

4 Steifigkeitseigenschaften von Strukturelementen

Ein wesentlicher Bestandteil der Matrizenverschiebungsmethode ist die Bereitstellung einer Bibliothek von Strukturelementen, die bei der Idealisierung der Struktur Verwendung finden sollen. Die Steifigkeitseigenschaften der Elemente werden durch Kraft-Verschiebungs-Beziehungen von der Form

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{k}^* \boldsymbol{\varphi}^* \quad (4.1)$$

beschrieben, wobei \mathbf{P}^* bzw. $\boldsymbol{\varphi}^*$ der Spaltenvektor der Knotenkräfte bzw. Knotenverschiebungen und \mathbf{k}^* die Elementsteifigkeitsmatrix ist. Der Stern soll anzeigen, daß sich die Größen auf ein geeignetes lokales, kartesisches Koordinatensystem beziehen. Zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}^* können verschiedene Verfahren angewandt werden:

1. das Einheitsverschiebungsgesetz
2. der erste Satz von Castigliano
3. Lösung der Differentialgleichungen für die Elementverschiebungen
4. die Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix

Im folgenden wird das Einheitsverschiebungsgesetz bevorzugt.

Wir betrachten ein Element (Bild 4.1), an dessen n Knoten die Kräfte

$$\mathbf{P}^* = \{P_1^* \ P_2^* \dots P_i^* \ P_j^* \dots P_n^*\} \quad (4.2)$$

angreifen. Die entsprechenden Knotenverschiebungen seien

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \{\varphi_1^* \ \varphi_2^* \dots \varphi_i^* \ \varphi_j^* \dots \varphi_n^*\} \quad (4.3)$$

Die Kraft P_i^* lässt sich auf Grund des Einheitsverschiebungsgesetzes (2.4) berechnen zu

$$P_i^* = \int_v \underline{\epsilon}_i^{*t} \underline{\sigma}^* dv \quad (4.4)$$

wobei $\underline{\epsilon}_i^*$ die mit der Einheitsverschiebung $\varphi_i^* = 1$ kinematisch verträglichen Dehnungen und $\underline{\sigma}^*$ die wahren Spannungen infolge der Knotenkräfte \mathbf{P}^* sind.

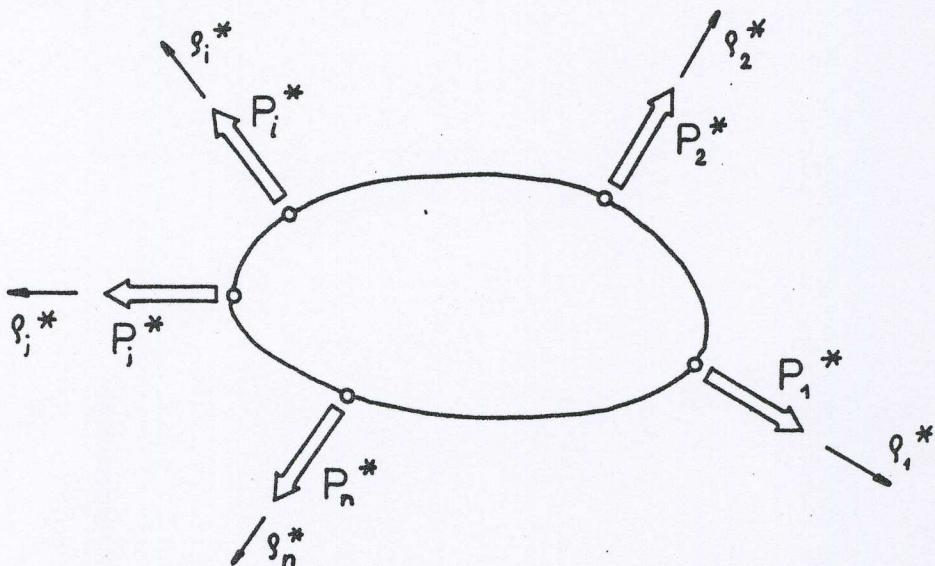


Bild 4.1 Zur Herleitung der Element-Steifigkeitsmatrix

Es lassen sich n Gleichungen vom Typ (4.4) aufstellen und zusammenfassen zu

$$\mathbf{P}^* = \int_v \underline{\epsilon}^{*t} \underline{\sigma}^* dv \quad (4.5)$$

mit der Zeilenmatrix

$$\underline{\epsilon}^* = [\underline{\epsilon}_1^* \ \underline{\epsilon}_2^* \dots \ \underline{\epsilon}_i^* \ \underline{\epsilon}_j^* \dots \ \underline{\epsilon}_n^*] \quad (4.6)$$

Im Rahmen einer linearen Theorie kann eine Beziehung zwischen den Verschiebungen φ^* der Knotenpunkte und der wirklichen Dehnungsverteilung $\underline{\epsilon}^*$ im Element prinzipiell in der Form

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^* &= \alpha^* \varphi^* & u^*(x, y, z) &= \omega \cdot s^* \\ & \underline{\epsilon}^* = \mathcal{D}^t \cdot \underline{u}^* = \underbrace{(\mathcal{D}^t \cdot \omega)}_{\alpha^*} s^* & \underline{\epsilon}^* &= \mathcal{D}^t \cdot \underline{u}^* = (\mathcal{D}^t \cdot \omega) s^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

aufgestellt werden, wobei zunächst offen bleibt, wie die Matrix α^* bestimmt werden soll. Mit (4.7) erhält man aus (1.11)

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{E} \alpha^* \varphi^* \quad (4.8)$$

und mit (4.8) aus (4.5)

$$\mathbf{P}^* = \int_v^{*t} \underline{\epsilon} \mathbf{E} \alpha^* dv \varphi^* \quad (4.9)$$

Führt man die Abkürzung (Steifigkeitsmatrix)

$$\mathbf{k}^* = \int_v^{*t} \underline{\epsilon} \mathbf{E} \alpha^* dv \quad (4.10)$$

ein, so erhält man die Kraft-Verschiebungs-Beziehung für das Struktur-Element

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{k}^* \varphi^* \quad (4.1)$$

Während die Matrix $\underline{\epsilon}^*$, die die mit den Einheitsverschiebungen lediglich kinematisch verträglichen Dehnungen repräsentiert, selbst bei komplizierten Strukturen ohne Schwierigkeit gefunden werden kann, ist es meist außerordentlich schwierig, wenn nicht unmöglich, die Matrix α^* aufzustellen. Man muß sich fast immer mit Näherungsansätzen begnügen. Beschränkt man sich auf die kinematische Verträglichkeit, so tritt an Stelle der Matrix α^* die Matrix $\underline{\alpha}^*$. Aus der Definition von $\underline{\alpha}^*$ und der Gleichung (4.7) folgt

$$\underline{\epsilon}^* = \underline{\alpha}^*$$

Aus der Gleichung (4.10) wird somit

$$\mathbf{k}^* \approx \int_v^{*t} \underline{\alpha}^* \mathbf{E} \underline{\alpha}^* dv \quad (4.11)$$

4.1 Die Steifigkeitsmatrix des Stabelements

Gleichung (4.11) soll nunmehr auf den Gelenkstab des Bildes 4.2 angewandt werden.

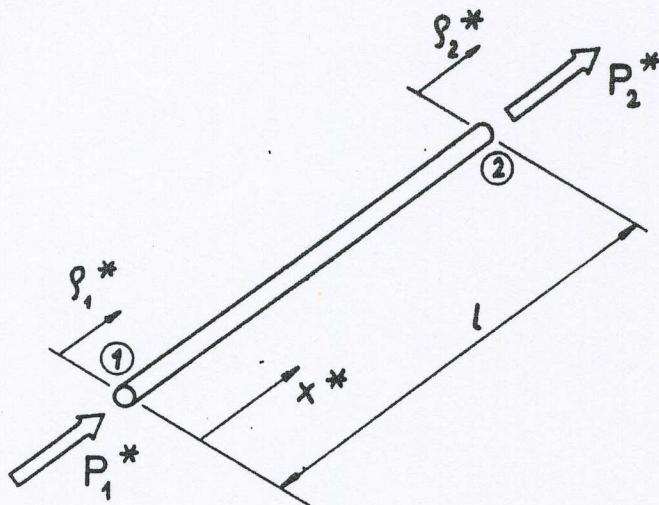


Bild 4.2 Gelenkstab-Element

Für die Verschiebung u_x^* eines beliebigen Punktes des Stabes gilt die lineare Beziehung

$$u_x^* = \rho_1^* + (\rho_2^* - \rho_1^*) \frac{x^*}{l} \quad (4.12)$$

Man erkennt, daß für

$$x^* = 0 \quad u_x^* = \rho_1^* \text{ und für } x^* = l \quad u_x^* = \rho_2^* \text{ ist.}$$

Die Gleichungen (1.3) reduzieren sich beim Stab auf

$$\epsilon_{xx}^* = \frac{du_x^*}{dx^*}$$

Mit (4.12) wird $\epsilon_{xx}^* = \frac{1}{l} (\rho_2^* - \rho_1^*)$

in Matrixform

$$\epsilon_{xx}^* = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Die Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung (4.12) ist nicht nur kinematisch verträglich, sondern exakt. Deshalb ist

$$\underline{\alpha}^* = \alpha^* = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Setzt man (4.14) in (4.11) ein und berücksichtigt, daß für den Stab $E = E$ und $dV = dA dx^*$ ist, so wird

$$\begin{aligned} k^* &= \int_0^l \frac{1}{I} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{I} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} Adx^* \\ k^* &= \frac{AE}{I} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Kraft-Verschiebungs-Beziehung für den Gelenkstab lautet somit

$$\begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.2 Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix vom lokalen in das globale Koordinatensystem

Für die Bestimmung der Steifigkeitseigenschaften der gesamten Struktur bedarf es eines für alle Elemente gemeinsamen Koordinatensystems, auf das sich alle Verschiebungen und die ihnen entsprechenden Kräfte beziehen.

Dieses globale Koordinatensystem wird zweckmäßigerweise so gewählt, daß die Koordinatenebenen mit etwa vorhandenen Symmetrieebenen der zu berechnenden Struktur zusammenfallen. Häufig genügt es - unter Ausnutzung von Symmetrien - nur die Hälfte, ein Viertel, eventuell einen noch kleineren Teil der Struktur zu idealisieren. Hierdurch reduziert sich der Aufwand für die Berechnung erheblich.

Die Elementsteifigkeitsmatrizen, die zunächst in einem angemessenen lokalen Koordinatensystem aufgestellt worden sind, können mit Hilfe von Transformationsmatrizen auf das globale Koordinatensystem umgerechnet werden.

Zur Herleitung der gesuchten Transformationsmatrix führt man zunächst die Matrix \mathbf{a}^* , die eine Beziehung zwischen den Knotenpunktverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}^*$ im lokalen System und den Knotenpunktverschiebungen $\boldsymbol{\varphi}$ im globalen System herstellt:

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{a}^* \boldsymbol{\varphi} \quad (4.17)$$

Für virtuelle Verschiebungen gilt entsprechend

$$\delta \boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{a}^* \delta \boldsymbol{\varphi} \quad (4.18)$$

Arbeit ist eine physikalische Größe, die vom gewählten Koordinatensystem unabhängig ist, sodaß gilt

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} &= \delta \boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{P}^* \\ \text{bzw. } \delta \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} - \delta \boldsymbol{\varphi}^{*T} \mathbf{P}^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei \mathbf{P} die den Verschiebungen $\boldsymbol{\varphi}$ entsprechenden Kräfte im globalen Koordinatensystem sind.

Mit (4.18) erhält man aus (4.19)

$$\delta \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{P} - \mathbf{a}^{*T} \mathbf{P}^*) = 0 \quad (4.20)$$

Da $\delta \boldsymbol{\varphi}$ beliebig sein kann, folgt aus (4.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} - \mathbf{a}^{*T} \mathbf{P}^* &= 0 \\ \mathbf{P} &= \mathbf{a}^{*T} \mathbf{P}^* \end{aligned} \quad (4.21)$$

Mit (4.1) und (4.17) wird aus (4.21)

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}^{*T} \mathbf{k}^* \mathbf{a}^* \boldsymbol{\varphi} \quad (4.22)$$

Führt man die Abkürzung bzw. Rechenvorschrift ein

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}^* \mathbf{k}^* \mathbf{a}^* \quad (4.23)$$

so lässt sich die Kraft-Verschiebungs-Beziehung im globalen Koordinatensystem in der Form schreiben

$$\mathbf{P} = \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi} \quad (4.24)$$

4.3 Matrix \mathbf{a}^* und Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} für den Gelenkstab

Wir betrachten einen im Raum beliebig orientierten Gelenkstab (Bild 4.3).

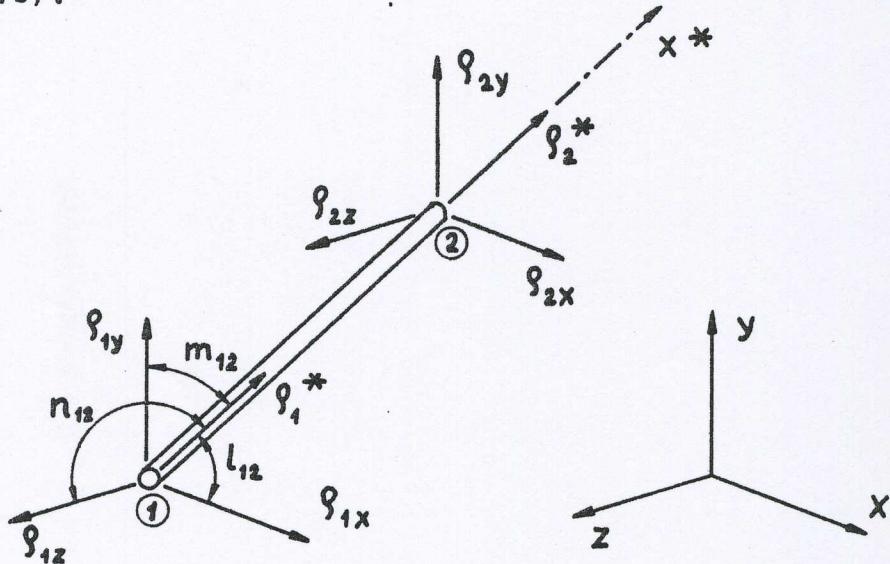


Bild 4.3 Die Verschiebungen des Gelenkstabs im lokalen und globalen Koordinatensystem

Mit den Richtungskosinusen

$$\begin{aligned} l_{12} &= \cos(\overline{12}, x) \\ m_{12} &= \cos(\overline{12}, y) \\ n_{12} &= \cos(\overline{12}, z) \end{aligned} \quad (4.25)$$

erhält man für den Zusammenhang zwischen den globalen und lokalen Verschiebungen

$$\begin{aligned}\rho_1^* &= l_{12} \rho_{1x} + m_{12} \rho_{1y} + n_{12} \rho_{1z} \\ \rho_2^* &= l_{12} \rho_{2x} + m_{12} \rho_{2y} + n_{12} \rho_{2z}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Die zur Stabsachse senkrechten Komponenten von ρ_{ix} , ρ_{iy} und ρ_{iz} rufen keine Längsverformung hervor, sondern bewirken nur eine Starrkörperverschiebung senkrecht zur Stabsache (kleine Verschiebungen vorausgesetzt). In Matrzenschreibweise lautet (4.26):

