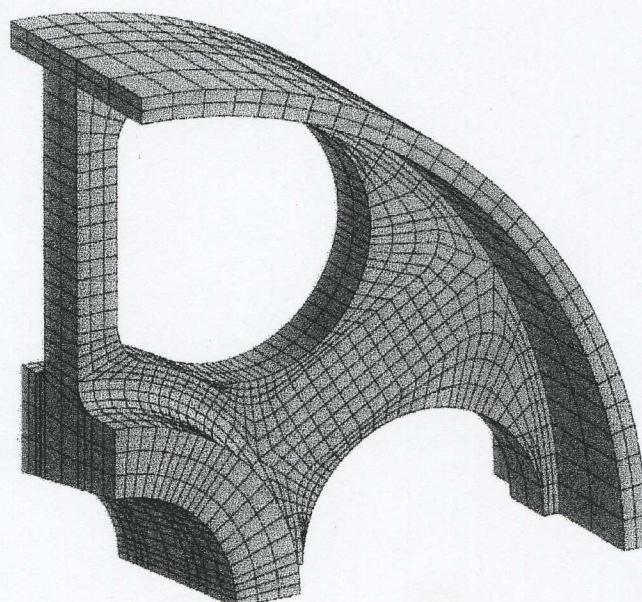


FINITE ELEMENTE METHODE

Manuskript zur Vorlesung

Teil 1 : Lineare Statik



Inhalt - FEM

1. Grundgleichungen für elastische Kontinua
 - 1.1 Die Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen
 - 1.2 Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen
 - 1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen
2. Energiemethoden
 - 2.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit
 - 2.2 Das Einheitsverschiebungsgesetz
 - 2.3 Das Einheitslastgesetz
3. Diskretisierung - Strukturmodell und Elemente
 - 3.1 Auswählen der Elemente
 - 3.2 Das Netz
 - 3.3 Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften
 - 3.4 Beispiel
4. Steifigkeitseigenschaften von Strukturelementen
 - 4.1 Die Steifigkeitsmatrix des Stabelements
 - 4.2 Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix vom lokalen in das globale Koordinatensystem
 - 4.3 Matrix \mathbf{Q}^* und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} für den Gelenkstab
 - 4.4 Die Steifigkeitsmatrix des Balkenelements
 - 4.5 Matrix \mathbf{Q}^* für das Balkenelement
 - 4.6 Matrix \mathbf{K}^* und Matrix \mathbf{Q}^* des Balkenelements für ebene Strukturen
 - 4.7 Das dreieckförmige Membranelement
 - 4.7.1 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Verschiebungen im Innern des Elements
 - 4.7.2 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Dehnungen
 - 4.7.3 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Spannungen
 - 4.7.4 Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* des dreieckförmigen Membranelements
 - 4.7.5 Matrix \mathbf{Q}^* für das dreieckförmige Membranelement

4.8 Das dreieckförmige Plattenelement

- 4.8.1 Beziehungen zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Verschiebungen im Innern des Elements
- 4.8.2 Beziehung zwischen den Knotenpunktsverschiebungen und den Dehnungen
- 4.8.3 Berechnung der Elementspannungen
- 4.8.4 Die Steifigkeitsmatrix des dreieckförmigen Plattenelements
- 4.8.5 Matrix \mathbf{Q}^* für das dreieckförmige Platten-element

4.9 Weitere Elemente

5. Das Zusammenfügen der Elemente zur Gesamtstruktur -
Die Grundschritte der Matrizenverschiebungsmethode
 - 5.1 Die Inzidenzmatrix
 - 5.2 Statische Verträglichkeit an den Strukturknoten
 - 5.3 Die Gesamtsteifigkeitsmatrix
 - 5.4 Berücksichtigung von Randbedingungen
 - 5.5 Die Grundschritte der Matrizenverschiebungsmethode
6. Erweiterung der Methode, um Strukturen mit
Temperaturverteilungen behandeln zu können
 - 6.1 Erweiterung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen
 - 6.2 Auswirkung auf die Elementkräfte
 - 6.3 Transformation der thermischen Elementssteifigkeit vom lokalen in das globale Koordinatensystem
 - 6.4 Auswirkung auf das Zusammenfügen der Elemente
zur Gesamtstruktur
7. Unterstrukturtechnik
 - 7.1 Gründe für das Arbeiten mit Unterstrukturen
 - 7.2 Verschiebungen in der Unterstruktur
 - 7.3 Aufbau der Unterstrukturmatrizen und Elimination
der inneren Verschiebungen
 - 7.4 Zusammenfügen der Unterstrukturen im Hauptnetz
 - 7.4.1 Die Inzidenzmatrix \tilde{A}
 - 7.4.2 Berechnen der den Verschiebungen \tilde{r}
entsprechenden Kräfte \tilde{R}
 - 7.4.3 Die auf die Koppelverschiebungen des Haupt-
netzes bezogene Steifigkeitsmatrix \tilde{K}
 - 7.5 Die Grundschritte bei der Anwendung der
Unterstrukturtechnik
 - 7.6 Übungsbeispiele zur Unterstrukturtechnik
 - 7.7 Typisches ASKA-Steuerprogramm bei Anwendung
der Unterstrukturtechnik
- Anhang: Computerorientierte Behandlung der Matrizen-
gleichungen in der Unterstrukturtechnik
8. Behandlung verteilter Kräfte
9. Schrifttum

FINITE ELEMENTE METHODE (FEM)

- zusammen mit CAD zählt die FEM zu den leistungsfähigsten Verfahren, die Ingenieurarbeit qualitativ zu optimieren.

Historischer Überblick

- mit der klassischen Theorie ist es bis heute nicht möglich, komplexe Zusammenhänge in realen Bauteilen unmittelbar und ganzheitlich zu erfassen.
 - üblicher Lösungsausatz : Bildung eines vereinfachten Modells (Ergebnisse und ihre Übertragbarkeit sind dabei kritisch zu betrachten)
- Ziel : System realitätsnah abzubilden
- Forderung : - Lösungsverfahren, die universell und genau sind
 - mit ingenieurmäßigen Charakter
 - auf kontinuierliche Systeme anwendbar
 - lokale Aussagen ermöglichen

⇒ diese Forderungen werden von FEM ideal erfüllt !
- Entwicklungsgeschichte der FEM im wesentlichen in den letzten 50 Jahren (Entwickelt von Mathematikern und Ingenieuren gleichmaßig)

Einige Entwicklungsschritte

- 1941 Hrennikoff entwickelt ein Stabmodell (Gitterrostverfahren), mit dem gekoppelte Scheiben- und Plattenprobleme einfacher lösbar waren. (ähnliches Lösungsverfahren wie die heutige FEM)
- 1943 Courant benutzt bereichsweise Ansätze der Leg. von OGL. Prinzip der Unterkalkulation, welches dem Grundgedanken der FEM entspricht
- 1954 Argyris, Kelsey entwickeln die Matrizenmethode für die Berechnung von stabsartigen Tragwerken wie auch Scheibenelementen
- 18 Monate später werden die Grundlagen der Verschiebungsmethode von den amerikanischen Forschern Turner, Floeght, Martin und Topp veröffentlicht.
- Begünstigt wurden diese Arbeiten durch das Aufkommen leistungsfähiger Computer!
- FEM → Modellvorstellung eines Kontinuums als eine Zusammensetzung von Teilbereichen (finiten Elementen)
In jedem Teilbereich wird das Elementverhalten durch einen Satz von Ansatzfunktionen beschrieben, die die Verschiebungen und Spannungen in diesem Teilbereich wiedergeben.
- Ziel der FEM: die problembeschreibende DGL in ein lineares Gleichungssystem umzuwandeln
(→ Variationsprinzip formuliert ein Ersatzgleichgewichtsbed.

- 3 -
- 1959 wurde in Stuttgart das "Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen" an der Uni Stuttgart gegründet.
Eines der ersten Röhrencomputer Pegasus Ferranti wurde in 15 Std. Rechenläufen zur Analyse von Flugzeugrumpfen, Leitwerken und Tragflächen eingesetzt. (z.B. Rumpfberechnung des Transalltransportflugzeugs).
 - die rasante Entwicklung der elektronischen Digitalrechner führte dazu, von der bisher benutzten "Kraftmethode" zur besser geeigneten "Matrixverschiebungsmethode" überzugehen, da die volle Automatisierbarkeit des Lösungsprozesses voll zum Tragen kam.
 - 1963 Argyris, Kelsey veröffentlichten das grundlegende Werk "Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft"
 - Systematische Weiterentwicklung der Methode (3d-Probleme, Ausbau der Elementfamilie)
 - Initialversion von ASKA (Automatic System for Kinematic Analysis), das weltweit erste große automatische Programmsystem zur Strukturanalyse.
In Stuttgart stand (damals) einer der modernsten Großrechner (UNIVAC 1107).
→ Möglichkeit bereits nichtlineare Projekte aufzulösen:
elasto-plastische Probleme, Bieuprobleme, große Deformationen wurden grifbar.

- 1965 erste Konferenz über Matrizenmethoden in der Strukturmechanik in Dayton, Ohio.
→ Ende der Gründungszeit und Beginn des Goldenen Zeitalters der FEM
(explosionsartiger Entwicklungsverlauf)
- was einst Pionierarbeit in der Luft- und Raumfahrt war, ist heute Standard im Automobil-, Maschinen- und Hochbau, kurz dem gesamten Ingenieurumfeld.
- vor 20 Jahren lag der Hauptakzent der FEM noch in der linearen Statik und Dynamik. Seitdem hat sich das Anwendungsspektrum der FEM stark verbreitert.

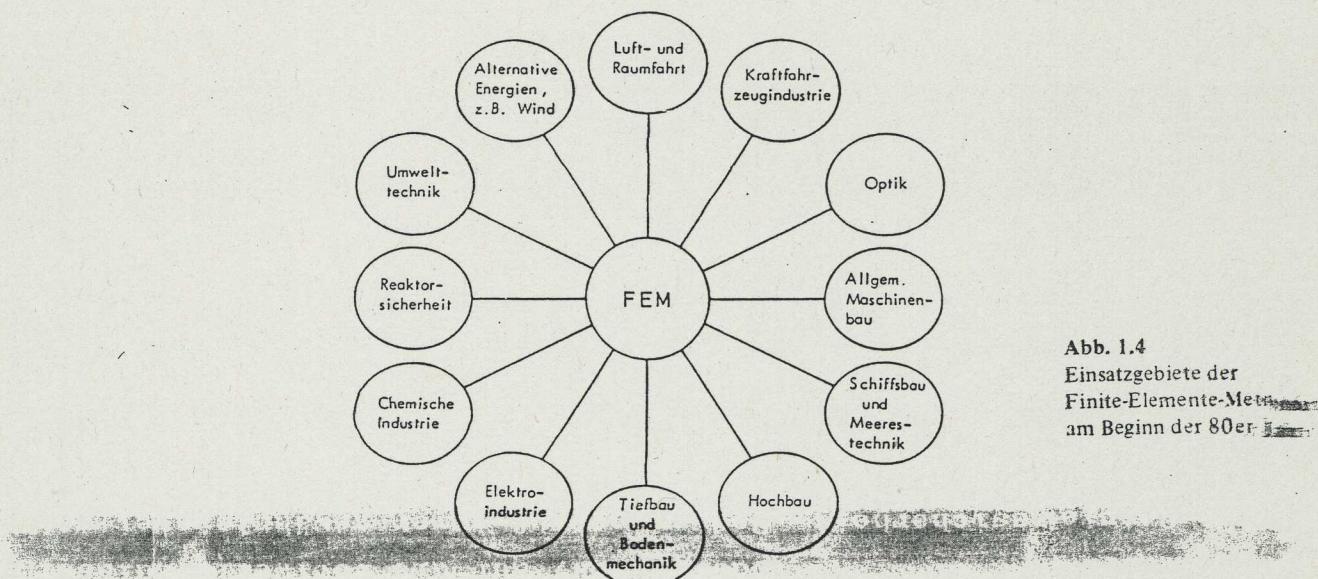


Abb. 1.4
Einsatzgebiete der
Finite-Elemente-Methode
am Beginn der 80er-Jahre

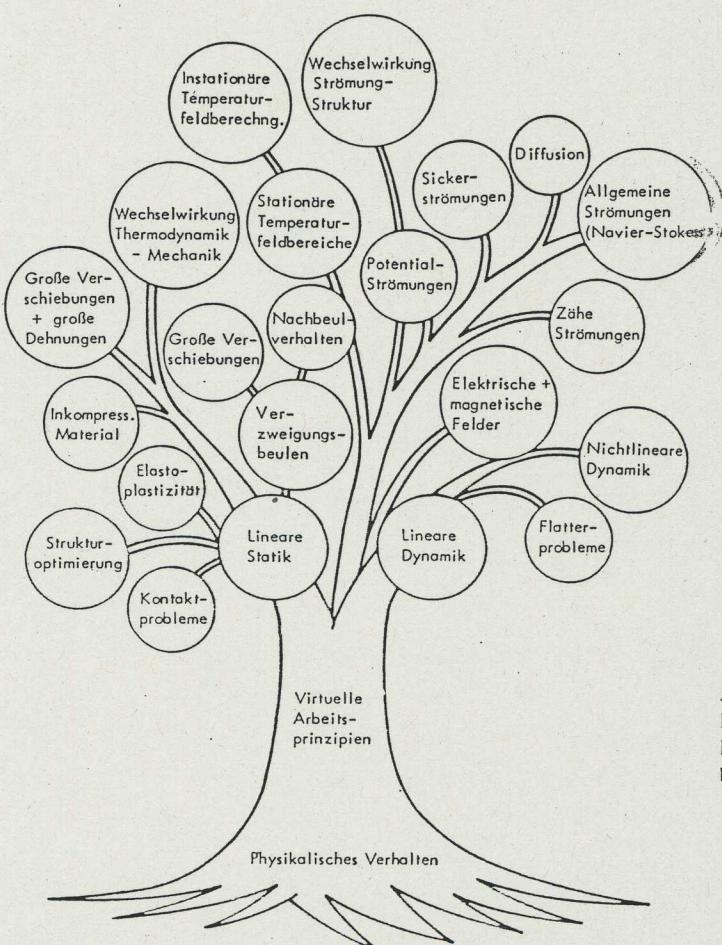


Abb. 1.5
Entwicklung der
Finite-Elemente-Methode
bis zum Jahr 1980

Generelle Vorgehensweise

- Anwender der FEM benötigen ein Grundwissen über die theoretischen Zusammenhänge, da die hauptsächlichen ingenieurmathematischen Aufgabenstellungen in der Überführung des realen Bauteils in ein idealisiertes finites Berechnungsmodell bestehen.
- Während die eigentliche Berechnung nach der Erstellung des FE-Modells automatisch durch den Rechner erfolgt, ist der Anwender wieder gefordert, wenn es um die Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse und dessen Schlußfolgerungen auf das reale Bauteil geht.
- Die FEM basiert auf der Idee, das zu berechnende Gebilde in eine (große) Anzahl von einfachen (und damit der Berechnung zugängiger) Elementen zu zerlegen und aus deren Elemententlösungen unter Berücksichtigung von Kontinuitäts- und Gleichgewichtsbedingungen eine Lösung für das Gesamtsystem zu konstruieren.

