Prof. Dr. Peter Schmolz
Studiengang Maschinenbau

FINITE ELEMENTE METHODE

Einführung in die Grundlagen der Matrizenrechnung

Einführung in die Grundlagen der Matrizenrechnung

1. Allgemeine Definitionen

1.1 Definition und Schreibweise einer Matrix

Ein rechteckiges Schema von Elementen (Zahlen, Funktionen, Matrizen usw.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

bestehend aus m Zeilen und n Spalten, nennt man eine Matrix vom Typ (m x n). Ist m = n, so heißt die Matrix quadratisch.

Im folgenden werden als Kurzbezeichnung von Matrizen fettgedruckte Großbuchstaben, im Falle von Matrizen mit nur einer Zeile oder einer Spalte auch fettgedruckte Kleinbuchstaben verwendet.

Beispiele:

a) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & \pi & 7{,}2 \end{bmatrix}$$ Matrix vom Typ (2x3)

b) → Hauptdiagonale

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -9 \\ 0{,}6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ quadratische Matrix vom Typ (3x3)

→ Nebendiagonale

c) $\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ Matrix vom Typ (1xn),

auch Zeilenmatrix oder Zeilenvektor genannt.

d)

$$\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matrix vom Typ (mx1), auch Spaltenmatirx oder Spaltenvektor genannt

1.2 Andere Schreibweisen von Matrizen

a) Bezogen auf (1.1.1) nennt man

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

den i-ten Zeilenvektor der Matrix A. Daher gilt folgende Darstellung für A :

$$A = \begin{bmatrix} \mathfrak{a}^{(1)} \\ \mathfrak{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}^{(m)} \end{bmatrix}$$

b) Bezogen auf (1.1.1) nennt man

$$\mathfrak{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

den k-ten Spaltenvektor der Matrix A . Für diesen Spaltenvektor ist auch die Schreibweise

$$\mathfrak{a}_k = \{ a_{1k} \quad a_{2k} \quad \ldots \quad a_{mk} \}$$

üblich.

Mit Hilfe der Spaltenvektoren von A läßt sich diese Matrix auch auf folgende Weise schreiben:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \ldots & \mathfrak{a}_n \end{bmatrix}$$

c) Schließlich sind als abkürzende Schreibweisen der Matrix aus (1.1.1) noch üblich:

α) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$
$\quad k = 1, 2, \ldots, n$

Hierbei heißen i der Zeilenindex und k der Spaltenindex.

β) $\mathsf{A}_{(m\mathrm{x}n)} = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}_{(m\mathrm{x}n)}$

γ) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}$

1.3 Nullmatrizen

Sind in einer Matrix alle Elemente gleich Null, so heißt die Matrix die Nullmatrix.

Beispiel:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Nullmatrix vom Typ } (3x2)$$

1.4 Diagonalmatrizen und Skalarmatrizen

Die Matrix

$$\mathcal{D}_{(nxn)} = \mathcal{D}_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

heißt Diagonalmatrix, wenn alle $d_{ik} = 0$ sind für $i \neq k$ und mindestens ein $d_{ii} \neq 0$ ist.

Sind bei diesen (selbstverständlich quadratischen) Matrizen alle d_{ii} gleich, so spricht man von einer Skalarmatrix.

Beispiel:

$$\mathcal{S}_{(3x3)} = \mathcal{S}_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1.5 Einheitsmatrizen

Ein wichtiger Sonderfall der unter 1.4 genannten Matrizen sind die Einheitsmatrizen. Bei diesen Matrizen sind alle Elemente in der Hauptdiagonalen gleich 1.

Beispiele:

a) speziell

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) allgemein

$$\mathbf{I}_n = \left[\delta_{ik}\right], \text{ wobei } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

1.6 Bandmatrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]$, deren Elemente außerhalb eines Bandes längs der Hauptdiagonalen verschwinden, heißt eine Bandmatrix. Für sie gilt: Es gibt ein $m < n$ so, daß $a_{ik} = 0$ für alle i und k mit $|i - k| > m$. Die Zahl m charakterisiert die Bandbreite.

Beispiele:

a) $m = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ ist eine Diagonalmatrix

b) $m = 1 \Rightarrow \mathbf{A}$ ist eine tridiagonale Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $m = 2 \Rightarrow \mathbf{A}$ hat fünf benachbarte Schrägzeilen um die Hauptdiagonale, usw.