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{1x} \\ \rho_{1y} \\ \rho_{1z} \\ \rho_{2x} \\ \rho_{2y} \\ \rho_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ein Vergleich mit (4.17) liefert

$$\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Mit (4.28) und (4.15) wird aus (4.23)

$$K = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} & l_{12}n_{12} & -l_{12}^2 & -l_{12}m_{12} & -l_{12}n_{12} \\ m_{12}l_{12} & m_{12}^2 & m_{12}n_{12} & -m_{12}l_{12} & -m_{12}^2 & -m_{12}n_{12} \\ n_{12}l_{12} & n_{12}m_{12} & n_{12}^2 & -n_{12}l_{12} & -n_{12}m_{12} & -n_{12}^2 \\ \hline -l_{12}^2 & -l_{12}m_{12} & -l_{12}n_{12} & l_{12}^2 & l_{12}m_{12} & l_{12}n_{12} \\ -m_{12}l_{12} & -m_{12}^2 & -m_{12}n_{12} & m_{12}l_{12} & m_{12}^2 & m_{12}n_{12} \\ -n_{12}l_{12} & -n_{12}m_{12} & -n_{12}^2 & n_{12}l_{12} & n_{12}m_{12} & n_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Führt man die Untermatrix ein

$$k_o = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} & l_{12}n_{12} \\ m_{12}l_{12} & m_{12}^2 & m_{12}n_{12} \\ n_{12}l_{12} & n_{12}m_{12} & n_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

lässt sich schreiben

$$k_{6x6} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} k_o & -k_o \\ -k_o & k_o \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

4.4 Die Steifigkeitsmatrix des Balkenelements

Es wird ein gerades Balkenelement mit konstantem Querschnitt gewählt, das belastbar ist durch

Axialkräfte P_1^* und P_7^*

Querkräfte P_2^* , P_3^* , P_8^* und P_9^*

Torsionsmomente P_4^* und P_{10}^*

Biegemomente P_5^* , P_6^* , P_{11}^* und P_{12}^*

Die positiven Richtungen der Kräfte werden gemäß Bild 4.4 vereinbart. Die entsprechenden Verschiebungen ρ_1^* , ..., ρ_{12}^* sind positiv, wenn sie in die positiven Richtungen der Kräfte weisen.

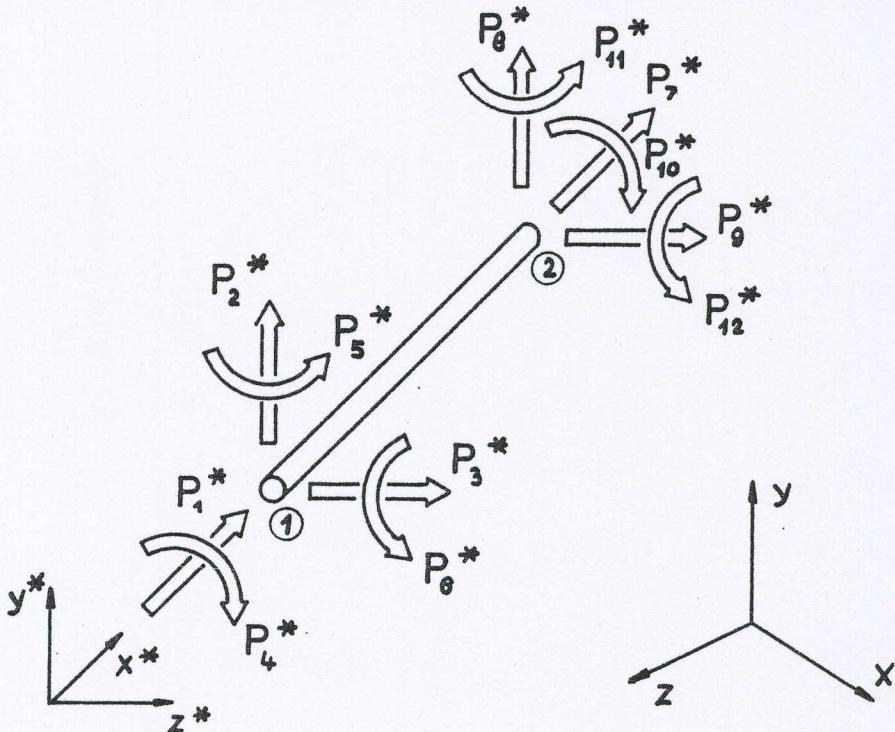


Bild 4.4 Kräfte am Balkenelement

Die Steifigkeitsmatrix ist vom Typ 12×12 . Wählt man das lokale x^* , y^* , z^* -System so, daß die Hauptachsen des Querschnitts in der x^* , y^* - bzw. x^* , z^* -Ebene liegen, sind Verschiebungen in der x^* , y^* -Ebene nur mit den Querkräften P_2^* , P_8^* und den Biegemomenten

P_6^* , P_{12}^* und entsprechend die Verschiebungen in der x^* , z^* -Ebene nur mit Querkräften P_3^* , P_9^* und den Biegemomenten P_5^* , P_{11}^* verknüpft. Die Steifigkeitsmatrix k^* hat somit den prinzipiellen Aufbau gemäß Gleichung (4.32).

Man erkennt, daß ein Koeffizient k_{ij} interpretiert werden kann als diejenige "Kraft", die in Richtung des Freiheitsgrades i wirkt, wenn für den Freiheitsgrad j die Einheitsverschiebung $\rho_j^* = 1$ gewählt wird und alle anderen Freiheitsgrade unterdrückt sind.

Beispiel: für $\rho_2^* = 1$ und alle anderen $\rho_i^* = 0$

$$\text{ist } P_6^* = k_{62} \cdot \rho_2^* = k_{62} \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix}
 P_1^* \\
 P_2^* \\
 P_3^* \\
 P_4^* \\
 P_5^* \\
 P_6^* \\
 P_7^* \\
 P_8^* \\
 P_9^* \\
 P_{10}^* \\
 P_{11}^* \\
 P_{12}^*
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & k_{26} & 0 & k_{28} & 0 & 0 & 0 & k_{2,12} \\
 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} & 0 & 0 & 0 & k_{39} & 0 & k_{3,11} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} & 0 & 0 & 0 & k_{59} & 0 & k_{5,11} & 0 \\
 0 & k_{62} & 0 & 0 & 0 & k_{66} & 0 & k_{68} & 0 & 0 & 0 & k_{6,12} \\
 k_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_{82} & 0 & 0 & 0 & k_{86} & 0 & k_{88} & 0 & 0 & 0 & k_{8,12} \\
 0 & 0 & k_{93} & 0 & k_{95} & 0 & 0 & 0 & k_{99} & 0 & k_{9,11} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_{11,3} & 0 & k_{11,5} & 0 & 0 & 0 & k_{11,9} & 0 & k_{11,11} & 0 \\
 0 & k_{12,2} & 0 & 0 & 0 & k_{12,6} & 0 & k_{12,8} & 0 & 0 & 0 & k_{12,12}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \rho_1^* \\
 \rho_2^* \\
 \rho_3^* \\
 \rho_4^* \\
 \rho_5^* \\
 \rho_6^* \\
 \rho_7^* \\
 \rho_8^* \\
 \rho_9^* \\
 \rho_{10}^* \\
 \rho_{11}^* \\
 \rho_{12}^*
 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Wegen des Reziprozitätssatzes von Maxwell ist die Steifigkeitsmatrix stets symmetrisch:

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (4.33)$$

Im folgenden sollen die einzelnen Koeffizienten bestimmt werden.

4.4.1 Die Koeffizienten k_{11} , k_{17} , k_{71} und k_{77}

Die Koeffizienten k_{11} , k_{17} , k_{71} und k_{77} können aus der Steifigkeitsmatrix für den Gelenkstab gemäß (4.16) übernommen werden:

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{77} = \frac{AE}{l} \\ k_{71} &= k_{17} = -\frac{AE}{l} \end{aligned} \quad (4.34)$$

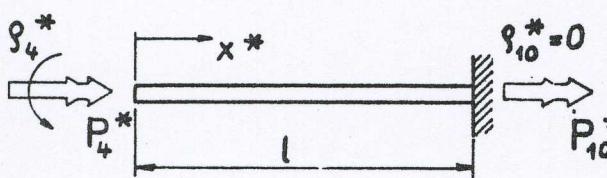
4.4.2 Die Koeffizienten k_{44} , $k_{4,10}$, $k_{10,4}$ und $k_{10,10}$ 

Bild 4.5 a

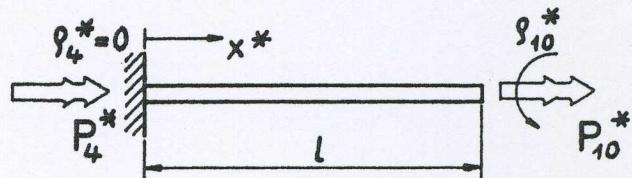


Bild 4.5 b

Torsionsmomente P_4^* und P_{10}^*

Denkt man sich den Balken nach Bild 4.5 a rechts eingespannt, so ist $\rho_{10}^* = 0$ und

$$\begin{aligned} P_4^* &= \frac{GI_t}{l} \rho_4^* \\ \text{somit } k_{44} &= \frac{P_4^*}{\rho_4^*} = \frac{GI_t}{l} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Wegen des Momentengleichgewichts bezüglich der x-Achse ist

$$\begin{aligned} P_{10}^* &= -P_4^* = -\frac{GI_t}{l} \rho_4^* \\ \text{hieraus } k_{10,4} &= \frac{P_{10}^*}{\rho_4^*} = -\frac{GI_t}{l} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aus Bild 4.5 b findet man

$$P_{10}^* = \frac{GI_t}{l} \rho_{10}^*; k_{10,10} = \frac{P_{10}^*}{\rho_{10}^*} = \frac{GI_t}{l} \quad (4.37)$$

$$P_4^* = -P_{10}^* = -\frac{GI_t}{l} \rho_{10}^*; k_{4,10} = \frac{P_4^*}{\rho_{10}^*} = -\frac{GI_t}{l} \quad (4.38)$$

4.4.3 Die Koeffizienten k_{22} , k_{62} , k_{82} , $k_{12,2}$, k_{88} und $k_{12,8}$

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix, die mit den Verschiebungen ρ_2^* und ρ_8^* multipliziert werden, denkt man sich das Balkenelement an beiden Enden eingespannt (Bild 4.6). Hierdurch wird erreicht, daß die Verschiebungen (eigentlich Rotationen) $\rho_6^* = \rho_{12}^* = 0$ sind. Es sind dann die Kräfte und Momente zu finden, die die Verschiebungen ρ_2^* bzw. ρ_8^* erzwingen.

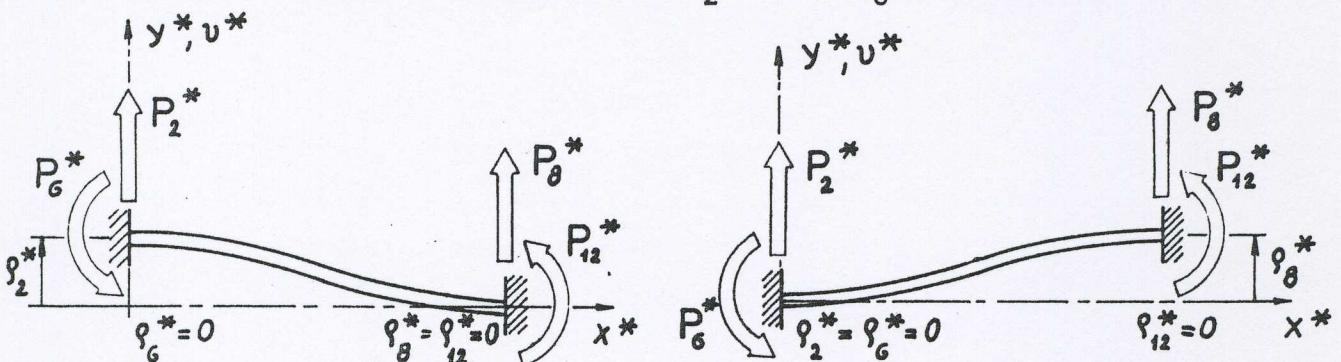


Bild 4.6 a

Bild 4.6 b

Zur Bestimmung der Koeffizienten k_{22} , k_{62} , k_{82} , $k_{12,2}$, k_{88} und $k_{12,8}$

Die Verschiebung eines Balkenpunktes in y^* -Richtung erhält man durch die Überlagerung

$$v^* = v_b^* + v_s^* \quad (4.39)$$

Für den von der Schubbeanspruchung verursachten Anteil v_s^* gilt (siehe z.B. [1.2])

$$\frac{dv_s^*}{dx^*} = - \frac{P_2^*}{GA_s} \quad (4.40)$$

mit G Schubmodul und A_s effektiver Schubquerschnitt *). Für den von der Biegebeanspruchung hervorgerufenen Anteil v_b^* gilt die Differentialgleichung der elementaren Biegetheorie

$$EI_z \frac{d^2 v_b^*}{dx^{*2}} = P_2^* \cdot x^* - P_6^* \quad (4.41)$$

*) Der effektive Schubquerschnitt berechnet sich nach $A_s = A/\kappa$. Bezuglich κ siehe z.B. [1.6], S.C24 oder [1.7], p.201 oder Programm SPABAQ.

