} \mu_1.$$

Aus der Gl. 5.4 ergibt sich für $n = 2, k = 1$

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\mu_1}{E_1} (E_1 + E_2),$$

also derselbe Wert für die erste Fließspannung.

Für die Steifigkeiten reduzieren sich die allgemeinen Formeln (5.3) auf

$$E_T = \begin{cases} E_1 + E_2 & \text{in } \textcircled{1} \\ E_2 & \text{in } \textcircled{2} \end{cases}$$

In dem Abschnitt $\textcircled{1}$ addieren sich die elastischen Spannungen zur Gesamtspannung, also ist $\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon$ und folglich $E = E_1 + E_2$. Nach Überschreiten der Haftgrenze $\sigma = \mu_1$ kann nur noch der Zweig E_2 der Schaltung den Spannungszuwachs aufnehmen, also ist $E_T = E_2$ im Bereich $\textcircled{2}$. Dabei bleibt die Dehnung der Feder im Zweig E_1 auf dem Wert μ_1/E_1 , der Dehnungszuwachs ε wird durch das Gleiten des Reibelementes realisiert. Im zweiten Zweig wächst die Spannung proportional zur Dehnung,

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_1 + E_2 (\varepsilon - \bar{\varepsilon}_1).$$

Bei Rücknahme der Spannung im Abschnitt $\textcircled{3}$ verringert sich die Dehnung in beiden Zweigen der Parallelschaltung durch Entspannung der Federn $E_1 + E_2$. Nach Abbau der Zugdehnung μ_1/E_1 der Feder E_1 wirkt diese als Druckfeder, da das Reibelement sperrt bis im Druckbereich die Spannung $\sigma_1 = -\mu_1$ erreicht ist. Für die plastische Dehnung ε_p gilt $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 0$, also Gleichheit von Zug- und Druckspannung. Nach dem Lösen der Reibelemente bei $\sigma_1 = -\mu_1$ wirkt nur die Feder E_2 als Tangentensteifigkeit.

5.4.4 Fließbedingung

Die Abb. 5.34 zeigt die Fließspannung als Funktion der plastischen Dehnung bei linearer Verfestigung mit dem plastischen Modul H . Die Spannung kann in jedem Zustand der Be- oder Entlastung nur Werte zwischen $\mu + \alpha$ und $-\mu + \alpha$ annehmen. Es gilt die *Fließbedingung*

$$F(\sigma, \alpha, \mu) = |\sigma - \alpha| - \mu \leq 0 \quad (5.5)$$

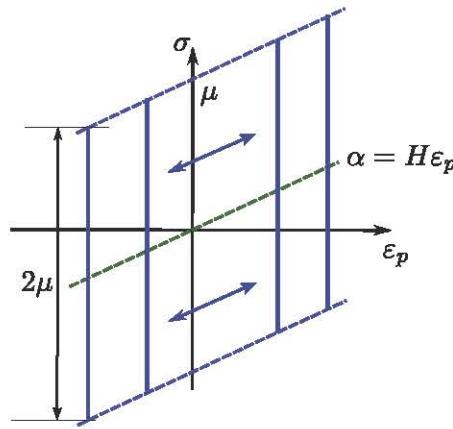


Abbildung 5.34: Spannung, Rückspannung und plastische Dehnung, Fließfläche

mit der Rückspannung $\alpha = H\epsilon_p$. Die Fließbedingung kennzeichnet sowohl den Bereich der zulässigen Spannungen als auch das Werkstoffverhalten bei Be- bzw. Entlastung. So gilt z.B. im Zugbereich:

$$\begin{aligned} F(\sigma) &< 0 \Rightarrow \text{elastisch für } \sigma \nearrow, \searrow \\ F(\sigma) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{plastisch für } \sigma \nearrow \\ \text{elastisch für } \sigma \searrow \end{cases} \end{aligned}$$

Der Bereich zulässiger Spannungen ist in der Abb. 5.34 mit vertikalen Strecken gekennzeichnet. Wir bezeichnen diese Strecken (im Vorgriff auf die dreidimensionalen Materialgleichungen) als *Fließkörper*. Die Grenzpunkte $\sigma = \alpha \pm \mu$ des Fließkörpers heißen *Fließfläche*. Der Mittelpunkt des Fließkörpers ist jeweils durch die Rückspannung $\alpha = H\epsilon_p$ gegeben. Bei Be- bzw. Entlastung wird der Körper im Spannungs-Dehnungsdiagramm verschoben. Der Radius des Körpers ist $\mu \equiv \text{const.}$

Für $\alpha = 0$ reduziert sich die Gleichung (5.5) auf die Fließbedingung $|\sigma| \leq \mu$ für ideal-plastisches Verhalten; vgl. Abb. 5.35.

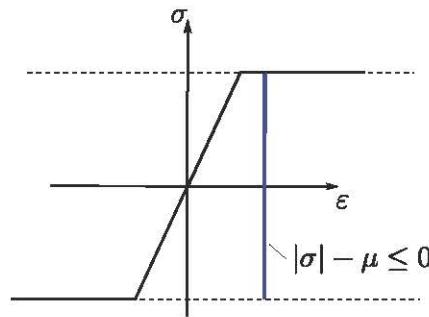


Abbildung 5.35: Fließbedingung für den Prandtl-Körper

5.4.5 Problematik der elastisch-plastischen Berechnung

Die Fließkurve des Standardkörpers ist bilinear. Für den Zugtest besteht über

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\epsilon} & \sigma \leq \mu \\ \frac{EH}{E+H}\dot{\epsilon} & \text{else} \end{cases} \quad (5.6)$$

ein eindeutiger analytischer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen. Diese Aussage kann offenbar auf jedes σ - ε -Diagramm mit monotonem Anstieg verallgemeinert werden. In einen iterativen Verfahren können wir über diese Funktion einem beliebigen Wert ε_k eindeutig einen Wert σ_k auf der Fließkurve zuordnen; s. Abb. 5.36 (links). Dies ist bei zyklischer Belastung nicht mehr möglich, da nun alle σ - ε Paare innerhalb des Fließkörpers zulässig sind. Das Problem ist in der Abb. 5.36 (Mitte) illustriert.

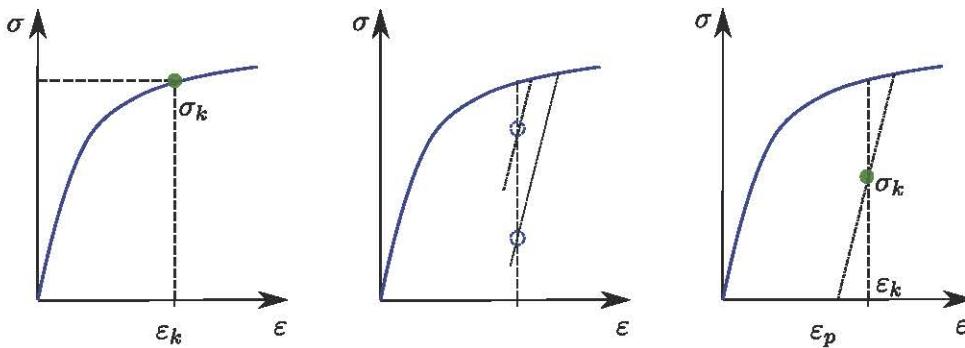


Abbildung 5.36: Problematik der elastisch-plastischen Berechnung

Die Spannung kann aber eindeutig ermittelt werden, wenn sowohl ε als auch ε_p bekannt sind (s. rechte Skizze in Abb. 5.36). Hierzu ist über den gesamten Belastungsverlauf die jeweils aktuelle plastische Dehnung

$$\varepsilon_p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_p dt \quad (5.7)$$

zu speichern.

Die Berechnungskette wird durch eine *Fließregel* geschlossen, mit der sich der Zuwachs der plastischen Dehnung $\dot{\varepsilon}_p$ berechnen lässt. Gemäß der Fließbedingung kann dieser Zuwachs nur dann eintreten wenn sich der Spannungszustand auf der Fließfläche befindet, d.h. die gesuchte Regel muß auch von der Fließbedingung abhängen. Der Zusammenhang zwischen Fließregel und Fließfläche wird zudem über Stabilitäts- und Konsistenzbedingungen hergestellt. Weitere Einzelheiten werden im Kapitel "Klassische Materialgleichungen" erläutert. Mit den zusätzlichen Regeln kann schließlich die Rate der plastischen Dehnung $\dot{\varepsilon}_p$ aus einem gegebenen Dehnungszuwachs $\dot{\varepsilon}$ berechnet werden.

Der Betrag $|\dot{\varepsilon}_p|$ der plastischen Dehnrate ist als Kriterium für den aktuellen Fließzustand geeignet. Das Material fließt genau dann wenn $|\dot{\varepsilon}_p| > 0$. Das Materialgesetz des Standardkörpers kann damit allgemein für zyklische Belastung formuliert werden als

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & F(\sigma) < 0, \quad |\dot{\varepsilon}_p| = 0 \\ \frac{EH}{E+H}\dot{\varepsilon} & F(\sigma) = 0, \quad |\dot{\varepsilon}_p| > 0 \end{cases} . \quad (5.8)$$

Im folgenden Beispiel leiten wir für den Standardkörper eine Formel für die Berechnung von ε_p aus ε her.

Beispiel 8. (Elastisch-Plastischer Standardkörper) Für das bilineare Materialverhalten gilt

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{E}{E+H}\dot{\varepsilon} \quad \text{wenn} \quad F(\sigma) = 0, \quad |\dot{\varepsilon}_p| > 0 .$$

Zum Nachweis betrachten wir die bilineare Fließlinie der Abb. 5.29 (links). Der Punkt 2 ist Schnittpunkt der Materialgeraden $\sigma = \mu + H\epsilon_p$ und $\sigma = E\epsilon_e = E(\epsilon - \epsilon_p)$. Daraus folgt

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\epsilon}_p = \left(\frac{H}{E} + 1 \right) \dot{\epsilon}_p.$$

Die gesuchte Regel zur Berechnung von ϵ_p aus ϵ lautet also in diesem Fall

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{E}{E + H} \dot{\epsilon}.$$

5.4.6 Radial Return Map

Sind in einem inkrementellen Verfahren der Lastpunkt ϵ_k, σ_k und die plastische Dehnung ϵ_p^k aus dem Schritt k bekannt, so kann bei Vorgabe des Dehnungssinkrements $\Delta\epsilon_{k+1}$ die Spannung σ_{k+1} in maximal zwei Schritten mit dem Algorithmus "Radial Return Map" bestimmt werden. Wir illustrieren den Algorithmus für das bilineare Materialmodell im Zugbereich.

Beispiel 5.7.

Gegeben sind die Materialparameter E, H, μ und daraus der Tangentenmodul E_T nach Gl. (5.2), außerdem die Fließbedingung $F(\sigma)$ und die Fließregel $\Delta\epsilon_p = \Delta\epsilon_p(\Delta\epsilon)$. Aus dem Lastinkrement k sind σ^k, ϵ^k und ϵ_p^k bekannt. Gesucht sind σ^{k+1} und ϵ_p^{k+1} für das $k + 1$ te Inkrement $\Delta\epsilon^{k+1}$.

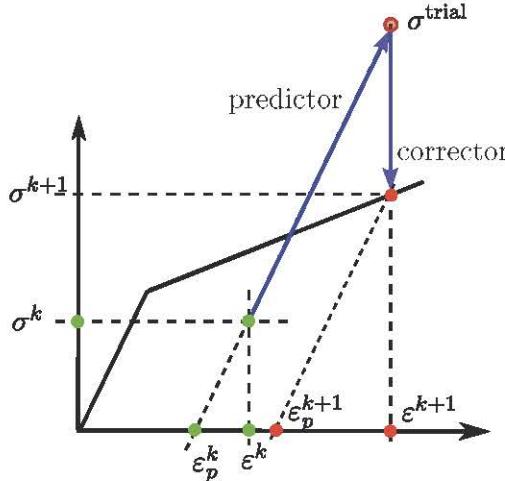


Abbildung 5.37: Radial return Map, Bilineares Material, Zugbereich, $\sigma^k < \bar{\sigma}$.

Zunächst wird die Fließbedingung $F(\sigma^k) \leq 0$ geprüft. Ist die Gleichung $F(\sigma^k) = 0$ erfüllt, so liegt (ϵ_k, σ^k) auf der Fließkurve und es gilt

$$\Delta\sigma^{k+1} = E_T \Delta\epsilon^{k+1}, \quad \Delta\epsilon_p^{k+1} = \frac{E}{E + H} \Delta\epsilon^{k+1}.$$

Die neue Fließspannung ist dann $\bar{\sigma} = \sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma^{k+1}$. Das Vorgehen für $F(\sigma^k) < 0$ ist in der Abb. 5.37 illustriert. Die grün markierten Werte sind aus dem Schritt k gegeben. Die Spannung σ^{k+1} wird zunächst mit dem elastischen Inkrement als der "Predictor" σ^{trial} berechnet. Für $\sigma^{trial} \leq \bar{\sigma}$ ist die Fließbedingung erfüllt, also keine Korrektur erforderlich. Ist die Fließbedingung verletzt, so wird zunächst aus $\Delta\epsilon$ mit der Fließregel das plastische Inkrement $\Delta\epsilon_p$ berechnet. Die Korrektur $\sigma^{k+1} = \sigma^{trial} - E\Delta\epsilon_p$ liefert den gesuchten neuen Spannungswert auf der Fließkurve.

Algorithm 5.1 Radial Return Map

START:

$$\bar{\sigma} = \mu$$

$$\bar{\varepsilon}_p = 0$$

STEP:

$$\varepsilon = \varepsilon + \Delta\varepsilon$$

$$\sigma^{\text{trial}} = E\varepsilon$$

if $\sigma^{\text{trial}} \geq \bar{\sigma}$ then

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{E}{E+H}\Delta\varepsilon$$

$$\bar{\sigma} = \sigma^{\text{trial}} - E\varepsilon_p$$

$$\hat{\varepsilon}_p = \hat{\varepsilon}_p + \Delta\varepsilon_p$$

else

$$\Delta\varepsilon_p = 0$$

$$\sigma = \sigma^{\text{trial}}$$

end if

5.4.7 Kinematische und isotrope Verfestigung

Die in der Abb. 5.34 skizzierte Entwicklung der Fließfläche

$$F(\sigma) = |\sigma - \alpha| - \mu = 0$$

wird als *kinematische Verfestigung* bezeichnet. Die Fließfläche hat den konstanten Durchmesser 2μ . Der Mittelpunkt α des Fließkörpers verschiebt sich im $\sigma - \varepsilon_p$ Diagramm entlang der Linie $\sigma = H\varepsilon_p$. Für $\alpha \neq 0$ gelten unterschiedliche Fließgrenzen im Zug- bzw. Druckbereich (*Bauschinger-Effekt*).

Bei der *isotropen Verfestigung* verbleibt der Mittelpunkt des Fließkörpers auch nach Anstieg der Fließspannung auf der Achse $\sigma = 0$. Die Fließgrenzen für Zug und Druck sind jeweils gleich. Bei Verfestigung vergrößert sich also der Fließkörper wie in Abb. 5.38 gezeigt. Im rheologischen Modell wird das Aufwölben des Fließkörpers durch eine variable Fließspannung $\sigma_F = \mu + K(\beta)$ mit der internen Variablen

$$\beta(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p(\bar{t})| d\bar{t} \quad (5.9)$$

eingeführt. Die Variable gibt den Gesamtbetrag der plastischen Dehnung über die "Belastungsgeschichte" an.

Die Fließfunktion für die gekoppelte kinematisch-isotrope Verfestigung lautet

$$F(\sigma, \alpha, \beta) = |\sigma - \alpha| - (\mu + K(\beta)).$$

Für die lineare isotrope Verfestigung ist [20] $K(\beta) = K\beta$ mit dem isotropen plastischen Modul K . Die Abb. 5.38 zeigt eine lineare isotrope und kinematische Verfestigung mit $H = K$. Tatsächlich ist $\sigma_{F1} = \mu + H\varepsilon_p$ und $\sigma_{F2} = \mu + 3H\varepsilon_p$. Die Variable β hat im Spannungspunkt $-\sigma_{F2}$ den Wert $\beta = 3\varepsilon_p$ usw.

$$\beta(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p(\bar{t})| d\bar{t} \quad (5.10)$$

eingeführt. Die Variable gibt den Gesamtbetrag der plastischen Dehnung über die "Belastungsgeschichte" an.