1.7 Dreiecksmatrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]$ heißt obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind.

Beispiele:

a)

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kurz $\mathcal{U} = \left[a_{ik}\right]_{(n \times n)}$ mit $a_{ik} = 0$ für $i > k$

b)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kurz $\mathbf{L} = \left[a_{ik}\right]_{(n \times n)}$ mit $a_{ik} = 0$ für $i < k$

1.8 Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]$ heißt symmetrisch (schiefsymmetrisch), wenn gilt: $a_{ki} = a_{ik}$ ($a_{ki} = -a_{ik}$) für alle i und k.

1.7 Dreiecksmatrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]$ heißt obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind.

Beispiele:

a)

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kurz $\mathcal{U} = \left[a_{ik}\right]_{(nxn)}$ mit $a_{ik} = 0$ für $i > k$

b)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kurz $\mathbf{L} = \left[a_{ik}\right]_{(nxn)}$ mit $a_{ik} = 0$ für $i < k$

1.8 Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} = \left[a_{ik}\right]$ heißt symmetrisch (schiefsymmetrisch), wenn gilt: $a_{ki} = a_{ik}$ $(a_{ki} = - a_{ik})$ für alle i und k.

Beispiele:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

symmetrische Matrix

b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

schiefsymmetrische oder antisymmetrische Matrix

Für schiefsymmetrische Matrizen folgt wegen $a_{ii} = - a_{ii}$, daß alle Elemente a_{ii} der Hauptdiagonalen gleich Null sind.

1.9 Übermatrizen

Sind die Elemente einer Matrix - wie dies bei der allgemeinen Definition einer Matrix unter 1.1 schon zugelassen wurde - wieder Matrizen, so spricht man von einer Übermatrix oder Blockmatrix.

Beispiele:

a) Die Matrix

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

läßt sich z.B. folgendermaßen als Übermatrix schreiben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

wobei die Matrizen

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}$$

auch als Untermatrizen der Übermatrix $\mathbf{A}$ bezeichnet werden.

b) Allgemein sei die Übermatrix A vom Typ $(m \times n)$ in $p \cdot q$ Untermatrizen aufgeteilt.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ - & - & - & - \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \qquad (1.9.1)$$

Um mit diesen Übermatrizen Rechenoperationen wie z.B. Additionen oder Multiplikationen - die im nächsten Kapitel 2 erklärt werden - durchführen zu können, darf die oben angegebene Einteilung einer Übermatrix in Untermatrizen nicht beliebig sein.

In der Formel (1.9.1) muß für die Untermatrizen A_{ik} vielmehr gelten:

I) Für ein festes i und ein beliebiges k müssen die Zeilenzahlen von A_{ik} alle gleich sein.

II) Für ein festes k und ein beliebiges i müssen die Spaltenzahlen von A_{ik} alle gleich sein.

2. Matrizenoperationen

2.1 Transponieren einer Matrix

Schreibt man die Zeilen der Matrix A als Spalten, so erhält man die zu A transponierte Matrix A^t.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ - & - & - & - \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Anders formuliert:

$$A = \left[a_{ik}\right]_{(mxn)} \Rightarrow A^t = \left[a^t_{ik}\right]_{(nxm)}$$

wobei $a^t_{ik} = a_{ki}$ ist. (Wieweit die Indizes laufen, geht aus den Klammern (mxn) usw. hervor.)

Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Folgerungen:

a) $(A^t)^t = A$.

b) Ist A symmetrisch, so gilt: $A^t = A$.

Für das Transponieren von Übermatrizen gilt:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ - & - & - & - \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} A^t_{11} & A^t_{21} & \dots & A^t_{p1} \\ A^t_{12} & A^t_{22} & \dots & A^t_{p2} \\ - & - & - & - \\ A^t_{1q} & A^t_{2q} & \dots & A^t_{pq} \end{bmatrix}$$

2.2 Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen heißen gleich, wenn sie elementweise übereinstimmen.

Folgerung: Die Matrizen müssen vom gleichen Typ sein.