Die Gleichungen (4.40) und (4.41) werden integriert und in (4.39) eingesetzt:

$$EI_z v^* = \frac{P_2^* x^{*3}}{6} - \frac{P_6^* x^{*2}}{2} + (C_1 - \frac{P_2^* EI_z}{GA_s}) x^* + C_2 \quad (4.42)$$

Die Randbedingungen

$$\frac{dv^*}{dx^*} = \frac{dv_s^*}{dx^*} = -\frac{P_2^*}{GA_s} \quad \text{für } x^* = 0 \text{ und } x^* = 1$$

sowie $v^*(1) = 0$

gestatten die Berechnung der Konstanten C_1 und C_2 und liefern zudem einen Zusammenhang zwischen den Knotenkräften P_2^* und P_6^* . Man erhält

$$EI_z v^* = \frac{P_2^* x^{*3}}{6} - \frac{P_6^* x^{*2}}{2} - \frac{P_2^* \phi l^2 x^*}{12} + (1+\phi) \frac{P_2^* l^3}{12} \quad (4.43)$$

$$\text{worin } \phi = \frac{12 EI_z}{GA_s l^2} \quad (4.44)$$

$$\text{und } P_6^* = \frac{P_2^* l}{2} \quad (4.45)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen findet man

$$P_8^* = -P_2^* \quad (4.46)$$

$$P_{12}^* = -P_6^* + P_2^* l \quad (4.47)$$

Für $x^* = 0$ wird das v^* in Gleichung (4.43) zu ρ_2^* :

$$\rho_2^* = \frac{(1+\phi) l^3}{12 EI_z} P_2^* \quad (4.48)$$

$$\text{hieraus } k_{22} = \frac{P_2^*}{\rho_2^*} = \frac{12 EI_z}{(1+\phi) l^3} \quad (4.49)$$

Es ist per Definition $k_{62} = \frac{P_6^*}{P_2^*}$

$$\text{Wegen (4.45) wird } k_{62} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2^*}{P_2^*} = \frac{1}{2} k_{22} = \frac{6EI_z}{(1+\phi)l^2} \quad (4.50)$$

Mit (4.46) erhält man aus

$$k_{82} = \frac{P_8^*}{P_2^*} = -\frac{P_2^*}{P_2^*} = -k_{22} = -\frac{12EI_z}{(1+\phi)l^3} \quad (4.51)$$

Mit (4.47) wird

$$\begin{aligned} k_{12,2} &= \frac{P_{12}^*}{P_2^*} = -\frac{P_6^*}{P_2^*} + 1 \frac{P_2^*}{P_2^*} = -k_{62} + 1 k_{22} \\ k_{12,2} &= -\frac{6EI_z}{(1+\phi)l^2} + \frac{12EI_z}{(1+\phi)l^2} = \frac{6EI_z}{(1+\phi)l^2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von Bild 4.6 b

$$k_{88} = k_{22} = \frac{12EI_z}{(1+\phi)l^3} \quad (4.53)$$

$$k_{12,8} = -k_{62} = \frac{-6EI_z}{(1+\phi)l^2} \quad (4.54)$$

4.4.4 Die Koeffizienten k_{66} , k_{86} , $k_{12,6}$ und $k_{12,12}$

Die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix, die mit den Rotationen ρ_6^* und ρ_{12}^* verknüpft sind, findet man in der Weise, daß man sich das Balkenelement an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende gelenkig gelagert vorstellt (Bild 4.7) und die Momente und Kräfte bestimmt, die dem Balken die Rotationen ρ_6^* und ρ_{12}^* aufzwingen.

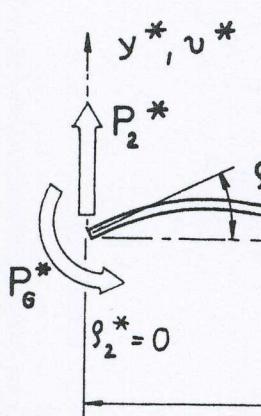


Bild 4.7 a

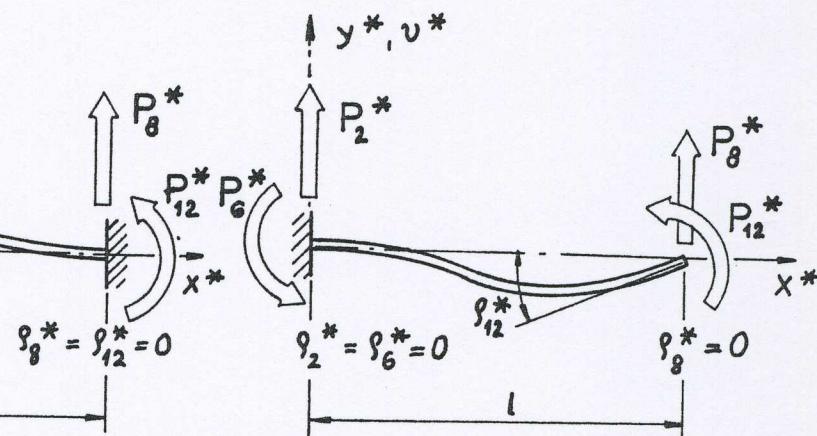


Bild 4.7 b

Zur Bestimmung der Koeffizienten k_{66} , k_{86} , $k_{12,6}$ und $k_{12,12}$

Für die Durchbiegung v^* eines Balkenpunktes in y^* -Richtung gilt nach wie vor Gleichung (4.42). Mit den Randbedingungen (Bild 4.7 a)

$$v^*(0) = v^*(l) = 0 \quad (4.55)$$

$$\text{und } \left(\frac{dv^*}{dx^*} \right)_{x^*=l} = \frac{dv^*}{dx^*} = - \frac{P_2^*}{GA_s} \quad (4.56)$$

erhält man aus (4.42)

$$EI_z \frac{dv^*}{dx^*} = \frac{P_2^*}{6} (3x^{*2} - l^2) + \frac{P_6^*}{2} (1 - 2x^*) \quad (4.57)$$

$$EI_z v^* = \frac{P_2^*}{6} (x^{*3} - l^2 x^*) + \frac{P_6^*}{2} (lx^* - x^{*2}) \quad (4.58)$$

$$\text{und } P_2^* = \frac{6 P_6^*}{(4+\Phi)l} \quad (4.59)$$

Es gelten auch weiterhin die Gleichgewichtsbedingungen (4.46) und (4.47).

$$\text{Nun ist } \rho_6^* = \left(\frac{dv_b^*}{dx^*} \right)_{x^*=0} = \left(\frac{dv^*}{dx^*} - \frac{dv_s^*}{dx^*} \right)_{x^*=0} \quad (4.60)$$

Man setzt (4.56), (4.57) und (4.59) in (4.60) ein und erhält unter Berücksichtigung von (4.44)

$$\rho_6^* = \frac{P_6^*(1+\phi)l}{EI_z(4+\phi)} \quad (4.61)$$

$$\text{Hieraus folgt } k_{66} = \frac{P_6^*}{\rho_6^*} = \frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)l} \quad (4.62)$$

Mit (4.46), (4.47), (4.59) und (4.61) wird des weiteren

$$k_{86} = \frac{P_8^*}{\rho_6^*} = - \frac{P_2^*}{\rho_6^*} = - \frac{6 P_6^*}{(4+\phi)l \rho_6^*} = - \frac{6 EI_z}{(1+\phi)l^2} \quad (4.63)$$

$$k_{12,6} = \frac{P_{12}^*}{\rho_6^*} = \frac{-P_6^* + P_2^* l}{\rho_6^*} = \frac{(2-\phi)EI_z}{(1+\phi)l} \quad (4.64)$$

Ein Vergleich der Bilder 4.7 a und 4.7 b lässt erkennen, daß aus Symmetriegründen sein muß

$$k_{12,12} = K_{66} = \frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)l} \quad (4.65)$$

4.4.5 Die Koeffizienten k_{i3} , k_{i5} , k_{i9} und $k_{11,11}$

Die Koeffizienten, die mit den Verschiebungen ρ_3^* , ρ_9^* , ρ_5^* und ρ_{11}^* verknüpft sind, lassen sich direkt aus den schon erhaltenen Resultaten gewinnen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Richtungen der positiven Biegemomente in der x^*, z^* -Ebene entgegengesetzt denjenigen in der x^*, y^* -Ebene sind. Bild 4.8 macht dies deutlich. Vergleiche hierzu Bild 4.3.

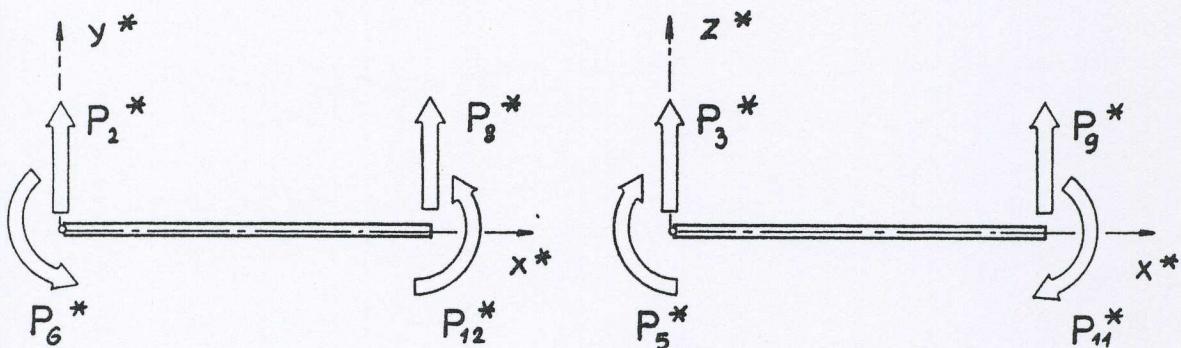


Bild 4.8 Zur Vorzeichenvereinbarung der Querkräfte und Momente

Somit wird

k_{33}	=	k_{22}	(4.66)
k_{53}	=	$-k_{62}$	
k_{93}	=	k_{82}	
$k_{11,3}$	=	$-k_{12,2}$	
k_{99}	=	k_{88}	
$k_{11,9}$	=	$-k_{12,8}$	
k_{55}	=	k_{66}	
k_{95}	=	$-k_{86}$	
$k_{11,5}$	=	$k_{12,6}$	

Aus Symmetriegründen muß ferner sein

$$k_{11,11} = k_{55} \quad (4.67)$$

Zu bemerken ist, daß bei den Koeffizienten k_{i3} , k_{i5} und k_{i9} an Stelle des Index z des axialen Flächenträgheitsmomentes der Index y tritt. Hierauf muß auch bei der Größe ϕ geachtet werden. In Gleichung (4.68), die die ausführliche Schreibweise von Gleichung (4.32) darstellt, bedeutet

$$\phi_z = \frac{12 EI_z}{GA_{sy}^{1/2}} \quad \text{und} \quad \phi_y = \frac{12 EI_y}{GA_{sz}^{1/2}}$$

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \\ P_5^* \\ P_6^* \\ P_7^* \\ P_8^* \\ P_9^* \\ P_{10}^* \\ P_{11}^* \\ P_{12}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{1(1+\Phi_z)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{1(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_z}{1(1+\Phi_z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EI_z}{1(1+\Phi_z)} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

(4.68)

Blatt 4.19

4.5 Matrix \mathbf{a}^* für das Balkenelement

Die Matrix-Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den Knotenpunktsverschiebungen φ^* im lokalen und φ im globalen Koordinatensystem wiedergibt,

$$\varphi^* = \mathbf{a}^* \varphi \quad (4.17)$$

findet man in gleicher Weise wie beim Gelenkstab. Gleichung (4.17) lautet für das Balkenelement explizit:

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \\ \rho_7^* \\ \rho_8^* \\ \rho_9^* \\ \rho_{10}^* \\ \rho_{11}^* \\ \rho_{12}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{ox}^* & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{oy}^* & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{oz}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{ox}^* & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{oy}^* & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{oz}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{ox}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{oy}^* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{oz}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{ox}^* \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{oy}^* \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{oz}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ \rho_7 \\ \rho_8 \\ \rho_9 \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \\ \rho_{12} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

mit den (1×3) Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ox}^* &= \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{oy}^* &= \begin{bmatrix} l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_{oz}^* &= \begin{bmatrix} l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die Nummerierung der Knotenpunktsverschiebungen ρ_i^* im lokalen Koordinatensystem entspricht der Nummerierung der Kräfte in Bild 4.4.

In Bezug auf das globale Koordinatensystem bedeuten

ρ_1, ρ_2, ρ_3 Verschiebungen des Knotens 1 in

x-, y-, z-Richtung

ρ_4, ρ_5, ρ_6 Rotationen am Knoten 1 um die x-, y-, z-Achse

ρ_7, ρ_8, ρ_9 Verschiebungen des Knotens 2 in

x-, y-, z-Richtung

$\rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{12}$ Rotationen am Knoten 2 um die x-, y-, z-Achse

In Gleichung (4.70) bedeuten

l_{ox}, m_{ox}, n_{ox} Kosinus der Winkel zwischen der x^* -Achse und
der x-, y- bzw. z-Achse

l_{oy}, m_{oy}, n_{oy} Kosinus der Winkel zwischen der y^* -Achse und
der x-, y- bzw. z-Achse

l_{oz}, m_{oz}, n_{oz} Kosinus der Winkel zwischen der z^* -Achse und
der x-, y- bzw. z-Achse

Zur Veranschaulichung werde ρ_1^* und ρ_4^* berechnet. Aus (4.69)
erhält man mit (4.70)

die Verschiebung des Knotens 1 (Bild 4.4) in x-Richtung

$$\rho_1^* = l_{ox} \rho_1 + m_{ox} \rho_2 + n_{ox} \rho_3 \quad (4.71)$$

und die Rotation des Elements um die Längsachse am Knoten 1

$$\rho_4^* = l_{ox} \rho_4 + m_{ox} \rho_5 + n_{ox} \rho_6 \quad (4.72)$$

Gleichung (4.72) gilt streng genommen nur für infinitesimal
kleine Verdrehwinkel, da nur sie Vektorcharakter haben.

Aus (4.69) folgt die D^* -Matrix des Balkenelements:

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{ox}^* & 0 & 0 & 0 \\ d_{oy}^* & 0 & 0 & 0 \\ d_{oz}^* & 0 & d_{ox}^* & 0 \\ 0 & d_{oy}^* & 0 & 0 \\ 0 & d_{oz}^* & 0 & d_{ox}^* \\ 0 & 0 & d_{oy}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{oz}^* \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

4.6 Matrix k^* und Matrix D^* des Balkenelements für ebene Strukturen

Beschränkt man sich auf ebene Strukturen und nummeriert die Kräfte gemäß Bild 4.9, reduziert sich die Steifigkeitsmatrix des Balkenelements auf Gleichung (4.74). Vergleiche hierzu Gleichung (4.68).