Diese Bedingungen werden dabei nur an einer endlichen Zahl von Punkten (sogenannten Knoten) formuliert.

→ sie führen auf ein Gleichungssystem, dessen Lösung im allgemeinen eine Näherungslösung darstellen

- der damit verbundene Fehler wird als hinnehmbar angesehen, da angenommen wird, daß bei hinreichend kleinen Elementen die für die Praxis erforderliche Genauigkeit erreicht wird
 - führt zu vielen Elementen und vielen Knoten und somit auf immer größere Gleichungssysteme (→ nur mit Computer zu behandeln)
 - war zunächst eine intuitive Methode!
(Mathematiker standen lange Zeit diese Methode sehr skeptisch gegenüber, da der math. Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens noch nicht erbracht war, obwohl die Ingenieure die Methode schon lange erfolgreich für Festigkeits- und Schwingungsrechnungen einsetzen!)
- Erst Ende der 60-er Jahre konnte nachgewiesen werden, unter welchen Voraussetzungen die FEM bei immer feinerer Elementunterteilung gegen die richtige Lösung des Problems konvergiert

1 Grundgleichungen für elastische Kontinua

Zur Lösung der Aufgabe, die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen in allen Punkten eines Bauteils bei vorgegebenen Randbedingungen zu bestimmen, stellt die Elastizitätstheorie 15 Gleichungen zur Verfügung siehe z.B. [1.1] oder [1.4]. Es sind dies

die 6 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen (1.3)

die 6 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (1.9)

und die 3 Gleichgewichtsbedingungen (1.13).

Hinzu kommen Verträglichkeitsbedingungen, die gewährleisten, daß benachbarte Elemente nach der Verformung weder auseinanderklaffen noch sich durchdringen, sowie Randbedingungen hinsichtlich der Kräfte und Verschiebungen an den Rändern (z.B. die Gleichungen (1.14)).

1.1 Die Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen

Die Verformung eines Bauteils lässt sich durch die Verschiebungen (displacements) seiner Punkte in x-, y- und z-Richtung vollständig beschreiben:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) \\ u_y &= u_y(x, y, z) \\ u_z &= u_z(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

u_x , u_y und u_z bilden die Komponenten des (3×1) Vektors der Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \{ u_x \ u_y \ u_z \} \quad (1.2)$$

Die im Bauteil auftretenden Dehnungen (strains) oder Verzerrungen erhält man aus den Verschiebungen gemäß

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die Beziehungen lassen sich aus Bild 1.1 ablesen. Bild 1.1 zeigt die Verformung des in der x, y-Ebene gelegenen, ursprünglich rechteckigen Elements ABCD zum Parallelogramm A'B'C'D' sowie die eingetretenen Längen- und Winkeländerungen.

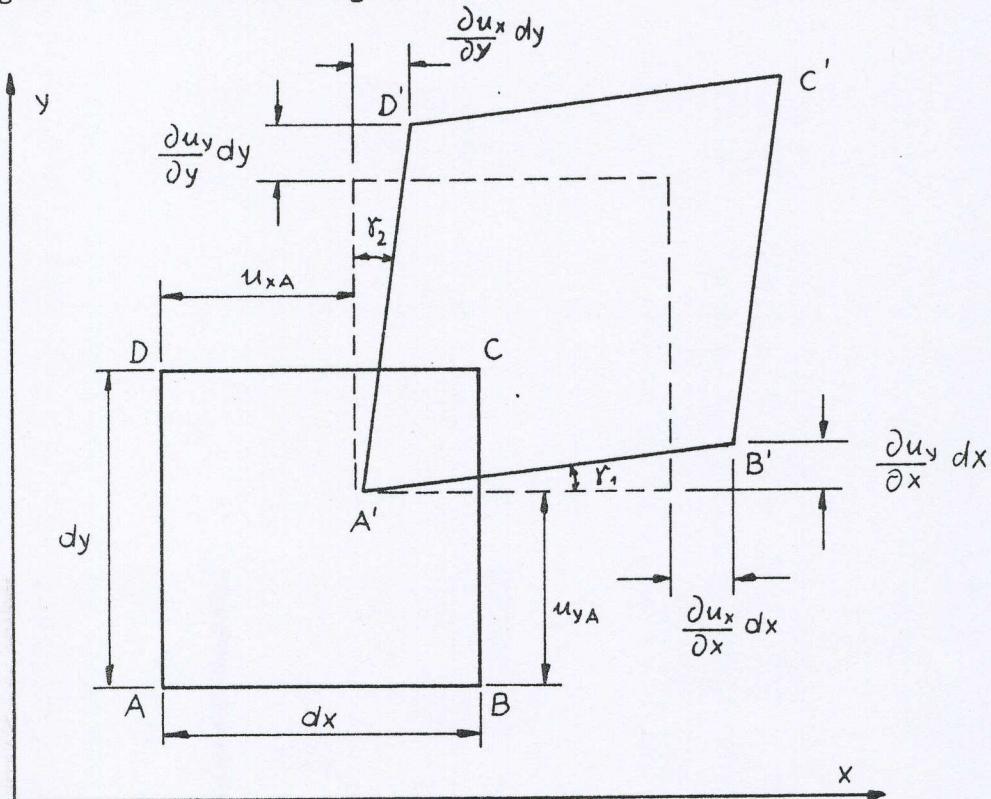


Bild 1.1 Die Verformung eines Rechtecks A B C D

Faßt man die Dehnungen zu dem (6x1) Vektor

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{ \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{zx} \} \quad (1.4)$$

zusammen und führt die (3x6) Matrix von Differentialoperatoren ein

$$\mathbf{D}^t = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

so lassen sich die Gleichungen (1.3) in Matrixform schreiben

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{u} \quad (1.6)$$

1.2 Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Im Falle eines linear-elastisch isotropen Werkstoffs gilt das verallgemeinerte Hookesche Gesetz (siehe z.B. [1.2] oder [1.3])

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
 \varepsilon_{xy} &= 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} &= 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{zx} &= 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{zx}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dabei sind E Elastizitätsmodul, ν Querkontraktionszahl und σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} Normal- bzw. Schubspannungen in den parallel zu den Koordinatenebenen liegenden Flächenelementen (Bild 1.2).

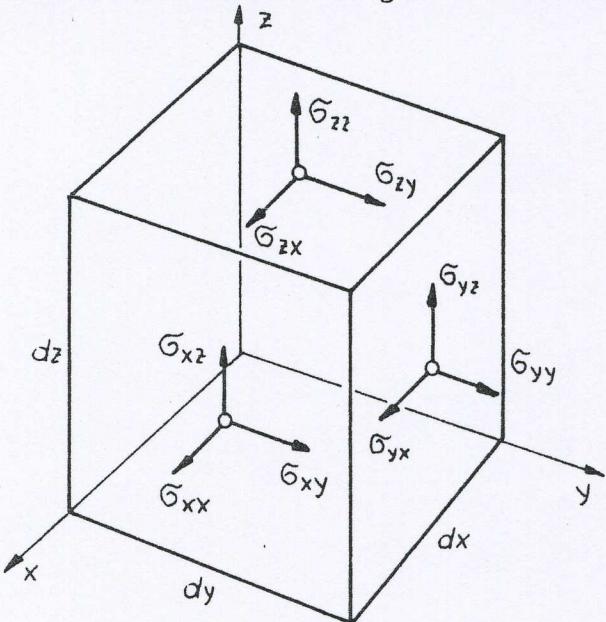


Bild 1.2 Die Komponenten des (6x1) Spannungsvektors

Die Spannungen (stresses) können zu dem (6x1) Spannungsvektor zusammengefaßt werden

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx} \} \quad (1.8)$$

Die Gleichungen (1.7) lassen sich nach den Spannungen auflösen:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_{yy} + \nu (\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_{zz} + \nu (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{zx}\end{aligned} \quad (1.9)$$

Mit der (6x6) Matrix *)

$$\boldsymbol{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

symmetrisch

und den Gleichungen (1.4) und (1.8) können die Gleichungen (1.9) in Matrixform geschrieben werden

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.11)$$

*) Die Matrix (1.10), charakterisiert durch die beiden unabhängigen Konstanten E und ν , gilt nur für isotropen Werkstoff. Bei einem vollständig anisotropen bzw. orthotropen Werkstoff enthält die \boldsymbol{E} -Matrix 21 bzw. 9 unabhängige Konstanten (siehe z.B. [1.14], p. 8, 9).

1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen

Die Bedingungen für das Gleichgewicht im Innern eines Kontinuums lauten

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{mit} \quad i, j = x, y, z \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + p_{Vx} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + p_{Vy} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + p_{Vz} = 0$$

Dabei sind p_{Vx} , p_{Vy} und p_{Vz} eingeprägte Volumkräfte in x-, y- und z-Richtung (mit der Einheit N/cm^3).

Man erhält die Gleichungen (1.12) und (1.13) durch Anwenden der Momenten- und Kräftegleichgewichtsbedingungen auf einen infinitesimalen Quader gemäß Bild 1.3.

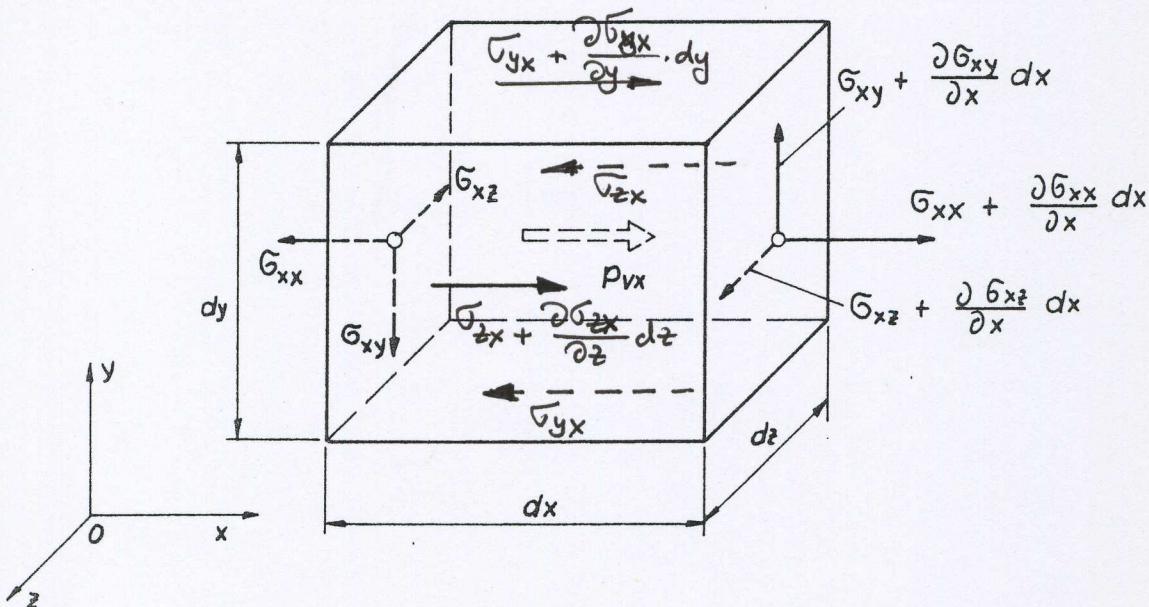


Bild 1.3 Zur Herleitung der inneren Gleichgewichtsbedingungen.

Es sind nur die Spannungskomponenten in den zur x-Achse normalen Oberflächen sowie die x-Komponente der Volumkräfte eingetragen.

zur Statik beim Kontinuum

Lasten: Oberflächenkräfte

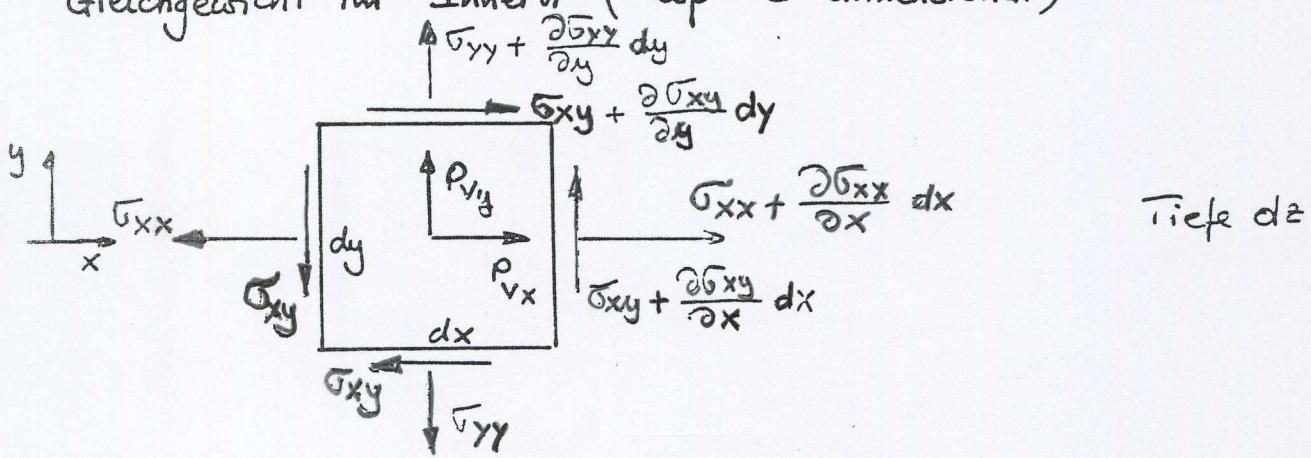
$$\mathbf{P}_A = \{ P_{Ax} \quad P_{Ay} \quad P_{Az} \} \quad [N/m^2]$$

Volumenkräfte

$$\mathbf{P}_V = \{ P_{Vx} \quad P_{Vy} \quad P_{Vz} \} \quad [N/m^3]$$

Spannungen: $\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \} \quad [N/m^2]$

Gleichgewicht im Innern (Bsp: 2-dimensional)



Kräftegleichgewicht: ~~$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy dx dz = -P_{Vx} dx dy dz$~~ $= -P_{Vx} \underbrace{dx dy dz}_{\text{Volumen}}$

~~$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy dx dz = -P_{Vy} dx dy dz$~~

oder

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{Vx} \\ P_{Vx} \\ P_{Vy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{D}^t \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{P}_V$$

Am Rande des Kontinuums müssen die Spannungen σ_{ij} im Gleichgewicht mit etwaigen Oberflächenkräften p_A sein (Bild 1.4). Es gilt

$$l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz} = p_{Ax}$$

$$l\sigma_{yx} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{yz} = p_{Ay} \quad (1.14)$$

$$l\sigma_{zx} + m\sigma_{zy} + n\sigma_{zz} = p_{Az}$$

Hierin bedeuten l, m und n Kosinus des Winkels, den die äußere Normale mit der x-, y- und z-Achse einschließt..