2.3 Addition und Subtraktion von zwei Matrizen

Für die Addition und Subtraktion der zwei Matrizen

$$A = \left[a_{ik}\right]_{(m x n)} \quad \text{und} \quad B = \left[b_{ik}\right]_{(m x n)},$$

die vom gleichen Typ sein müssen, gilt:

$$A \pm B = C = \left[c_{ik}\right]_{(m x n)} = \left[a_{ik} \pm b_{ik}\right]_{(m x n)}$$

Beispiele:

Gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -9 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Zu beweisende Folgerungen sind:

a) $A + B = B + A$ Kommutativgesetz

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativgesetz

2.4 Multiplikation einer Matrix

Multiplikation einer Matrix $\mathcal{A} = \left[a_{ik}\right]_{(m \times n)}$ mit einem Skalar λ.

Für diese Multiplikation mit einem Skalar legt man fest:

$$\lambda \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \lambda = \left[\lambda \cdot a_{ik}\right]_{(m \times n)}$$

Beispiele:

a)
$$4 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & -3 \\ 17 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 68 & 32 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} -21 & 84 \\ 49 & 0 \\ 56 & -35 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

Zu beweisende Folgerungen sind:

Für zwei Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vom gleichen Typ gelten die Gesetze:

a) $\lambda(\mu \cdot \mathcal{A}) = (\lambda\mu) \cdot \mathcal{A}$ Assoziativgesetz

b) $(\lambda+\mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$ 1. Distributivgesetz

c) $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ 2. Distributivgesetz

2.5 Die Multiplikation zweier Matrizen

Die Multiplikation von zwei Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist so erklärt, daß sie nur möglich ist, wenn die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmt. Unter dem Produkt einer (mxn)-Matrix $\mathcal{A} = \left[a_{ik}\right]$ mit einer (nxp)-Matrix $\mathcal{B} = \left[b_{ik}\right]$ versteht man die (mxp)-Matrix $\mathcal{C} = \left[c_{ik}\right]$, wobei gilt:

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\, b_{\nu k} \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, m \\ k &= 1, 2, \ldots, p \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

(Die c_{ik} sind jeweils skalare Produkte von Zeilen- und Spaltenvektoren.)

Ausführlicher geschrieben:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} c_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}) \dots (a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\dots+a_{1n}b_{np}) \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ (a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1}) \dots (a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\dots+a_{mn}b_{np}) \end{bmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + 3\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-7) \\ 4\cdot(-2) + 5\cdot 0 + 6\cdot 3 & 4\cdot 1 + 5\cdot 4 + 6\cdot(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 10 & -18 \end{bmatrix}$$

2.5.1 Folgerungen

a) Ein Kommutativgesetz $A \cdot B = B \cdot A$ gilt nicht!

b) $A \cdot B = 0$ ist möglich, wobei weder A noch B die Nullmatrix ist.

Beispiele:

Zu a) α) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

β) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 11 \end{bmatrix}$; $B \cdot A$ existiert nicht.

Zu b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Multiplikation mit der Einheitsmatrix

$$A_{(m \times n)} \cdot I_n = I_m \cdot A_{(m \times n)} = A_{(m \times n)}$$

(Kurz: $A \cdot I = I \cdot A = A$)

d) Man nennt zwei Matrizen A und B vertauschbar, wenn zufällig

$A \cdot B = B \cdot A$ ist.

2.5.2 Rechengesetze für die Matrizenmultiplikation

Aufgrund der Erklärung für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten, wenn die folgenden Summen und Produkte definiert sind, nachstehende Gesetze.

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ Assoziativgesetz

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ Distributivgesetze

Ferner gilt: $\lambda (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) B = A \cdot (\lambda B)$

Für die Multiplikation von Übermatrizen gilt:

Gegeben seien:

$A = \begin{bmatrix} A_{ik} \end{bmatrix}_{(p \times q)}$ und $B = \begin{bmatrix} B_{ik} \end{bmatrix}_{(q \times r)}$

Dann ist $A \cdot B = \begin{bmatrix} \sum_{v=1}^{q} A_{iv} B_{vk} \end{bmatrix}_{(p \times r)}$,

vorausgesetzt, die auftretenden Produktsummen existieren.