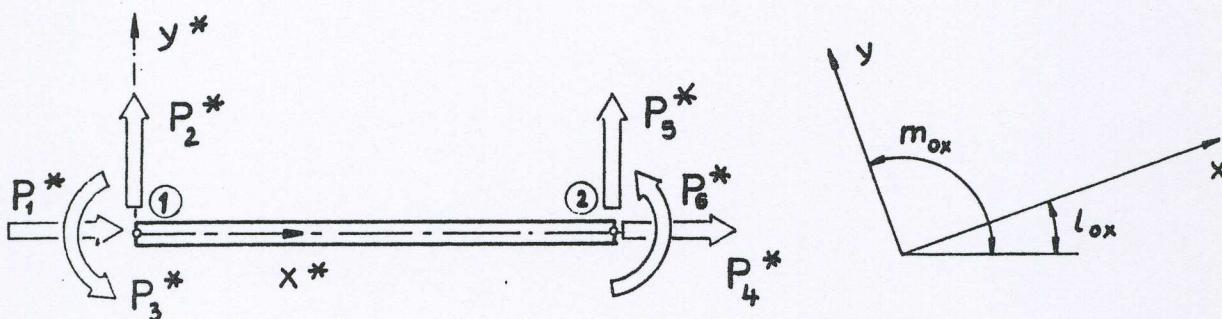


Bild 4.9 Kräfte am Balkenelement für ebene Strukturen

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{1} & & & \\
 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_z)} & & \text{symmetrisch} \\
 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_z)} & \frac{(4+\Phi_z)EI_z}{l(1+\Phi_z)} & \\
 k^* = & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & \frac{EA}{1} & \\
 0 & -\frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_z)} & -\frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3(1+\Phi_z)} & \\
 0 & \frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_z)} & \frac{(2-\Phi_z)EI_z}{l(1+\Phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2(1+\Phi_z)} & \frac{(4+\Phi_z)EI_z}{l(1+\Phi_z)}
 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Bei Vernachlässigung der Schubdeformationen, d.h. für $\Phi = 0$, vereinfacht sich (4.74) :

$$k^* = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix}
 \frac{A_1^2}{I_z} & & & & & \text{symmetrisch} \\
 0 & 12 & & & & \\
 0 & 61 & 41^2 & & & \\
 -\frac{A_1^2}{I_z} & 0 & 0 & \frac{A_1^2}{I_z} & & \\
 0 & -12 & -61 & 0 & 12 & \\
 0 & 61 & 21^2 & 0 & -61 & 41^2
 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Die Matrix-Gleichung (4.17) lautet für ebene Probleme explizit:

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & | & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \\ \hline & & & | & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ & 0 & | & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ & & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

wobei (siehe Bild 4.9)

ρ_1 bzw. ρ_4 Verschiebungen des Knotens 1 bzw. 2 in x-Richtung

ρ_2 bzw. ρ_5 Verschiebungen des Knotens 1 bzw. 2 in y-Richtung

ρ_3 bzw. ρ_6 Rotationen um die z-Achse, gleichzeitig Rotationen um die z^* -Achse

Aus (4.76) folgt die \mathbf{D}^* -Matrix des Balkenelements für ebene Strukturen

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & | & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \\ \hline & & & | & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ & 0 & | & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ & & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

4.7 Das dreieckförmige Membranelement

Ein dreieckförmiges Element hat gegenüber einem viereckigen den Vorteil, daß es gestattet, vorgegebenen Konturen besser zu folgen.

Das gewählte Element (Bild 4.10) besitzt 3 Knoten in den Ecken des Dreiecks, hat konstante Dicke t und soll nur durch Membran-spannungen, nicht durch Biegespannungen belastbar sein.

4.7.1 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Verschiebungen im Innern des Elements

Für die an der beliebigen Stelle (x^*, y^*) im Element auftretende Verschiebung

$$u^* = \{ u_x^* \ u_y^* \} \quad (4.78)$$

wird der lineare Ansatz gemacht

$$\begin{aligned} u_x^*(x^*, y^*) &= \hat{u}_1 x^* + \hat{u}_2 y^* + \hat{u}_3 \\ u_y^*(x^*, y^*) &= \hat{u}_4 x^* + \hat{u}_5 y^* + \hat{u}_6 \end{aligned} \quad (4.79)$$

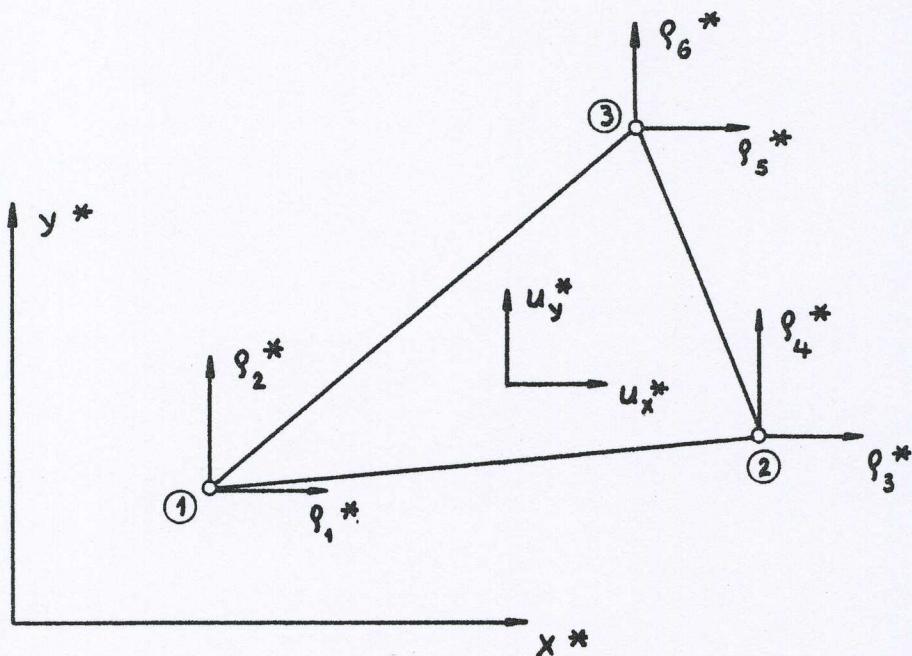


Bild 4.10 Das dreieckförmige Membranelement

Mit dem (6x1) Spaltenvektor

$$\hat{\mathbf{u}} = \{ \hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \hat{u}_3 \quad \hat{u}_4 \quad \hat{u}_5 \quad \hat{u}_6 \} \quad (4.80)$$

und der (2x6) Matrix

$$\Phi = \begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

lässt sich (4.79) in der Kurzform schreiben

$$\mathbf{u}^* = \Phi \hat{\mathbf{u}} \quad (4.82)$$

Die Koeffizienten $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_6$ in (4.79) können mit Hilfe der Randbedingungen

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= u_x^*(x_1^*, y_1^*) ; \quad \rho_2^* = u_y^*(x_1^*, y_1^*) \\ \rho_3^* &= u_x^*(x_2^*, y_2^*) ; \quad \rho_4^* = u_y^*(x_2^*, y_2^*) \\ \rho_5^* &= u_x^*(x_3^*, y_3^*) ; \quad \rho_6^* = u_y^*(x_3^*, y_3^*) \end{aligned} \quad (4.83)$$

gefunden werden, welche besagen, daß die Verschiebungen in den Eckpunkten des Elements gleich den Knotenpunktsverschiebungen sein müssen.

Die Randbedingungen (4.83) lauten explizit in Matrix-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_3^* \\ \rho_5^* \\ \rho_2^* \\ \rho_4^* \\ \rho_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* & 1 & | & 0 & | & \hat{u}_1 \\ x_2^* & y_2^* & 1 & | & & | & \hat{u}_2 \\ x_3^* & y_3^* & 1 & | & & | & \hat{u}_3 \\ \hline & & & | & x_1^* & y_1^* & 1 & | & \hat{u}_4 \\ & 0 & & | & x_2^* & y_2^* & 1 & | & \hat{u}_5 \\ & & & | & x_3^* & y_3^* & 1 & | & \hat{u}_6 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Mit (4.80), dem (6x1) Vektor der Knotenpunktsverschiebungen

$$\varphi^* = \{ \rho_1^* \quad \rho_3^* \quad \rho_5^* \quad \rho_2^* \quad \rho_4^* \quad \rho_6^* \} \quad (4.85)$$

und der (6x6) Matrix

$$\hat{\Phi} = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1^* & y_1^* & 1 & \\ x_2^* & y_2^* & 1 & 0 \\ x_3^* & y_3^* & 1 & \\ \hline - & - & - & x_1^* \quad y_1^* \quad 1 \\ 0 & x_2^* \quad y_2^* & 1 & \\ & x_3^* \quad y_3^* & 1 & \end{array} \right] \quad (4.86)$$

wird aus (4.84)

$$\varphi^* = \hat{\Phi} \hat{u} \quad (4.87)$$

Hieraus folgt

$$\hat{u} = \hat{\Phi}^{-1} \varphi^* \quad (4.88)$$

Setzt man (4.88) in (4.82) ein, gewinnt man den Zusammenhang zwischen den Knotenpunktsverschiebungen φ^* und den Verschiebungen u^* an einer beliebigen Stelle (x^*, y^*) des Elements

$$u^* = \Phi \hat{\Phi}^{-1} \varphi^* \quad (4.89)$$

Um die Beziehung (4.89) in expliziter Form zu erhalten, ist es erforderlich, die Inversion der Matrix $\hat{\Phi}$ vorzunehmen und danach die Matrix $\hat{\Phi}^{-1}$ mit der Matrix Φ vorzumultiplizieren.

Führt man die Untermatrix

$$\hat{\Phi}' = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* & 1 \\ x_2^* & y_2^* & 1 \\ x_3^* & y_3^* & 1 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

ein, so gilt (siehe z.B. [1.4], Seite 424 ff)

$$\hat{\Phi}'^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}'^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}'^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

d.h. die Inversion der (6x6) Matrix $\hat{\Phi}$ reduziert sich auf die Inversion der (3x3) Matrix $\hat{\Phi}'$. Sie kann mit der folgenden (z.B. in [1.5], Seite 16 angegebenen) Inversionsformel durchgeführt werden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

wobei

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Man erhält das Resultat

$$\hat{\phi}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2^* - y_3^* & y_3^* - y_1^* & y_1^* - y_2^* \\ x_3^* - x_2^* & x_1^* - x_3^* & x_2^* - x_1^* \\ x_2^*y_3^* - x_3^*y_2^* & x_3^*y_1^* - x_1^*y_3^* & x_1^*y_2^* - x_2^*y_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^* - y_3^* & y_3^* - y_1^* & y_1^* - y_2^* \\ x_3^* - x_2^* & x_1^* - x_3^* & x_2^* - x_1^* \\ x_2^*y_3^* - x_3^*y_2^* & x_3^*y_1^* - x_1^*y_3^* & x_1^*y_2^* - x_2^*y_1^* \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\text{mit } 2A = \begin{vmatrix} x_1^* & y_1^* & 1 \\ x_2^* & y_2^* & 1 \\ x_3^* & y_3^* & 1 \end{vmatrix} \quad (4.93)$$

Hierbei ist A (siehe z.B. [1.6], Seite 37) der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten (x_1^*, y_1^*) , (x_2^*, y_2^*) und (x_3^*, y_3^*) .

Die Multiplikation der Matrizen (4.81), (4.92) und 4.85) nach der Vorschrift (4.89) führt auf das Ergebnis:

$$u_x^* = \frac{1}{2A} \left[(y_{23}^*x^* + x_{32}^*y^* + x_2^*y_3^* - x_3^*y_2^*) \rho_1^* + (y_{31}^*x^* + x_{13}^*y^* + x_3^*y_1^* - x_1^*y_3^*) \rho_3^* + (y_{12}^*x^* + x_{21}^*y^* + x_1^*y_2^* - x_2^*y_1^*) \rho_5^* \right] \quad (4.94)$$

$$u_y^* = \frac{1}{2A} \left[(y_{23}^*x^* + x_{32}^*y^* + x_2^*y_3^* - x_3^*y_2^*) \rho_2^* + (y_{31}^*x^* + x_{13}^*y^* + x_3^*y_1^* - x_1^*y_3^*) \rho_4^* + (y_{12}^*x^* + x_{21}^*y^* + x_1^*y_2^* - x_2^*y_1^*) \rho_6^* \right] \quad (4.95)$$

$$\text{mit den Abkürzungen } x_{ij}^* = x_i^* - x_j^* \text{ und } y_{ij}^* = y_i^* - y_j^* \quad (4.96)$$

Die Gleichung (4.94) bzw. (4.95) kann interpretiert werden als die Gleichung einer Ebene in einem x^*, y^*, u_x^* - bzw. x^*, y^*, u_y^* -Koordinatensystem (siehe z.B. [1.6], Seite 43). D.h. die Verschiebungen ändern sich entlang jeder Kante des Elements linear, wobei sie nur von Schiebungen der jeweiligen Eckpunkte abhängen. Der gewählte Verschiebungsansatz (4.79) gewährleistet also die volle kinematische Verträglichkeit der Verschiebung zweier benachbarter Elemente entlang ihrer gemeinsamen Grenze. Bild 4.11 zeigt eine typische Verschiebungsverteilung. Sie ist verursacht durch die Knotenpunktsverschiebung $\rho_3^* = 1$, wobei alle anderen Knotenpunktsverschiebungen unterdrückt sind.

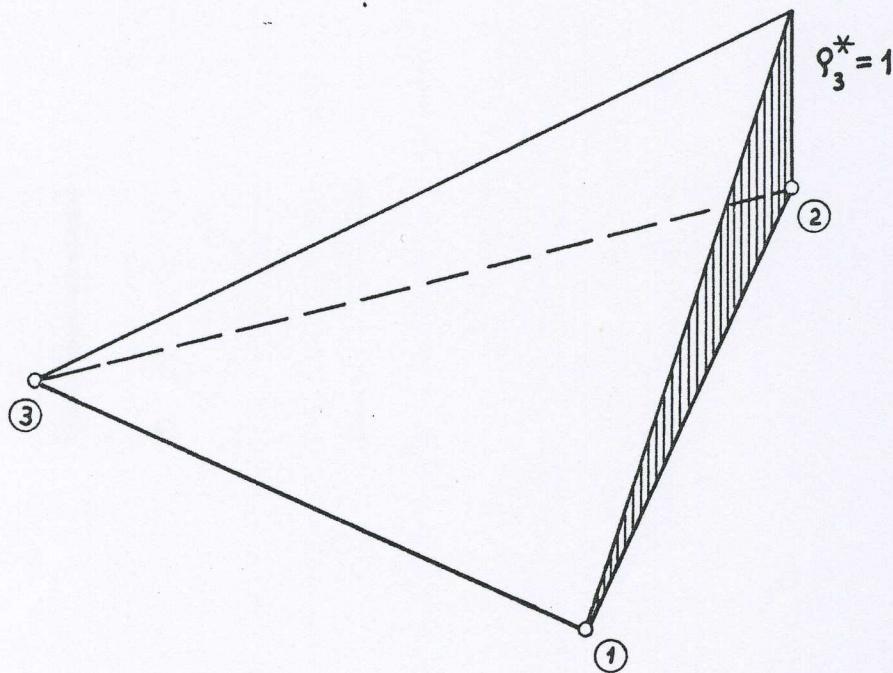


Bild 4.11 Verschiebungsverteilung in einem dreieckförmigen Membranelement, hervorgerufen durch $\rho_3^* = 1$. Die Verschiebungen u_x^* sind senkrecht zur Elementebene aufgetragen.