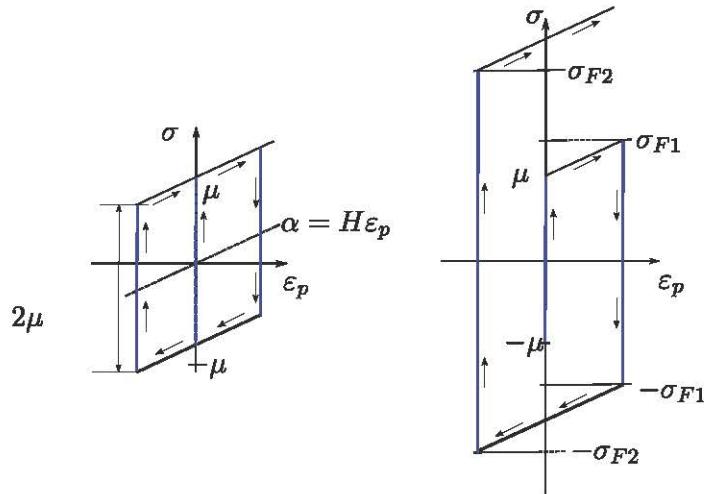


Abbildung 5.38: Standardkörper mit kinematischer und isotroper Verfestigung

Die Fließfunktion für die gekoppelte kinematisch-isotrope Verfestigung lautet

$$F(\sigma, \alpha, \beta) = |\sigma - \alpha| - (\mu + K(\beta)).$$

Für die lineare isotrope Verfestigung ist [20] $K(\beta) = K\beta$ mit dem isotropen plastischen Modul K . Die Abb. 5.38 zeigt eine lineare isotrope und kinematische Verfestigung mit $H = K$. Tatsächlich ist $\sigma_{F1} = \mu + H\epsilon_p$ und $\sigma_{F2} = \mu + 3H\epsilon_p$. Die Variable β hat im Spannungspunkt $-\sigma_{F2}$ den Wert $\beta = 3\epsilon_p$ usw.

Beispiel 5.8.

Wir berechnen die Tangentensteifigkeit für die in Abb. 5.39 gezeigten elastisch-plastischen Standardkörper mit linearer kinematischer bzw. isotroper Verfestigung.

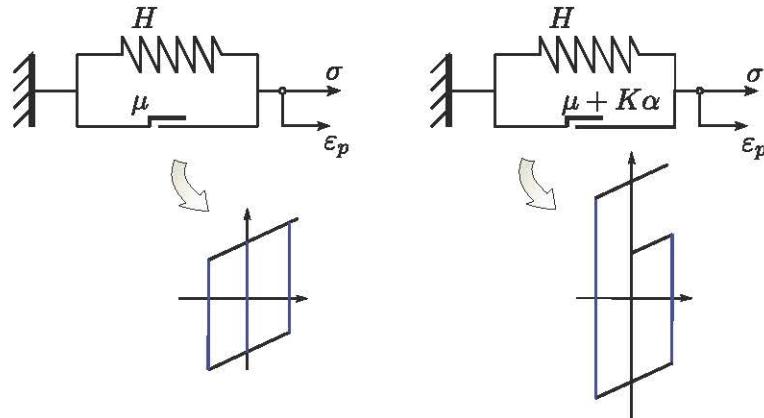


Abbildung 5.39: Standardkörper mit kinematischer und isotroper Verfestigung

Innerhalb des Fließkörpers verhält sich die Spannung elastisch mit $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$. Auf der Fließfläche gelten die Gleichungen $\dot{\sigma} = \dot{\epsilon}_e = E\dot{\epsilon} - E\dot{\epsilon}_p$ und

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_H + \dot{\sigma}_K = H\dot{\epsilon}_p + K\dot{\beta} = H\dot{\epsilon}_p + K|\dot{\epsilon}_p|$$

Mit der Annahme $\dot{\epsilon}_p > 0$ erhalten wir durch Einsetzen von $\dot{\epsilon}_P = \dot{\sigma}/(H + K)$ in die obere Gleichung das

Ergebnis

$$\dot{\sigma} \left(1 + \frac{E}{H+K} \right) = E\dot{\varepsilon} \implies \dot{\sigma} = \frac{E(H+K)}{E+H+K} \dot{\varepsilon}.$$

Die Tangentensteifigkeit ist somit

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} = \begin{cases} E & |\sigma| < \mu + K\beta \\ \frac{E(H+K)}{E+H+K} & |\sigma| = \mu + K\beta \end{cases}$$

5.4.8 Energie- und Leistungsbilanz

In den Federn E und H des Standardkörpers nach Abb. 5.28 wird die potentielle Energie

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = U_E + U_H = \frac{1}{2}E\varepsilon_e^2 + \frac{1}{2}H\varepsilon_p^2$$

gespeichert.⁶ Am Gleitelement μ wird die Arbeit $\mathbf{W}_{\text{diss}} = -\mu\varepsilon_p$ verrichtet. Die dissipierte Leistung ist $\mathcal{P}_{\text{diss}} = -\mu\dot{\varepsilon}_p$. Für die Erfüllung der mechanischen Leistungsbilanz muss zu jedem Zeitpunkt die mechanische Leistung

$$\mathcal{P}_a = \sigma\dot{\varepsilon}$$

der äußeren Kraft σ gleich der Leistung der inneren Kräfte sein. Diese Leistung ist

$$\mathcal{P}_i = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{pot}} - \mathcal{P}_{\text{diss}} = \underbrace{E\varepsilon_e\dot{\varepsilon}_e}_{\sigma} + \underbrace{H\varepsilon_p\dot{\varepsilon}_p}_{\sigma-\mu} + \mu\dot{\varepsilon}_p = \sigma(\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p) = \mathcal{P}_a.$$

5.5 Viskoplastizität

In viskoplastischen Materialien hängt die plastischen Dehnung nicht nur von der Größe der Last, sondern auch von der Geschwindigkeit der Lastaufbringung ab. Man spricht daher auch von ratenabhängiger Plastizität (“rate-dependent plasticity”). Zur rheologischen Modellierung werden viskose und plastische Elemente kombiniert. Zu den Grundmodellen gehören der

- Bingham-Körper: für viskoplastisches Verhalten;
- Norton-Bingham Körper: für elastisch-viskoplastisches Verhalten und
- Armstrong-Frederick Körper: für elastisch-viskoplastisch-verfestigendes Verhalten.

5.5.1 Bingham-Körper

Im Bingham Körper sind ein Newton-Element und ein St.-Venant-Element parallel geschaltet. Die Spannung wird in einen viskosen und einen Reibanteil zerlegt, $\sigma = \sigma_\mu + \sigma_\eta$. Der Körper beginnt sich zu bewegen wenn die äußere Spannung die Haftgrenze erreicht. Die Dehnung ε ist irreversibel. Der Reibanteil σ_μ bleibt während der Bewegung konstant auf dem Wert μ . Das Kriechelement η kann noch äußere Spannung aufnehmen. Der Spannungsanteil σ_η heißt *Überspannung*. Er ist proportional zur Dehnrate,

$$\sigma_\eta = \eta\dot{\varepsilon} \quad \text{für } \sigma > \mu.$$

⁶Für die gekoppelte kinematische und isotrope Verfestigung ist noch die Energie U_K zu addieren.

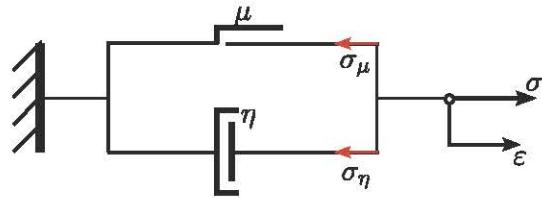


Abbildung 5.40: Bingham Körper

Die Dehnung entwickelt sich zeitlich linear

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \mu}{\eta} t.$$

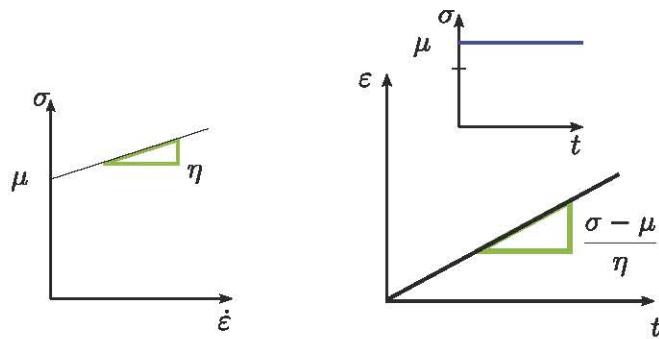


Abbildung 5.41: Spannung und Dehnrate (links), Entwicklung der Dehnung bei konstanter Spannung (rechts).

Mit dem Bingham-Körper wird viskoplastisches Materialverhalten als Superposition von (viskosem) Kriechen und (plastischem) Gleiten modelliert. Die äußere Spannung kann auch Werte außerhalb der Fließfläche des Körpers annehmen wie in Abb. 5.42 gezeigt.

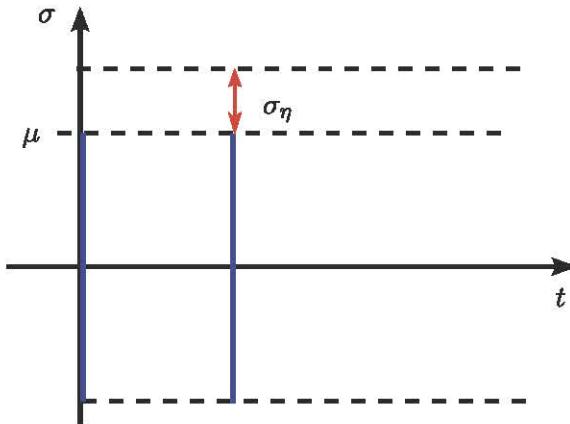


Abbildung 5.42: Fließfläche und Überspannung im Bingham-Körper

Zwischen viskoplastischer Dehnung, Fließspannung und äußerer Spannung gilt der Zusammenhang

$$\eta \dot{\varepsilon} = \langle \sigma - \mu \rangle$$

mit der Rampenfunktion $\langle f \rangle = (|f| + f)/2$. Diese Gleichung kann auch in der Form

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\langle F(\sigma) \rangle}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

mit der Fließfunktion

$$F(\sigma, \mu, t) = |\sigma(t)| - \mu$$

geschrieben werden.

5.5.2 Norton-Bingham-Körper

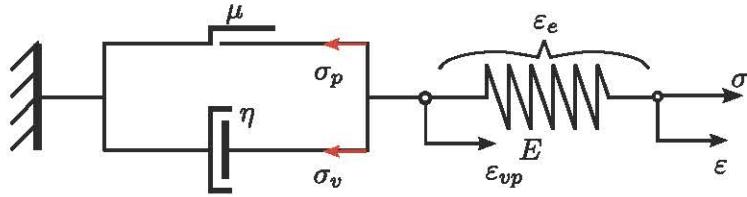


Abbildung 5.43: Norton-Bingham Körper.

Die in Abb. 5.43 gezeigte Reihenschaltung eines Bingham-Körpers mit einem Hooke-Element modelliert elastisch-viskoplastisches Materialverhalten. Die Gesamtdehnung des Körpers ist gleich der Summe aus elastischer und viskoplastischer Dehnung,

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp}.$$

Der viskoplastische Anteil der Dehnung entwickelt sich im Bingham-Körper gemäß

$$\eta \dot{\varepsilon}_{vp} = \langle \sigma - \mu \rangle.$$

Die Spannung teilt sich dort in einen viskosen und einen plastischen Anteil

$$\sigma = \mu + \eta \dot{\varepsilon}_{vp}, \quad \sigma > \mu.$$

Der viskose Anteil σ_η heißt Überspannung. Die Überspannung ist proportional zur Dehnrate. Sie wird durch viskoses Kriechen des Materials aufgebaut. Der Werkstoff verfestigt sich dabei nicht, da die Fließspannung auf dem Wert μ verbleibt. Die äußeren Variablen des Körpers sind über die Differentialgleichung

$$E \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \langle \sigma - \mu \rangle$$

mit der Retardationszeit

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

verknüpft. Für die Anwendung in Materialmodellen ist insbesondere das Relaxationsverhalten des Körpers von Interesse. In Werkstoff-Versuchen wird oft ein teilweiser Abbau der Spannungen beobachtet, wenn im Zugversuch die Dehnung über einen längeren Zeitraum konstant gehalten wird.

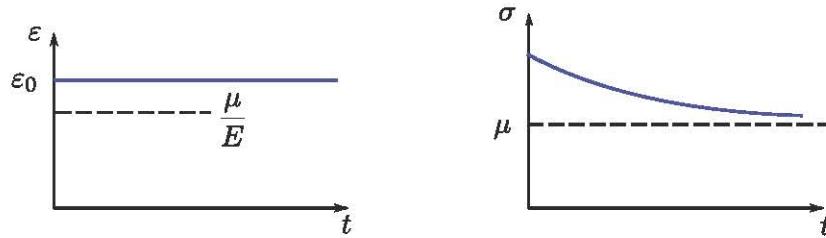


Abbildung 5.44: Verhalten des Norton-Bingham-Körpers im Relaxationsversuch

Beispiel 5.9.

Auf den Körper wird sprunghaft die Dehnung $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ aufgebracht. Der Betrag der Dehnung sei so gewählt daß die elastische Spannung $E\varepsilon_0 > \mu$ oberhalb der Haftgrenze liegt. Bei $t = 0$ gilt nach dem Prinzip "gleiche Spannung"

$$\sigma = E\varepsilon_e = \mu + \alpha$$

mit $\varepsilon = \varepsilon_e$. Für $t > 0$ bauen sich die Spannung und Dehnung in der Feder E durch das viskose Kriechen des Bingham-Elements ab. Im Endzustand $t \rightarrow \infty$ ist die Dehnung komplett auf das Bingham-Element übergegangen, also $\varepsilon e = \varepsilon_{vp}$. Die Relaxation verläuft analog zum Maxwell-Körper mit dem Unterschied, daß die ursprüngliche Fließspannung μ im Körper verbleibt; s. Abb. 5.44

5.5.3 Armstrong-Frederick-Körper

Der Norton-Bingham Körper kann nach Überschreiten der Fließgrenze weitere Spannung aufnehmen. Allerdings ist damit keine Verfestigung verknüpft, da diese Überspannung in der Feder E durch Relaxation wieder abgebaut wird. Wird der Körper entlastet und erneut belastet, so beginnt er wieder bei der ursprünglichen Fließspannung μ zu fließen. Zur Abbildung der viskoplastischen Verfestigung wird der elastisch-plastische Standardkörper mit einem viskosen Element η erweitert wie in Abb. 5.45 gezeigt.

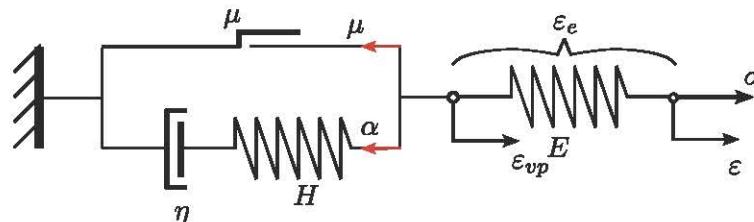


Abbildung 5.45: Armstrong-Frederick-Körper

Die Spannung σ und die Rückspannung $\alpha = \sigma - \mu$ hängen von der viskoplastischen Dehnrate $\dot{\varepsilon}_{vp}$ ab. Die Rückspannung ist gleich der aus dem Bingham-Körper bekannten Überspannung $\alpha = \sigma_\eta$. Die Arbeit der Rückspannung mit der Dehnung ε_H der Feder H wird als elastische Dehnungsenergie gespeichert. Wird die Dehnung ε_{vp} konstant gehalten, so kriecht die Feder zurück und die Rückspannung baut sich durch Relaxation exponentiell ab. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist dieser Effekt durch "Einbrüche" der Spannung sichtbar wie in der Abb. 5.46 skizziert. Dieser Effekt wird bei Materialversuchen beobachtet; vgl. z.B. Haupt [9].