Beispiel:

$$A = \underset{A_{21}\qquad\qquad A_{22}}{\overset{A_{11}\qquad\qquad A_{12}}{\left[\begin{array}{ccc|cc} 5 & -4 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ \hline 3 & 6 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]}} \quad ; \quad B = \underset{B_{21}\qquad B_{22}}{\overset{B_{11}\qquad B_{12}}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Die auftretenden Produkte und Summen sind bildbar und es ergeben sich folgende Resultate:

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12} = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 8 & -18 \end{bmatrix} \qquad A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 11 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 2 & -10 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 2 & -10 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{21}\mathcal{B}_{12} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{A}_{22}\mathcal{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{21}\mathcal{B}_{12} + \mathcal{A}_{22}\mathcal{B}_{22} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 8 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 1 & 13 \\ 6 & 10 & 11 & -13 \\ 9 & -15 & 6 & -9 \\ 2 & -10 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

2.6 Das Transponieren eines Matrizenproduktes

Es gilt: $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^t = \mathcal{B}^t\cdot\mathcal{A}^t$.

Beweis: Gegeben $\mathcal{A} = [a_{ik}]$ und $\mathcal{B} = [b_{ik}]$.

Es sei $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \mathcal{C} = [c_{ik}]$.

Für die transponierten Matrizen gilt dann:

$$\mathcal{A}^t = [a^t_{ik}]\,,\quad \mathcal{B}^t = [b^t_{ik}] \quad \text{und} \quad (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^t = \mathcal{C}^t = [c^t_{ik}]\,,$$

wobei $a^t_{ik} = a_{ki}$, $b^t_{ik} = b_{ki}$ und $c^t_{ik} = c_{ki}$ ist.

Aufgrund der Definition für die Multiplikation zweier Matrizen ergibt sich dann:

Das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})^t = \mathcal{C}^t$ lautet:

$$c^t_{ik} = c_{ki} = \sum_{v} a_{kv}b_{vi}$$

Das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $B^t \cdot A^t$ lautet:

$$\sum_v b^t_{iv}\, a^t_{vk} = \sum_v b_{vi}\, a_{kv} = \sum_v a_{kv}\, b_{vi} \quad \text{q.e.d.}$$

(Selbstverständlich ist die Existenz des Produktes $A \cdot B$ vorausgesetzt.)

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} ; \quad (A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = B^t \cdot A^t .$$

Folgerung: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot \ldots \cdot A_2^t \cdot A_1^t$.

2.7 Matrizeninversion

(Vorbemerkung: Wenn im folgenden zu einer Matrix A die inverse Matrix A^{-1} angeschrieben wird, so sei stets vorausgesetzt, daß A^{-1} auch existiert, was nicht unbedingt der Fall sein muß. Auf die Bedingungen, wann es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} gibt, wird hier nicht eingegangen.)

Zu der quadratischen Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{werde die Matrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ - & - & - & - \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

gesucht derart, daß $A \cdot X = I$ ist.

Die Matrizengleichung $A \cdot X = I$ liefert n Gleichungssysteme mit jeweils n Unbekannten.

Das erste dieser Systeme lautet etwa:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\,x_{11} + a_{12}\,x_{21} + \dots + a_{1n}\,x_{n1} = 1 \\
a_{21}\,x_{11} + a_{22}\,x_{21} + \dots + a_{2n}\,x_{n1} = 0 \\
- - - - - - - - - - - - \\
a_{n1}\,x_{11} + a_{n2}\,x_{21} + \dots + a_{nn}\,x_{n1} = 0
\end{array}
$$

Sind diese Gleichungssysteme eindeutig lösbar, so ist X eindeutig festgelegt und wird mit A^{-1} bezeichnet, d.h. es gilt $A \cdot A^{-1} = I$. Jetzt sei eine Matrix Y gesucht derart, daß $Y \cdot A = I$ ist. Aus $Y \cdot A = I$ folgt:

$$Y \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow Y = A^{-1}.$$

Man nennt die Matrix, die von links und von rechts mit A multipliziert I ergibt, die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Es gilt also: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Beispiele:

a) Für die einfache 2-reihige Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

soll die inverse Matrix A^{-1} gesucht werden.