4.7.2 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Dehnungen

Die Gleichungen (4.94) und (4.95) erlauben, die Beziehung zwischen den Dehnungen ϵ^* und den Knotenpunktsverschiebungen φ^* gemäß der Gleichung

$$\epsilon^* = \alpha^* \varphi^* \quad (4.7)$$

herzustellen. Beim ebenen Spannungszustand beschränkt man sich auf den (3x1) Vektor der Dehnungen

$$\epsilon^* = \{ \epsilon_{xx}^* \quad \epsilon_{yy}^* \quad \epsilon_{xy}^* \} \quad (4.97)$$

Seine Komponenten findet man aus den Gleichungen (4.94) und (4.95) durch partielles Ableiten:

$$\epsilon_{xx}^* = \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} = \frac{1}{2A} (y_{23}^* \rho_1^* + y_{31}^* \rho_3^* + y_{12}^* \rho_5^*) \quad (4.98)$$

$$\epsilon_{yy}^* = \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} = \frac{1}{2A} (x_{32}^* \rho_2^* + x_{13}^* \rho_4^* + x_{21}^* \rho_6^*) \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy}^* &= \frac{\partial u_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x^*} = \frac{1}{2A} (x_{32}^* \rho_1^* + y_{23}^* \rho_2^* + x_{13}^* \rho_3^* \\ &\quad + y_{31}^* \rho_4^* + x_{21}^* \rho_5^* + y_{12}^* \rho_6^*) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Faßt man die Knotenpunktsverschiebungen nunmehr zu dem neuen (6x1) Vektor

$$\varphi^* = \{ \rho_1^* \quad \rho_2^* \quad \rho_3^* \quad \rho_4^* \quad \rho_5^* \quad \rho_6^* \} \quad (4.101)$$

zusammen, so lautet die Matrix-Schreibweise der Gleichungen (4.98), (4.99) und (4.100)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^* \\ \epsilon_{yy}^* \\ \epsilon_{xy}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}^* & 0 & y_{31}^* & 0 & y_{12}^* & 0 \\ 0 & x_{32}^* & 0 & x_{13}^* & 0 & x_{21}^* \\ x_{32}^* & y_{23}^* & x_{13}^* & y_{31}^* & x_{21}^* & y_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Mit (4.97), (4.102) und der (3x6) Matrix

$$\underline{\alpha}^* = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}^* & 0 & y_{31}^* & 0 & y_{12}^* & 0 \\ 0 & x_{32}^* & 0 & x_{13}^* & 0 & x_{21}^* \\ x_{32}^* & y_{23}^* & x_{13}^* & y_{31}^* & x_{21}^* & y_{12}^* \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

wird aus (4.102)

$$\epsilon^* = \underline{\alpha}^* \varphi^* \quad (4.104)$$

Der Strich der Matrix $\underline{\alpha}^*$ besagt, daß die aus (4.104) berechneten Dehnungen nicht exakt sondern lediglich mit den Knotenpunktsverschiebungen kinematisch verträglich sind. Die Gleichung (4.102) zeigt, daß der lineare Verschiebungsansatz (4.79) zu konstanten Dehnungen und über das Hookesche Gesetz zu konstanten Spannungen führt.

4.7.3 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Spannungen

Im Falle des ebenen Spannungszustandes, d.h. unter der Annahme, daß

$$\sigma_{zz}^* = \sigma_{yz}^* = \sigma_{zx}^* = 0 \quad (4.105)$$

reduziert sich die Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma^* = E \epsilon^*$ auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^* \\ \epsilon_{yy}^* \\ \epsilon_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Mit (4.102) erhält man aus (4.106) den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen der Knotenpunkte und den (Membran-) Spannungen im Element:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{bmatrix} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23}^* & vx_{32}^* & y_{31}^* & vx_{13}^* & y_{12}^* & vx_{21}^* \\ vy_{23}^* & x_{32}^* & vy_{31}^* & x_{13}^* & vy_{12}^* & x_{21}^* \\ \frac{1-\nu}{2}x_{32}^* & \frac{1-\nu}{2}y_{23}^* & \frac{1-\nu}{2}x_{13}^* & \frac{1-\nu}{2}y_{31}^* & \frac{1-\nu}{2}x_{21}^* & \frac{1-\nu}{2}y_{12}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \\ p_5^* \\ p_6^* \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

4.7.4 Die Steifigkeitsmatrix k^* des dreieckförmigen Membranelements

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix k^* bedient man sich der Gleichung

$$k^* = \int_v \underline{\alpha}^{*t} E \underline{\alpha}^* dv \quad (4.11)$$

Die Matrix E für den ebenen Spannungszustand kann man der Gleichung (4.106) entnehmen

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Da nach Gleichung (4.103) die Matrix $\underline{\alpha}^*$ nicht von den Koordinaten x^* und y^* abhängt, wird aus (4.11)

$$k^* = \underline{\alpha}^{*t} E \underline{\alpha}^* \int_v dv = \underline{\alpha}^{*t} E \underline{\alpha}^* A_t \quad (4.109)$$

Setzt man (4.103) und (4.108) in (4.109) ein und führt die Matrixmultiplikation durch, so erhält man die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}^* explizit. Zur bequemeren Darstellung lässt sie sich in zwei Anteile aufspalten

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k}_n^* + \mathbf{k}_s^* \quad (4.110)$$

wobei

$$\mathbf{k}_n^* = \frac{Et}{4A(1-v^2)} \begin{bmatrix} y_{23}^{*2} & & & & & \\ vx_{32}^* y_{23}^* & x_{32}^{*2} & & & & \text{symmetrisch} \\ y_{23}^* y_{31}^* & vx_{32}^* y_{31}^* & y_{31}^{*2} & & & \\ vx_{13}^* y_{23}^* & x_{13}^* x_{32}^* & vx_{13}^* y_{31}^* & x_{13}^{*2} & & \\ y_{12}^* y_{23}^* & vx_{32}^* y_{12}^* & y_{12}^* y_{31}^* & vx_{13}^* y_{12}^* & y_{12}^{*2} & \\ vx_{21}^* y_{23}^* & x_{21}^* x_{32}^* & vx_{21}^* y_{31}^* & x_{13}^* x_{21}^* & vx_{21}^* y_{12}^* & x_{21}^{*2} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

$$\mathbf{k}_s^* = \frac{Et}{8A(1+v)} \begin{bmatrix} x_{32}^{*2} & & & & & \\ x_{32}^* y_{23}^* & y_{23}^{*2} & & & & \text{symmetrisch} \\ x_{13}^* x_{32}^* & x_{13}^* y_{23}^* & x_{13}^{*2} & & & \\ x_{32}^* y_{31}^* & y_{23}^* y_{31}^* & x_{13}^* y_{31}^* & y_{31}^{*2} & & \\ x_{21}^* x_{32}^* & x_{21}^* y_{23}^* & x_{13}^* x_{21}^* & x_{21}^* y_{31}^* & x_{21}^{*2} & \\ x_{32}^* y_{12}^* & y_{12}^* y_{23}^* & x_{13}^* y_{12}^* & y_{12}^* y_{31}^* & x_{21}^* y_{12}^* & y_{12}^{*2} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

4.7.5 Matrix \mathbf{Q}^* für das dreieckförmige Membranelement

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}^* geschah ohne jede Einschränkung hinsichtlich der Lage des Dreiecks im lokalen x^*, y^* -Koordinatensystem. Für das Aufstellen der Transformationsmatrix \mathbf{Q}^* ist es zweckmäßig, die x^* -Achse mit der Kante 12, gleichzeitig mit den lokalen Verschiebungen φ_1^* und φ_3^* zusammenfallend zu wählen (Bild 4.12).

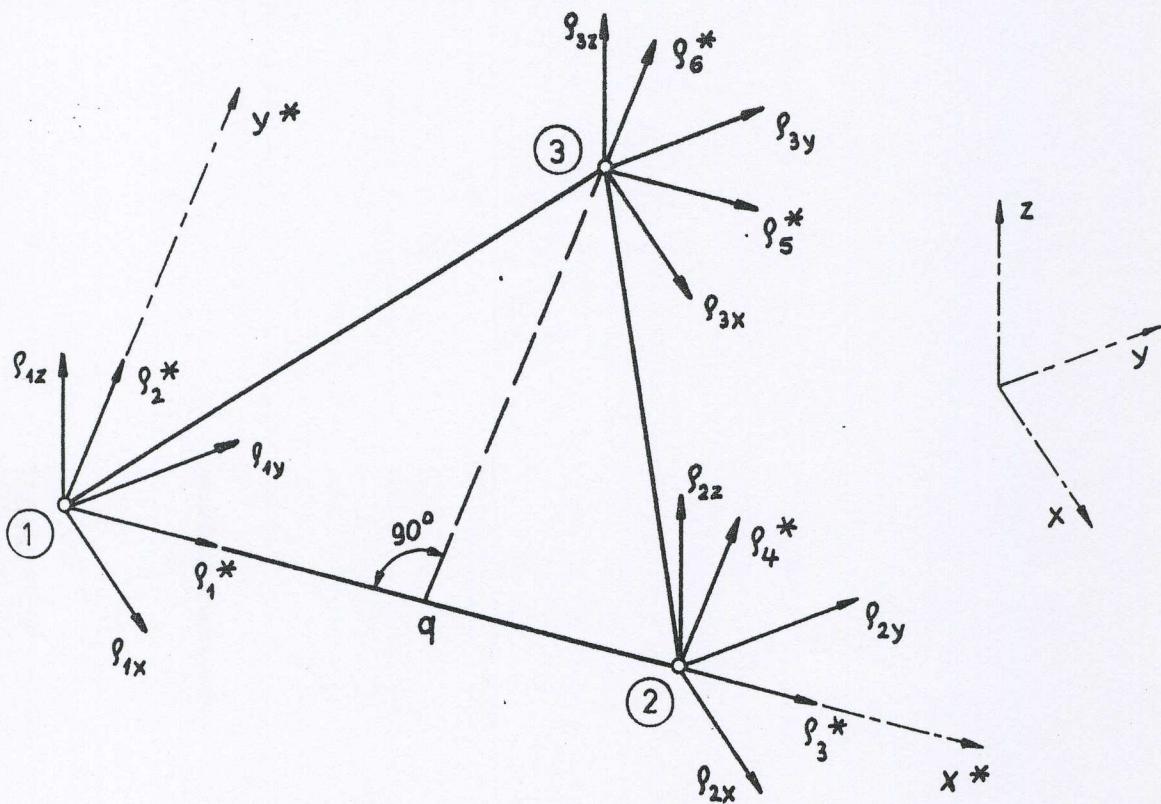


Bild 4.12 Die Verschiebungen des dreieckförmigen Membranelements im lokalen und globalen Koordinatensystem

Es werden folgende Richtungskosinuse benötigt

l_{12}, m_{12}, n_{12} Kosinuse der Winkel zwischen der Kante 12, gleichzeitig x^* -Achse, und der x-, y- bzw. z-Achse

l_{q3}, m_{q3}, n_{q3} Kosinuse der Winkel zwischen der Richtung q_3 , gleichzeitig y^* -Richtung, und der x-, y- bzw. z-Achse

Sie lassen sich zu den (1×3) Matrizen zusammenfassen

$$\mathbf{Q}_{12}^* = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{Q}_{q3}^* = \begin{bmatrix} l_{q3} & m_{q3} & n_{q3} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Zur Berechnung ihrer Elemente bedient man sich bekannter Zusammenhänge aus der analytischen Geometrie (siehe z.B. [1.6], Seite 42).

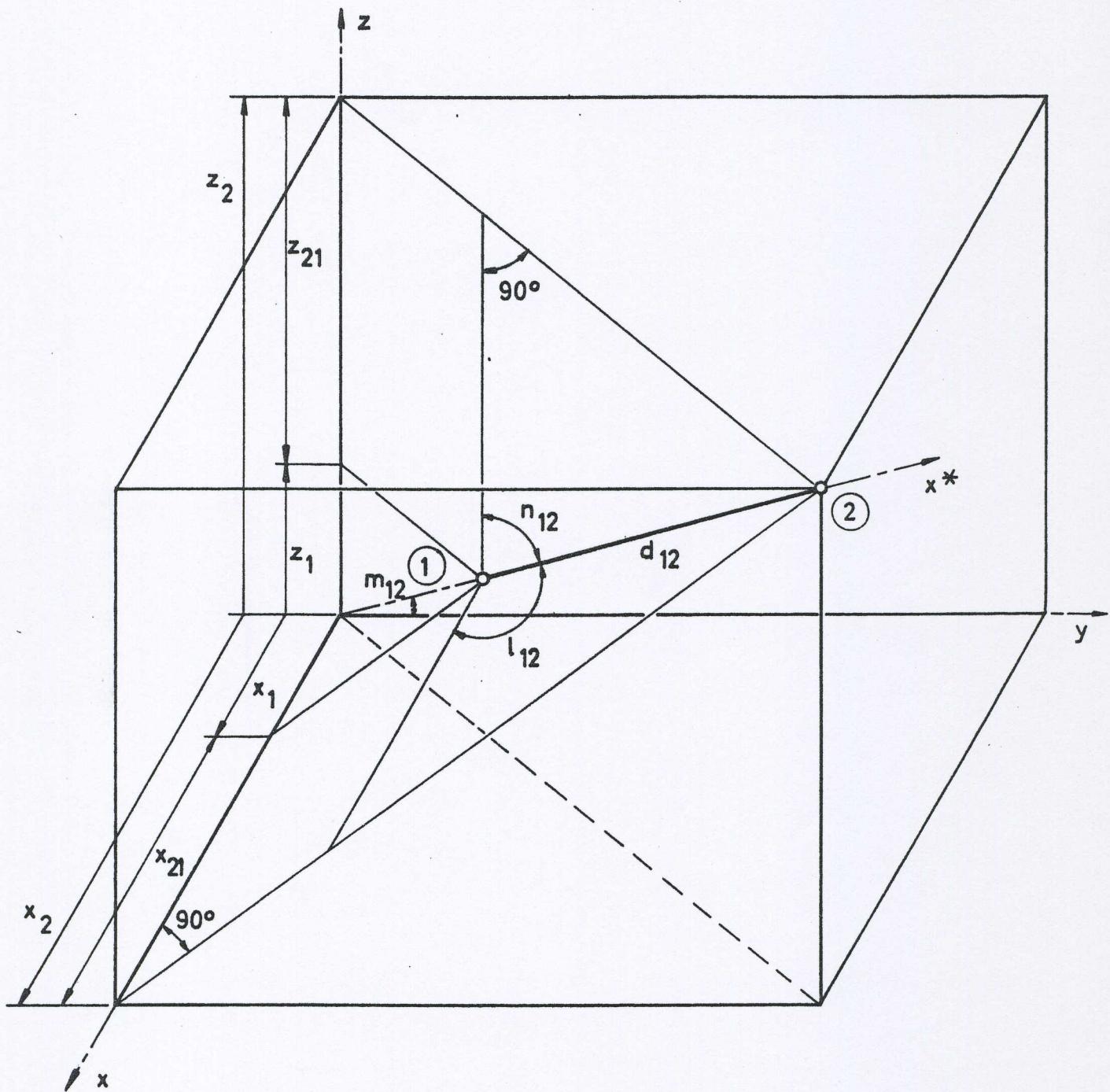


Bild 4.13 Zur Herleitung der Gleichungen (4.115) und (4.116)

Es ist (Bild (4.13))

$$\begin{aligned} l_{12} &= \frac{x_2 - x_1}{d_{12}} = \frac{x_{21}}{d_{12}} \\ m_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{d_{12}} = \frac{y_{21}}{d_{12}} \\ n_{12} &= \frac{z_2 - z_1}{d_{12}} = \frac{z_{21}}{d_{12}} \end{aligned} \quad (4.115)$$

mit der Kantenlänge

$$d_{12} = (x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2)^{1/2} \quad (4.116)$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} l_{q3} &= \frac{x_3 - x_q}{d_{q3}} \\ m_{q3} &= \frac{y_3 - y_q}{d_{q3}} \\ n_{q3} &= \frac{z_3 - z_q}{d_{q3}} \end{aligned} \quad (4.117)$$

mit d_{q3} Abstand des Punktes 3 von Punkt q

Die Koordinaten des Schnittpunktes q der Senkrechten zur Kante 12 durch den Punkt 3 berechnen sich zu

$$x_q = x_1 + l_{12} d_{1q}$$

$$y_q = y_1 + m_{12} d_{1q} \quad (4.118)$$

$$z_q = z_1 + n_{12} d_{1q}$$

mit d_{1q} Abstand des Punktes q von Punkt 1

Mit (4.118) wird aus (4.117)

$$\begin{aligned} l_{q3} &= \frac{x_3 - x_1 - l_{12}d_{1q}}{d_{q3}} = \frac{x_{31} - l_{12}d_{1q}}{d_{q3}} \\ m_{q3} &= \frac{y_3 - y_1 - m_{12}d_{1q}}{d_{q3}} = \frac{y_{31} - m_{12}d_{1q}}{d_{q3}} \\ n_{q3} &= \frac{z_3 - z_1 - n_{12}d_{1q}}{d_{q3}} = \frac{z_{31} - n_{12}d_{1q}}{d_{q3}} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Die Bedingung, daß $q3$ senkrecht zu 12 ist, läßt sich ausdrücken durch die Beziehung

$$l_{12}l_{q3} + m_{12}m_{q3} + n_{12}n_{q3} = 0 \quad (4.120)$$

(Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so verschwindet ihr Skalarprodukt.)