Da die Rückspannung $\alpha(t)$ den Mittelpunkt des Fließkörpers

$$F(\sigma, \alpha, \mu, t) = |\sigma(t) - \alpha(t)| - \mu = 0$$

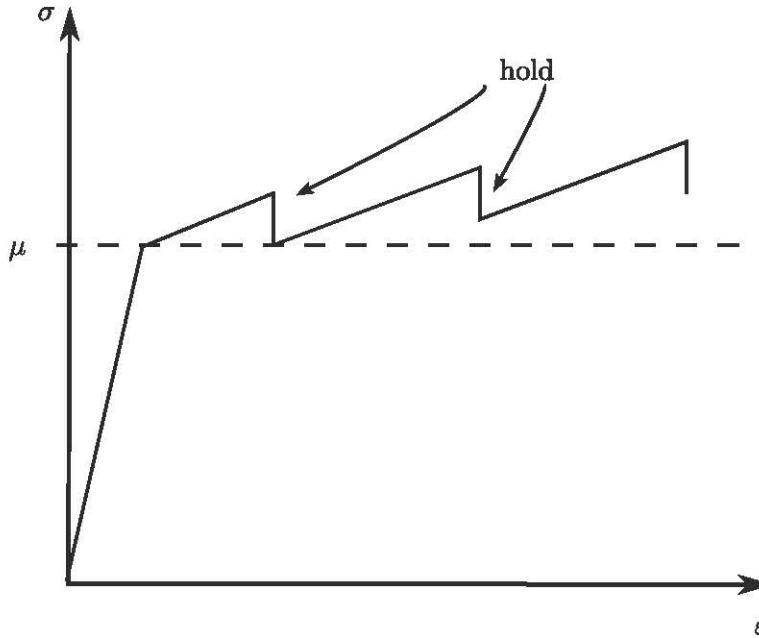


Abbildung 5.46: Spannungs-Dehnungsdiagramm mit Relaxation der Rückspannung

kennzeichnet, bewegt sich der Fließkörper bei Relaxation zurück zum ursprünglichen Mittelpunkt $\alpha = 0$. Für die viskoplastische Dehnung gilt

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\epsilon}_H + \dot{\epsilon}_\eta = \frac{\dot{\alpha}}{H} + \frac{\alpha}{\eta}$$

bzw. [6]

$$H\dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\alpha} + \frac{1}{\tau}\alpha$$

mit der Relaxationszeit

$$\tau = \frac{\eta}{H}.$$

5.6 Approximation der Fließkurven

Mit den rheologischen Modellen wird das Materialverhalten phenomenologisch, also qualitativ analysiert. Fließkurven aus Materialversuchen können auch rein quantitativ mit geeigneten Funktionen approximiert werden. Das linear-elastische Materialverhalten wird durch Geraden mit dem Tangentenmodul E dargestellt. Für die plastischen bzw. viskoplastischen Anteile der Fließkurven haben sich exponentielle Ansätze bewährt.

5.6.1 Plastische Verfestigung

Für die Approximation der Fließkurve duktiler Materialien im Verfestigungsbereich hat sich die *Ramberg-Osgood*-Approximation

$$\sigma = \sigma_F + K_F \epsilon_p^{1/M_F} \quad (5.1)$$

bewährt. Darin bezeichnet μ die Fließgrenze des “jungfräulichen” Materials. Die Parameter K_Y und M_Y sind für viele Werkstoffe tabelliert (z.B. in [14, Ch.5.1]). Für ϵ_P und σ sollten die

wahren Dehnungen bzw. wahren Spannungen verwendet werden [14, p.168]. Durch Invertierung des Ansatzes erhalten wir

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma - \mu}{K_y} \right\rangle^{M_y} \quad (5.2)$$

Die Abb. 5.47 zeigt die Approximation einer Fließkurve des austenitischen Chrom-Nickel Stahls AISI 316L. Die analytische Kurve stimmt gut mit den Ergebnissen aus Werkstoffversuchen überein; vgl. Lemaitre und Chaboche [14, Fig 5.3]. In [14, Table 5.1] sind Zahlenwerte für die App-

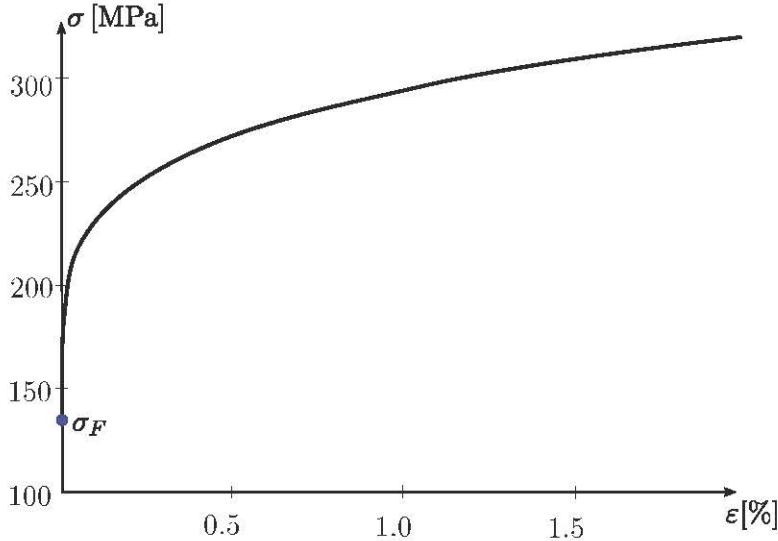


Abbildung 5.47: Approximation der Fließkurve des Stahls AISI 316L nach Ramberg-Osgood mit $\sigma_F = 138 \text{ MPa}$, $K_y = 435 \text{ MPa}$ und $M_y = 4.55$; gezeichnet nach Lemaitre und Chaboche [14, Fig.5.3].

ximationsparameter K_F, M_F angegeben.

5.6.2 Viskoplastisches Kriechen

In viskoplastischen Werkstoffen sind die viskosen Effekte Retardation (Kriechen) bzw. Relaxation mit dauerhafter Verformung verknüpft. Das Materialverhalten ist zeit- und ratenabhängig. Diese Effekte sind typisch für Kunststoffe oder Metalle bei hohen Temperaturen. Die Abb. 5.48 (nach Naumenko [16]) zeigt die Entwicklung der Dehnung $\varepsilon(t)$ an einer metallischen Zugprobe bei einer Temperatur zwischen 30% und 50% der Schmelztemperatur. Bei konstanter Zugkraft dehnt sich die Probe kriechend bis zum Werkstoffversagen. In der Kurve sind drei Kriechphasen zu unterscheiden:

- ① Primäres Kriechen: die Dehnrate ist zu Beginn sehr hoch, fällt dann aber aufgrund der plastischen Verfestigung schnell ab und stabilisiert sich auf einem konstanten Wert.
- ② Sekundäres Kriechen: Das Material kriecht mit nahezu konstanter Dehnrate.
- ③ Tertiäres Kriechen: In dieser Phase beginnt die Einschnürung der Probe und es kommt zur zunehmenden Schädigung des Materials bis zum Versagen.

In der primären Kriechphase kann die viskoplastische Dehnung nach der Formel von Andrade

$$\varepsilon(t) = A(\sigma, T)t^{\frac{1}{q}} \quad (5.3)$$

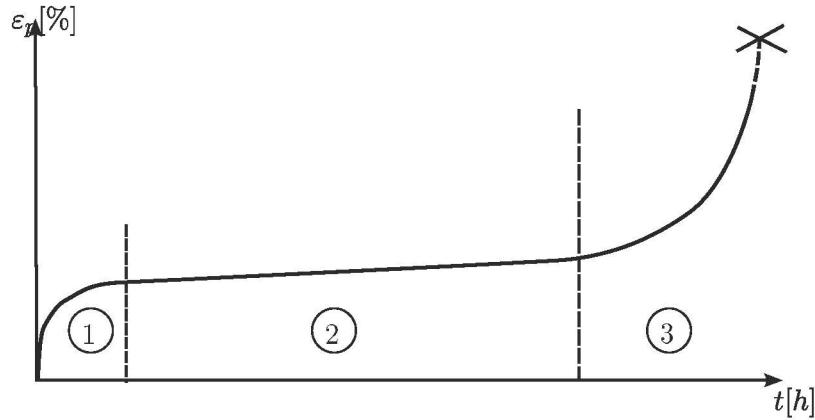


Abbildung 5.48: Kriechen einer Aluminiumlegierung unter konstanter Zuglast bei hoher Temperatur; nach Naumenko [16, Fig. 6.3].

approximiert werden. Der Exponent q wird von Andrade mit $q = 3$ angegeben.

Beispiel 5.10.

Andrade [2] berichtet über Zugversuche an Kupferdrähten bei unterschiedlichen Temperaturen. Nach der Auswertung der Messungen schlägt er die Formel $l = l_0 (1 + \beta^{1/3})$ vor. Zu Beginn der Arbeit weist er ausdrücklich auf die Lastabhängigkeit bzw. auf den Unterschied zwischen Last- und Spannungsabhängigkeit hin. Da sich die Drähte beim Versuch stark verjüngen, wurde in den Versuchen nicht die Last bzw. die Nominalspannung, sondern die wahre Spannung konstant gehalten. Hierzu verwendete Andrade ein in Wasser getauchtes Gewicht. Die Form des Gewichts wird so berechnet, dass die Last durch die Auftriebskraft genau proportional zur Verjüngung des Querschnitts verringert wird; s. Abb. 5.49 (links). In diesem Versuchsaufbau konnte bei konstanter Spannung primäres und sekundäres Kriechen beobachtet

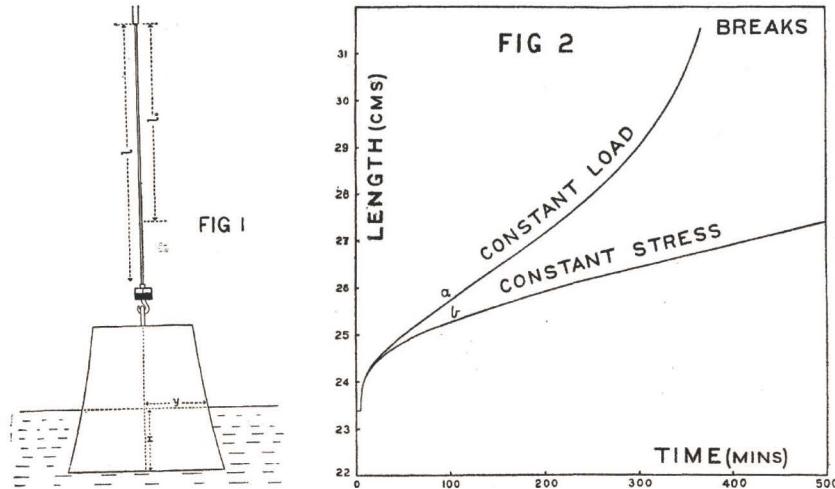


Abbildung 5.49: Versuchsaufbau (links) und Kriechkurven (rechts) von Andrade [2].

werden. "It was thus established that *under constant stress* (Hervorhebung im Original) the rate per unit length, once the initial effect has died out, is constant right up to breaking." Bei konstanter Last ist die sekundäre Phase nicht ausgeprägt wie in Abb. 5.49 (rechts) gezeigt.

Der werkstoffspezifische Parameter A ist temperatur- und lastabhängig. Lemaitre und Chaboche geben in [14, Fig.6.3] die Kurven $\varepsilon(t)$ für eine Aluminiumlegierung bei fünf Spannungen zwischen 137 und 239 MPa an.

In der sekundären Phase ist die viskoplastische Dehnung proportional zur wahren Spannung,

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}_{vp} .$$

Die Proportionalitätskonstante ist ebenfalls material-, spannungs- und temperaturabhängig. Nach dem Gesetz von Norton [14, p.257] gilt

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^N \quad (5.4)$$

Lemaitre und Chaboche geben in [14, Table 6.1.] Werte für die Parameter N und λ an. Aus Nortons Gesetz ergibt sich die Viskositätskonstante

$$\eta(\sigma) = \lambda \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)^{N-1} .$$

Naumenko [16, p.48] gibt Nortons Gesetz von 1929 in der Form $\dot{\varepsilon} = a\sigma^N$ zusammen mit weiteren klassischen Approximationen des Kriechverhaltens an:

$$\dot{\varepsilon} = a\sigma^N \quad \text{Norton, 1928; Bailey, 1929,}$$

$$\dot{\varepsilon} = a \sinh \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \text{Prandtl, 1928; Nadai, 1938,}$$

$$\dot{\varepsilon} = b \left(\exp \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \quad \text{Soderberg, 1936}$$

$$\dot{\varepsilon} = a_1 \sigma^{n_1} + a_2 \sigma^{n_2} \quad \text{Johnson u.a., 1963,}$$

$$\dot{\varepsilon} = a \left(\sinh \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \text{Garofalo, 1965.}$$

Die darin enthaltenen Parameter a, b, \dots sind materialabhängig.

5.6.3 Viskoplastische Verfestigung

Das Verhalten von Werkstoffen in der viskoplastischen Verfestigung kann durch Gesetze der Form

$$\sigma = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$$

beschrieben werden. Nach Lemaitre und Chaboche [14, p.264] ist die Formel (vgl. Nortons Gesetz)

$$\sigma = K \varepsilon^{1/M} \dot{\varepsilon}^{1/M} \quad (5.5)$$

geeignet. Werte für die Materialparameter K, M, N sind in [14, Tab.6.2] gegeben.

Beispiel 5.11.

Durch Integration der Formel (5.5) erhält man die Approximation für primäres Kriechen nach Andrade. Wir dividieren durch K und potenzieren auf beiden Seiten:

$$\left(\frac{\sigma}{K} \right)^N dt = \varepsilon^{\frac{N}{M}} d\varepsilon .$$

Die Integration dieser Gleichung zusammen mit der Anfangsbedingung $\varepsilon(0) = \mathbf{0}$ ergibt

$$\varepsilon(t) = A(\sigma)t^{\frac{1}{q}}$$

mit

$$A = \left[\frac{N+M}{N} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N \right]^{\frac{M}{N+M}}, \quad q = \frac{M}{N+M}.$$

Setzen wir in diese Formel die in [14, Tab.6.2] tabellierten Werte für M und N ein, so erhalten wir für q plausible Werte im Bereich $1.5 \leq q \leq 4$.

Kapitel 6

Klassische Materialgleichungen

In praktischen Anwendungen der Kontinuumsmechanik sind die Spannungen und Verformungen von Festkörpern unter äußerer Belastung gesucht. Die Spannungen sind über das räumliche Gleichgewicht mit den äußeren Lasten verknüpft. Allerdings ist das System $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ dreifach unterbestimmt, da es nur drei Gleichungen für sechs Komponenten des Cauchy Tensors enthält. Die direkte Lösung dieses Systems ist nur für einfache Spezialfälle wie z.B. den einachsigen Spannungszustand möglich. Die Verformungen können nicht direkt aus den äußeren Lasten berechnet werden, da die Verzerrungsmaße nur kinematisch, also ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte, beschrieben werden.

Für die Komplettierung und die praktische Anwendung der Theorie sind also weitere Gleichungen erforderlich, die den Zusammenhang zwischen den kinetischen Tensoren (Spannungstensoren) und den kinematischen Tensoren (Dehnungstensoren) herstellen. Solche Gleichungen heißen konstitutive Gleichungen, da sie die Berechnungskette zwischen den äußeren Lasten und Verschiebungen komplettieren, also ein geschlossenes analytisches Modell konstituieren. Die konstitutiven Gleichungen beschreiben das Werkstoffverhalten, während die kinetischen und die kinematischen Gleichungen unabhängig vom Material des Körpers sind. Sie werden daher auch als Materialgleichungen bezeichnet.