Wenn $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

gesetzt wird, so folgen aus der Matrizengleichung $A \cdot X = I$ die beiden Gleichungssysteme

α) $a_{11}\,x_{11} + a_{12}\,x_{21} = 1$
$a_{21}\,x_{11} + a_{22}\,x_{21} = 0$ und

β) $a_{11}\,x_{12} + a_{12}\,x_{22} = 0$
$a_{21}\,x_{12} + a_{22}\,x_{22} = 1$

Als Lösungen für die x_{ik} ergeben sich nach den bekannten Verfahren:

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \qquad x_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \qquad x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

Setzt man zur Abkürzung $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = D$, so erhält man für die Matrix $X = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{D} & \frac{-a_{12}}{D} \\ \frac{-a_{21}}{D} & \frac{a_{11}}{D} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad (2.7.1)$$

An diesem einfachen Beispiel erkennt man auch sofort die Bedingung dafür, daß A^{-1} existiert. Sie lautet $D \neq 0$.

b) Man gebe die Inverse zu $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

an. Nach Formel (2.7.1) erhält man sofort: $A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

c) Man gebe die Inverse zu $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$

an. Da in der Formel (2.7.1) $D = 0$ wird, existiert B^{-1} nicht.

2.8 Inversion eines Matrizenproduktes

Es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Beweis: $(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) = I$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} = I \cdot B^{-1}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Es gilt $A \cdot B = \begin{bmatrix} 24 & 31 \\ 55 & 71 \end{bmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} -71 & 31 \\ 55 & -24 \end{bmatrix}$

Außerdem ist $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -71 & 31 \\ 55 & -24 \end{bmatrix}$.

Folgerung: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

2.9 Die Inversion einer transponierten Matrix

Es gilt: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. (2.9.1)

Beweis: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (A \cdot A^{-1})^t = I^t \Rightarrow (A^{-1})^t \cdot A^t = I$

d.h. $(A^{-1})^t$ ist die Inverse zu A^t. Also ist $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Hieraus ersieht man leicht, daß die Inverse Matrix zu einer symmetrischen Matrix wieder symmetrisch ist.

2.10 Die Inversion einer oberen Dreiecksmatrix

Gegeben sei die obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Gesucht wird eine Matrix X derart, daß $A \cdot X = I$ ist.
Man kann leicht zeigen, daß für die Existenz von $X = A^{-1}$ alle $a_{ii} \neq 0$ sein müssen, und daß dann auch $X = A^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Es gilt also:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Um die Elemente der k-ten Spalte von X zu bestimmen, erhält man das Gleichungssystem

$$\sum_{v=i}^{k} a_{iv} x_{vk} = \delta_{ik} \qquad i \leq k$$

Die Lösung erhält man durch eine explizit leicht durchführbare Rechnung. Es gilt nämlich

$$x_{kk} = \frac{1}{a_{kk}} \quad \text{für } i = k. \tag{2.10.1}$$

Die anderen x_{ik} erhält man aus der Formel

$$x_{ik} = \frac{-\sum_{v=i+1}^{k} a_{iv} x_{vk}}{a_{ii}}, \tag{2.10.2}$$

indem man für i der Reihe nach die Werte k-1, k-2, ..., 2, 1 einsetzt.

Beispiel:

A			X		
a_{11}	a_{12}	a_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
0	a_{22}	a_{23}	0	x_{22}	x_{23}
0	0	a_{33}	0	0	x_{33}
1	-2	3	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{12}$
0	3	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
0	0	4	0	0	$\frac{1}{4}$

Also ist $X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 8 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2.11 Zerlegung einer Matrix nach Cholesky

Die symmetrische Matrix $A = \left[a_{ik}\right]$ sei positiv definit. (Dieser Begriff wird hier nicht weiter erklärt.)

Eine positiv definite Matrix $A = \left[a_{ik}\right]$ kann man folgendermaßen schreiben:

$$R^t \cdot R = A \text{, wobei}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist.

Um die Matrix R zu berechnen, geht man folgendermaßen vor.
Aus $R^t \cdot R = A$ folgt:

$$\sum_{v=1}^{i} r_{vi}\, r_{vk} = a_{ik} \qquad k \geq i$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^{i-1} r_{vi}\, r_{vk} + r_{ii}\, r_{ik} = a_{ik}$$

Für $k = i \Rightarrow r_{ii}^2 = a_{ii} - \sum_{v=1}^{i-1} r_{vi}^2$

(Für $i = 1$ sei der Wert der Summe $\sum_{v=1}^{i-1} r_{vi}^2$ gleich Null.)