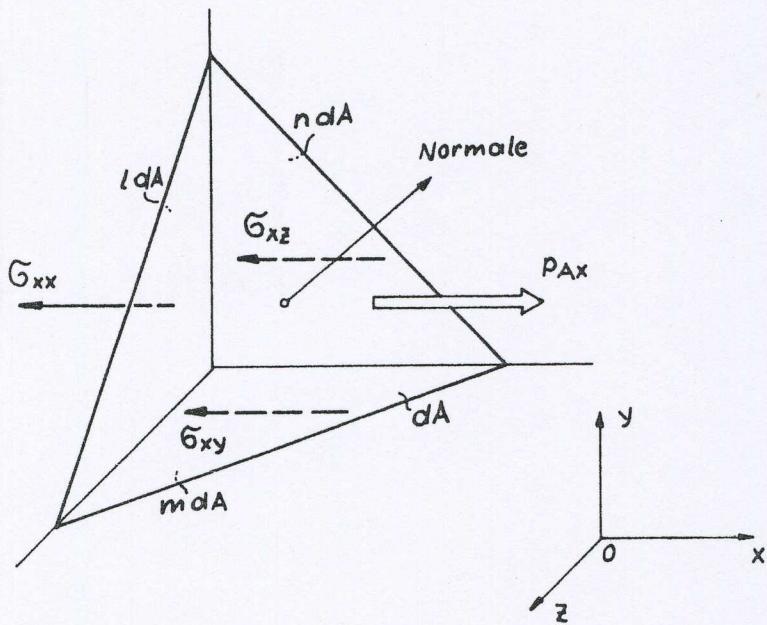
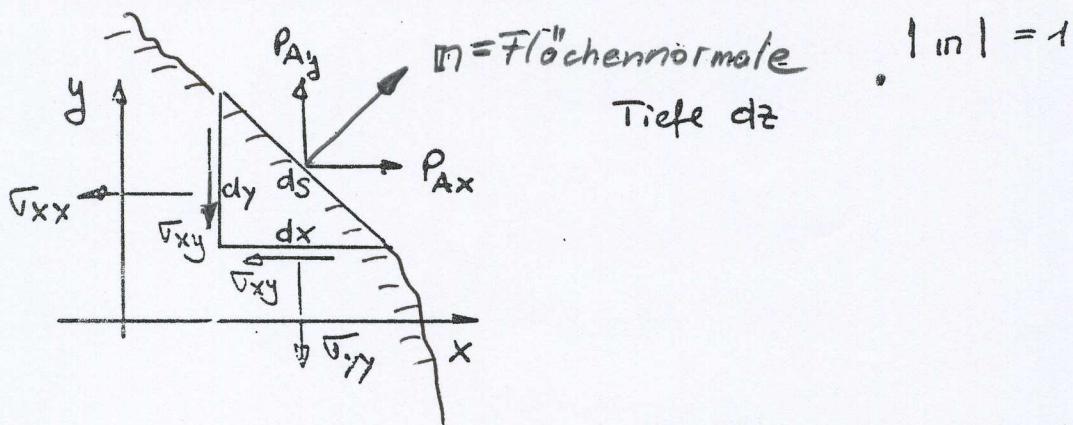


Bild 1.4 Zur Herleitung des Gleichgewichts am Rand.

Es sind nur die x-Komponenten der Spannungen und Oberflächenkräfte eingetragen.

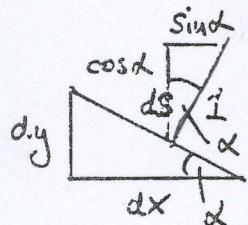
Gleichgewicht an der Oberfläche

$$\sigma_{xx} dy dz + \sigma_{xy} dx dz = p_A x ds/dz \quad | : ds$$

$$\sigma_{yy} dx dz + \sigma_{xy} dy dz = p_A y ds/dz \quad | : ds$$

$$\frac{dx}{ds} = ? \quad \frac{dy}{ds} = ?$$

$$n = \{ l \ m \} \quad l, m \text{ Längskosinus}$$



$$l = \sin \alpha$$

$$m = \cos \alpha$$

$$l = \cos(n, x)$$

$$m = \cos(n, y)$$

$$n = \cos(n, z)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha = m = \cos(n, y)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha = l = \cos(n, x)$$

$$l \sigma_{xx} + m \sigma_{xy} = p_A x$$

$$l \sigma_{xy} + m \sigma_{yy} = p_A y$$

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A x \\ p_A y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D_s \cdot \sigma = P_A}$$

Zur Lösung zur Verfügung stehende Gleichungen:
Zusammenfassung

Dehnungs - Verschiebungsbez: Gl. (1.3)

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & ; \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & ; \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & ; \quad \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\end{aligned}\quad (6 \text{ Gleichungen})$$

Spannungs - Dehnungsbez. Gl (1.9)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{yy} + \nu (\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}) \right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \epsilon_{zz} + \nu (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right] \quad (6 \text{ Gleichungen})$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{zx}$$

statische Verträglichkeit Gl. (1.13) - im Inneren

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_{rx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_{ry} = 0 \quad (3 \text{ Gleichungen})$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + p_{rz} = 0$$

bzw. Randbedingung an der Oberfläche Gl. (1.14)

$$l \bar{\sigma}_{xx} + m \bar{\sigma}_{xy} + n \bar{\sigma}_{xz} = p_{Ax}$$

$$l \bar{\sigma}_{yx} + m \bar{\sigma}_{yy} + n \bar{\sigma}_{yz} = p_{Ay} \quad (3 \text{ Gleichungen})$$

$$l \bar{\sigma}_{zx} + m \bar{\sigma}_{zy} + n \bar{\sigma}_{zz} = p_{Az}$$

2. Energiemethoden

2.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit *)

Die geschlossene Lösung eines komplizierten Problems der Praxis mit den Gleichungen (1.3), (1.9) und (1.13) bzw. (1.14) stößt auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Auf die Möglichkeit, die Differentialgleichungen mit Hilfe numerischer Verfahren (Differenzenverfahren) angenähert zu lösen, soll hier nicht eingegangen werden. Die Methode der Finiten Elemente hat sich den Differenzenverfahren als überlegen erwiesen.

In der Methode der Finiten Elemente geht man nicht so sehr von den Differentialgleichungen sondern von einer Integralbeziehung aus, dem Prinzip der virtuellen Arbeit (= Prinzip der virtuellen Verschiebungen). Virtuell bedeutet wörtlich: der Möglichkeit nach vorhanden. Unter virtuellen Verschiebungen versteht man beliebige infinitesimale, jedoch kinematisch verträgliche Verschiebungen. Es müssen nicht die wirklichen Verschiebungen sein, die die einzelnen Punkte der Struktur infolge der äußeren Belastung erleiden (siehe die Beispiele des Bildes 2.1).

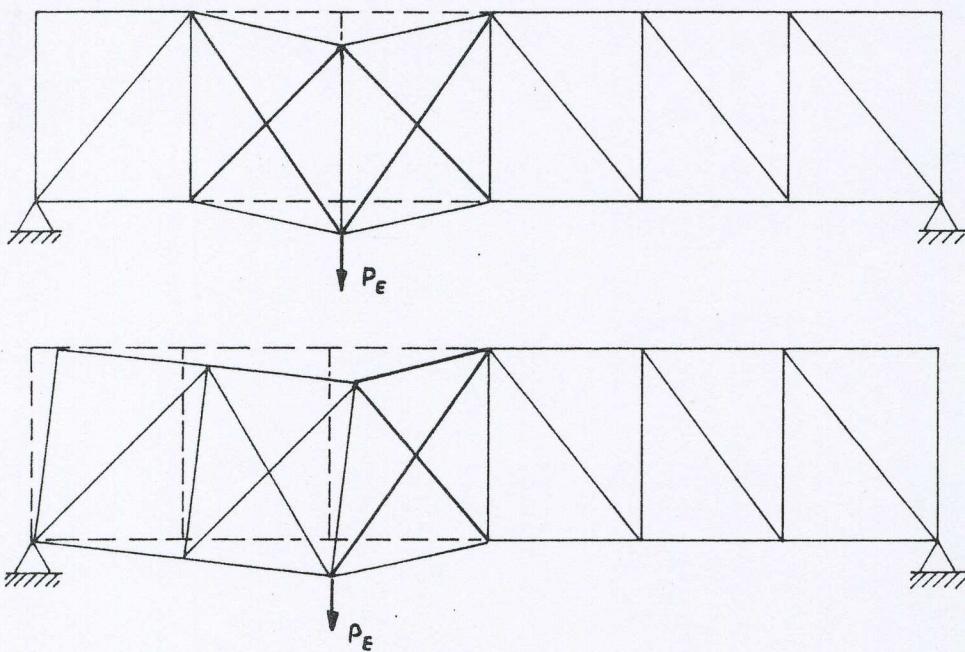


Bild 2.1 Beispiele für virtuelle Verschiebungen eines Fachwerks

*) siehe z.B. auch [1.15]

Das Prinzip der virtuellen Arbeit läßt sich herleiten, indem man die Gleichungen (1.13) mit den virtuellen Verschiebungen δu_x , δu_y bzw. δu_z multipliziert, danach eine Umformung mit Hilfe der ersten Greenschen Identität vornimmt und schließlich die Gleichungen (1.9) und (1.14) berücksichtigt [1.4]. Man findet

$$\delta W_a = \delta W_i \quad (2.1)$$

Dabei ist δW_a die äußere virtuelle Arbeit, die von der äußeren Belastung mit virtuellen Verschiebungen geleistet wird. Im Rahmen einer linearen Theorie kann sie in der Form geschrieben werden

$$\delta W_a = \sum_{r=1}^n p_E^r \delta u_r + \int_A p_A^t \delta u dA + \int_V p_V^t \delta u dV \quad (2.2)$$

wobei die (3x1) Spaltenvektoren

$$\delta u = \{ \delta u_x \quad \delta u_y \quad \delta u_z \} \quad \text{virtuelle Verschiebungen}$$

$$p_E = \{ p_{Ex} \quad p_{Ey} \quad p_{Ez} \} \quad \text{äußere Einzelkräfte}$$

$$p_A = \{ p_{Ax} \quad p_{Ay} \quad p_{Az} \} \quad \text{verteilte Oberflächenkräfte}$$

$$p_V = \{ p_{Vx} \quad p_{Vy} \quad p_{Vz} \} \quad \text{Volumkräfte}$$

Für die innere virtuelle Arbeit gilt

$$\delta W_i = \int_V \bar{\sigma}^t \delta \epsilon dV \quad (2.3)$$

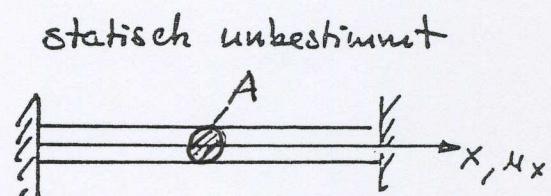
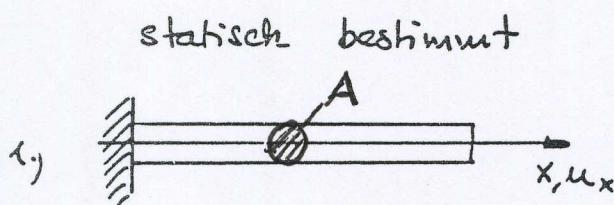
wobei $\bar{\sigma}$ der Spaltenvektor der Spannungen gemäß Gleichung (1.8) ist. Der Strich besagt, daß es nicht die wahren Spannungen infolge der Belastung p_E , p_A bzw. p_V sein müssen, sondern mit dieser nur statisch verträglich zu sein brauchen. Die virtuellen Dehnungen $\delta \epsilon$ erhält man aus den virtuellen Verschiebungen nach den Gleichungen (1.3).

zur statischen Bestimmtheit:

Lassen sich die wahren Spannungen $\bar{\sigma}$ aus den Gleichgewichtsbed. ableiten, dann ist das Tragwerk statisch bestimmt.

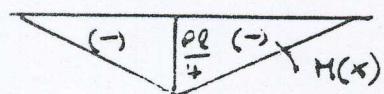
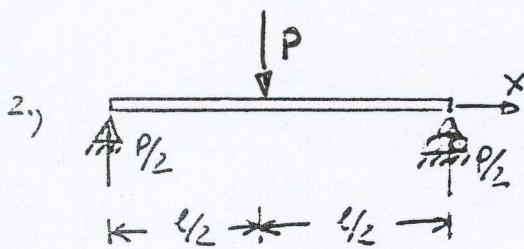
Im allgemeinen reichen jedoch statische Bedingungen zur Bestimmung der wahren Spannungen nicht aus. Es muß zusätzlich die kinematische Verträglichkeit einbezogen werden. Solche Tragwerke sind statisch unbestimmt.