In diesem Kapitel werden die klassischen Materialgleichungen für kleine Verformungen behandelt. Damit entfällt die Unterscheidung zwischen verformter und unverformter Konfiguration. Wir bezeichnen die Ortsvektoren mit \mathbf{x} . Die Verzerrungen hängen linear von den Verschiebungen ab. Die Verformung wird mit den technischen Dehnungen $\underline{\underline{\epsilon}}$ gemessen, die inneren Schnittkräfte werden durch den Cauchy Tensor $\underline{\underline{\sigma}}$ dargestellt. Wir gehen hier nur auf die analytische Beschreibung des Materialverhaltens ein. Für phänomenologische Erklärungen wird das Buch von Rösler u.a. [18] empfohlen.

6.1 Effektivgrößen der Gestaltänderung

Effektivgrößen sind eindimensionale Spannungs- bzw. Dehnungsmaße, die effektiv (d.h. mechanisch äquivalent) den dreidimensionalen Zustand beschreiben.

6.1.1 Verzerrungstensor und Volumendehnung

Bei Annahme kleiner Verformungen reduziert sich der Green-Lagrange Dehnungstensor $\underline{\underline{E}_G}$ durch Vernachlässigung der quadratischen Terme auf den Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}) .$$

In einem beliebigen kartesischen System $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ hat dieser Tensor die Darstellung

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, daß die Komponenten auf der Hauptdiagonalen geometrisch als Längsdehnungen und die weiteren Komponenten als halbe Schubwinkel interpretiert werden können.

Wir wollen die Volumendehnung

$$\varepsilon_V := \frac{dv - dV}{dV} = \frac{dv}{dV} - 1$$

berechnen. Mit der Annahme kleiner Verformungen gilt für die Längenänderung $dl_1 \approx (1 + \varepsilon_1) dL_1$ usw. Dann ist

$$dv \approx (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dV,$$

wobei Terme höherer Ordnung im Produkt vernachlässigt werden. Die Volumendehnung ergibt sich als

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = I_\varepsilon. \quad (6.1)$$

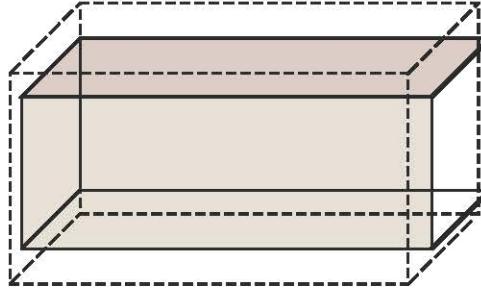


Abbildung 6.1: Ein in den Hauptrichtungen des Dehnungstensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ herausgeschnittener Quader mit dem Volumen $dV = dL_1 dL_2 dL_3$ wird in den Quader $dv = dl_1 dl_2 dl_3$ verformt.

In der Abb. 6.1 ist die Berechnung für die Hauptrichtungen des Dehnungstensors verdeutlicht. Da die Spur eine Invariante des Dehnungstensors ist, gilt die Formel $\varepsilon_V = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ in jedem Koordinatensystem. Dieses Ergebnis ist plausibel, da die Volumendehnung als skalare Größe invariant ist.

Die Zerlegung des Verzerrungstensors in Kugeltensor und Deviator

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{I} + \underline{\underline{e}} = \frac{\varepsilon_V}{3} \mathbf{I} + \underline{\underline{e}}. \quad (6.2)$$

kann nun geometrisch als additive Zerlegung der Formänderung in *Volumenänderung* und *Gestaltänderung* interpretiert werden. Da die Spur des Dehnungsdeviators $\underline{\underline{e}}$ gleich Null ist, wird die Volumenänderung nur vom Kugeltensor repräsentiert, während der Deviator den volumenneutralen Anteil der Formänderung kennzeichnet, der als Gestaltänderung bezeichnet wird.

6.1.2 Effektive Dehnung

Wir wollen nun eine *effektive Dehnung* ε_e nach dem Kriterium berechnen, daß der Deviator der einachsigen Beanspruchung eines isotropen Werkstoffs mit der Dehnung ε_e (z.B. im Zugtest) denselben Normwert $\|\underline{\varepsilon}\|$ wie der Deviator eines allgemeinen dreidimensionalen Dehnungszustandes hat. Für die einachsige Beanspruchung mit ε_e gilt

$$\underline{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_q & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_q \end{bmatrix}$$

mit der Querdehnung ε_q . Daraus ergibt sich der Deviator

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 2(\varepsilon_e - \varepsilon_q)/3 & 0 & 0 \\ 0 & -(\varepsilon_e - \varepsilon_q)/3 & 0 \\ 0 & 0 & -(\varepsilon_e - \varepsilon_q)/3 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\varepsilon_e - \varepsilon_q).$$

Für den Spezialfall der *inkompressiblen Verformung* im Zugtest ist $\varepsilon_q = -1/2\varepsilon_e$, also

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \quad (6.3)$$

6.1.3 Effektive Spannung

Analog zum Dehnungstensor kann auch der Cauchy Spannungstensor mit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{3}\text{tr } \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{I} + \underline{\underline{s}} = \sigma_m \mathbf{I} + \underline{\underline{s}} \quad (6.4)$$

als Summe aus Kugeltensor und Deviator dargestellt werden. Der Kugeltensor kennzeichnet den *hydrostatischen* Spannungszustand mit der mittleren Spannung $\sigma_m = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Wir suchen eine effektive Spannung σ_e so, daß der Deviator

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_e/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_e/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_e/3 \end{bmatrix},$$

der einachsigen Beanspruchung mit der Spannung σ_e dieselbe Norm $\|\underline{\underline{s}}\|$ wie der Deviator eines beliebigen räumlichen Spannungszustands $\underline{\underline{\sigma}}$ hat. Eine einfache Rechnung führt auf die äquivalente Spannung

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\underline{s}}\|. \quad (6.5)$$

Beispiel 6.1.

Für die einachsige Beanspruchung eines inkompressiblen isotropen Materials gilt mit

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_e/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_e/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_e/3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_e/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_e/2 \end{bmatrix}$$

offenbar $\underline{s} : \underline{e} = \sigma_e \epsilon_e$. Die äquivalenten Größen sind wiederum für gegebene räumliche Spannungs- und Verzerrungsdeviatoren \underline{s} , \underline{e} nach den Gleichungen (6.5) und (6.3) berechnet. Auch im Vergleich zum räumlichen Zustand gilt somit $\sigma_e \epsilon_e = \underline{s} : \underline{e}$. Für elastisches Material ist der Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{e}$$

die spezifische Gestaltänderungsenergie, außerdem zeigt man leicht daß $\underline{s} : \underline{e} = \|\underline{s}\| \|\underline{e}\|$. Wählt man also als Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{s}\|},$$

so verrichtet diese Größe bei einachsiger Beanspruchung eines isotropen inkompressiblen Materials mit der zugehörigen effektiven Dehnung dieselbe Gestaltänderungsarbeit wie der räumliche Spannungsdeviator \underline{s} mit dem räumlichen Verzerrungsdeviator \underline{e} .

Das von-Mises Kriterium wird meist über die 2. Invariante

$$J_2 = II_s = \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} = \frac{1}{2} \|\underline{s}\|^2$$

mit der Gleichung

$$\sigma_V = \sqrt{3 J_2}$$

angegeben. Drückt man die Invariante in den Hauptspannungen aus

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

so ergibt sich die aus der Festigkeitslehre¹ bekannte Formel

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

6.2 Elastizität und Viskoelastizität

Elastische Verformungen sind reversibel. Die bei der Verzerrung geleistete mechanische Formänderungsarbeit wird vom Material als potentielle Energie gespeichert. Diese Energie ist gleich der mechanischen Arbeit der äußeren Beanspruchung. Durch Wegfall der Lasten wird die Energie wieder freigesetzt; die gespeicherten inneren Kräfte (Spannungen) bewirken dann die komplette Rückbildung der Verzerrungen. Die Existenz einer skalaren Energiefunktion ist folglich das wesentliche mathematische Kriterium für elastisches Materialverhalten. Der Spannungstensor ist die erste Ableitung der Energiefunktion nach dem Verzerrungstensor. Die Ableitung des Spannungstensors nach dem Verzerrungstensor bzw. die zweite Ableitung der Energiefunktion heißt Materialtensor. In linear-elastischen Materialien ist der Materialtensor konstant (hängt nicht von den Verzerrungen ab). Die lineare Elastizität, die vor allem an kristallinen Werkstoffen beobachtet wird, ist ein Spezialfall der allgemeinen Elastizität (Hyperelastizität).

6.2.1 Lineare Elastizität

Wird ein homogener Würfel mit $\sigma_x > 0$ an den Kanten $x = \text{const.}$ gezogen, so verformen sich Quadrate $l \times l$ auf den Seiten $y = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$ der Würfel zu Rechtecken $l_x \times l_y$ bzw. $l_x \times l_z$. Für einen isotropen Werkstoff ist $l_y = l_z$. Bei Zug ist $l_x > l$ und $l_y < l$. Messungen für unterschiedliche Laststufen der Spannung erweisen die Proportionalitäten $\sigma_x = E \epsilon_x$ mit dem

¹s. z.B. Kap. 17 von P. Wriggers, U. Nackenhorst, Technische Mechanik Kompakt

Elastizitätsmodul E und $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ mit der Querkontraktionszahl (englisch: Poisson ratio) ν . Die rechten Winkel werden nicht verzerrt. Die Dehnungen sind dementsprechend

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x.$$

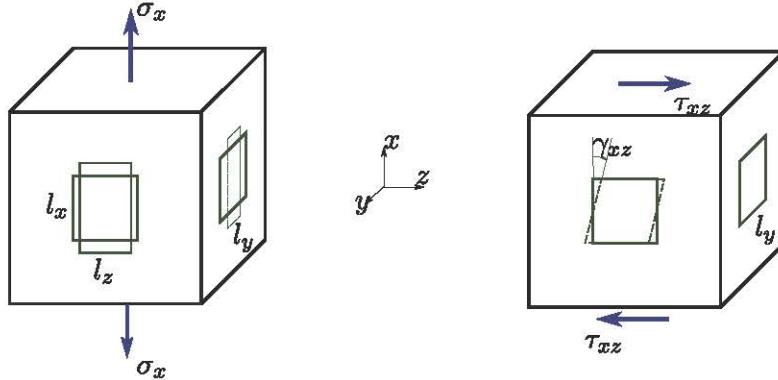


Abbildung 6.2: Vier Kategorien des Materialverhaltens

Analoge Zugversuche mit $\sigma_y > 0$ bzw. $\sigma_z > 0$ führen auf analoge Formeln. Wegen der Voraussetzung linearen Material- und Geometrieverhaltens können diese Formeln zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z \end{aligned} \quad (6.1)$$

superponiert werden.

Das Volumen des Würfels $l \times l \times l$ ändert sich in den Zugversuchen von $V_0 = l^3$ auf das $V = l_x l_y l_z$. Wir definieren die *Volumendehnung*

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{l_x l_y l_z - l^3}{l^3} \approx \frac{\Delta l_x}{l} + \frac{\Delta l_y}{l} + \frac{\Delta l_z}{l} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr } \underline{\varepsilon}.$$

Die Volumendehnung ist gleich der Spur des Dehnungstensors.

Aus der Summation der Materialgleichungen (6.1) erhalten wir:

$$\text{tr } \underline{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr } \underline{\sigma},$$

d.h. die Volumenänderung ist über den *Kompressionsmodul*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6.2)$$

proportional zur mittleren oder *hydrostatischen* Spannung

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}.$$

Der in der Abb. 6.2(rechts) skizzierte Schubversuch ergibt die Proportionalität

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

zwischen Schubbeanspruchung und entsprechender Winkelverzerrung, ohne Verzerrung auf den anderen Seiten des Würfels. Der Schubmodul G ist in isotropen Werkstoffen mit dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl durch die Beziehung²

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

verknüpft. Faßt man die Dehnungen und Winkelverzerrungen sowie die entsprechenden Spannungskomponenten jeweils in einem Vektor zusammen, so ergibt sich schließlich das linear-elastische Materialgesetz in der Form

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Die Matrix $M_{6 \times 6}$ in der obigen Gleichung heißt *Nachgiebigkeitsmatrix*, ihre Inverse ist die *Elastizitätsmatrix* $C_{6 \times 6}$. Diese Matrix ist eine komprimierte Schreibweise für den Elastizitätstensor 4. Stufe

$$\mathcal{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

mit $3^4 = 81$ Koordinaten. In der allgemeinen Form des linearen Elastizitätsgesetzes sind die Komponenten des Spannungstensors über den linearen Zusammenhang

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

mit den Einträgen des Dehnungstensors verknüpft. Für isotropes Material hängen die Koeffizienten C_{ijkl} von genau zwei Materialparametern ab. Aus dem Zugversuch haben wir die Parameter E und ν erhalten. Der Schubmodul G aus dem Schubversuch hängt von E und ν ab.

Für die allgemeine tensorielle Darstellung des linear-elastischen Materialgesetzes sind die Lamé Konstanten λ und μ geeignet. Mit diesen Konstanten gilt

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

bzw. als Tensorgleichung

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (6.3)$$

Darin bezeichnet $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ den Einheitstensor 2. Stufe und

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

den symmetrischen Einheitstensor 4. Stufe [20]. Die Lamé Konstanten hängen über $\lambda = K - 2/3G$ und $\mu = G$ mit Kompressions- und Schubmodul zusammen.

²s. L.D.Landau and E.M.Lifshitz, Theory of Elasticity, pp. 13f

Wir wollen nun noch eine dritte Formulierung einführen, mit der die Formänderung des Festkörpers in Volumenänderung und Gestaltänderung separiert wird. Hierzu benutzen wir die Aufspaltung von Spannungs- und Verzerrungstensor in Kugeltensor und Deviator. Das isotrope linear-elastische Materialgesetz kann damit in der Form

$$\sigma_m = K \varepsilon_V, \quad \underline{s} = 2G \underline{e} \quad (6.4)$$

getrennt für Volumendehnung und Gestaltänderung angegeben werden. Die Volumenänderung ist über den Kompressionsmodul proportional zur hydrostatischen Spannung. Die Gestaltänderung wird durch den Dehnungsdeviator dargestellt, der mit dem Schubmodul \mathbf{G} proportional zum Spannungsdeviator ist. In der Tabelle sind die linear-elastischen Konstanten für die unterschiedlichen Formulierungen zusammengestellt.

Tabelle 6.1: Zusammenhang zwischen den linear-elastischen Konstanten

	E, ν	K, G	λ, μ
E	E	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G	μ
K	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$K - \frac{2}{3}G$	λ

6.2.2 Formänderungsenergie

Die elastische Formänderungsenergiedichte Φ ist definiert als das Arbeitsprodukt (pro Volumeneinheit) der Spannungskomponenten mit den entsprechenden Dehnungskomponenten. Für linear-elastisches Material ist

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \int_0^{\underline{\varepsilon}} \bar{\underline{\sigma}} : d\underline{\bar{\varepsilon}} = \int_0^{\underline{\varepsilon}} (\mathcal{C} : \underline{\bar{\varepsilon}}) : d\underline{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}.$$

Wir setzen in diese Formel die Aufspaltungen der Tensoren aus Gl. ?? ein und erhalten

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} K (\text{tr } \underline{\varepsilon})^2 + G \underline{e} : \underline{e}. \quad (6.5)$$

Mit den Invarianten des Dehnungstensors bzw. -deviators,

$$I_e = \text{tr } \underline{\varepsilon}, \quad II_e = \frac{1}{2} \underline{e} : \underline{e}.$$

kann die Formänderungsenergiedichte auch in der Form

$$\Phi(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} K I_e^2 + 2G II_e = \Phi_1(I_e) + \Phi_2(II_e) \quad (6.6)$$

als Summe aus den Energiedichten der Volumendeformation und der Gestaltänderung angegeben werden.

Beispiel 6.2.

Es ist

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \right] : \left[\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{e}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sigma_m \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \frac{1}{3} (\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{I}}) + \sigma_m \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{e}} + \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} (\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{s}}) + \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \right]$$

Die Skalarprodukte von Einheitstensor und Deviator verschwinden wegen $\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{e}} = \text{tr} \underline{\underline{e}} = 0$, und mit $\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{I}} = 3$ erhalten wir

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\sigma_m \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}},$$

woraus nach Einführung der Materialgesetze (6.4) die Gleichung (6.5) folgt.