Für $k > i \Rightarrow r_{ik} = (a_{ik} - \sum_{v=1}^{i-1} r_{vi}\, r_{vk}) : r_{ii}$

Zur Berechnung der r_{ik} verfährt man so:

Man setzt: $i = 1$ und dann $k = 1, 2, \ldots, n$

$i = 2$ und dann $k = 2, \ldots, n$

usw.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 25 & -6 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Nach den oben angegebenen Formeln erhält man:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.11.1)$$

Man prüfe $R^t \cdot R = A$.

2.12 Inversion einer positiv definiten Matrix A nach Cholesky

a) Beschreibung des Verfahrens

1.) Man zerlegt die (positiv definite) Matrix A nach den in 2.11 angegebenen Formeln in $A = R^t \cdot R$.

2.) Man bildet nach der in 2.10 erläuterten Methode die Matrix R^{-1}.

3. Aus $A = R^t \cdot R$ folgt: $A^{-1} = R^{-1} \cdot (R^t)^{-1}$, d.h. wegen der Formel (2.9.1) gilt:

$$A^{-1} = R^{-1} \cdot (R^{-1})^t. \tag{2.12.1}$$

Um A^{-1} zu berechnen, braucht man also im wesentlichen nur die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix zu bestimmen.

b) Beispiel:

Gegeben

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 25 & -6 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Nach (2.11.1) ist

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nach den Formeln (2.10.1) und (2.10.2) findet man

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um schließlich A^{-1} zu berechnen, setzt man in die Formel (2.12.1) ein und erhält:

$$R^{-1} \cdot (R^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{89}{64} & -\frac{3}{32} & 1 \\ -\frac{3}{32} & \frac{1}{16} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Übungsaufgaben

1.) Zu 2.4

Man berechne :

$$2\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} - 4\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ 2 & 0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}$$

2.) Zu 2.5

Man bilde $A\cdot B$.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 11\\ -3 & 6\\ 7 & -2\\ 1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3 & 4\\ 5 & 6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

3.) Zu 2.5

Man bilde jeweils $A\cdot B$ und $B\cdot A$

a) $$A=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 7 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\ 10 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

b) $$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -2 & -4 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & 7 & 13\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

c) $$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 6 & 3\end{bmatrix}$$

d) Man berechne $A \cdot B \cdot C$ für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e) Man berechne $A \cdot B$ durch geeignete Zerlegung in Untermatrizen.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.) Zu 2.5

Man multipliziere eine Matrix von links bzw. von rechts mit einer Diagonalmatrix.

5.) Zu 2.6

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Man berechne

$$A^t;\ B^t;\ A \cdot B;\ B \cdot A;\ (A \cdot B)^t;\ (B \cdot A)^t;\ A^t B^t;\ B^t A^t$$

6.) Zu 2.7

Man berechne die Inverse zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

7.) Zu 2.9

Man berechne zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ die Matrizen $(A^{-1})^t$ und $(A^t)^{-1}$

8.) Zu 2.10

Man invertiere die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.) Zu 2.10

Man invertiere allgemein eine untere Dreiecksmatrix.

10.) Zu 2.11

Man zerlege die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 & 8 \\ -8 & 13 & -11 & 8 \\ 4 & -11 & 35 & -5 \\ 8 & 8 & -5 & 25 \end{bmatrix}$$ nach dem Verfahren von Cholesky in $R^t \cdot R = A$.

11.) Zu 2.12

Man berechne zu der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 9 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & -6 \\ -2 & 1 & 8 & 28 & -6 \\ 1 & 1 & -6 & -6 & \frac{55}{2} \end{bmatrix}$$

nach dem Inversionsverfahren von Cholesky A^{-1}.