Beispiele:

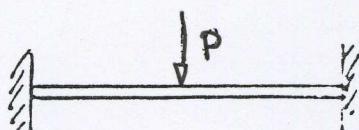


$$\begin{aligned} p_{vx} &= c \cdot x \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} &= -A p_{vx} \\ \bar{\sigma}_{xx} &= -\frac{1}{2} A c x^2 + d \\ \bar{\sigma}_{xx}(l) &= 0 = \frac{1}{2} A c l^2 + d \end{aligned}$$

} wie links
Raumbed. fehlt hier



$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{M}{I} \cdot y$$



Raummomente unbekannt

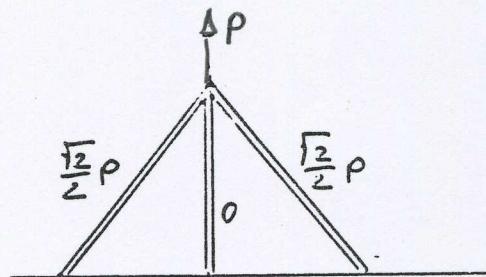
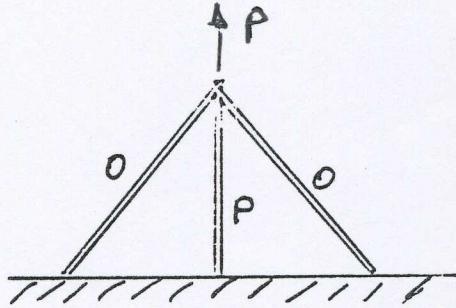
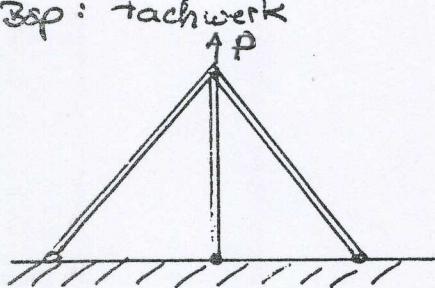
In statisch unbestimmten Tragwerken können durch rein statische Überlegungen nur sogenannte statisch verträgliche Spannungen $\bar{\sigma}$ gefunden werden. Diese erfüllen nur die Gleichgewichtsbed.

$$\mathbb{D} \cdot \bar{\sigma} = -P_V$$

$$\mathbb{D}_S \cdot \bar{\sigma} = P_A$$

nicht aber die kinematische Verträglichkeit. Risse und Überlappungen sind also bei $\bar{\sigma}$ zulässig. Die Verteilung $\bar{\sigma}$ ist nicht eindeutig und es gibt stets Alternativen..

Bsp: Fachwerk



Jede wahre Spannungsverteilung σ ist natürlich auch statisch verträglich. Sie erfüllt aber auch zusätzlich kinematische Verträglichkeit (keine Risse und Lücken).

zur Kinematik:

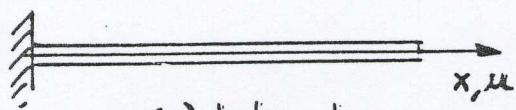
Kennt man u in jedem Punkt, dann ist die Dehnung ε eindeutig bestimmt. Das Tragwerk ist kinematisch bestimmt.

Bsp:

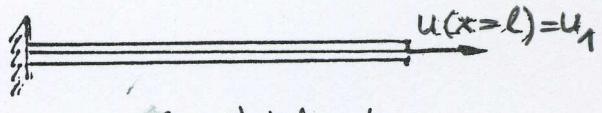
kinematisch bestimmt

kinematisch unbestimmt

stab:

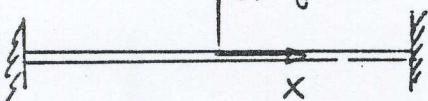


$u_x(x)$ bekannt

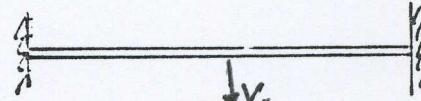


$u(x=l)$ bekannt

Balken:

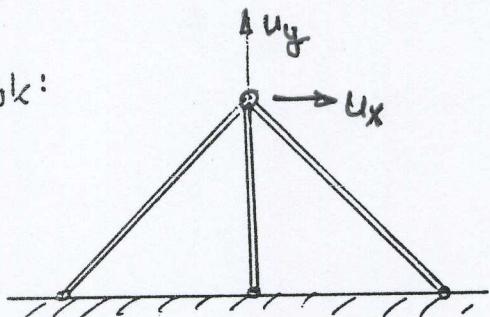


$u_y(x)$ bekannt

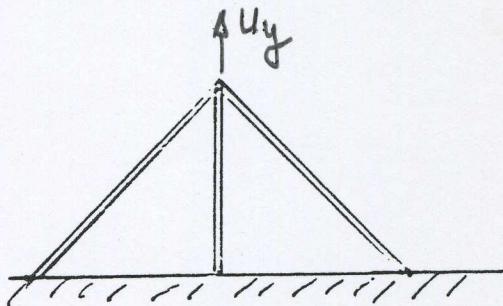


$u_y(x=s) = v_1$ bekannt

Fachwerk:



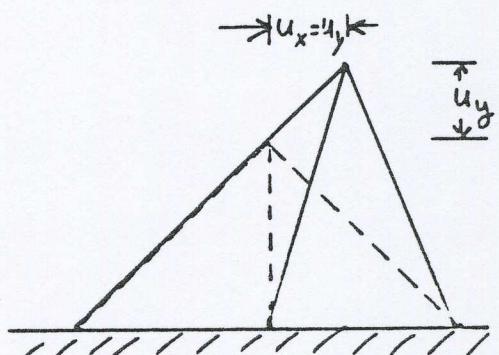
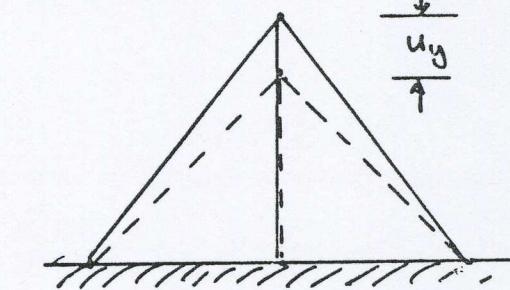
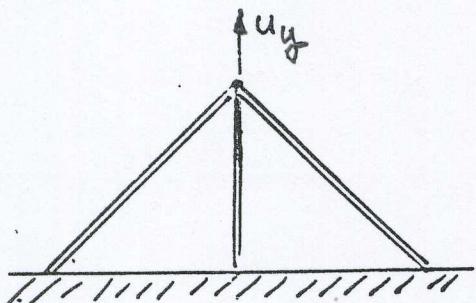
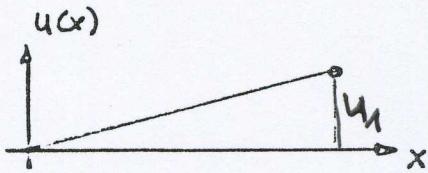
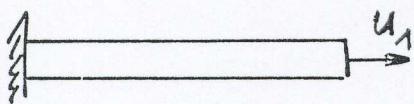
u_x, u_y bekannt



u_y bekannt

In kinematisch unbestimmten Tragwerken ist es unmöglich, die wahren Dehnungen ε durch rein kinematische Betrachtungen zu finden. Man kann höchstens sogenannte kinematisch verträgliche Dehnungsverteilungen ε aufstellen, indem man die fehlenden Angaben nach belieben, aber ohne Lücken und Risse unter Einhaltung der kinematischen Randbedingungen ergänzt. Für ε gibt es stets Alternativen.

Bsp:

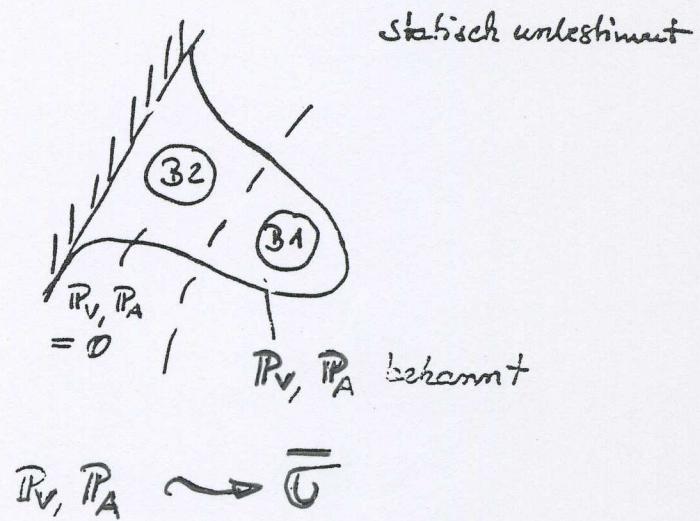
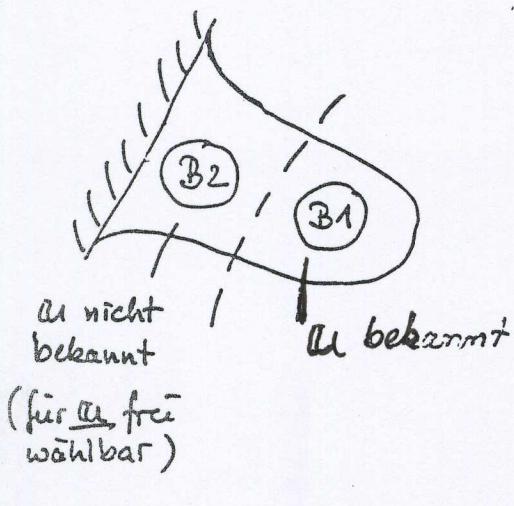


Jede wahre Dehnungsgesetzung \mathcal{E} ist natürlich auch kinematisch verträglich (sie erfüllt darüber hinaus noch die statische Verträglichkeit)

Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir betrachten ein beliebiges kontinuierliches Tragwerk und setzen voraus, daß 2 völlig voneinander unabhängige Zustände bekannt sind.

Abstraktion:



$$u \leadsto \varepsilon$$

kinematisch verträglicher Dehnungszustand

Es sind dies einmal ein kinematisch verträglicher Dehnungszustand ε und ein entsprechend statisch verträglicher Spannungszustand $\bar{\sigma}$. Das Wort "entsprechend" bezieht sich dabei auf die Bereiche B_1 und B_2 . Wo im linken Fall die Verschiebungen bekannt sind, sind im rechten Fall die Lasten bekannt. Sonst verbindet die beiden Fälle nichts!

Aus der kinematisch verträglichen Verschiebungsteilung u läßt sich die kinematisch verträgliche Dehnung ε ausrechnen.

aus den Annahmen folgt:

Zustand I

Kinematik erfüllt
Statik nicht

$$\underline{\varepsilon} = \mathbb{D}^t \underline{u}$$

Zustand II

Kinematik nicht erfüllt
Statik erfüllt

$$\mathbb{D} \bar{\underline{\varepsilon}} = -\bar{P}_A$$

$$\mathbb{D}_S \bar{\underline{\varepsilon}} = \bar{P}_A$$

Damit gilt auch:

Schritt 1: $\underline{\varepsilon} - \mathbb{D}^t \underline{u} = 0$ an jedem Punkt

Schritt 2: $\bar{\underline{\varepsilon}}^t (\underline{\varepsilon} - \mathbb{D}^t \underline{u}) = 0$ an jedem Punkt
(1x6) (6x1)

Schritt 3: $\int_V \bar{\underline{\varepsilon}}^t (\underline{\varepsilon} - \mathbb{D}^t \underline{u}) dV = 0$ (bereits eine Form des P.V.A.)

Dabei ist die aus $\bar{\underline{\varepsilon}}$ und $\underline{\varepsilon}$ gebildete virtuelle Arbeit:

$$I.V.A = \int_V \bar{\underline{\varepsilon}}^t \underline{\varepsilon} dV = \int_V \bar{\underline{\varepsilon}}^t [\mathbb{D}^t \underline{u}] dV$$

Die Form des Schrittes 3 wird rein mathematisch umgeformt, um einige wichtige Aussagen zu gewinnen.

Die Vorgehensweise Schritt 1 bis Schritt 3 wird als Galerkinische Methode bezeichnet.

Zur Umformung der integralen Aussage 3 konzentriert wir unsere Aufmerksamkeit auf den 2. Integralteil.

Wir erhalten für ebene Probleme beispielweise:

$$\bar{\underline{\varepsilon}} = \{ \bar{\varepsilon}_{xx} \quad \bar{\varepsilon}_{yy} \quad \bar{\varepsilon}_{xy} \}$$

$$\mathbb{D}^t \underline{u} = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right\}$$

oder:

$$\int_V \bar{\sigma}^t D^t \underline{u} dV = \int_V \left(\bar{\sigma}_{xx} \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial x} + \bar{\sigma}_{yy} \frac{\partial \underline{u}_y}{\partial y} + \bar{\sigma}_{xy} \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial y} + \bar{\sigma}_{xy} \frac{\partial \underline{u}_y}{\partial x} \right) dx dy dz$$

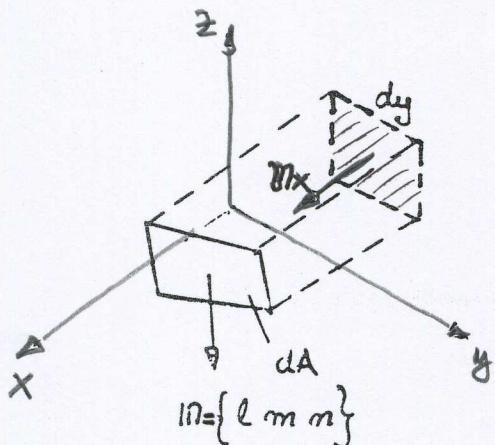
die rechte Seite der Gleichung enthält die typischen Integrale

$$\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dV}{dx dy dz}, \quad \int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dV}{dx dy dz}, \quad \underbrace{\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dV}{dx dy dz}}_{\text{für den räuml. Fall}}$$

Wir nehmen zunächst den 1. Typ und integrieren partiell über x

$$\begin{aligned} \int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dV &= \int_A \left(\int_x \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) dy dz \\ &= \int_A \varphi \psi dy dz - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi dV \end{aligned}$$

ΔA ist $dy dz$ die Projektion des Oberflächenstücks dA auf die y-z-Ebene. Der Winkel, den die (als eben angesetzende) Fläche dA mit $dy dz$ bildet, sei α



$$m = \{1 \ 0 \ 0\}$$

$$\text{dann gilt: } \cos \alpha dA = dy dz$$

wobei $\cos \alpha$ leicht mit Hilfe des Skalarprodukts der Einheitsnormalenvektoren zu berechnen ist.

$$\cos \alpha = m^t m_x = l$$

Wir erhalten also

$$\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} dV = \int_A \underbrace{\varphi \psi l dA}_{(=dy \cdot dz)} - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi dV \quad]$$

und durch partielle Integration der anderen Integraltypen in
y- bzw. z-Richtung erzielt sich entsprechend:

$$\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} dV = \int_A \varphi \psi_m dA - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} \psi dV$$

$$\int_V \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} dV = \int_A \varphi \psi_n dA - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} \psi dV$$

Greensche Formeln

Wir machen davon Gebrauch und erhalten (Bsp. ebener Fall)

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\sigma}^t \mathbb{D}_s^t \underline{u} dV &= \int_A \bar{\sigma}_{xx} \underline{u}_x l dA - \int_V \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} \underline{u}_x dV \\ &\quad + \int_A \bar{\sigma}_{yy} \underline{u}_y m dA - \int_V \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y} \cdot \underline{u}_y dV \\ &\quad + \int_A \bar{\sigma}_{xy} \underline{u}_x m dA - \int_V \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial y} \cdot \underline{u}_x dV \\ &\quad + \int_A \bar{\sigma}_{xy} \underline{u}_y l dA - \int_V \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial x} \underline{u}_y dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_A ((\bar{\sigma}_{xx} l + \bar{\sigma}_{yx} m) \underline{u}_x + (\bar{\sigma}_{xy} l + \bar{\sigma}_{yy} m) \underline{u}_y) dA \\ &\quad - \int_V ((\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial y}) \underline{u}_x + (\frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y}) \underline{u}_y) dV \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält, nach Abspaltung des Verschiebungsvektors \underline{u}_s , die Terme $(\mathbb{D}_s \bar{\sigma})^t$ bzw.