6.2.3 Hyperelastizität

Die Deformation von Festkörpern ist reversibel wenn die inneren Kräfte konservativ sind, also die Deformationsenergie nicht vom Weg der Verformung abhängt. Aus der Mathematik ist bekannt, daß die wirkenden Kräfte in diesem Fall ein Potential (potentielle Energie) besitzen. Wir nutzen diese Überlegungen zu einer allgemeinen Definition des elastischen Materialverhaltens und nennen ein Material *elastisch* oder auch *hyperelastisch*, wenn eine skalare Funktion $\Phi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ des Dehnungstensors mit der Eigenschaft

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

existiert. Diese Funktion wurde bereits als Formänderungsenergiendichte eingeführt. Wir können noch den Materialtensor 4. Stufe über die partielle Ableitungen definieren,

$$\mathbf{C} = \frac{\sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^2},$$

der im linear-elastischen Fall nicht von den Dehnungen abhängt.

Nach Gl. (6.6) lässt sich die Energiedichte linear-elastischer isotroper Materialien additiv in Volumen- und Gestaltänderung aufspalten. Diese Annahme wird häufig auf nichtlinear-elastisches Werkstoffverhalten verallgemeinert. Leiten wir die Gleichung nach den Dehnungen ab, so ergibt sich mit der Kettenregel der Differentiation

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_\varepsilon} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial II_\varepsilon} \frac{\partial II_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_\varepsilon} \delta_{ij} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial II_\varepsilon} e_{ij}. \end{aligned}$$

Daraus folgen die Materialgleichungen (vgl. mit Gl. 6.4)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_\varepsilon} \quad s_{ij} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial II_\varepsilon} e_{ij}. \quad (6.7)$$

In der zweiten Materialgleichung kann die partielle Ableitung durch die äquivalenten Größen der Formänderung ersetzt werden. Wir bezeichnen $g = \partial \Phi_2 / \partial II_\varepsilon$ und multiplizieren die Gleichung $\underline{\underline{s}} = g \underline{\underline{e}}$ jeweils skalar mit $\underline{\underline{s}}$ und mit $\underline{\underline{g}} \underline{\underline{e}}$. Aus $\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = g \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{s}}$ und $g \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{s}} = g^2 \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}$ erhalten wir dann

$$g = \frac{\partial \Phi_2}{\partial II_\varepsilon} = \sqrt{\frac{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}{\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}}} = \frac{s_e}{e_e} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{e_e}.$$

Beispiel 6.3.

Nehmen wir für die Effektivgrößen ein nichtlineares Federgesetz der Form $s_e = b e_e^N$ mit bekannten Materialparametern b und N an, so gilt für den räumlichen Spannungszustand

$$\underline{\underline{s}} = b e_e^{N-1} \underline{\underline{e}}.$$

6.2.4 Viskoelastizität

Die Reaktion des Materials auf eine Dehnung $\underline{\varepsilon}(t)$ kann mit skalaren Funktionen $\gamma(t)$ (für Schubrelaxation) bzw. $\kappa(t)$ (Kompressionsrelaxation) beschrieben werden als

$$\underline{\sigma}(t) = 2 \int_0^t \gamma(t - \bar{t}) \underline{\dot{\varepsilon}}(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t \kappa(t - \bar{t}) \operatorname{tr} \underline{\dot{\varepsilon}}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (6.8)$$

Analog dazu reagiert das Material auf die Spannung $\underline{\sigma}(t)$ mit der Dehnung

$$\underline{\varepsilon}(t) = 2 \int_0^t g(t - \bar{t}) \underline{\dot{\sigma}}(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t k(t - \bar{t}) \operatorname{tr} \underline{\dot{\sigma}}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (6.9)$$

Die skalaren Funktionen $g(t)$ bzw. $k(t)$ kennzeichnen das Schub- bzw. Kompressionskriechen. Für konstante Funktionen erhalten wir die linear-elastischen Materialgleichungen; z.B. ergibt sich mit $\kappa(t) \equiv K, \gamma(t) \equiv G$ die Gleichung (6.4).

6.3 Plastizität

Plastische Verformungen sind nicht reversibel sondern bleiben auch nach Rücknahme der äußeren Belastung im Werkstoff zurück. In vielen Werkstoffen treten solche Verformungen erst nach Überschreiten einer Grenzlast auf. Bis zu dieser Grenzlast reagiert das Material näherungsweise linear-elastisch. Bei Erreichen der Grenzlast beginnt das Material zu fließen. Im idealplastischen Materialmodell wächst dann die Verformung bei konstanter Last solange bis diese wieder verringert wird. Duktile Metalle können nach dem erstmaligen Fließen des Materials noch weitere Last aufnehmen, allerdings mit deutlich verringelter Steifigkeit. Die ursprüngliche Fließspannung des Materials wird dadurch erhöht. Dieser Effekt heißt Verfestigung. Im Gegensatz zum reinen Fließen wird mit der Verfestigung das formstabile Verhalten von Festkörpern modelliert. Allgemein wird jede Änderung der plastischen Dehnung als Fließen bezeichnet, d.h. ein Material fließt genau dann wenn $\|\dot{\varepsilon}_p\| \neq 0$. In der Materialrheologie wird das elastisch-plastische durch den Prandtl-Körper (idealplastisch) bzw. den elastisch-plastischen Standardkörper (verfestigend) abgebildet. Wesentliche Eigenschaften dieser rheologischen Modelle werden als Annahmen für die tensoriellen Materialgleichungen übernommen.

6.3.1 Annahmen der elastisch-plastischen Verformung

- Additive Zerlegung:** Der räumliche Verzerrungstensor kann additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p. \quad (6.1)$$

Der elastische Verzerrungsanteil ist über die Hooke'schen Gesetze mit dem Spannungstensor verknüpft

$$\underline{\sigma} = \mathcal{C} : \underline{\varepsilon}_e. \quad (6.2)$$

- Elastische Volumenänderung:** Die Volumenänderung des Körpers ist auch bei plastischer Formänderung elastisch entsprechend $\sigma_m = K \varepsilon_V$. Der plastische Anteil des Dehnungstensors repräsentiert somit eine *inkompressive Gestaltänderung* und es gilt

$$\underline{\varepsilon}_p = \underline{\varepsilon}_p. \quad (6.3)$$

3. Fließbedingung und Fließkörper: Die Komponenten des Spannungstensors $\underline{\sigma}(t)$ erfüllen zu jedem Zeitpunkt der Verformung die *Fließbedingung*

$$\mathbf{F}(\underline{\sigma}, \{q\}) \leq \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Die Menge $\{q\}$ enthält innere Variablen des Materialmodells; z.B. ist $\{q\} = \emptyset$ (leere Menge) für idealplastisches Verhalten oder $\{q\} = \{\underline{\alpha}\}$ (Rückspannungstensor) für kinematische Verfestigung.

Die Gleichung (6.4) beschreibt im neun-dimensionalen Spannungsraum den *Fließkörper*

$$K_{\sigma} = \{\underline{\sigma}(t) \mid \mathbf{F}(\underline{\sigma}) \leq \mathbf{0}\}.$$

Die Oberfläche

$$\partial K_{\sigma} = \{\underline{\sigma}(t) \mid \mathbf{F}(\underline{\sigma}) = \mathbf{0}\}.$$

des Fließkörpers heißt *Fließfläche*.

4. Fließregel und Verfestigungsregel: Die Änderung der plastischen Dehnung wird durch die *Fließregel*

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \gamma \underline{r}(\underline{\sigma}, \{q\}), \quad (6.5)$$

mit einer skalaren Funktion γ und einer Tensorfunktionen \underline{r} beschrieben. Die Größe γ heißt plastischer Multiplikator. Für Modelle mit inneren Variablen wird deren Wachstum $\{q\}$ analog durch *Verfestigungsregeln* charakterisiert.

5. Kuhn-Tucker Bedingungen und Konsistenzbedingung: Der plastische Multiplikator γ und die Fließfunktion \mathbf{F} erfüllen die drei Gleichungen

$$\gamma \geq 0, \quad \mathbf{F} \leq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \gamma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

jeweils für alle Werte der jeweiligen Funktionsargumente. Diese Gleichungen sind aus der nichtlinearen Optimierung als Kuhn-Tucker Bedingungen bekannt. In der Plastizitätstheorie werden sie auch "loading/unloading" Bedingungen genannt. Zusätzlich zu diesen Gleichungen gilt die *Konsistenzbedingung*

$$\gamma \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

6.3.2 Fließfunktion und Fließbedingung

Durch die Fließfunktion \mathbf{F} wird die geometrische Form des Fließkörpers beschrieben. Die Fließbedingung $\mathbf{F} \leq \mathbf{0}$ besagt, daß Spannungszustände außerhalb des Fließkörpers nicht zulässig sind.

Wurde an einem Punkt $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{x}$ der Spannungszustand $\underline{\sigma}(\mathbf{x})$ berechnet, so kann durch Einsetzen des Tensors in die Fließfunktion $\mathbf{F}(\underline{\sigma})$ beurteilt werden, ob sich das Material an dieser Stelle elastisch oder plastisch verformt. Die plastische Verformung ist nur für Spannungszustände auf der Oberfläche des Fließkörpers ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) möglich. Für $\mathbf{F} < \mathbf{0}$ liegt der Spannungstensor im Innern des Fließkörpers und die Verzerrungen sind reversibel.

Der Tensor $\underline{\sigma}$ ist eindeutig durch seine drei Hauptwerte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bzw. die drei Invarianten $I_{\sigma}, II_{\sigma}, III_{\sigma}$ gekennzeichnet. Die Gleichung der Fließfläche wird häufig als Funktion dieser Tensor-Invarianten oder auch der Deviator-Invarianten I_s, II_s, III_s angegeben. Wir geben einige Fließfunktionen, geordnet nach Materialarten, an.

Metalle (von Mises, Tresca)

Aus der Festigkeitslehre sind die Vergleichsspannungen nach von Mises und Tresca bekannt. Diese Formeln werden auch als Fließfunktionen verwendet. Die Funktion nach *von Mises* hat die einfache Form

$$F(\underline{\sigma}, k) = II_s - k^2 \quad (6.8)$$

mit dem skalaren Werkstoffparameter

$$k = \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} = \tau_F.$$

Mit σ_F bzw. τ_F werden die Fließspannungen aus dem Materialversuch bezeichnet. Die zweite Invariante des Spannungsddeviators ist

$$II_s = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}.$$

Der Parameter k wird im Materialversuch gemessen. Im Zugtest wird ein einachsiger Spannungszustand mit dem Deviator

$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

erzeugt. Das Material fließt für $\sigma = \sigma_F$. Dann ist

$$II_s = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{\sigma_F^2}{3}.$$

Beim Schubversuch wird der Spannungszustand

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bewirkt. Offensichtlich ist $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}$. Das Material fließt bei $\tau = \tau_F$, also $II_s = \tau_F$.

Nach der Hypothese von *Tresca* wird die maximale Schubkomponente des Spannungstensors mit der gemessenen Fließspannung verglichen. Die Fließfunktion

$$F(\underline{\sigma}, k) = |\tau_{\max}| - k \quad (6.9)$$

mit $k = \tau_F = \sigma_F/\sqrt{3}$ kann als Wurzel aus der Fließbedingung nach von Mises angesehen werden.

Polymere (Drucker-Prager)

Bei Polymeren werden im Druckversuch andere Fließgrenzen gemessen als im Zugversuch [18]. Auch Beton oder geologische Materialien verhalten sich in Zugbereich und im Druckbereich unterschiedlich[8]. Dies wird in der Fließfunktion nach *Drucker* und *Prager* berücksichtigt.

$$F(\underline{\sigma}, k, \alpha) = \alpha I_\sigma + \sqrt{II_s} - k \quad (6.10)$$

Darin sind

$$\alpha = \frac{\sigma_F^D - \sigma_F^Z}{\sqrt{3} (\sigma_F^D + \sigma_F^Z)}, \quad k = \frac{2\sigma_F^D \sigma_F^Z}{\sqrt{3} (\sigma_F^D + \sigma_F^Z)},$$

und mit σ_F^Z bzw. σ_F^D werden die Fließspannungen aus dem Zug- bzw. Druckversuch bezeichnet. Diese Fließfunktion ist eine Erweiterung der Tresca-Bedingung. Für $\sigma_F^Z = \sigma_F^D$ ist $\alpha = 0$ und $k = \tau_F$.

Als weitere Möglichkeit geben wir noch die *parabolisch modifizierte von-Mises* Funktion an. [18]

$$F(\underline{\sigma}, k, \beta) = \frac{\beta - 1}{2\beta} I_\sigma^2 + \sqrt{\left(\frac{\beta - 1}{2\beta} I_\sigma^2 \right)^2 + \frac{3}{\beta} II_s^2 - k^2}. \quad (6.11)$$

Hier bedeuten

$$\beta = \frac{\sigma_F^D}{\sigma_F^Z}, \quad k = \sigma_F^Z.$$

Für $\sigma_F^Z = \sigma_F^D$ erhalten wir die quadrierte von-Mises Bedingung.

Anisotrope Materialien (Hill)

Für anisotropes Materialverhalten wurde von *Hill* die Fließfunktion

$$F(\underline{\sigma}, a, b, c, d, e, f) = a(\sigma_x - \sigma_y)^2 + b(\sigma_y - \sigma_z)^2 + c(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2d\tau_{xy}^2 + 2e\tau_{yz}^2 + 2f\tau_{zx}^2 - 1 \text{ vorgeschlagen.} \quad (6.12)$$

mit sechs Materialparametern a, b, \dots, f vorgeschlagen. Der Spannungstensor wird direkt in den Komponenten angegeben. Für

$$a = b = c = \frac{1}{2\sigma_F^2}, \quad d = e = f = \frac{3}{2\sigma_F^2}$$

erhalten wir die von-Mises Bedingung.

6.3.3 Fließkörper und Fließfläche

Durch die Fließfunktionen werden geometrische Körper beschrieben. Diese Körper sind im Allgemeinen sechs-dimensional. Für die Visualisierung wird daher die Darstellung des Spannungstensors in seinen Hauptrichtungen benutzt, die nur drei relevante Komponenten enthält. Die Hauptrichtungen werden durch drei orthonormierte Vektoren $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ gekennzeichnet. Die Gleichung

$$[\underline{\sigma} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} = [\sigma_m \mathbf{I} + \underline{s} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} = [\underline{s} - (\lambda - \sigma_m) \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}$$

zeigt, daß die Hauptrichtungen von Spannungstensor und Deviator übereinstimmen. In den Hauptrichtungen kann jeder Spannungszustand $\underline{\sigma}$ als Vektor $\sigma_k \mathbf{n}_k$ aufgefaßt werden.

Zur Visualisierung der Fließkörper verwenden wir das in der Abb. 6.3 skizzierte Koordinatensystem. Darin sind noch die Richtung

$$\mathbf{e} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3$$

der Raumdiagonalen und ein Spannungszustand $\sigma = \sigma_k \mathbf{n}_k$ als Vektoren eingezeichnet. Die Richtung der Raumdiagonalen wird auch hydrostatische Achse [8] genannt.