Mit (4.119) folgt aus (4.120)

$$l_{12}(x_{31} - l_{12}d_{1q}) + m_{12}(y_{31} - m_{12}d_{1q}) + n_{12}(z_{31} - n_{12}d_{1q}) = 0 \quad (4.121)$$

Unter Berücksichtigung von

$$l_{12}^2 + m_{12}^2 + n_{12}^2 = 1$$

ergibt sich aus (4.121)

$$d_{1q} = l_{12}x_{31} + m_{12}y_{31} + n_{12}z_{31} \quad (4.122)$$

Mit d_{1q} und

$$d_{13} = (x_{31}^2 + y_{31}^2 + z_{31}^2)^{1/2} \quad (4.123)$$

sind zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $1q3$ bekannt.

Nach Pythagoras berechnet sich die dritte Seite zu

$$d_{q3} = (d_{13}^2 - d_{1q}^2)^{1/2} = (x_{31}^2 + y_{31}^2 + z_{31}^2 - d_{1q}^2)^{1/2} \quad (4.124)$$

Mit den Gleichungen (4.115), (4.116), (4.119), (4.122) und (4.124) lassen sich alle benötigten Richtungskosinuse aus den globalen Koordinaten der drei Eckpunkte des Elements berechnen. Der Zusammenhang zwischen den Knotenpunktsverschiebungen ρ^* im lokalen und ρ im globalen Koordinatensystem lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12}^* & 0 & 0 \\ \alpha_{q3}^* & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{12}^* & 0 \\ 0 & \alpha_{q3}^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{12}^* \\ 0 & 0 & \alpha_{q3}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{1x} \\ \rho_{1y} \\ \rho_{1z} \\ \rho_{2x} \\ \rho_{2y} \\ \rho_{2z} \\ \rho_{3x} \\ \rho_{3y} \\ \rho_{3z} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Aus (4.125) folgt die (6x9) Matrix α^* des Dreieckelements zu

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} \alpha_{12}^* & 0 & 0 \\ \alpha_{q3}^* & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{12}^* & 0 \\ 0 & \alpha_{q3}^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{12}^* \\ 0 & 0 & \alpha_{q3}^* \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

mit den Untermatrizen α_{12}^* bzw. α_{q3}^* gemäß den Gleichungen (4.113) bzw. (4.114).

4.8 Das dreieckförmige Plattenelement

Bei dem Membranelement des Abschnitts 4.7 waren nur Kräfte in der Ebene des Elements zugelassen, und es traten nur Membranspannungen auf. Nunmehr soll ein Plattenelement betrachtet werden, das Querkräfte und Biegemomente übertragen kann und durch Biegespannungen beansprucht wird. Beschränken wir uns auf kleine Verformungen dünner Platten, so sind die Verschiebungen senkrecht zur Platte nicht gekoppelt mit Verschiebungen in der Mittelebene der Platte, im folgenden Elementebene genannt. Siehe z.B. [1.11], Seite 1.

Demzufolge sind die Steifigkeitsmatrizen für die Verschiebungen senkrecht zur Elementebene und für die Verschiebungen in der Elementebene ebenso entkoppelt. Die Steifigkeitsmatrix für die Verschiebungen in der Elementebene wurde in Abschnitt 4.7 bereitgestellt. Nunmehr soll die Steifigkeitsmatrix für die Verschiebungen senkrecht zur Elementebene, einschließlich der Rotationen um in der Elementebene gelegene Achsen, hergeleitet werden (Bild 4.14).

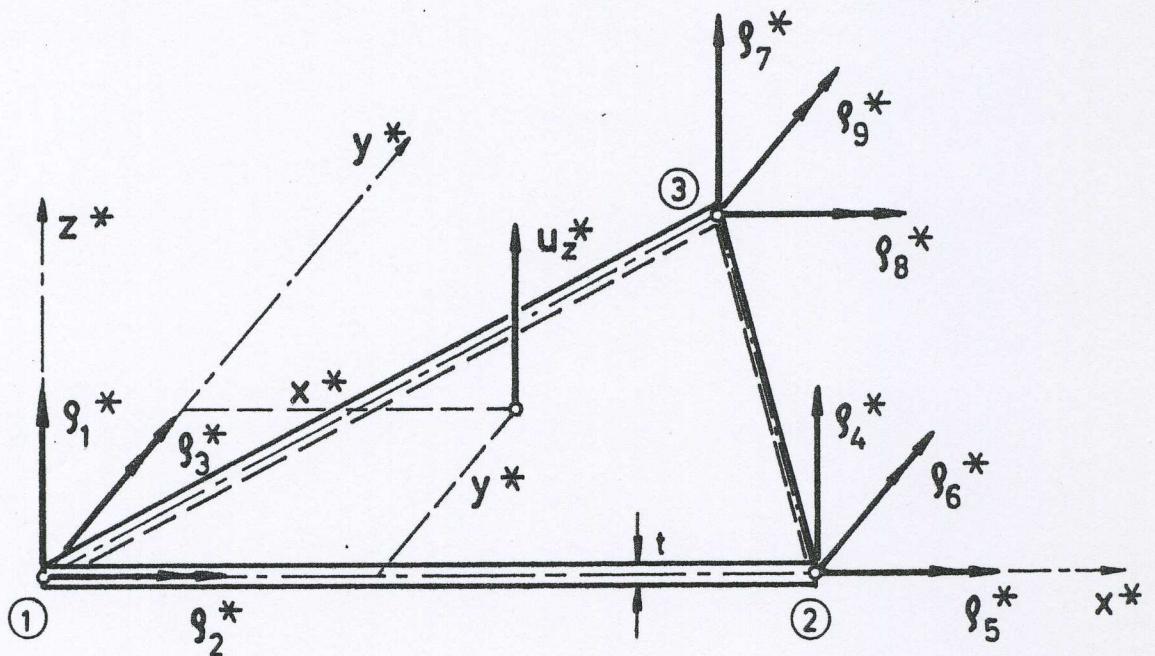


Bild 4.14 Das dreieckförmige Plattenelement

4.8.1 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Verschiebungen im Innern des Elements

Die Lage des dreieckförmigen Elements in der x^*, y^* -Ebene ist so gewählt, daß der Knoten 1 im Koordinatenursprung und der Knoten 2 auf der x^* -Achse liegt.

Für die an einem beliebigen Ort (x^*, y^*) im Element auftretende Verschiebung u_z^* wird der kubische Ansatz gemacht

$$u_z^* = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 x^* + \hat{u}_3 y^* + \hat{u}_4 x^{*2} + \hat{u}_5 x^* y^* + \hat{u}_6 y^{*2} + \hat{u}_7 x^{*3} \\ + \hat{u}_8 (x^{*2} y^* + x^* y^{*2}) + \hat{u}_9 y^{*3} \quad (4.127)$$

Mit dem (9×1) Spaltenvektor

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & \hat{u}_4 & \hat{u}_5 & \hat{u}_6 & \hat{u}_7 & \hat{u}_8 & \hat{u}_9 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

und dem (1×9) Zeilenvektor

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x^* & y^* & x^{*2} & x^* y^* & y^{*2} & x^{*3} & (x^* y^{*2} + x^{*2} y^*) & y^{*3} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

lässt sich (4.127) in Matrixform schreiben

$$u_z^* = \Phi \hat{\mathbf{U}} \quad (4.130)$$

Die Koeffizienten $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_9$ in (4.127) können mit Hilfe der folgenden Randbedingungen berechnet werden

$$\begin{aligned} p_1^* &= u_z^*(0,0) \\ p_2^* &= \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*}\right)_{0,0} \\ p_3^* &= -\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*}\right)_{0,0} \\ p_4^* &= u_z^*(x_2^*, 0) \\ p_5^* &= \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*}\right)_{x_2^*, 0} \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\rho_6^* = - \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \right)_{x_2^*, 0}$$

$$\rho_7^* = u_z^* (x_3^*, y_3^*)$$

$$\rho_8^* = \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right)_{x_3^*, y_3^*}$$

$$\rho_9^* = - \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \right)_{x_3^*, y_3^*}$$

Die Gln. (4.131) drücken aus, daß die Verschiebungen in den Eckpunkten des Elements in die Knotenpunktsverschiebungen übergehen. Wertet man die Randbedingungen mit Hilfe der Gl. (4.127) aus, so findet man nach Zwischenrechnung die Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den gesuchten Koeffizienten \hat{u}_i in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \\ \rho_7^* \\ \rho_8^* \\ \rho_9^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^* & 0 & x_2^{*2} & 0 & 0 & x_2^{*3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2^* & 0 & 0 & x_2^{*2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2^* & 0 & 0 & -3x_2^{*2} & 0 & 0 \\ 1 & x_3^* & y_3^* & x_3^{*2} & x_3^*y_3^* & y_3^{*2} & x_3^{*3} & x_3^*y_3^{*2} + x_3^{*2}y_3^* & y_3^{*3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3^* & 2y_3^* & 0 & 2x_3^*y_3^* + x_3^{*2} & 3y_3^{*3} \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3^* & -y_3^* & 0 & -3x_3^{*2} & -y_3^{*2} - 2x_3^*y_3^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \\ \hat{u}_9 \end{bmatrix}$$

Mit (4.128), dem (9x1) Vektor der Knotenpunktsverschiebungen

$$\boldsymbol{\varrho}^* = \{ \rho_1^* \rho_2^* \rho_3^* \rho_4^* \rho_5^* \rho_6^* \rho_7^* \rho_8^* \rho_9^* \} \quad (4.133)$$

und der (9x9) Matrix

$$\hat{\Phi} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & x_2^* & 0 & x_2^{*2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \hat{\Phi} = 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2^* & 0 & 0 & x_2^{*2} & 0 \\ \hline 6 & 0 & -1 & 0 & -2x_2^* & 0 & 0 & -3x_2^{*2} & 0 & 0 \\ \hline 7 & 1 & x_3^* & y_3^* & x_3^{*2} & x_3^*y_3^* & y_3^{*2} & x_3^{*3} & x_3^*y_3^{*2} + x_3^{*2}y_3^* & y_3^{*3} \\ \hline 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_3^* & 2y_3^* & 0 & 2x_3^*y_3^* + x_3^{*2} & 3y_3^{*2} \\ \hline 9 & 0 & -1 & 0 & -2x_3^* & -y_3^* & 0 & -3x_3^{*2} & -y_3^{*2} - 2x_3^*y_3^* & 0 \\ \hline \end{array} \quad (4.134)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

wird aus (4.132)

$$\boldsymbol{\varrho}^* = \hat{\Phi} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.135)$$

Hieraus folgt

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\varrho}^* \quad (4.136)$$

Die Inversion von $\hat{\Phi}$ muß für jedes einzelne Element numerisch durchgeführt werden. Hierbei ist nachteilig, daß die Matrix (4.134) singulär wird, falls zufällig zwischen den Koordinaten x_2^* , x_3^* und y_3^* die Beziehung besteht

$$y_3^* = -2x_3^* + x_2^*$$

Will man diese Schwierigkeit umgehen, muß an Stelle von (4.127) ein anderer Verschiebungsansatz gewählt werden. Siehe hierzu z.B. [1.12].