$(\mathbb{D} \bar{\sigma})^t$, so dass eine kompakte Form des Gaußschen Integralsatzes geschrieben werden kann:

Gaußsche Integralatz:

$$\underbrace{\int_V \bar{\sigma}^t [D^t u] dV}_{\left(= \int_V \bar{\sigma}^t \underline{\epsilon} dV \right)} = \int_A [D_s \bar{\sigma}]^t u dA - \int_V [D \bar{\sigma}]^t u dV$$

Als letzten Schritt führen wir die Gleichgewichtsbedingungen ein:

$$\begin{aligned} D_s \bar{\sigma} &= + P_A && \text{(stat. Verträglichkeit)} \\ D \bar{\sigma} &= - P_V \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\boxed{\int_V \bar{\sigma}^t \underline{\epsilon} dV = \int_{A_1} P_A^t u dA + \int_V P_V^t u dV} \quad (\text{P.V.A})$$

dabei wurde berücksichtigt, dass die Belastung Null ist, wo u frei gewählt wurde (Bereich 32). Es darf also u durch \underline{u} ersetzt werden, und die Integration kann auf den Bereich 31 beschränkt werden.

P.V.A in Wörtern:

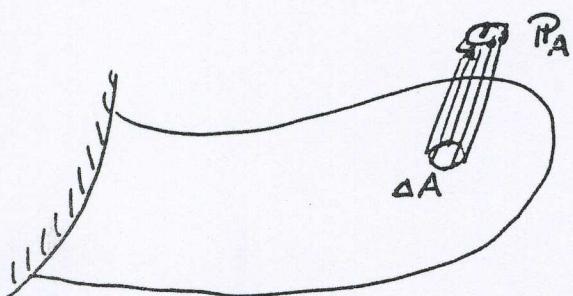
Sind die Lasten P_A, P_V entsprechend zu den Verschiebungen u eines Tragwerks, d.h. zwar unabhängig aber doch wenigstens in gleichen Teilbereichen wirkend, dann ist die Arbeit dieser Lasten an den Verschiebungen (= äußere virtuelle Arbeit) gleich der Arbeit der u in P_A und P_V statisch verträglichen Spannungen $\bar{\sigma}$ an den u als kinematisch verträglichen Dehnungen $\underline{\epsilon}$ (= innere virtuelle Arbeit)

Nun beachte folgende essentielle Punkte:

1. $\bar{\sigma}$ muß nur statische Verträglichkeit im Bezug auf die Belastung P_A, P_V erfüllen (\rightarrow nicht die wahren Spannungen)
2. $\underline{\epsilon}$ muß nur kinematisch verträglich mit u sein.
(\rightarrow nicht die wahren Dehnungen)
3. Das P.V.A. gilt unabhängig vom Materialgesetz (davon wurde hier nicht gesprochen), also auch für nichtlineares Material erhalten.
4. Das P.V.A. ist unabhängig vom Energiesatz. Die "Arbeiten" sind Scheinarbeiten.
5. Das P.V.A. gilt zunächst nur für kleine Verschiebungen, da diese Einschränkung in die Dehnungsformel und in Gleichgewicht enthalten ist.
6. Außer daß P_A, P_V entsprechend zu u sein muß haben Längen und Verschiebungen und damit auch Spannungen $\bar{\sigma}$ und Dehnungen $\underline{\epsilon}$ nichts miteinander zu tun.

Erweiterung des P.V.A für Einzelkräfte

Die strenge Elastizitätstheorie kennt als Lasten nur Oberflächen- und Volumenlasten. In der Festigkeitslehre und Ingenieurstatik haben sich jedoch Resultierende wie Einzelkraft, Biegemoment und Torsionsmoment als nützlich erwiesen. Wir wollen deshalb diese Begriffe in das P.V.A einbauen.



Einzelkraft = spezielle Oberflächenkraft

$$\bar{P}_E = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (|P_A| \cdot \Delta A)$$

wobei \bar{P}_E die Richtung von P_A habe

Tritt in Richtung von \bar{P}_E , bzw., P_A , die lokale Verschiebung u_r auf, gilt:

$$\ddot{\text{A.V.A.}} = \bar{P}_E \cdot u_r = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \int \bar{P}_A \cdot u_r dA$$

Erweiterter P.V.A.

$$\int_V \bar{v}^t \underline{\epsilon} dV = \int_{A_1} \bar{P}_A^t u dA + \int_{V_1} \bar{P}_V^t u dV + \sum_{r=1}^n \bar{P}_{E_r}^t u_r$$

Das Prinzip der virtuellen Kräfte (P.V.K.)

und das Einheitslastgesetz (E.L.G.)

Übergang des P.V.A \rightarrow P.V.K.

P.V.K \rightarrow E.L.G.

An der Stelle der kinematisch verträglichen Dehnungen $\bar{\epsilon}$ im P.V.A tritt die wahre Dehnung ϵ . Dies ist selbstverständlich zulässig

$$\bar{\epsilon} \rightarrow \epsilon$$

$$\int_V \bar{\sigma}^t \epsilon dV = \int_{A_1} \bar{P}_A^t u dA + \int_V \bar{P}_v^t u dV + \sum_{r=1}^n \bar{P}_{E_r}^t u_r \quad (\text{P.V.K.})$$

Die äußere virtuelle Arbeit der wahren Verschiebungen u eines Tragwerks an beliebigen Lasten \bar{P}_v , \bar{P}_A und \bar{P}_E ist stets gleich der inneren virtuellen Arbeit der wahren Dehnungen an beliebigen reut mit P_v , P_A und P_E statisch verträglichen Spannungen $\bar{\sigma}$. Dies gilt auch für nichtlineares Material.

oder in Variationsform geschrieben:

$$\int_V \delta \bar{\sigma}^t \epsilon dV = \int_A \delta \bar{P}_A u dA + \int_V \delta \bar{P}_v u dV + \sum_{r=1}^n \delta \bar{P}_{E_r} u_r$$

In diesem Sinne sagt das P.V.K. aus, dass bei einer statisch verträglichen Variation der Lasten und der Spannungen eines Deformationszustandes die innere virtuelle Arbeit gleich der äußeren ist.

Für das Einheitslastgesetz machen wir eine weitere Spezialisierung. Wir wählen den einfachsten Fall

$$P_V = 0$$

$$P_A = 0$$

$$P_{Ei} = 1 \quad P_{Er} = 0 \quad r=1, n; r \neq i$$

d.h. nur eine Einzelkraft hat den Wert "1".

Aus dem P.V.K. folgt sofort

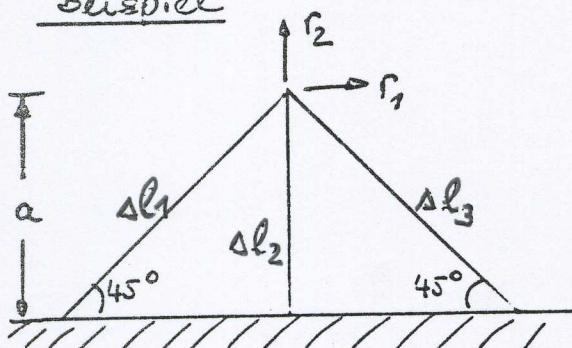
E.L.G. (Einheitslastgesetz)

$$u_{ri} = \int_v \bar{\sigma}_i^t E \, dv$$

$\bar{\sigma}_i$ = stat. verträgliche Spannung
infolge $P_{Ei} = 1$ allein.

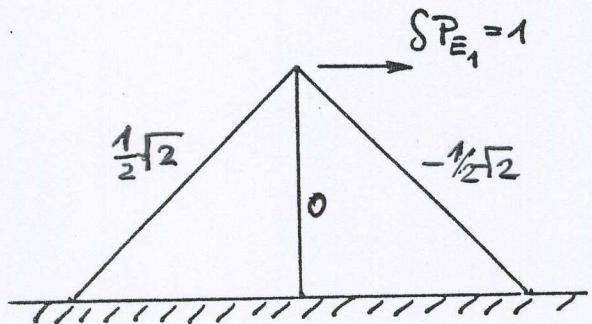
Das E.L.G. gestaltet die Berechnung von Verschiebungen bei Kenntnis der wahren Dehnungen E (unabhängig vom Materialgesetz)

Beispiel



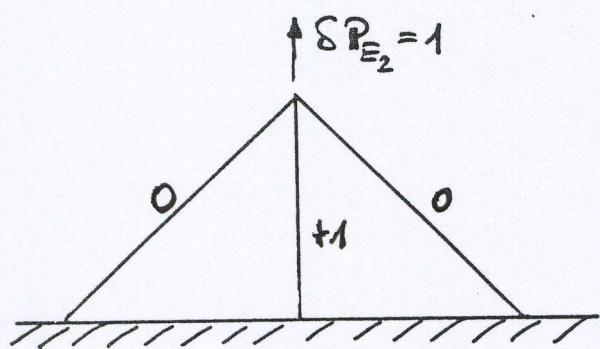
$$\begin{aligned} & \int_v \bar{\sigma}_i^t E \, dv \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{V_j} \bar{\sigma}_i \frac{\Delta l_j}{l_j} \, dv \\ &= \sum_{j=1}^3 (\bar{\sigma}_i A)_j \Delta l_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \bar{N}_{ij} \Delta l_j \end{aligned}$$

$dV = A \cdot d\ell$
 $V = A \cdot \ell$



$$\bar{N}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\Delta l_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\Delta l_3$$



$$\bar{N}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right\}$$

$$r_2 = \Delta l_2$$

Spezielle virtuelle Arbeitsprinzipien, die nur für
lineares Materialverhalten gelten.

Eine spezielle Form des P.V.K. und des E.L.G.

Im allgemeinen P.V.K. werden die virtuellen Arbeiten mit einem

$\left. \begin{array}{l} \text{statisch verträglichen} \\ \text{Spannungszustand} \end{array} \right\}$ und $\left. \begin{array}{l} \text{wahren Deformationszustand} \\ \bar{\varepsilon}, \bar{u}, \bar{u}_e \\ (\text{Zustand II}) \end{array} \right\}$
 $\bar{\sigma}, P_V, P_A, P_E$
 (Zustand I)
 gebildet.

Selbstverständlich gilt auch:

$$I.V.A. = \int_V \bar{\sigma}_I^t \bar{\varepsilon}_{II} dV = \int_V \bar{\sigma}_I^t \bar{\varepsilon}_{II} dV$$

d.h. für $\bar{\sigma}$ ist auch die wahre Spannung zugelassen.

Wir führen nun ein lineares Materialgesetz ein. Daraus gilt:

$$\bar{\varepsilon}_{II} = E^{-1} \bar{\sigma}_{II}$$

und spalten die wahre Spannung $\bar{\sigma}_{II}$ in eine statisch verträgliche und eine Eigenspannungsgruppe auf, die in $P_V, P_A, P_E = 0$ geht.

$$\bar{\sigma}_{II} = \bar{\sigma}_{II} + \bar{\sigma}_{eII}$$

Wir erhalten nun

$$I.V.A. = \int_V \left(\bar{\sigma}_I^t E^{-1} \bar{\sigma}_{II} + \bar{\sigma}_I^t E^{-1} \bar{\sigma}_{eII} \right) dV$$

Nun wird das lineare Materialgesetz auch für den Zustand I eingeführt:

$$\underline{\varepsilon}_I = E^{-1} \underline{\sigma}_I$$

und man erhält von dem zweiten Term

$$\int_V \underline{\sigma}_I^t E^{-1} \underline{\sigma}_{eII} dV = \int_V \underline{\sigma}_{eII}^t \underline{\varepsilon}_I dV = 0$$

weil $\underline{\sigma}_{eII}$ als Eigenspannungszustand $P_{vI} = 0$, $P_{AI} = 0$ und $P_{EI} = 0$ als Lasten hat, und damit die äußere virtuelle Arbeit Null ist.

Mit der Definition

$$\underline{\varepsilon}_{II} = E^{-1} \underline{\sigma}_{II}$$

als statisch verträglichen Dehnungen, d.h. Dehnungen welche mit statisch verträglichen Spannungen gerechnet wurden, erhalten wir

P.V.K linear elastisch.

$$\int_V \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} dV = \int_V P_v^t u dV + \int_A P_A^t u dA + P_E^t u_r$$

Der Strich über der Spannung ist nur Dehnung gewechselt.
Daraus folgt sofort

E.L.G linear elastisch

$$1 \cdot u_r = \int_V \underline{\sigma}_I^t \underline{\varepsilon} dV$$

Benutzt man die wahren Spannungen $\underline{\sigma}_I$ infolge Einheitslasten $P_E = 1$, dann darf man bei

linearer Elastizität auch mit bloßen statisch verträglichen Dehnungen rechnen.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen P.V.V.

und das Einheitsverschiebungsgesetz E.V.G.

Übergang des P.V.A \rightarrow P.V.V.

P.V.V \rightarrow E.V.G.

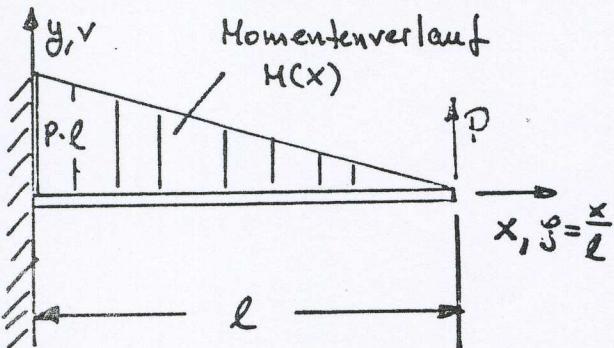
An die Stelle der statisch verträglichen Spannungen $\bar{\sigma}$ im P.V.A. tritt die wahre Spannung σ . Dies ist auch zulässig.

$$\bar{\sigma} \rightarrow \sigma$$

$$\int_V \sigma^t \underline{\epsilon} dV = \int_V \bar{P}_v^t \underline{\alpha} + \int_A P_s^t \underline{\alpha} + \sum_{r=1}^n \bar{P}_{\epsilon_r}^t \underline{\alpha}_r \quad (\text{P.V.V.})$$

Die äußere virtuelle Arbeit des Lasten \bar{P}_v , P_s und \bar{P}_{ϵ} an beliebigen kinematisch zulässigen Verschiebungen $\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}_r$ ist stets gleich der inneren virtuellen Arbeit der wahren (zu \bar{P}_v , P_s , \bar{P}_{ϵ} gehörenden) Spannung σ an (zu $\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}_r$ gehörende) kinematisch verträglichen Dehnungen $\underline{\epsilon}$. Dies gilt auch für nichtlineares Material.