Für beliebige Spannungsvektoren σ steht der zugehörige Deviatorvektor $\mathbf{s} = s_1 \mathbf{n}_1 + s_2 \mathbf{n}_2 + s_3 \mathbf{n}_3$ senkrecht auf der Raumdiagonalen $\mathbf{s} \perp \mathbf{e}$, denn es ist

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = s_1 + s_2 + s_3 = \text{tr}(\underline{s}) = 0.$$

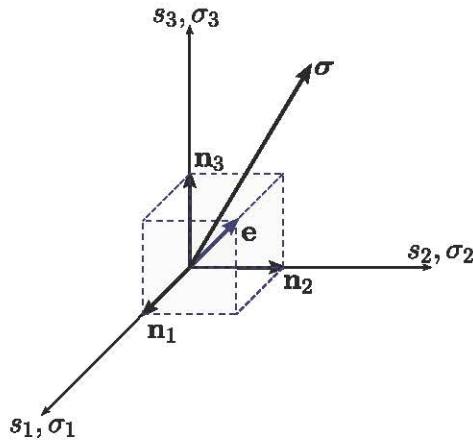


Abbildung 6.3: Koordinatensystem zur Visualisierung der Fließkörper

Daraus folgt, daß die Deviatoren aller Spannungsvektoren in der *Deviator-Ebene* $\mathbf{s} \perp \mathbf{e}$ senkrecht zur Raumdiagonalen liegen. Die von-Mises Bedingung

$$II_s = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{s}} : \underline{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \leq k^2$$

beschreibt in der Deviatorebene die Kreisfläche $|\mathbf{s}|^2 \leq 2k^2$. Der Radius dieses Kreises

$$R = \sqrt{2k} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F = \tau_F$$

ist proportional zur Fließspannung. Der Fließkörper enthält alle Spannungsvektoren σ , deren Projektionen auf der Kreisfläche in der Deviatorebene liegen. Dieser Körper ist ein Kreiszylinder wie in Abb. 6.4 skizziert.

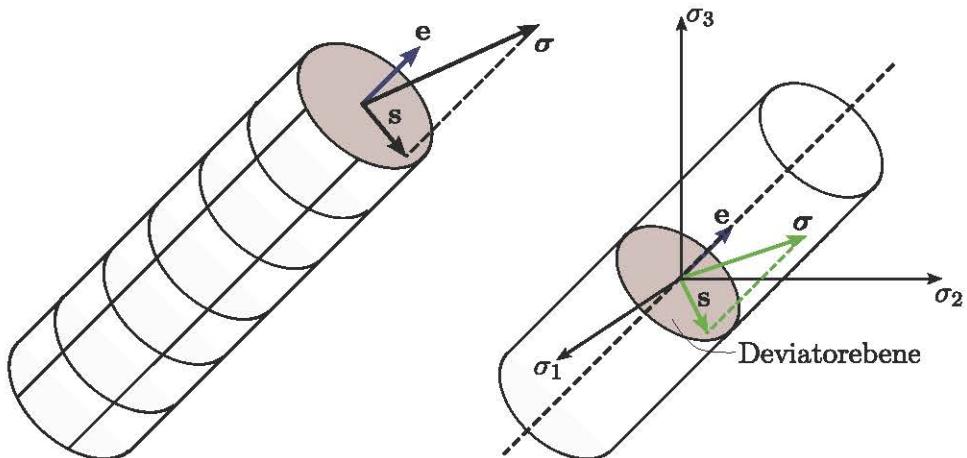


Abbildung 6.4: Fließkörper der von-Mises Bedingung.

Der Fließkörper nach Tresca ist ein hexagonaler Zylinder. Dieser ist dem Kreiszylinder der Mises-Bedingung einbeschrieben, wie in der Abb. 6.5 skizziert. Die Schnitte der Fließkörper mit der 1-2 Ebene $\sigma_3 = 0$ können als Darstellung ebener Spannungszustände aufgefaßt werden. Die Form der Schnitte sind eine Ellipse bzw. ein Hexaeder. Für den ebenen Spannungszustand ist

$$II_s = \frac{1}{6} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]$$

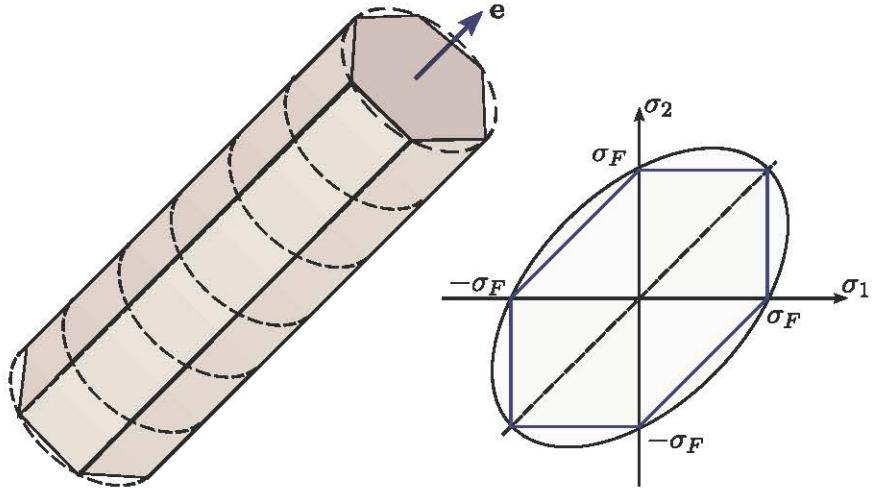


Abbildung 6.5: Fließkörper der Tresca Bedingung (links) und Schnitt mit der 1-2 Ebene (rechts).

und

$$\tau_{\max} = \max \left\{ \frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right\}.$$

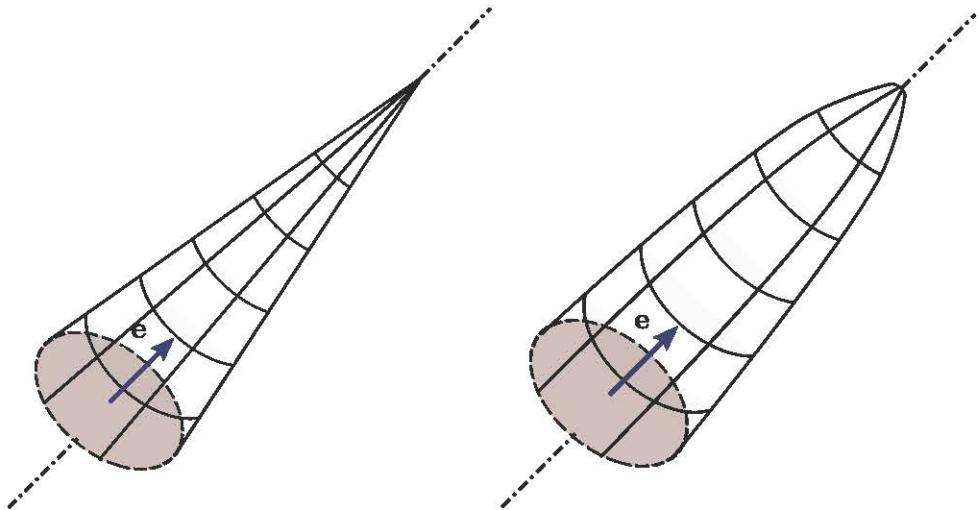


Abbildung 6.6: Fließkörper nach der Drucker Bedingung (links) und parabolisch (rechts).

Wir geben noch die Form des Drucker-Prager Körpers an. Hierzu stellen wir die Fließbedingung nach der Invarianten $II_2 = s^2/2$ um und quadrieren. Mit $I_\sigma = 3\sigma_m$ ist

$$s^2 = 2(k - 3\alpha\sigma_m)^2$$

Die Schnittebenen senkrecht zur hydrostatischen Achse sind wieder Kreise. Der Radius dieser Kreise nimmt linear mit der mittleren Spannung ab. Der Körper ist also ein Kreiskegel mit der Spitze bei $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k/3\alpha$. Für $\sigma_m = 0$ ist die Bedingung identisch mit der von Mises Bedingung. In der Abb. 6.6 sind die Fließkegel nach der Drucker-Prager Bedingung und nach der parabolischen Bedingung skizziert.

6.3.4 Fließregel und Verfestigungsregel

Durch die Fließbedingung wird geprüft, ob sich das Material elastisch oder plastisch verformt. Bei plastischer Verformung ändert sich die plastische Dehnung $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$. Die Entwicklung des Dehnungstensors wird mit der plastischen Dehnrate $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p$ gemessen. Mit der *Fließregel* werden der Betrag γ und die Richtung $\underline{\underline{r}}$ dieser Rate angegeben. Sind die Fließregel (6.5) und die Fließbedingung (6.4) über die differentielle Beziehung

$$\underline{\underline{r}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (6.13)$$

verknüpft, so spricht man von *assozierter Fließregel* bzw. *assozierter Plastizität*. Für die assoziierte Plastizität ist die Richtung der plastischen Dehnungsänderung orthogonal zur Fließfläche wie in Abb. 6.7 gezeigt.

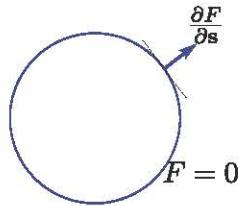


Abbildung 6.7: Richtung der Dehnungsänderung in der Deviatorebene bei assoziierter Plastizität.

Beispiel 6.4.

(J2-Plastizität; nach [20]): Wir schreiben das Fließgesetz nach von Mises in der Form

$$F(\sigma, \mu) = \|\underline{\underline{s}}\| - R \leq 0,$$

mit der Deviatornorm

$$\|\underline{\underline{s}}\| = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$$

und dem Radius $R = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_F} = \tau_F$ des Fließkörpers. Die Änderung der plastischen Dehnungen wird durch eine assoziative Fließregel mit

$$\underline{\underline{r}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

beschrieben. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{s}}} = \frac{\underline{\underline{s}}}{\|\underline{\underline{s}}\|}$$

ist $\|\underline{\underline{r}}\| = 1$. Aus der Fließregel

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \gamma \|\underline{\underline{r}}\|$$

folgt dann

$$\gamma = \|\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p\|.$$

Der plastische Multiplikator gibt den Betrag der Dehnungsänderung an.

In Materialmodellen mit inneren Variablen $\{q\}$ werden Regeln für die Entwicklung dieser Variablen benötigt. So wird z.B. das Gesetz der kinematischen Verfestigung mit dem Tensor der Rückspannungen $\underline{\underline{\alpha}}$ formuliert. Hierfür gilt die *Verfestigungsregel*

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = \gamma \underline{\underline{h}}.$$

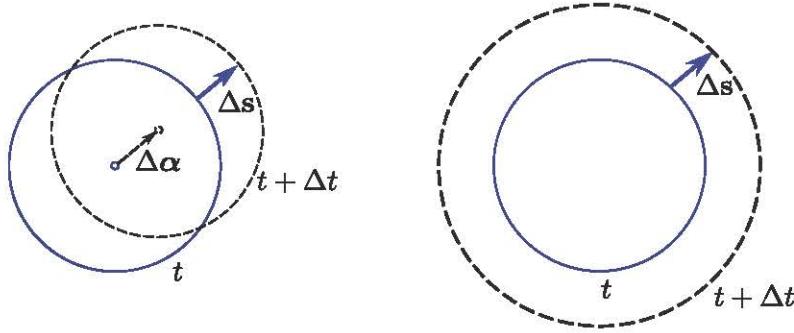


Abbildung 6.8: Änderung der Fließfläche (Spur auf der Deviatorebene) für kinematische Verfestigung (links) und isotrope Verfestigung (rechts).

Für assoziative Plastizität ist $\underline{h} = H \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$ mit dem plastischen Modul H , d.h. die Rückspannungen ändern sich in derselben Richtung wie die plastischen Dehnungen. Bei Verfestigung ist der Zuwachs $\dot{\varepsilon}_p$ der plastischen Dehnung mit einem Spannungszuwachs verbunden. Die Spitze des Deviatorvektors $\underline{s}(t + \Delta t)$ liegt dann außerhalb des Fließkörpers $F(\underline{s}, t) \leq 0$. Um die Fließbedingung auch für $t + \Delta t$ zu erfüllen, muß der Fließkörper so modifiziert werden, daß $\underline{s}(t + \Delta t)$ auf der Fließfläche $F(\underline{s}, t + \Delta t) = 0$ liegt. Generell ist dies durch Änderung der Lage oder der Form des Fließkörpers möglich. In der Abb. 6.8 sind beide Varianten an der Spur des Fließkörpers auf der Deviatorebene skizziert. Bei kinematischer Verfestigung wird der Mittelpunkt des Fließkörpers kollinear zur Richtung des Dehnungssinkments verschoben. Der Radius des Körpers bleibt konstant. Im Fall der isotropen Verfestigung vergrößert sich der Radius des Fließkörpers entsprechend dem Betrag des Dehnungssinkments. Die Lage der Mittellinie bleibt unverändert. Im Allgemeinen werden sowohl die Lage als auch die Form des Fließkörpers modifiziert, um das tatsächliche Verhalten des Materials im Versuch abzubilden.

Beispiel 6.5.

(J2-Plastizität mit linearer Verfestigung; nach [20],[21]): Für die gekoppelte kinematisch-isotrope Verfestigung werden die inneren Variablen \underline{q}_1 (Tensor 2. Stufe) und q_2 (Skalar) sowie zugehörige "Verfahrensvariablen" [21] $\underline{\varepsilon}_1, \varepsilon_2$ eingeführt. Die inneren Variablen haben die Dimension der Spannungen und sind zu den Dehnungen $\underline{\varepsilon}_1, \varepsilon_2$ proportional. Die elastisch-plastische Verformung wird durch folgende Gleichungen beschrieben.

Fließbedingung:

$$F(\underline{\sigma}, \underline{q}_1, q_2) = \|\underline{s} - \underline{q}_1\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_F - q_2) = 0 \quad (6.14)$$

mit

$$\underline{q}_1 = \underline{\alpha} = -\frac{2}{3}H\underline{\varepsilon}_1 \quad (6.15)$$

$$q_2 = -K\varepsilon_2 \quad (6.16)$$

Die positiven Skalare H und K heißen kinematischer bzw. isotroper plastischer Modul.

Fließregel, Verfestigungsregeln:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \gamma \frac{\partial F}{\partial \underline{s}} \quad (6.17)$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_1 = \gamma \frac{\partial F}{\partial \underline{q}_1} \quad (6.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \gamma \frac{\partial F}{\partial q_2} \quad (6.19)$$

mit der skalaren Größe γ .

Kuhn-Tucker-Bedingungen und Konsistenzbedingung:

$$\gamma \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \gamma F = 0,$$

und

$$\gamma \dot{F} = 0.$$

Die Ableitungen der Fließfunktion aus den obigen Gleichungen können einfach berechnet werden; es ist

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{s}} = \frac{\underline{s} - \underline{q}_1}{\|\underline{s} - \underline{q}_1\|} := \underline{n}$$

mit $\underline{n} : \underline{n} = 1$ und

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{q}_1} = -\underline{n}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Damit lauten die Fließregeln

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\varepsilon}}_p &= \gamma \underline{n} \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_1 &= -\gamma \underline{n} \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$\gamma = \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p\|.$$

Der plastische Multiplikator ist die Norm der plastischen Dehnungsrate. Die dritte Gleichung liefert nun

$$\dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p\|,$$

d.h. $\varepsilon_2 = \sqrt{2/3} \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p\|$ ist die effektive plastische Dehnung. Aus der Gleichung (6.15) erhalten wir

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\alpha}\| = H \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\underline{\varepsilon}}_1\| \implies \alpha_{\text{eff}} = H \varepsilon_2.$$

Der kinematische Modul gibt das Verhältnis der effektiven Rückspannung zur effektiven plastischen Dehnung an.

Die freie Helmholtz Energie der bilinear kinematisch-isotropen Verfestigung ist

$$U = - \int \underline{q}_1 : d\underline{\varepsilon}_1 - \int q_2 d\varepsilon_2 = \frac{1}{3} H \|\varepsilon_1\|^2 + \frac{1}{2} K \varepsilon_2^2.$$

6.3.5 Kuhn-Tucker Bedingungen und Konsistenzbedingung

Da der plastische Multiplikator den Betrag der plastischen Formänderung kennzeichnet, muß $\gamma \geq 0$ gelten. Für $\gamma = 0$ verformt sich der Werkstoff elastisch und die plastische Dehnung bleibt konstant. Für $\gamma > 0$ fließt das Material und die plastische Dehnung ändert sich. Die zweite Kuhn-Tucker Bedingung $F \leq 0$ ist identisch mit der Fließbedingung.