4.8.2 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Dehnungen

Aus der Plattentheorie (siehe z.B. [1.11], p. 35-41) entnehmen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^* &= -z^* \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} \\ \varepsilon_{yy}^* &= -z^* \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} \\ \varepsilon_{xy}^* &= -2z^* \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^* \partial y^*}\end{aligned}\tag{4.137}$$

Wendet man die Rechenvorschriften (4.137) auf die Rechthandseite der Gleichung (4.127) an, so findet man die Matrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{xy}^* \end{bmatrix} = -z^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x^* & 6y^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x^*+y^*) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \\ \hat{u}_7 \\ \hat{u}_8 \\ \hat{u}_9 \end{bmatrix}\tag{4.138}$$

Mit (4.128, dem (3x1)Vektor der Dehnungen

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \{ \epsilon_{xx}^* \quad \epsilon_{yy}^* \quad \epsilon_{xy}^* \} \quad (4.97)$$

und der (3x9)Matrix

$$\mathbf{F} = -z^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x^* & 2y^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x^* & 6y^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x^*+y^*) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

lässt sich (4.138) kurz schreiben

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.140)$$

Kombiniert man (4.136) und (4.140), erhält man

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1} \boldsymbol{\varphi}^* \quad (4.141)$$

Mit der Abkürzung bzw. Rechenvorschrift

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}}^* = \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1} \quad (4.142)$$

wird

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \underline{\boldsymbol{\alpha}}^* \boldsymbol{\varphi}^* \quad (4.104)$$

4.8.3 Berechnung der Elementspannungen

Die Elementspannungen können nach (4.106) berechnet werden. Üblicherweise beschränkt man sich auf die Berechnung der Spannungen im Schwerpunkt des dreieckförmigen Elements, jeweils auf der Oberseite (top) und auf der Unterseite (bottom) der Platte. In Gleichung (4.138) bzw. (4.139) ist dann für x^* bzw. y^* und z^* zu setzen

$$x_s^* = \frac{1}{3} (x_2^* + x_3^*)$$

$$y_s^* = \frac{1}{3} y_3^*$$

$$z^* = + \frac{t}{2} \text{ für top}$$

$$z^* = - \frac{t}{2} \text{ für bottom}$$

4.8.4 Die Steifigkeitsmatrix \underline{k}^* des dreieckförmigen Plattenelements

Die Steifigkeitsmatrix berechnet sich nach

$$\underline{k}^* = \int_V \underline{\alpha}^{*t} \underline{E} \underline{\alpha}^* dV \quad (4.11)$$

Mit (4.142) wird aus (4.11)

$$\begin{aligned} \underline{k}^* &= \int_V (\hat{\Phi}^{-1})^t \underline{F}^t \underline{E} \underline{F} \hat{\Phi}^{-1} dV \\ \underline{k}^* &= (\hat{\Phi}^{-1})^t \left(\int_V \underline{F}^t \underline{E} \underline{F} dV \right) \hat{\Phi}^{-1} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Das Matrizenprodukt in dem Volumenintegral kann unter Benutzung von (4.139) und (4.108) ansgearbeitet werden. Nach Zwischenrechnung erhält man für

$$\int F^t E F dV =$$

$\frac{E t^3}{12(1-v^2)}$	$\int \int$	$dx^* dy^*$	$Blatt\ 4.47$
5	0 0 0	0	$4(1-v)(x^*+y^*)$
6	0 0 0	0	0
7	0 0 0	0	$4(x^*+vy^*)$
8	0 0 0	0	$4(vx^*+y^*)$
9	0 0 0	0	$4(1-v)(x^*+y^*)$
1	2 3 4	5	6 7 8 9

Blatt 4.47

6

(4.144)

Bei der Integration der einzelnen Koeffizienten in (4.144) kommen Flächenintegrale vor, deren Lösungen im folgenden zusammengestellt sind:

$$\iint dx^* dy^* = \frac{1}{2} x_2^* y_3^* \quad (4.145)$$

$$\iint x^* dx^* dy^* = \frac{1}{6} x_2^* y_3^* (x_2^* + x_3^*) \quad (4.146)$$

$$\iint x^{*2} dx^* dy^* = \frac{1}{12} x_2^* y_3^* (x_2^{*2} + x_2^* x_3^* + x_3^{*2}) \quad (4.147)$$

$$\iint y^* dx^* dy^* = \frac{1}{6} x_2^* y_3^* 2 \quad (4.148)$$

$$\iint y^{*2} dx^* dy^* = \frac{1}{12} x_2^* y_3^* 3 \quad (4.149)$$

$$\iint x^* y^* dx^* dy^* = \frac{1}{24} x_2^* y_3^* 2 (x_2^* + 2x_3^*) \quad (4.150)$$

4.8.5 Matrix \mathbf{G}^* für das dreieckförmige Plattenelement

Beschränkt man sich auf den Fall, daß die globale z-Achse und die lokale z^* -Achse gleichgerichtet sind (Bild 4.15), so lautet der Zusammenhang zwischen den Knotenpunktsverschiebungen φ^* im lokalen und φ im globalen Koordinatensystem in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \\ \rho_4^* \\ \rho_5^* \\ \rho_6^* \\ \rho_7^* \\ \rho_8^* \\ \rho_9^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ \rho_7 \\ \rho_8 \\ \rho_9 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

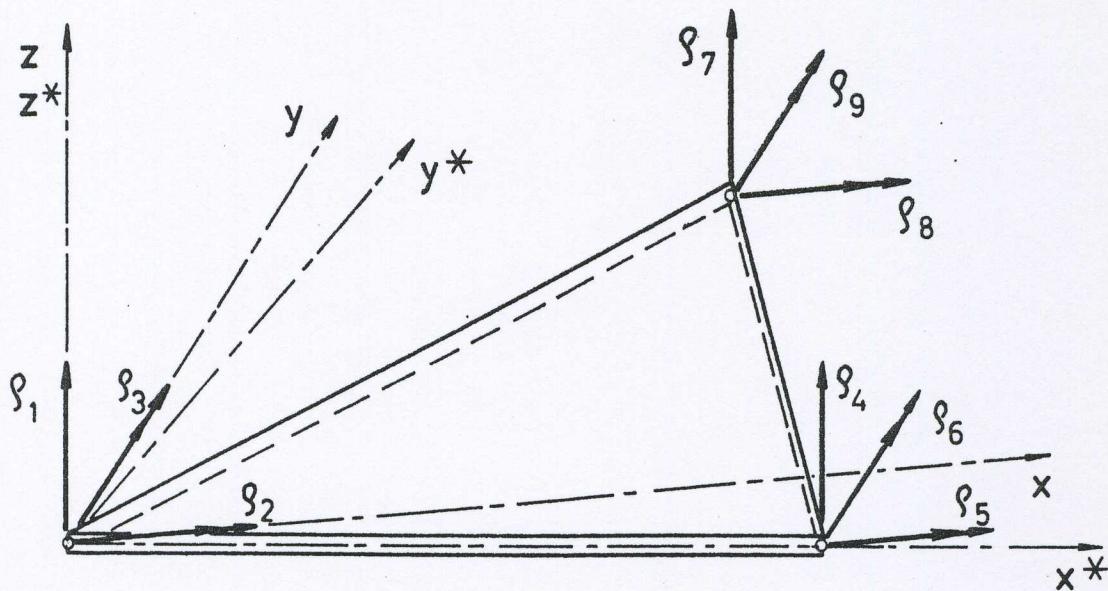


Bild 4.15 Die Verschiebungen des dreieckförmigen Platten-elements im globalen Koordinatensystem

Aus (4.151) folgt die 9×9 Matrix \mathbf{D}^* des dreieckförmigen Platten-elements zu

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	l_{ox}	m_{ox}	0	0	0	0	0	0
3	0	l_{oy}	m_{oy}	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	l_{ox}	m_{ox}	0	0	0
6	0	0	0	0	l_{oy}	m_{oy}	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	l_{ox}	m_{ox}
9	0	0	0	0	0	0	0	l_{oy}	m_{oy}

(4.152)

In (4.152) bedeutet

- l_{ox}, m_{ox} Kosinuse der Winkel zwischen der x^* -Achse und der x - bzw. y -Achse
- l_{oy}, m_{oy} Kosinuse der Winkel zwischen der y^* -Achse und der x - bzw. y -Achse

4.9 Weitere Elemente

Hinsichtlich weiterer Elemente, wie Schalen-, Ring-, räumliche Elemente u.a. wird auf das Schrifttum, z.B. [1.4], [1.8], sowie auf die kommerziell angebotenen FEM-Programmsysteme verwiesen. Die Entwicklung zweckmäßiger Elemente gilt als noch keineswegs abgeschlossen.

Auf den folgenden Seiten ist die Element-Bibliothek des Programmsystems ASKA dargestellt.

ELEMENT TYPES IN ASKA

A large number of element types are permanently included in the ASKA system. The ASKA system is open to the integration of new finite element types. The user can implement 16 additional so called "VIRGO" elements without detailed knowledge of the internal mode of operation of the ASKA system. The system design philosophy allows the incorporation of very general element types.

The present standard version includes different types of finite elements that are sufficient to model almost every class of engineering structures, from truss / beam structures up to solid continua.

The models can be built up of various element types. Any number of elements of any type can be joined at a node, provided they have some freedom parameters in common. The kind and number of freedoms may be different from node to node.

The names of the elements are abbreviations for example in TRIMC6:

TRI stands for TRIangular
M for Membrane
C for Curved edges
6 for Number of nodes

The properties of the elements have a very broad spectrum:

- number of nodal points: 2 (FLA2) to 27 (HEXEC27)
- number of degrees of freedom per node: 2 (TRIAx) to 21 (SHEBA)
(may be different at the corner and midpoints)
- physical nature of degrees of freedom: displacements,
rotations, derivatives of displacements
- geometric data: 0 (ring and solid elements) to 66 (GBEAMX).

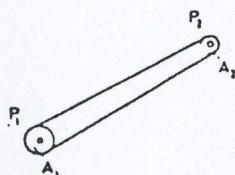
The material properties may vary from element to element and can be specified in two ways:

- isotropic material: modulus of elasticity and Poisson's ratio
- anisotropic material: full anisotropic material stiffness matrix relative to General Coordinate Systems which can be specified by the user.

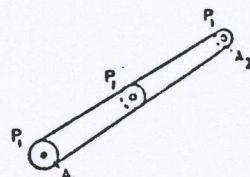
4.9.1 TRUSS AND BEAM ELEMENTS

The flange elements have only stiffness associated with deformations along their axes. Every nodal point has three displacements (referenced to the global coordinate axes). Thus the elements can be oriented in an arbitrary position in space.

FLA2, FLA3

Normal stress flange
in 3-D space (tapered)

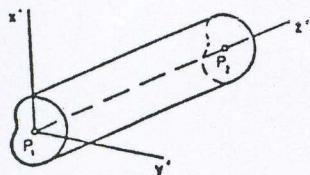
SFLA3

Normal shear stress flange
in 3-D space (tapered)

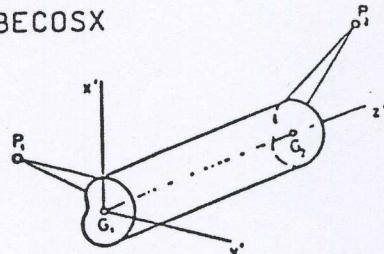
The beam elements have six displacements: three translations and three rotations at each node. They can also be situated arbitrarily in space. The various beam elements differ in the shape of the cross section:

- solid or thinwalled closed
- thinwalled open, including torsion bending effects.

BECOS

Solid beam of constant
cross-section in 3-D space

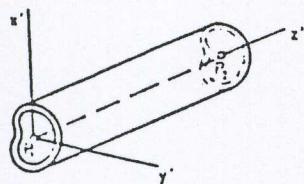
BECOSX

Solid beam of constant
cross-section in 3-D space,
connected to eccentric nodes

ETB(1), St'Venant torsion, no shear effects in bending

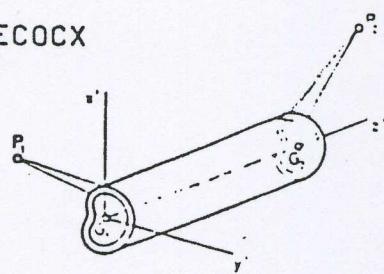
1) Elongation Torsion Bending

BECOC



Tube, beam with constant closed thin-walled or solid cross-section in 3-D space

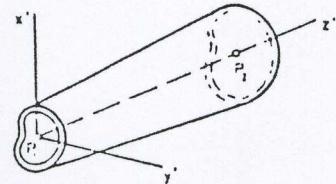
BECOCX



Tube, beam with constant closed thin-walled or solid cross-section in 3-D space connected to eccentric nodes

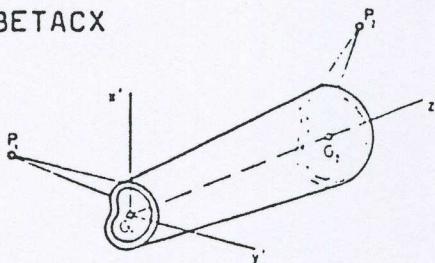
ETB, St'Venant torsion, shear effects in bending

BETAC



Tube, beam with tapered closed thin-walled or solid cross-section in 3-D space

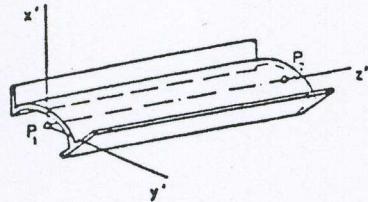
BETACX



Tube, beam with tapered closed thin-walled or solid cross-section in 3-D space connected to eccentric nodes

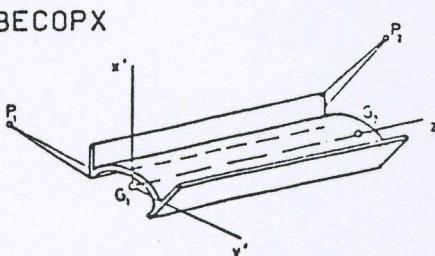
ETB, St'Venant torsion, shear effects in bending

BECOP



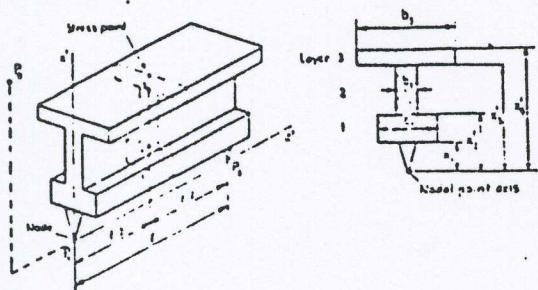
Beam with constant open thin-walled cross-section in 3-D space

BECOPX



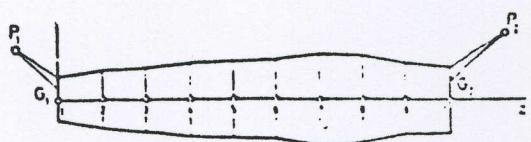
Beam with constant open thin-walled cross-section in 3-D space connected to eccentric nodes

ETB, St'Venant torsion, torsion bending, no shear effects in bending

BECOPL

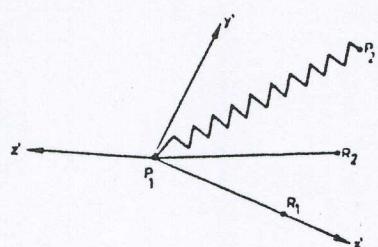
Layered 3 beam element
of constant profil,
pure bending in the
eccentric
symmetry plane x'y'

(Elasto-plastic TRIB34,
TRIB310, TRIB316
stiffener)

GBEAMX

Tube, beam closed thin-walled
10 station variable cross-section
in 3-D space connected to
eccentric nodes

ETB, St'Venant torsion, no shear
effects in bending

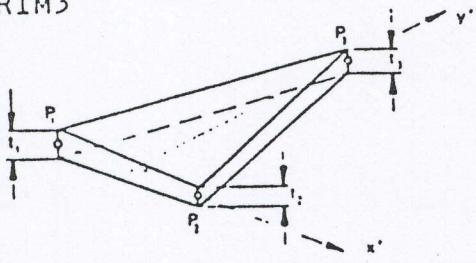
SPRING

General spring element in 3-D space

4.9.2 MEMBRANE ELEMENTS

The membrane elements have only stiffness associated with deformations within their plane. Every nodal point has three displacements (referenced to the global coordinate axes) and the elements thus can be oriented in an arbitrary position in space.