Beispiel zum P.V.V.

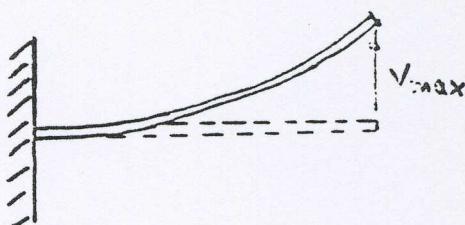


$$M = P(l-x) = P(l-\xi \cdot l) = P \cdot l (1-\xi)$$

$$M = P \cdot l (1-\xi)$$

$$\bar{v}_{xx} = \frac{M}{I} \cdot y$$

eingesetzt



$$v = v_{\max} \xi^2$$

$$\underline{\epsilon}_{xx} = -v''y = -2 \frac{v_{\max}}{l^2} y$$

$$\int y^2 dA = I$$

$$\ddot{A}.V.A. = P \cdot v_{\max}$$

$$I.V.A. = l \int_0^1 \int_A \frac{M}{I} y \cdot 2 \frac{v_{\max}}{l^2} y dA d\xi$$

$$= 2Pv_{\max} \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi$$

$$= 2Pv_{\max} \left(1 - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= P \cdot v_{\max} \quad q.e.d.$$

Für das Einheitsverschiebungsgesetz machen wir eine weitere Spezialisierung. Der einfachste Fall ist

$$u_{r_i} = 1 \quad u_{r_j} = 0 \quad j = 1, n \quad j \neq i \\ \underline{u} = 0 \quad \text{wo } P_A, P_V \neq 0$$

d.h. nur eine Einzelverschiebung hat den Wert "1".

Aus dem P.V.V. folgt sofort

E.V.G (Einheitsverschiebungsgesetz)

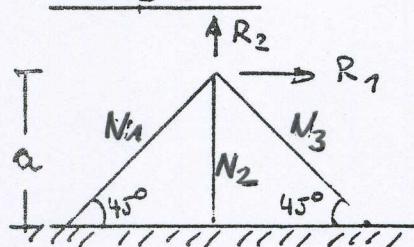
$$1 \cdot P_{E_i} = \int_V \underline{\varepsilon}_i^t \sigma dV$$

↑
Einheitsverschiebung

$\underline{\varepsilon}_i$ = kinematisch verträgliche
Dehnungsverteilung infolge $u_{r_i} = 1$
allein

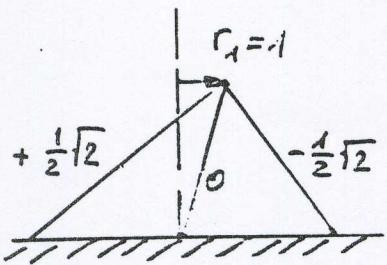
Das E.V.G. gestaltet die Berechnung von Lasten bei Kenntnis der wahren Spannungen σ und zwar unabhängig vom Materialgesetz.

Beispiel



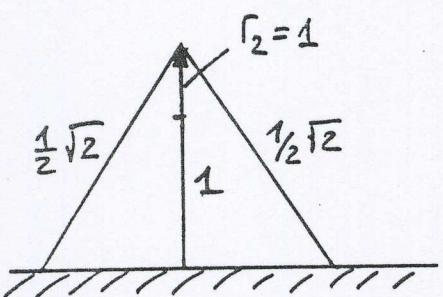
Nichtlineare Stabelastizität

$$\begin{aligned} & \int_V \underline{\varepsilon}_i^t \sigma dV \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{V_j} \underline{\varepsilon}_i^t \frac{N}{A} dV \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\Delta l_i}{l_j} \right) \left(\frac{N}{A} \right)_j A_j l_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \underline{\Delta l}_{ij} N_j \end{aligned}$$



$$\underline{\Delta Q}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_{E_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} N_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} N_2$$



$$\underline{\Delta Q}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_{E_2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} N_1 + N_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} N_3$$

Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode

Aufgabe der Festigkeitsberechnung ist die Ermittlung von Verformungen und Spannungen in einem Tragwerk infolge äußerer Belastung. Aufgrund der komplizierten Bauteilgeometrien versagen die Methoden der klassischen Elastizitätstheorie um allgemeinen. Als wichtiges Näherungsverfahren hat sich die Matrizenverschiebungsmethode erwiesen.

für den Fall linearer Elastizität werden die Grundgleichungen aufgestellt. Der Gesamtzustand (z.B. Verformung) wird durch die Zustände einer bestimmten Anzahl von Bereichen (der finiten Elementen) dargestellt. Die Freiheitsgrade an den Knotenpunkten der Elemente bestimmt den Verschiebungszustand bzw. Dehnungszustand usw. damit auch der Spannungszustand eindeutig.

Es gilt das Prinzip der virtuellen Arbeit bzw. der virtuellen Verschiebungen:

$$I.V.A = \ddot{A}.V.A.$$

$$\delta W_i = \delta W_a$$

Um die Gleichung zu spezialisieren, betrachtet man zwei unendlich benachbarte Verformungszustände, die geometrisch verträglich und die kinematischen Randbedingungen erfüllen müssen. Man variiert die Verschiebungen von u nach $u + \delta u$.

Die äußere Arbeit setzt sich im allgemeinen aus drei Anteilen (Volumenkosten, Flächenkosten, kontinuierliche Einzelkräfte) zusammen:

$$\delta W_a = \sum_{r=1}^n P_{\Xi_r}^t \delta u_r + \int_A P_A^t \delta u \, dA + \int_V P_V^t \delta u \, dV$$

Die innere virtuelle Arbeit ergibt sich aus

$$\delta W_i = \int_V \bar{\sigma}^t \delta \epsilon \, dV = \int_V \delta \epsilon^t \bar{\sigma} \, dV$$

wobei $\bar{\sigma}$ nicht die wahren Spannungen infolge der Belastung P_E, P_A, P_V sein müssen, sondern nur mit dieser statisch zuverlässig zu sein brauchen.

Das Tragwerk wird in eine Anzahl von diskreten (finiten) Elementen aufgeteilt. Die Elemente werden an gewissen Knotenpunkten miteinander verbunden. Die Verschiebungen an den Knotenpunkten sind die Unbekannten, die es zu berechnen gilt.

Jedem Element wird ein Satz von Funktionen zugrunde gelegt, der den Verschiebungszustand an einer beliebigen Stelle im Element eindeutig in Abhängigkeit der diskreten Verschiebungen an den Knotenpunkten beschreibt.

$$u(x, y, z) = \omega \xi$$

Die Matrix ω enthält die Ansatzfunktionen (es werden dazu Einheitsverschiebungszustände verwendet) und mit s werden die entsprechenden Knotenspunktsverschiebungen des Elements bezeichnet.

Zur Ermittlung der Dehnungen im Element wird die Dehnungs-Verschiebungsbeziehung verwendet. Voraussetzung ist hier, daß der Verschiebungszustand kinematisch verträglich ist und daher nach der Deformation weiterhin noch Überlappungen auftreten. Unter der Annahme linearer Elastizität ergeben sich die Dehnungen aus den Verschiebungen in der folgenden Form

$$\varepsilon = \mathbb{D}^t \omega$$

Hierbei ist \mathbb{D} ein Differentialoperator

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Somit erhält man die Dehnungen an einer beliebigen Stelle des Elements in Abhängigkeit der Verschiebungen an den Knotenpunkten.

$$\varepsilon(x, y, z) = \mathbb{D}^t \omega = (\mathbb{D}^t \omega) s = \mathcal{L} \cdot s$$

\mathcal{L} - Dehnungsausatz

Die Dehnungen und Spannungen hängen über das Materialgesetz zusammen. Bei linearem Materialgesetz gilt das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \alpha \cdot s$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit kann nun die Elementsteifigkeit abgeleitet werden. Läßt man zunächst keine Flächen- und Volumenkräfte auf das Element wirken, ergibt sich für die virtuelle äußere Arbeit des Ausdrucks:

$$\delta W_a = \mathbf{P}_e^T \delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}_e^T \mathbf{P}_e$$

Hierbei ist \mathbf{P}_e der dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{s}_e entsprechende Kraftvektor

Die innere virtuelle Arbeit ergibt sich aus der Dehnungsbeziehung und dem Materialgesetz

$$\begin{aligned}\delta W_i &= \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \\ &= \int_V \delta \epsilon^T \underbrace{E \cdot \epsilon}_{\sigma} dV \\ \text{mit } \epsilon &= \alpha \cdot s \quad \text{d.h. } \delta \epsilon^T = \delta s^T \alpha^T\end{aligned}$$

Folgt:

$$\delta W_i = \delta s^T \int_V \alpha^T E \cdot \alpha dV \cdot s$$

$$\text{mit } \delta w_a = \delta w; \quad (\text{P.V.A})$$

$$\delta S^t P_E = \delta S^t \int_V \mathcal{L}^t E \cdot \mathcal{L} dV S$$

da δS virtuell und damit beliebig ist, erhält man folgenden Ausdruck für das Elementgleichgewicht

$$P_E = \underbrace{\int_V \mathcal{L}^t E \cdot \mathcal{L} dV}_K \underbrace{S}_{\text{Abkürzung}} \quad (\text{Elementsteifigkeit})$$

Bezeichnet man das obige Integral als die Elementsteifigkeit K , so erhält man die Kraft-Verschiebungsgleichung für das Element

$$P_E = K \cdot S$$

mit der Elementsteifigkeit K

$$K = \int_V \mathcal{L}^t E \cdot \mathcal{L} dV$$

FEM läßt nur Lasten an den Knotenpunkten zu.
 Verteilte Lasten wie Linien-, Druck-, Volumenlasten müssen daher auf kinematisch äquivalente Knotenpunktskräfte umgerechnet werden.

Kinematisch äquivalent bedeutet, daß die Einzellasten so bestimmt werden, daß sie mit den entsprechenden Knotenpunktsverschiebungen dieselbe Arbeit ergeben, wie die verteilten Lasten mit den Verschiebungsformen des Elements. Die Berechnung erfolgt mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

Die kinematisch äquivalente Idealisierung der verteilten Lasten ergibt die folgenden Beziehungen:

$$\text{Linienlasten } Q_L = \int_L \omega^t P_L \, dL$$

$$\text{Flächelasten } Q_A = \int_A \omega^t P_A \, dA$$

$$\text{Volumenlasten } Q_V = \int_V \omega^t P_V \, dV$$

⇒ Elementknotenlasten $Q = Q_L + Q_A + Q_V$
 dabei sind P_L, P_A, P_V die verteilten Lasten.

Eine zweite Erweiterung erfolgt durch die Einführung von Anfangslasten für die Simulation des Einflusses von Anfangsdehnungen. Anfangsdehnungen sind Dehnungen, die dem Element eingeprägt werden, ohne Spannungen zu erzeugen (z.B. Temperaturdehnungen). Die totalen Dehnungen γ setzen sich aus den elastischen Dehnungen ϵ und den Anfangsdehnungen η zusammen.

$$\gamma = \epsilon + \eta$$

Spannungen entstehen jedoch nur infolge der elastischen Dehnungen.

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \mathcal{L} \cdot s - E \cdot \eta$$

Die Anfangsdehnungen führen über das Anfangslastkonzept zu äußeren Lasten. Die Anfangslasten werden so angesetzt, daß sie die Anfangsdehnungen elastisch unterdrücken, damit folgt

$$J = - \int_V \mathcal{L}^t E \eta \, dV$$

Das Elementgleichgewicht erhält unter Berücksichtigung der beiden Erweiterungen die folgende Form.

$$k \cdot s + J = P + Q$$

Nachdem die Beziehungen auf Elementebene bekannt sind, werden die Elemente zur Struktur zusammengefügt. Der Zusammenhang zwischen den Elementverschiebungen ξ und den Strukturverschiebungen ν kann über eine einfache Zuordnungsmatrix α , die nur aus Elementen "0" oder "1" besteht und sehr dünn besiedelt ist, hergestellt werden.

$$\xi = \alpha \cdot \nu$$

Bringt man die beiden letzten Gleichungen in Beziehung und multipliziert mit α^t vor, so erhält man

$$\alpha^t P_i + \alpha^t Q = \underbrace{\alpha^t K \cdot \alpha \cdot \nu}_{K} + \alpha^t J$$

Umgeordnet ergibt sich folgende Beziehung

$$R_o + R_Q + R_J = IR = K \cdot \nu$$

/ \ \ \ \\
 konzentrierte kinematisch Anfangs-
 Lasten äquivalente lasten

Die Gesamtsteifigkeit des Strukturen (Struktursteifigkeit) ergibt sich aus der kongruenten Transformation der Elementsteifigkeit K_e , die man sich als Diagonalsymmetrische Matrix augeordnet vorstellen kann, mit der Boole'schen Matrix α

$$K = \alpha^t K_e \alpha$$

Als Gleichgewichtsbeziehung für das gesamte Tragwerk erhält man das lineare Gleichungssystem

$$K \cdot r = R$$

Wird diese Gleichung in sogenannte Freiheitsgradfamilien wie lokale (Index L), vorgeschriebene (Index P - prescribed) und unterdrückte Freiheitsgrade (Index s - suppressed) unterteilt, ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} & K_{LS} \\ K_{PL} & K_{PP} & K_{PS} \\ K_{SL} & K_{SP} & K_{SS} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_L \\ r_P \\ r_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_L \\ R_P \\ R_S \end{bmatrix}$$

Die Unterteilung in Freiheitsgradfamilien erfolgt schon beim Aufbau von K. Es werden dabei nur die Untermatrizen K_{LL} und K_{LP} (wenn vorgeschriebene Verschiebungen vorhanden) gebildet.