Gemäß der 3. Kuhn-Tucker Bedingung $\gamma F = 0$ ist das Fließen ($\gamma > 0$) des Materials nur für Spannungszustände auf der Fließfläche ($F = 0$) möglich. Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend für plastisches Fließen, denn die Gleichung wird auch von $\gamma = 0 = F$ erfüllt. Tatsächlich fließt aber im Fall $F = 0$ das Material bei einer Laständerung nur dann, wenn der

Spannungszustand dabei auf der Fließfläche verbleibt. Die Fließfunktion muß also konstant gleich Null sein bzw. $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$. Wird hingegen bei Änderung der äußeren Last das Gleichgewicht von einem Spannungstensor *im Innern des Fließkörpers* erfüllt ($\dot{\mathbf{F}} \neq \mathbf{0}$), so reagiert das Material elastisch, d.h. $\gamma = 0$. Dieser Zusammenhang wird durch die Konsistenzbedingung $\gamma \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ wiedergegeben. Bei Verlassen der Fließfläche ist $\dot{\mathbf{F}} < \mathbf{0}$ [20, Lemma 2.2.1.] und somit $\gamma > 0$. Für $\gamma > 0$ fließt das Material. Die Konsistenzbedingung stellt sicher dass sich der Spannungsvektor dabei nicht ins Innere des Fließkörpers bewegt.

In der praktischen Anwendung der Plastizitätstheorie muß der Zuwachs $\underline{\dot{\varepsilon}}_p$ der plastischen Dehnung für einen gegebenen Zuwachs $\underline{\dot{\varepsilon}}$ der Gesamtdehnung berechnet werden. Die Richtung dieses Zuwachses wird durch den Tensor $\underline{\underline{r}}$ aus der Fließregel bestimmt. Der plastische Multiplikator gibt den Betrag des Zuwachses an. Die Größe des plastischen Multiplikators wird aus der Konsistenzbedingung ermittelt. Wir betrachten als Beispiel das Modell eines linear-elastisch-verfestigenden Materials mit der Fließfunktion $\mathbf{F}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha})$.

Beispiel 6.6.

(Von-Mises-Bedingung mit kinematischer Verfestigung; nach [20]): Die plastische Dehnung und die innere Variable $\underline{\alpha}$ entwickeln sich gemäß der Fließregel $\underline{\dot{\varepsilon}}_p = \gamma \underline{\underline{r}}$ und der Verfestigungsregel $\underline{\dot{\alpha}} = \gamma \underline{\underline{h}}$. Um aus der Konsistenzbedingung einen Wert $\gamma > 0$ zu berechnen, setzen wir

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{,\sigma} \dot{\underline{\varepsilon}} + \mathbf{F}_{,\alpha} \dot{\underline{\alpha}}.$$

Darin schreiben wir kurz $\mathbf{F}_{,\sigma}$ für die partielle Ableitung der Fließfunktion nach dem Spannungstensor. Im ersten Summanden wird das elastische Stoffgesetz $\dot{\underline{\sigma}} = \mathbf{C} \dot{\underline{\varepsilon}}_e = \mathbf{C} (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}_p)$ substituiert. Dann folgt nach Einsetzen von Fließ- und Verfestigungsregel

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{,\sigma} : \mathbf{C} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \gamma (\mathbf{F}_{,\sigma} : \mathbf{C} : \underline{\underline{r}} - \mathbf{F}_{,\alpha} : \underline{\underline{h}}) .$$

Aus der Bedingung $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ folgt dann der plastische Multiplikator

$$\gamma = \frac{\langle \mathbf{F}_{,\sigma} : \mathbf{C} : \dot{\underline{\varepsilon}} \rangle}{\mathbf{F}_{,\sigma} : \mathbf{C} : \underline{\underline{r}} - \mathbf{F}_{,\alpha} : \underline{\underline{h}}} . \quad (6.20)$$

Durch Verwendung der Rampenfunktion $\langle \cdot \rangle$ wird formal die Eigenschaft $\gamma \geq 0$ garantiert. Für ein kinematisch verfestigendes Materialmodell mit der Fließfunktion $\mathbf{F} = \|s - \alpha\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_F$ und assoziativer Fließ- und Verfestigungsregel gilt

$$\underline{\underline{r}} = \mathbf{F}_{,\sigma} = \underline{\underline{n}}, \quad \mathbf{F}_{,\alpha} = -\underline{\underline{n}}, \quad \underline{\underline{h}} = H \underline{\underline{n}} .$$

Führt die Gleichung (6.20) auf das einfache Ergebnis

$$\gamma = \frac{\underline{\underline{n}} : \mathbf{C} : \dot{\underline{\varepsilon}}}{2\mu + H}$$

Bei assoziativer Plastizität sind die Tensoren $\underline{\underline{r}}$ und $\underline{\underline{h}}$ direkt proportional zu $\mathbf{F}_{,\sigma}$. Generell müssen diese Tensoren so mit der Fließfunktion abgestimmt sein, daß der Nenner $\mathbf{F}_{,\sigma} : \mathbf{C} : \underline{\underline{r}} - \mathbf{F}_{,\alpha} : \underline{\underline{h}} > 0$ der Gleichung (6.20) positiv ist.

6.3.6 Inkrementelles Stoffgesetz und Materialtangente

Mit dem Ergebnis für den plastischen Multiplikator können wir für das elastisch-idealplastische Modell das inkrementelle Stoffgesetz $\dot{\underline{\sigma}} = \mathcal{C}_{ep}\dot{\underline{\varepsilon}}$ mit der *Materialtangente*

$$\mathcal{C}_{ep} = \begin{cases} \mathcal{C} & \gamma = 0 \\ \mathcal{C} - \frac{\mathcal{C} : \underline{r} \otimes \mathcal{C} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}}{\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \mathcal{C} : \underline{r}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

angeben. Wir erhalten dieses Ergebnis aus den Gleichungen $\dot{\underline{\sigma}} = \mathcal{C} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathcal{C} : \dot{\underline{\varepsilon}_p}$ und $\mathcal{C} : \dot{\underline{\varepsilon}_p} = \gamma \mathcal{C} : \underline{r}$ nach Einsetzen der Formel für γ sowie der Nebenrechnung

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \mathcal{C} : \dot{\underline{\varepsilon}} (\mathcal{C} : \underline{r}) = \mathcal{C} : \underline{r} \otimes \mathcal{C} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \dot{\underline{\varepsilon}}.$$

Beispiel 6.7.

Wir nehmen die Fließfunktion in der Form

$$F(\underline{\sigma}) = \|\underline{s}\| - R$$

und eine assoziative Fließregel mit

$$\underline{r} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|}$$

an und bezeichnen

$$\frac{\underline{s}}{\|\underline{s}\|} = \underline{n}.$$

Für die spätere Verwendung vermerken wir hier die Eigenschaft $\mathbf{I} : \underline{n} = \text{tr}(\underline{n}) = 0$.

6.3.7 Beispiele

Wir spezifizieren die Beziehungen der klassischen Materialtheorie für den einachsigen Spannungszustand. Die Beispiele sollen den Zusammenhang zwischen den Materialgleichungen und den rheologischen Modellen verdeutlichen. Hierfür nehmen wir einachsige Dehnung an; die im Versuch auftretende Querdrückung wird vernachlässigt.



$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel 6.8.

Wir nehmen zunächst elastisch-idealplastisches Materialverhalten an. In der Fließbedingung nach von Mises ist

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma| = k = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_F \implies |\sigma| = \sigma_F.$$

Daraus ergibt sich die Fließfunktion

$$F(\sigma) = |\sigma| - \sigma_F.$$

Daraus ergibt sich die assoziative Fließregel

$$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \gamma \text{sgn}(\sigma).$$

Aus der ersten Kuhn-Tucker Bedingung $\gamma \geq 0$ folgt für $\gamma > 0$, daß die plastische Dehnung im Zugbereich wächst und im Druckbereich abnimmt. Die dritte Bedingung $F\gamma = 0$ besagt, daß diese Änderungen

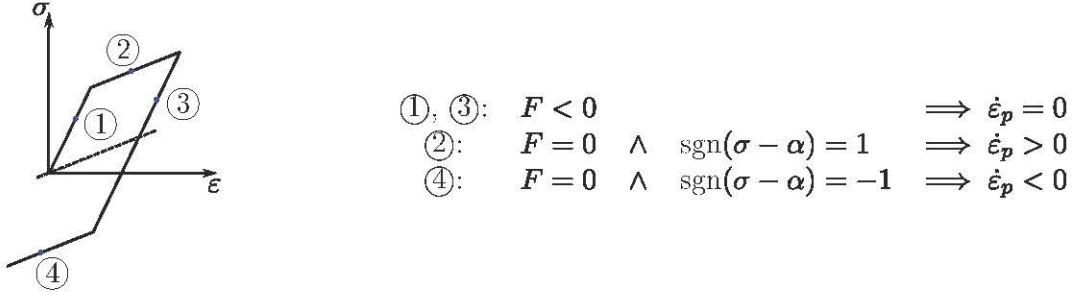


Abbildung 6.9: Fließgesetz und Fließregel für den Standardkörper

der plastischen Dehnung nur für $F = \mathbf{0}$, also $\sigma = \pm\sigma_F$ möglich sind. Für $F = \mathbf{0}$ gilt außerdem die Konsistenzbedingung $\gamma\dot{F} = \mathbf{0}$. Wir erhalten

$$\gamma \operatorname{sgn}(\sigma)\dot{\sigma} = \dot{\epsilon}_p \dot{\sigma} = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt, dass die Spannung bei Änderung der plastischen Dehnung konstant bleibt. Mit diesen Eigenschaften ist das plastische Verhalten des Prandtl'schen Elements mit $\mu = \sigma_F$ komplett beschrieben. Die elastisch-plastischen Materialgleichungen werden komplettiert durch das Hooke'sche Gesetz $\sigma = E\epsilon_e$ und die additive Zerlegung $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$. Damit folgt das inkrementelle Materialgesetz

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\epsilon} & F(\sigma) < 0 \quad \gamma = 0 \\ 0 & F(\sigma) = 0 \quad \gamma > 0 \end{cases}$$

Beispiel 6.9.

Zur Abbildung der kinematischen Verfestigung wird die Rückspannung α als innere Variable eingeführt. Die Fließbedingung lautet dann

$$F(\sigma, \alpha) = |\sigma - \alpha| - \sigma_F \leq 0,$$

daraus ergibt sich die assoziative Fließregel

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \gamma \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha).$$

In dem Diagramm aus Abb. 6.9 werden die Fließregel und das Fließgesetz an vier Punkten der Fließkurve des elastisch-plastischen Standardkörpers verdeutlicht. In der Fallunterscheidung wird die erste Kuhn-Tucker-Bedingung $\gamma \geq 0$ vorausgesetzt.

Für die Entwicklung der Rückspannungen gilt

$$\dot{\alpha} = \gamma H \operatorname{sgn}|\sigma - \alpha|.$$

Die Konsistenzbedingung $\gamma\dot{F} = \mathbf{0}$ führt dann auf

$$\gamma \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha)(\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) = |\dot{\epsilon}_p|(\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) = \mathbf{0}.$$

Die plastische Dehnung kann sich nur ändern wenn $\dot{\sigma} - \dot{\alpha} = \mathbf{0}$. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{0} = \dot{\sigma} - \dot{\alpha} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) - \gamma H \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha) = E\dot{\epsilon} - (E + H)\dot{\epsilon}_p$$

und somit die gesuchte Beziehung

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{E}{E + H}\dot{\epsilon}$$

Mit $\dot{\sigma} = H\dot{\epsilon}_p$ folgt dann für den Verfestigungsbereich die Beziehung $\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}$ mit $E_T = \frac{EH}{E + H}$. Das inkrementelle Materialgesetz lautet

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\epsilon} & F(\sigma) < 0 \quad \gamma = 0 \\ \frac{EH}{E+H}\dot{\epsilon} & F(\sigma) = 0 \quad \gamma > 0 \end{cases}.$$

Elastisch	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_e$
Dehnung	$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
Fliessfunktion	$F(\sigma) = \sigma - \sigma_F$
Fliessbedinung	$F \leq 0$
Fliessregel	$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma}$
	$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \operatorname{sgn}(\sigma)$
	$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha)$
Innere Variable	$\dot{\alpha} = H\gamma \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha)$
Kuhn-Tucker Bed.	$\gamma \geq 0 \quad F \leq 0 \quad \gamma F = 0$
Konsistenzbed.	$\gamma \dot{F} = 0 \text{ für } F = 0$
Mat.-Tangente $E_T =$	$\begin{cases} E\dot{\varepsilon} & F < 0, \gamma = 0 \\ 0 & F = 0, \gamma > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & F < 0, \gamma = 0 \\ \frac{EH}{E+H}\dot{\varepsilon} & F = 0, \gamma > 0 \end{cases}$

6.4 Schädigung und Versagen

Festkörper können äußere Lasten aufnehmen und reagieren auf diese Lasten mit Verformung. Die Fähigkeit zur Lastaufnahme bezeichnet man als Tragfähigkeit, den Verlust der Tragfähigkeit als *Versagen*. Das Tragverhalten von Materialien wird experimentell, z.B. im Zugversuch, ermittelt. In der Auswertung wird die Spannung σ über der Dehnung ε aufgetragen. Das Verhältnis σ/ε kennzeichnet die Steifigkeit des Materials. Bei vielen Materialien ist die Steifigkeit im elastischen Bereich nahezu konstant. Der Übergang von elastischem zu elastisch-plastischem Materialverhalten wird als Fließgrenze σ_F bezeichnet. Werkstoffe, die unmittelbar nach Überschreiten der Fließgrenze versagen, werden als *spröde* bezeichnet. Ein Material heißt *duktil* wenn sie auch nach Überschreiten der Fließgrenze noch tragfähig sind. Vor dem Versagen treten dann signifikante irreversible Dehnungen auf. Die Abb. 6.10 zeigt entsprechende Spannungs-Dehnungs-Diagramme. Bei spröden Materialien wird meist die Fließspannung als Versagens-

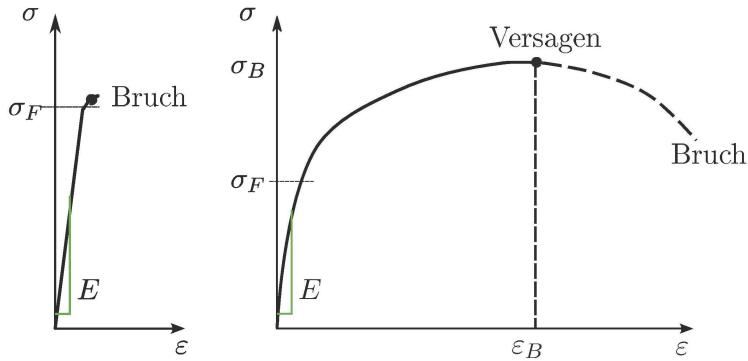


Abbildung 6.10: Spannungs-Dehnungs-Diagramme für a) sprödes und b) duktile Material. Der gestrichelte Bereich tritt in Zugproben bei Einschnürung auf, wenn sich die Probe vor dem Bruch noch bei sinkender Kraftaufnahme weiter dehnt (nach [8, S.41]).

kriterium angenommen. Für duktile Werkstoffe wird zusätzlich zur Fließgrenze auch eine Bruchgrenze (Spannung oder Dehnung) angegeben.

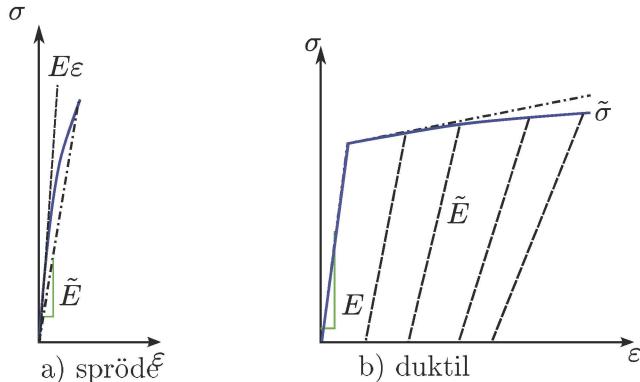


Abbildung 6.11: a) Spröde (elastische) Schädigung und b) duktile (elastisch-plastische) Schädigung

Bei makroskopischer Betrachtung erscheint das Versagen als plötzlicher Verlust der Tragfähigkeit bei Erreichen einer Belastungsgrenze. In der mikroskopischen Werkstoffanalyse lassen sich hingegen innere *Schädigungsmechanismen* nachweisen, die schon bei kleiner Last wirken und sich mit Laststeigerung quantitativ entwickeln. Aus dieser Sicht kann das Versagen als der qualitative Übergang der Schädigung aus dem mikroskopischen in den makroskopischen Bereich aufgefaßt werden. Bei Abbruch der Belastung vor der Versagensgrenze verbleiben die mikroskopischen Schädigungen im Werkstoff. Sie sind dann bei

erneuter Belastung auch in den makroskopischen Parametern, z.B. dem Elastizitätsmodul, nachweisbar. Die Abb. 6.11 zeigt links den Effekt der Schädigung im elastischen Bereich. Durch die Schädigung des Werkstoffs bei einer ersten Zugbelastung sinkt die Steifigkeit von E auf \tilde{E} bei erneuter Laststeigerung. In duktilen Materialien führt die Schädigung außerdem zu einer Entfestigung des Werkstoffes im Fließbereich, d.h. die aktuelle Fließspannung ist im geschädigten Material kleiner als im (hypothetischen) Fall eines ungeschädigten Werkstoffs wie in Abb. 6.11 (rechts) gezeigt.