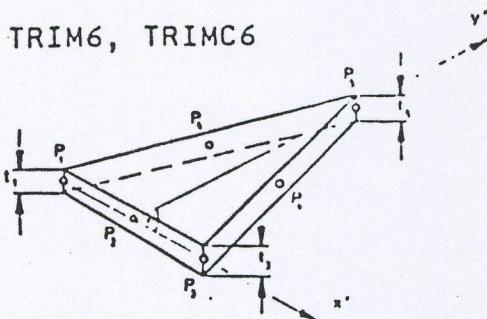
TRIM3



Triangular plane membrane
straight edged element with
variable thickness
in 3-D space

Linear displacement field,
(no stiffness normal to
the plane)

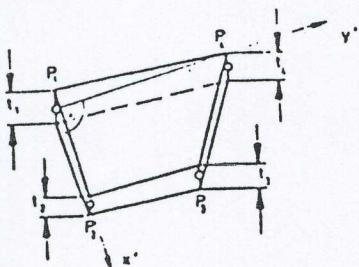
TRIM6, TRIMC6



Triangular plane membrane
straight/curved edged element
with variable thickness
in 3-D space

Quadratic displacement field,
(no stiffness normal to
the plane)

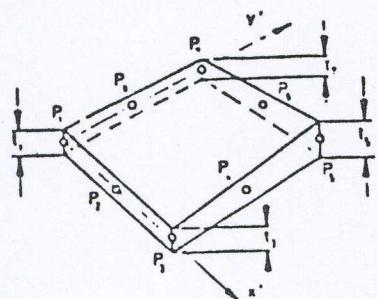
QUAM4



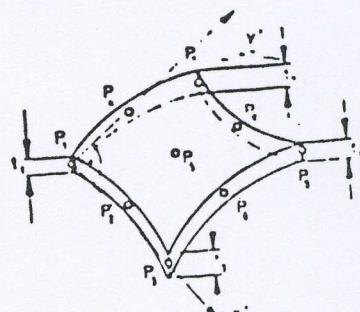
Quadrilateral plane membrane
element in 3-D space,
straight edges, variable thickness

Linear displacement field
(no stiffness for displacements
normal to the element plane)

QUAM8, QUAC8



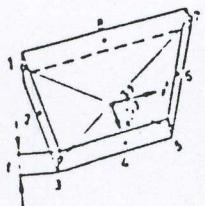
QUAM9, QUAC9



Quadrilateral plane membrane element in 3-D space,
straight/curved edges, variable thickness

Incomplete biquadratic displacement field, (no stiffness for
displacements normal to the element plane)

SPANL8



Quadrilateral plane or warped
shear panel element in 3-D space,
straight edges, variable thickness

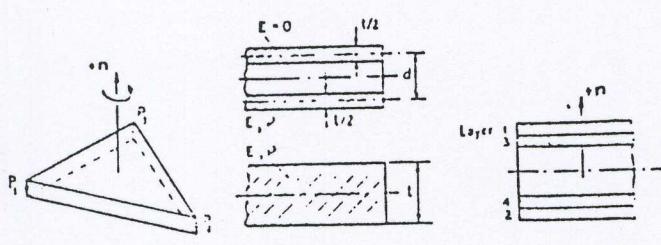
Rank 1 matrix with out-normal forces
parallel to edges; equilibrium over
diagonals (GARVEY assumptions)

4.9.3 PLATE AND SHELL ELEMENTS

The plate and shell elements have membrane stiffness associated with deformations, and bending stiffness associated with rotations.

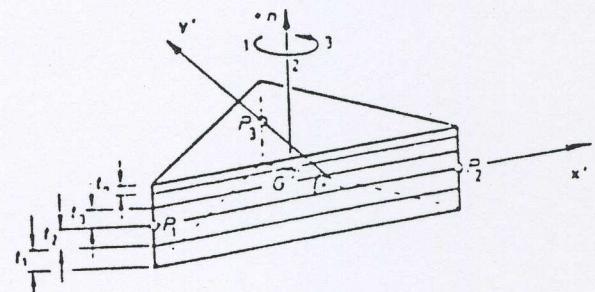
Every nodal point has three translations and three rotations (in the direction of the global coordinate axes) the elements thus can be oriented in an arbitrary position in space (excl. TUBA-family).

TRIB3, TRIB34, TRIB310
TRIB316



Triangular solid/layered (4, 10, 16) planar plate membrane
- bending sandwich element with variable thickness in 3-D space

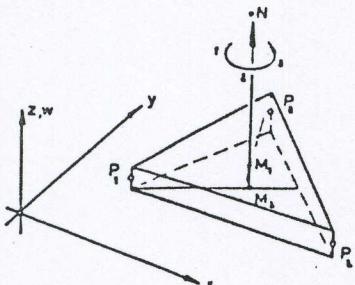
TRUMP, TRUMPL



Triangular (solid or multi-layered) planar plate membrane
- bending sandwich element with transverse shear in 3-D space

Linear membrane deformation, incomplete third order bending (no stiffness around the axis normal to the element plane)

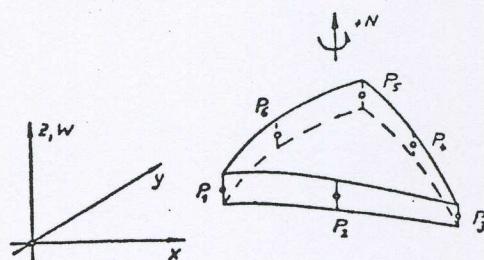
TUBA3



Triangular pure bending element in plane XY
straight edges, constant thickness

No membrane deformation incomplete fifth order bending

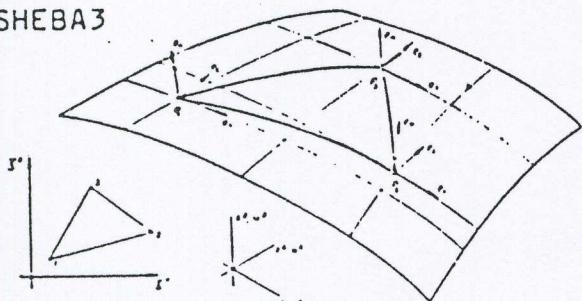
TUBA6, TUBAC6



Triangular pure bending element in plane XY
straight/curved edges, constant thickness

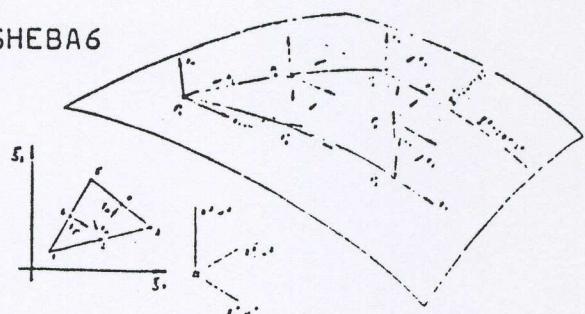
No membrane deformation, complete fifth order in bending

SHEBA3



Triangular shallow shell
membrane-bending
sandwich element in
3-D space
straight edges,
variable thickness

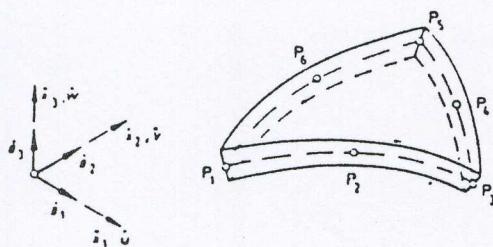
SHEBA6



Triangular shallow shell
membrane-bending
sandwich element in
3-D space
curved edges
variable thickness

Complete fifth order with constraints eliminating the normal derivatives of the displacement vector
(full inter-element compatibility)

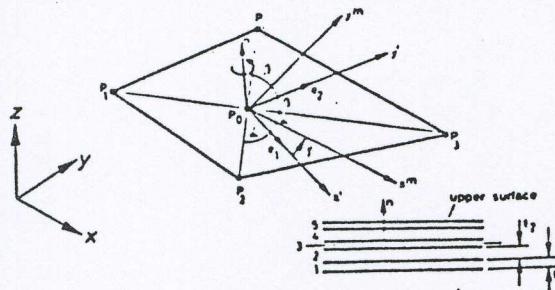
TRABC6



Triangular thick shell element
with 3-D space
curved edges, variable thickness

Quadratic displacement field

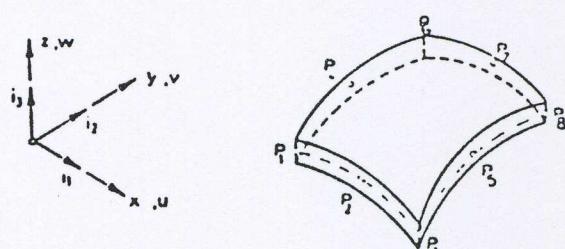
QUAD4, QUAD4S, QUAD4L



Quadrilateral solid/
sandwich/layered
warped shell element with
variable thickness in
3-D space

Bilinear membrane
deformation, incomplete
third order bending

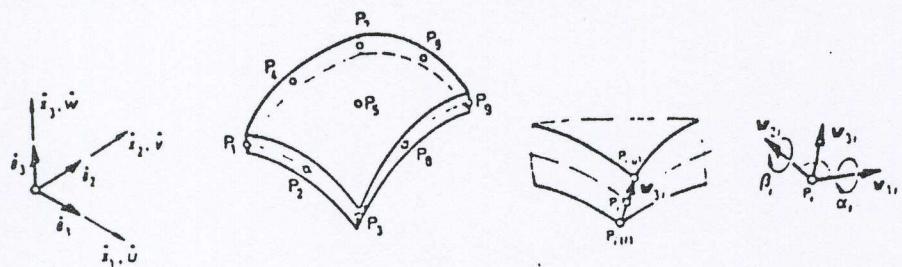
QUAD8



Quadrilateral solid/thick/thin
warped shell element with
variable thickness in 3-D space

Quadratic displacement field,
Reduced integration, all possible
J zero-energy modes are suppressed
small fictive stiffness is added
to normal rotations to avoid
singularities

QUABC9

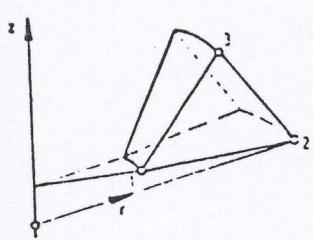


Triangular thick shell element
in 3-D space
curved edges, variable thickness

Biquadratic displacement field

4.9.4 AXISYMMETRIC ELEMENTS

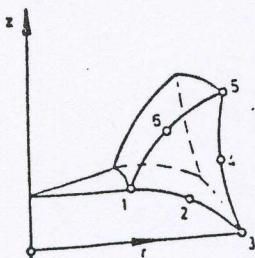
TRIAX3



Axisymmetric ring element
with triangular
cross-section
straight edges

Linear
displacement field

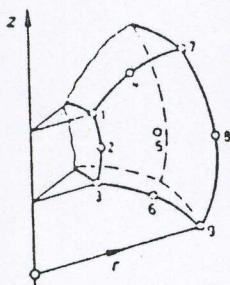
TRIAX6, TRIAXC6



Axisymmetric ring element
with triangular
cross-section
straight/curved edges

Biquadratic
displacement field

QUAX9, QUAXC9

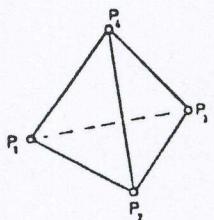


Axisymmetric ring element
with quadrilateral cross section
straight/curved edges

Biquadratic displacement field

4.9.5 SOLID ELEMENTS

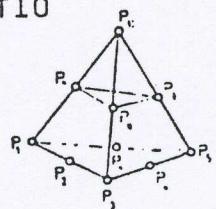
TET4



Solid tetrahedral element in 3-D space straight edges

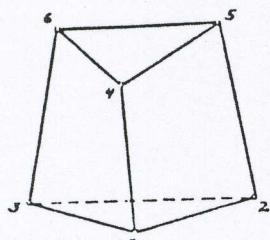
Linear displacement field

TET10



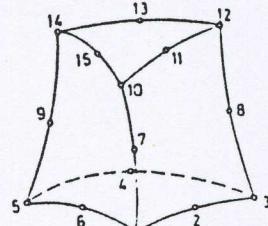
Quadratic displacement field

PENTA6

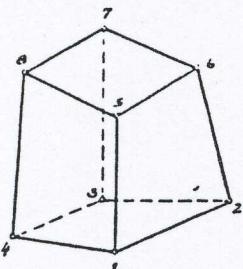
Solid pentahedronal element
in 3-D space,
straight edges

Incomplete quadratic displacement field

PENTA18, PENTAC18, PENTAC15

Solid pentahedronal element
in 3-D space,
straight/curved edges

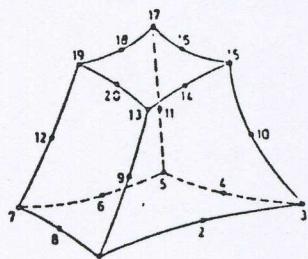
HEXE8



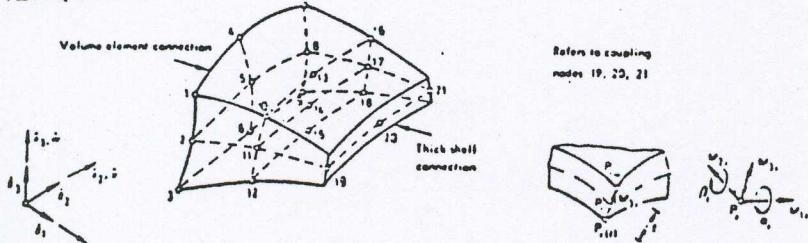
Solid hexahedronal element in 3-D space, straight edges

Incomplete quadratic displacement field

HEXE27, HEXEC27, HEXEC20



HEXQUAB

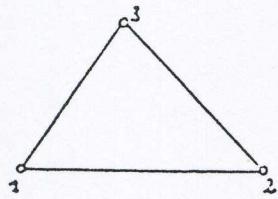
Translational element to couple
thick shell QUABC9/TRABC6 to a
3-D element of the HEXE-family

Incomplete quadratic displacement field

4.9.6 SPECIAL ELEMENTS FOR HEAT TRANSFER CALCULATIONS

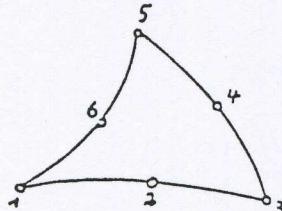
Convection elements to be used in combination with both two- and three-dimensional conduction elements.

ARCON3



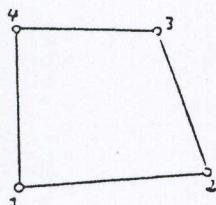
Triangular convection element in 3-D space
straight edges

ARCON6, ARCONC6



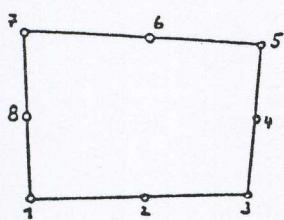
Triangular convection element in 3-D space
straight/curved edges

ARCON4



Quadrilateral convection element
in 3-D space
straight edges

ARCON8, ARCONC8



Quadrilateral convection element in 3-D space
straight/curved edges

ARCON9, ARCONC9