Als Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man die unbekannten (lokalen) Verschiebungen an den Knotenpunkten der Struktur.

$$K_{LL} \cdot r_L + K_{LP} \cdot r_P + \underbrace{K_{LS} \cdot r_S}_{=0} = R_L$$

$$r_L = K_{LL}^{-1} [R_L - K_{LP} \cdot r_P]$$

Voraussetzung für die Lösung ist, daß K_{LL} nicht singulär ist. Ist die Matrix K_{LL} symmetrisch und positiv-definit, so kann das Cholesky-Verfahren angewendet werden. Hierzu sind folgende Schritte auszuführen.

$$1. \text{Triangularisierung} \quad U^T U = K$$

$$2. \text{Vorwärtseinsetzen} \quad U^T Y = R \Rightarrow Y = (U^T)^{-1} R$$

$$3. \text{Rückwärtseinsetzen} \quad U \cdot r = Y \Rightarrow r = U^{-1} Y$$

Somit auf diese Weise die Verschiebungen berechnet, so kann auf die Elementebene zurückgegangen werden und die Spannungen berechnet werden.

Zunächst werden aus den Strukturverschiebungen \bar{U} die Elementverschiebungen \bar{s} berechnet.

$$\bar{s} = \alpha \cdot \bar{U}$$

Hieraus lassen sich die Elementenlasten \bar{P} ermitteln

$$\bar{P} = \bar{K} \cdot \bar{s}$$

Die Elementspannungen berechnen sich aus den Elementverschiebungen zu

$$\bar{\sigma} = E \cdot \bar{\epsilon} = E L \cdot \bar{s}$$

Im Falle von Anfangsdehnungen werden die Spannungen korrigiert zu $\bar{\sigma} = E L \cdot \bar{s} - E \cdot \bar{\gamma}$

2.2 Das Einheitsverschiebungsgesetz

Das Einheitsverschiebungsgesetz dient dazu, eine Kraft p_{Er} zu bestimmen, die (zusammen mit anderen Kräften) in einer Struktur Gleichgewicht aufrecht hält. Hierbei wird die wirkliche Spannungsverteilung σ in der Struktur als bekannt vorausgesetzt.

Wählt man als virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft p_{Er} die Verschiebung $\delta u_r = 1$ in Richtung der Kraft und schreibt für die virtuellen Dehnungen $\delta \epsilon = \underline{\epsilon}_r$, wobei die Unterstreichung besagt, daß die Dehnungen kinematisch verträglich sind mit der aufgeprägten Einheitsverschiebung am Punkt r , so erhält man aus den Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) das Einheitsverschiebungsgesetz

$$p_{Er} = \int_v \sigma^t \underline{\epsilon}_r dv \quad (2.4)$$

Das Einheitsverschiebungsgesetz wird sich als sehr nützlich bei der Berechnung der Streifigkeitseigenschaften der Strukturelemente erweisen.

2.3 Das Einheitslastgesetz

Das Einheitslastgesetz dient dazu die Verschiebung u_r eines Punktes r in einer Struktur zu bestimmen, für die die wirkliche Dehnungsverteilung ϵ bekannt ist.

Läßt man im Punkt r in Richtung u_r die virtuelle Kraft $\delta p_{Er} = 1$ wirken, so daß in der Struktur die virtuelle Spannungsverteilung $\delta \sigma_r = \bar{\sigma}_r$ erzeugt wird, wobei der Strich besagt, daß die Spannungen lediglich statisch verträglich mit der aufgeprägten Einheitslast am Punkt r zu sein brauchen, so erhält man aus dem Prinzip der ^{komplementären} virtuellen Arbeit das Einheitslastgesetz

$$u_r = \int_v \epsilon^t \bar{\sigma}_r dv \quad (2.5)$$

Das Einheitslastgesetz ist sehr nützlich bei der Berechnung von Verschiebungen in statisch unbestimmten Systemen sowie bei der Berechnung von Nachgiebigkeitsmatrizen.

3 Diskretisierung - Strukturmodell und Elemente

Der schwierigste und verantwortungsvollste Schritt bei der FEM-Analyse eines Bauteils oder einer Struktur ist das Festlegen des physikalisch, mathematischen Modells, kurz Diskretisierung genannt. Man darf nie außerachtlassen, daß nicht das reale Bauteil, sondern sein mathematisches Modell berechnet wird. Die Erstellung eines sinnvollen Modells und das richtige Einschätzen der Randbedingungen erfordert beträchtliche Erfahrung. Musterbeispiele geglückter Diskretisierungen findet man z.B. in [1.9], [1.10], [1.19]. Im folgenden sind Anhaltspunkte zusammengestellt, die bei der Diskretisierung hilfreich sein können.

3.1 Auswählen der Elemente

Elemente sind so zu wählen, daß sie der Geometrie des Bauteils sowie dem erwarteten Spannungszustand adäquat sind. Tabelle 3.1 enthält Beispiele für die Zuordnung von Elementen und Anwendungsfällen.

Es ist ohne weiteres möglich, bei einem Modell verschiedenartige Elemente zu verwenden. Jedoch ist darauf zu achten, daß die kinematische Verträglichkeit nicht verletzt wird. Kinematische Verträglichkeit ist z.B. nicht gegeben, wenn an einem TRIM6-Element nach Bild 3.1 a TRIM3-Elemente angeschlossen werden. Bild 3.1 b zeigt, daß bei der Verformung Überlappungen oder Lücken auftreten können.

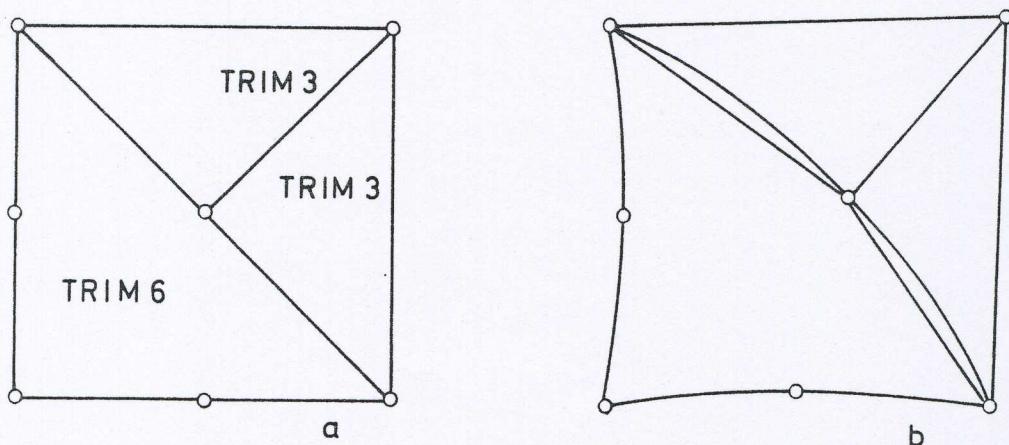


Bild 3.1 Verletzung der kinematischen Verträglichkeit beim Anschließen von TRIM3- an TRIM6-Elementen

Element	Anwendungsfall
Stabelemente	Auf Zug oder Druck beanspruchte stabförmige Teile, ebene und räumliche Fachwerke, auch Verstärkungsrippen
Balkenelemente	Auf Biegung, Schub und Torsion beanspruchte stabförmige Teile, abgesetzte Wellen, Rahmen
Membranelemente	Dünne Bleche (z.B. Autokarosserien), Bauteile unter ebenem Spannungs- oder ebenem Dehnungszustand
Platten- und Schalenelemente	Ebene oder räumlich gekrümmte Kontinua, die auf Biegung beansprucht sind, wobei die Wandstärken im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen klein sind
Räumliche Elemente	Bauteile mit größeren Wandstärken unter räumlichem Spannungszustand, z.B. Pleuel, Turbinenschaufeln, dickwandige Behälter
Ringelemente	Rotationssymmetrische Probleme
Harmonische Elemente	Bauteile mit rotationssymmetrischer Gestalt bei nicht rotationssymmetrischer Belastung

Tabelle 3.1. Zur Anwendung von Finiten Elementen

Wirtschaftliche Gründe können den Berechnungsingenieur zwingen, in einem Rechenmodell Elemente zu kombinieren, deren Verschiebungsansätze kinematisch unverträglich sind. In einem solchen Fall muß man Sorge tragen, daß Schnittstellen zwischen unverträglichen Elementen genügend weit entfernt sind von den Bereichen, in denen die Spannungen von Interesse sind [1.18]. Ein wichtiger Anwendungsfall ist die Kombination von räumlichen Elementen mit Platten- bzw. Schalenelementen. Er soll im folgenden an einer Teststruktur verdeutlicht werden, bei deren Diskretisierung die räumlichen Elemente HEXEC20 und die Plattenelemente QUAD4 aus der ASKA- bzw. PERMAS-Elementbibliothek kombiniert wurden.

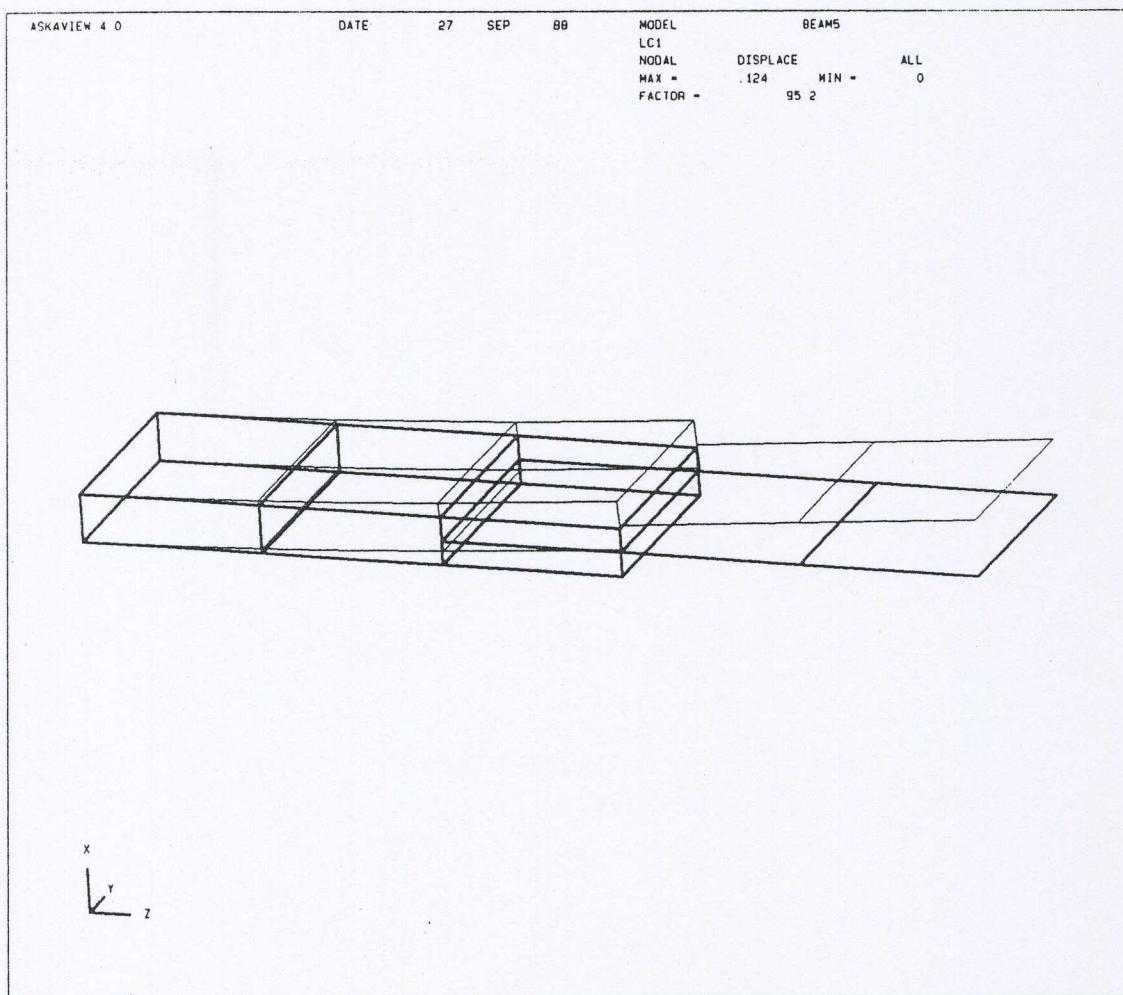


Bild 3.2 Kragbalken, diskretisiert mit räumlichen und Platten-Elementen, im Lastfall "Laterale Massenträgheitskräfte"

Das Rechenmodell repräsentiert einen Kragbalken mit konstantem Querschnitt, der am linken Ende eingespannt und lateralen bzw. axialen Massenträgheitskräften ausgesetzt ist (Bilder 3.2 und 3.3). Da die Knoten eines räumlichen Elements nur Translationsfreiheitsgrade besitzen, würde bei bloßem Andocken der Plattenelemente lediglich eine Scharnierverbindung entstehen. Um einen biegesteifen Anschluß zu gewährleisten, ordnet man ein Plattenelement im Innern eines räumlichen Elements an und verknüpft es mit den Mittelknoten der senkrechten Kanten des räumlichen Elements. Damit die Membransteifigkeit des Überlappungsbereichs nicht erhöht wird, wird dem Plattenelement ein künstlich stark verminderter Elastizitätsmodul E^* zugeordnet.