Lösungen

1.) $$\begin{bmatrix} 0 & -8 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

2.) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} 71 & 66 & 10 & 5 \\ 18 & 36 & 21 & -18 \\ 18 & -12 & -25 & 30 \\ 4 & 0 & -3 & 4 \\ 37 & 30 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.) a) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} 110 & 9 & 62 \\ 35 & 0 & 14 \\ 25 & 1 & 12 \end{bmatrix} \; ; \; B \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 47 \\ 65 & 96 \end{bmatrix}$$

b) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B \cdot A = \begin{bmatrix} -7 & -14 & 21 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix} \; ; \; B \cdot A = \begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}$$

d) $$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 6 & -36 & 18 & 45 & -18 \\ 29 & -45 & 44 & 67 & -1 \\ 9 & -33 & 20 & 43 & -13 \end{bmatrix}$$

e) $$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]}_{A} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]}_{B}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{(4x3)}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{(2x2)} ; \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{(2x2)}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

also $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 20 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & -1 \\ 8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + O_{(4x3)} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 20 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & -1 \\ 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O_{(4x2)} + O_{(4x2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = O_{(2x3)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = O_{(2x2)} + \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 0 & 0 \\ 20 & 6 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -10 \end{bmatrix}.$$

4.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & d_2 \dots & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 \dots & d_m \end{bmatrix}}_{D_{(m \times m)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{(m \times n)}} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & \dots a_{1n}d_1 \\ a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & \dots a_{2n}d_2 \\ - & - & - \\ a_{m1}d_m & a_{m2}d_m & \dots a_{mn}d_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{(m \times n)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & d_2 \dots & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0 \dots & d_n \end{bmatrix}}_{D_{(n \times n)}} = \begin{bmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \dots a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \dots a_{2n}d_n \\ - & - & - \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \dots a_{mn}d_n \end{bmatrix}$$

5.)

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 & -3{,}5 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 14 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$ $B \cdot A$ existiert nicht

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 14 \\ -3 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 7 \\ -3{,}5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$ $(B \cdot A)^t$ existiert nicht

5.) Fortsetzung

$A^t B^t$ existiert nicht $\qquad B^t A^t = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 14 \\ -3 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 7 \\ -3{,}5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

6.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{35}{6} & -\frac{106}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -21 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

9.) Fortsetzung

$$A \cdot X = I$$

$$\Longrightarrow \sum_{\nu=k}^{i} a_{i\nu}\, x_{\nu k} = \delta_{ik} \qquad i \geq k$$

Damit erhält man für die k-te Spalte von X

$$x_{kk} = \frac{1}{a_{kk}} \qquad i = k$$

$$x_{ik} = \frac{-\sum_{\nu=k}^{i-1} a_{i\nu}\, x_{\nu k}}{a_{ii}} \qquad i = (k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n)$$

10.)

$$\left.\begin{array}{rrrr} 16 & -8 & 4 & 8 \\ & 13 & -11 & 8 \\ & & 35 & -5 \\ & & & 25 \end{array}\right\} \mathrel{\hat{=}} A$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} 4 & -2 & 1 & 2 \\ & 3 & -3 & 4 \\ & & 5 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right\} \mathrel{\hat{=}} R$$

Berechnung von R aus A nach den Formeln von 2.11

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{R^t} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 & 8 \\ -8 & 13 & -11 & 8 \\ 4 & -11 & 35 & -5 \\ 8 & 8 & -5 & 25 \end{bmatrix}}_{A}$$

11.)

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ & 9 & 6 & 1 & 1 \\ & & 7 & 8 & -6 \\ & & & 28 & -6 \\ & & & & \frac{55}{2} \end{array}\right\} \hat{=}\ A$$

Berechnung von R aus A nach den Formeln von 2.11

$$\left.\begin{array}{ccccc} \sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 1 & 2 & 5 & -1 \\ & & 1 & 0 & -5 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{array}\right\} \hat{=}\ R$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} \sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 1 & 2 & 5 & -1 \\ & & 1 & 0 & -5 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{array}\right\} \hat{=}\ R$$

Inversion nach den Formeln aus 2.10

$$\left.\begin{array}{ccccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 & 3 & 11 & \frac{25}{2} \\ & 1 & -2 & -5 & -9 \\ & & 1 & 0 & 5 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{array}\right\} \hat{=}\ R^{-1}$$

Nach (2.12.1) ist $A^{-1} = (R^{-1}) \cdot (R^{-1})^t$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 & 3 & 11 & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{25}{2} & -9 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(R^{-1})^t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1163}{4} & -\frac{351}{2} & \frac{131}{2} & 11 & \frac{25}{2} \\ -\frac{351}{2} & 111 & -47 & -5 & -9 \\ \frac{131}{2} & -47 & 26 & 0 & 5 \\ 11 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{25}{2} & -9 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

Man prüfe, ob $A \cdot A^{-1} = I$ ist.