Reale Werkstoffe haben mikroskopische Defekte, z.B. Einschlüsse und Poren. Die Defektkonstruktion verändert sich unter mechanischer Belastung. Einschlüsse sind natürliche Quellpunkte für die Ausbildung von Mikrorissen die sich unter Last verlängern und schließlich, ebenso wie die Mikroporen, zu makroskopischen Defekten zusammenwachsen. Die Abb. ?? illustriert diesen Prozess am Beispiel des duktilen Versagensmechanismus durch Porenwachstum. Das Wachsen und die Vereinigung von Mikroporen wird makroskopisch als duktile Schädigung wahrgenommen, während die Bildung und das Wachstum von Mikrorissen zum spröden Versagen führen [8, Kap.9].

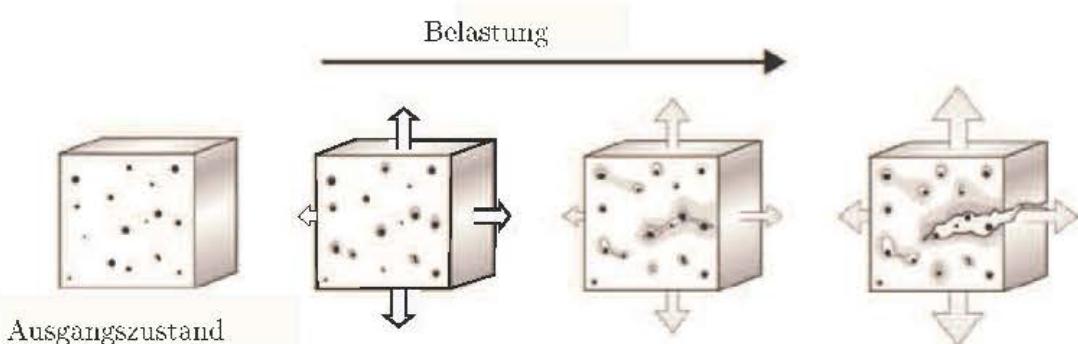


Abbildung 6.12: Innere Schädigung eines Materials durch Porenwachstum (nach [17])

In der Mikromechanik werden einerseits die Defekte und ihre Wechselwirkung auf der Mikroskala selbst und andererseits die Auswirkung dieser Effekte auf die makroskopischen Werkstoffeigenschaften untersucht (vgl. [8, S. 243]). Die homogenen Werkstoffeigenschaften der makroskopischen Betrachtung können als statistische Mittelung der Mikroskala aufgefasst werden. Ausgehend von einer statistischen Verteilung der Defekte innerhalb eines typischen Volumenelements wird durch *Homogenisierung* auf die effektiven makroskopischen Materialkenngrößen geschlossen. Die Schädigung kann dann durch Vergleich der gemittelten Kenngrößen des mikroskopisch inhomogenen Werkstoffs mit den Parametern des ideal (d.h. auch mikroskopisch) homogenen Volumenelements quantifiziert werden.

Die homogenisierten Materialgrößen werden für *repräsentative Volumenelemente* (RVE) ermittelt. Das Volumenelement ist so zu wählen dass die darin vorhandenen Defekte, unter den geltenden statistischen Annahmen, das makroskopische Werkstoffverhalten ausreichend genau wiedergeben. Die Größe der RVE für einige Werkstoffe ist in Tab. 6.3 angegeben.

Tabelle 6.3: Größe der RVE (aus [14, p.71])

Werkstoff	Inhomogenitäten	RVE
Metalle	Kristalle 1 μm – 1mm	0.5 × 0.5 × 0.5 mm
Polymere	Moleküle 10 μm – 0.05mm	1 × 1 × 1 mm
Holz	Fasern 0.1mm–1mm	1 × 1 × 1cm
Beton	Granulat ~1cm	10 × 10 × 10cm

Bei steigender Belastung nimmt die Schädigung zu und führt schließlich zum Versagen der RVE. Da der Grad der Schädigung jeweils vom Spannungszustand in den einzelnen RVEs abhängt, handelt es sich um lokales Versagen, welches z.B. in der FEM durch Lösen einzelner Elemente realisiert wird.

In den makromechanischen Materialgesetzen wird die Auswirkung mikroskopischer Effekte über *Schädigungsparameter* erfasst. Im geschädigten Material wird die äußere Kraft effektiv nicht über die gesamte

Schnittfläche A sondern nur über eine effektive Fläche $\tilde{A} < A$ aufgenommen; vgl. Abb. 6.13.

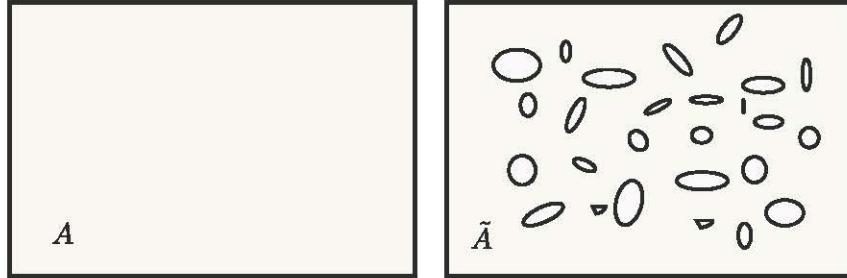


Abbildung 6.13: Ungeschädigter und geschädigter Querschnitt

Unter der Annahme daß sich die effektive Fläche als Differenz aus der Gesamtfläche A und einer "Defektfläche" [8] A_D ergibt, gilt

$$\tilde{A} = A(1 - D)$$

mit dem Schädigungsparameter

$$D = \frac{dA_D}{dA}.$$

Der *effektive Spannungsvektor* wird dann entsprechend definiert als

$$\tilde{\sigma} = \lim_{d\tilde{A} \rightarrow 0} \frac{dF}{d\tilde{A}} = \frac{\sigma}{(1 - D)}$$

Die effektiven Spannungen $\tilde{\sigma} > \sigma$ sind bei gleicher Last größer als die Spannungen im idealisierten Material. Bei linear-elastischem Materialverhalten gilt

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1 - D)} = \frac{\sigma}{\tilde{E}}.$$

Die Beziehung zwischen effektiver Spannung und Dehnung kann also alternativ über einen effektiven Elastizitätsmodul $\tilde{E} = E(1 - D)$ dargestellt werden. Da D bei steigender Belastung wächst, entsprechen einer vorgegebenen Dehnung ϵ zunehmend geringere Effektivspannungen $\tilde{\sigma}$, wie in Abb. ?? gezeigt. Bei Entlastung bilden sich die Verformungen entlang der Linie $\tilde{\sigma} = \tilde{E}\epsilon$ komplett zurück. Die Fläche unter der Entlastungslinie stellt den reversiblen Energieanteil dar, während die Fläche zwischen Be- und Entlastungslinie die bei der Schädigung dissipierte Arbeit quantifiziert [8]; s. Abb. ??a). Bei duktiler Schädigung kommt es außerdem zur Entfestigung des Materials, d.h. zu einem Sinken der Fließ- und Versagensgrenzen für Spannungen und Dehnungen.

Die Abb. 6.14 zeigt Messergebnisse für die duktile Schädigung. Zu erkennen ist das Anwachsen des Schädigungsparameters D bei steigender Dehnung der Materialprobe.

Die Abhängigkeit des Schädigungsparameters D von der Vergleichsdehnung ϵ_v lässt sich mit guter Näherung linear approximieren über die Formel

$$D = D_c \frac{\langle \epsilon_v - \epsilon_{vD} \rangle}{\epsilon_{vB} - \epsilon_{vD}}$$

mit den Bezeichnungen

D_c : Kritische Schädigung (critical value of damage parameter),

ϵ_{vD} : Schädigungsschwelle (true strain at the damage threshold),

ϵ_{vb} : Bruchdehnung (true strain at fracture).

und der Vereinbarung, daß der mit $\langle \rangle$ bezeichnete Klammerwert zu Null wird wenn die Zahl innerhalb der Klammern negativ ist. Werte für verschiedene Werkstoffe sind z.B. in [14, p.364] tabelliert.

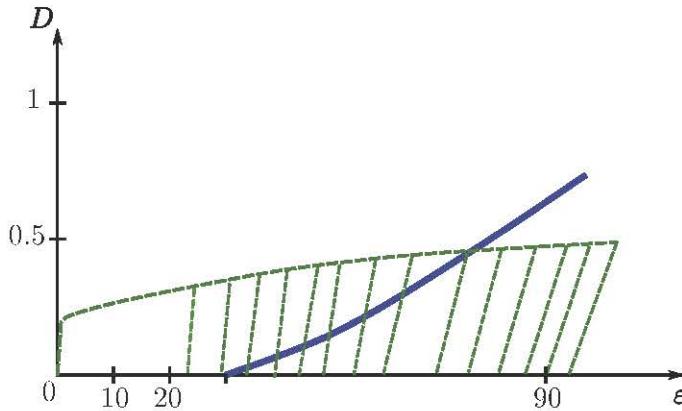


Abbildung 6.14: Duktile Schädigung, Cu/Al-Legierung bei $T = 20$ mit $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} s^{-1}$; skizziert nach [14, p.354]

Mikroschädigungen können auch mittels Ultraschall gemessen werden. In linear-elastischen isotropen Festkörpern gilt für die Schallgeschwindigkeit von Längswellen

$$c_L^2 \sim \frac{E}{\rho}.$$

Unter der Annahme, daß der Effekt der Schädigung auf die Dichte vernachlässigbar ist [14, p.355] gilt für die Ausbreitung im geschädigten Medium entsprechend

$$\tilde{c}_L^2 \sim \frac{\tilde{E}}{\rho}$$

und somit

$$D = 1 - \frac{\tilde{c}_L^2}{c_L^2}.$$

In duktilen Materialien tritt die Schädigung erst nach Fließbeginn ein. Bei steigender Belastung muss der Effekt durch Modifikationen in der Fließbedingung bzw. Fließregel erfasst werden. Die Entlastung verläuft dann jeweils entlang der, durch den aktuellen effektiven E-Modul charakterisierten, elastischen Geraden wie in Abb. 6.11b) gezeigt.

Entsprechend der Annahme daß die duktile Schädigung mit dem Wachstum von Mikroporen zusammenhängt, wird die Porosität

$$f = \frac{V_p}{V} \quad (6.1)$$

als Schädigungsparameter eingeführt. Darin bezeichnet V_p das Porenvolumen im Verhältnis zum Gesamtvolumen V des RVE, also ist $f \leq 1$. Da sich mit steigender Last das Porenvolumen erhöht kann nicht mehr angenommen werden dass die plastischen Stoffgesetze volumenneutral sind und somit nur von der 2. Invariante des Deviators $J_2(s)$ abhängen. Vielmehr führt das Porenwachstum zur Volumenänderung entsprechend

$$\frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon}_{kk}^p.$$

Da diese Volumenänderung allein durch das Porenwachstum bedingt ist gilt

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk}^p.$$

Die Volumendehnung ist mit der hydrostatischen Spannung $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ verknüpft. Die duktilen Fließbedingungen haben, unter Einbeziehung des Schädigungsparameters und der hydrostatischen Spannung, die allgemeine Form

$$F(J_1(\sigma), J_2(s), f) = 0.$$

Von Gurson wurde 1977 die Fließbedingung

$$F_G = \frac{\sigma_e^2}{k^2} + 2f \cosh \frac{3\sigma_m}{2k} - (1 + f^2) = 0 \quad (6.2)$$

vorgeschlagen (zitiert nach [8, S.325]). Hierin ist $k = \bar{\sigma}$ die aktuelle Fließspannung des Materials und $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ die effektive Spannung. Mit $\sigma_m = J_1(\sigma)/3$ und $J_2(s) = s_{ij}s_{ij}/2$ erhält man

$$F_G(J_1(\sigma), J_s(s), f) = \frac{3J_2(s)}{k^2} + 2f \cosh \frac{J_1(\sigma)}{2k} - (1 + f^2) = 0.$$

Die Fließregel lautet

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.3)$$

Die Gurson'sche Fließbedingung wurde von Tvergaard und Needleman modifiziert

$$F_{TN} = \frac{3J_2(s)}{k^2} + 2q_1 f^* \cosh \frac{q_2 J_1(\sigma)}{2k} - (1 + (q_1 f^*)^2) = 0. \quad (6.4)$$

Die modifizierte Regel enthält mit q_1 und q_2 zusätzliche Materialparameter für die Anpassung an Versuchsergebnisse, und die Funktion $f^*(f)$ wird so gewählt, dass Versagen bereits bei einer Porosität von ca. 25% eintritt [8, S.326].

Literaturverzeichnis

- [1] H. ALTBACH, *Kontinuumsmechanik, 3. Aufl.*, Springer, Berlin, 2015.
- [2] E. D. C. ANDRADE, *On the viscous flow in metals, and allied phenomena*, Proc. Royal Soc. A, (1910).
- [3] K. BATHE, *Finite Elemente Methoden, 2. Aufl.*, Springer, Berlin, 2002.
- [4] T. BELYTSCHKO, K. WING, AND B. MORAN, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, J. Wiley, New York, 2001.
- [5] T. BONET AND D. WOOD, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, J. Wiley, New York, 2008.
- [6] W. DETTMER AND S. REESE, *On the theoretical and numerical modelling of armstrongâ€¢frederick kinematic hardening in the finite strain regime*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., (2004).
- [7] D. GROSS, W. HAUGER, W. SCHNELL, AND P. WRIGGERS, *Technische Mechanik 4*, Springer, Berlin, 2004.
- [8] D. GROSS AND T. SEELIG, *Bruchmechanik, Mit einer Einführung in die Mikromechanik*, Springer, Berlin, 2007.
- [9] P. HAUPT, *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer, Berlin, 2002.
- [10] G. HOLzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics*, J. Wiley, New York, 2001.
- [11] G. HONG, *Numerical analysis of the large deflections of an elastic-plastic beam*, Applied Mathematics and Mechanics, (2000).
- [12] R. HORN AND C. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [13] A. KIELBASINSKI AND H. SCHWETLICK, *Numerische Lineare Algebra*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [14] J. LEMAITRE AND J.-L. CHABOCHE, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [15] F. MAINARDI AND G. SPADA, *Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology*, The European Physical Journal, (2011).
- [16] K. NAUMENKO, *Modeling of High-Temperature Creep for Structural Analysis Applications*, Habilitationsschrift, Halle/Saale, 2006.
- [17] F. REUSCH, *Entwicklung und Anwendung eines nicht-lokalen Materialmodells zur Simulation duktiler Schädigung in metallischen Werkstoffen*, Dissertation, Universität Dortmund, Fakultät Maschinenbau, 2003.
- [18] J. RÖSLER, H. HARDERS, AND M. BÄKER, *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe, 4. Aufl.*, Springer, Berlin, 2012.
- [19] W. RUST, *Nichtlineare Finite Elemente Berechnungen, 2. Aufl.*, Springer, Berlin, 2011.
- [20] J. SIMO AND T. HUGHES, *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- [21] P. WRIGGERS, *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*, Springer, Berlin, 2001.