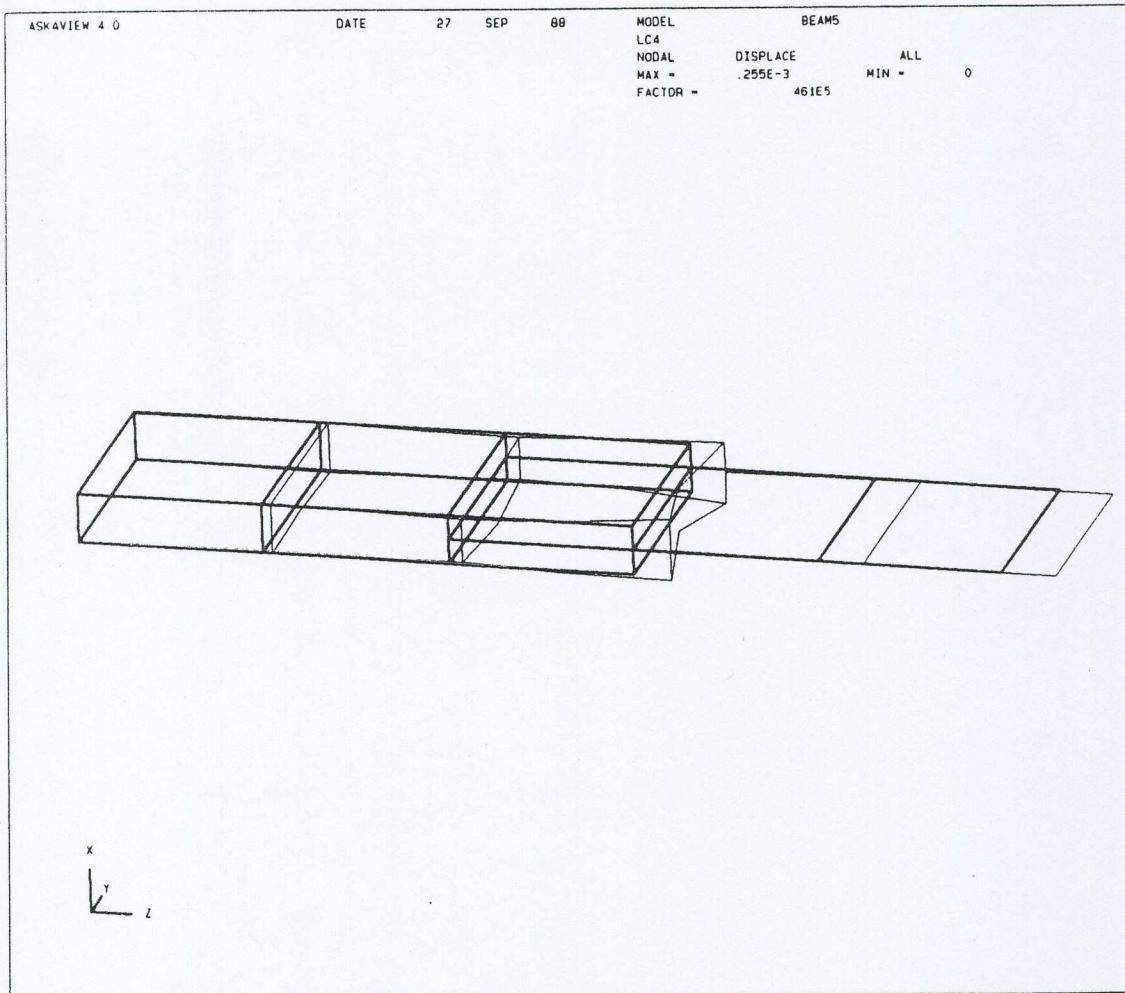


Bild 3.3 Kragbalken, diskretisiert mit räumlichen und Platten-Elementen, im Lastfall "Axiale Massenträgheitskräfte"

Um die Biegesteifigkeit des Plattenelements zu erhalten, wird seine Dicke gemäß der Beziehung

$$E*t^3 = Et^3 = \text{konstant}$$

künstlich vergrößert.

Das Verformungs-Plot für den lateralen Lastfall sieht gut aus. Die quantitativen Verschiebungsresultate weichen von der Referenzlösung um weniger als 3 % ab. Nicht sehr vertrauenerweckend ist das Verformungs-Plot für den axialen Lastfall. Dadurch daß die Volumenlasten im Plattenteil in Form von zwei konzentrierten Einzelkräften in den räumlichen Teil eingeleitet werden, treten deutliche lokale Verformungen an der Übergangsstelle auf. Die gesamte Verlängerung des Rechenmodells ist um 20 % (!) zu groß.

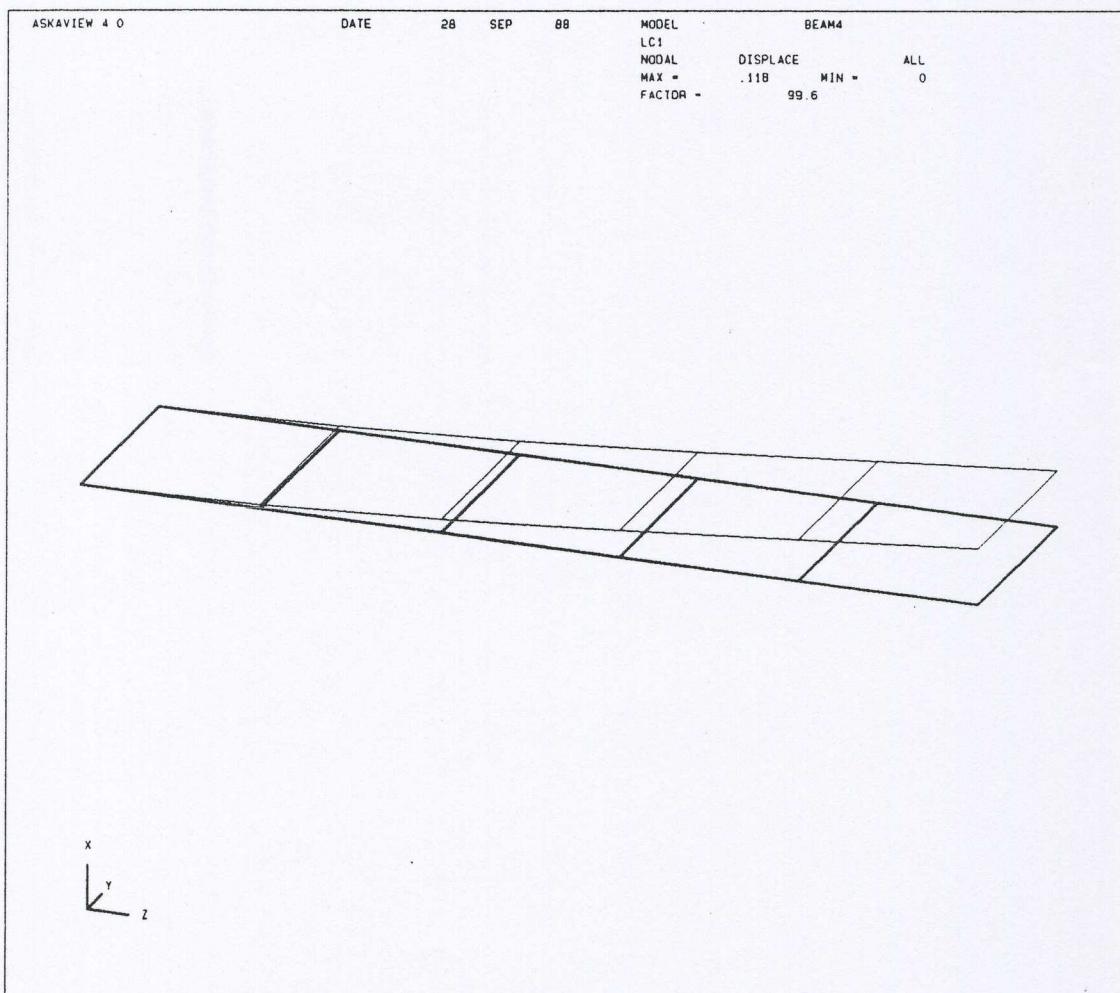


Bild 3.4 Kragbalken, diskretisiert mit Plattenelementen.
Referenzlösung für den Lastfall "Laterale Massenträgheitskräfte"

Das gewählte Rechenmodell ist indessen für eine Struktur, die vorwiegend auf Biegung und weniger auf Zug beansprucht wird, durchaus geeignet. Eine Referenzlösung, bei der einheitlich QUAD4-Elemente angewandt wurden, zeigen die Bilder 3.4 und 3.5.

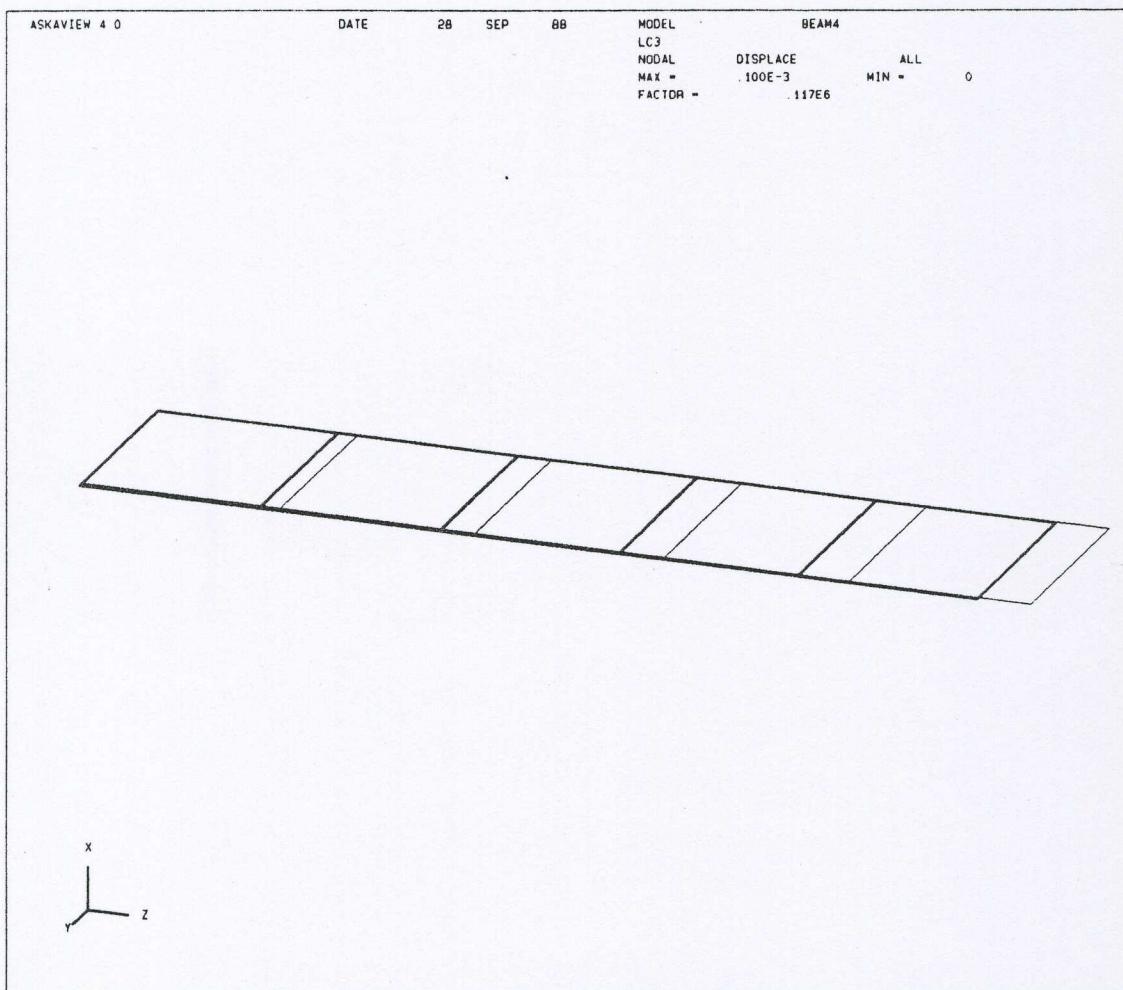


Bild 3.5 Kragbalken, diskretisiert mit Plattenelementen.
Referenzlösung für den Lastfall "Axiale Massenträgheitskräfte"

3.2 Das Netz

Die Einteilung in Elemente sollte nur so fein wie nötig gewählt werden. Eine zu feine Einteilung verursacht - insbesondere bei räumlichen Elementen - unnötige Kosten. Für Bereiche, in denen große Spannungsgradienten zu erwarten sind, ist das Netz feiner zu wählen als in Bereichen mit gleichmäßiger Spannungsverteilung.

Liegt das Netz fest, erhält jeder Knoten eine Nummer. Bei größeren Problemen beeinflußt die Art der Nummerierung die Rechenzeit.

Um die Bandbreite der Gesamtsteifigkeitsmatrix klein zu halten, sollte die größte Differenz zweier Knotennummern beim einzelnen Element möglichst klein sein. Die Bilder 3.6 a und 3.6 b zeigen zwei unterschiedliche Nummerierungen für dasselbe Netz. In Bild 3.6 a beträgt die größte Differenz zweier Knotennummern 4, in Bild 3.6 b jedoch 7. Die Nummerierung nach Bild 3.6 a ist also günstiger.

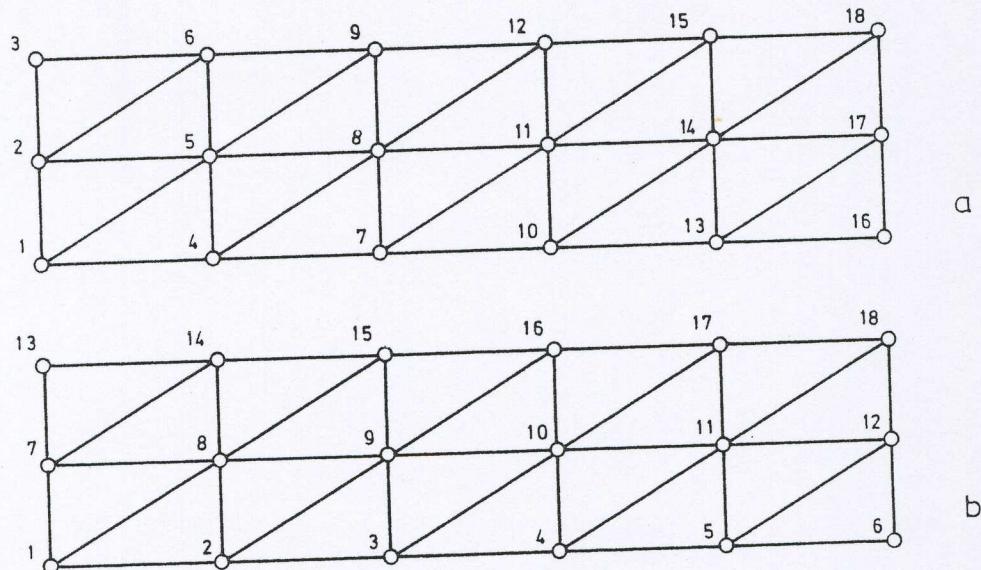


Bild 3.6 Zur Nummerierung der Knoten

Die Auswirkung der Nummerierung auf das Muster der Gesamtsteifigkeitsmatrix erkennt man sehr anschaulich in den Bildern 3.7 und 3.8. Der Einfachheit halber ist nur ein Freiheitsgrad pro Knoten angenommen worden, wie dies z.B. bei der Berechnung von Temperaturfeldern zutrifft.

Die Nicht-Null-Elemente ergeben sich aus dem Sachverhalt, daß die Elemente der i-ten Spalte der Steifigkeitsmatrix physikalisch interpretiert werden können als (Reaktions)-Kräfte, die geweckt werden, wenn man für den Knoten (Freiheitsgrad) i eine Einheitsverschiebung vorschreibt und bei allen übrigen Knoten (Freiheitsgraden) die Verschiebung null erzwingt.

Schreibt man z.B. am Knoten 1 des Bildes 3.6 a bzw. 3.6 b eine Einheitsverschiebung vor, so werden lediglich an den Knoten 1, 2, 5 und 4 bzw. 1, 2, 7 und 8 Kräfte geweckt. Die übrigen Knoten bleiben unbehelligt.

Die Anzahl der Nicht-Null-Elemente ist in beiden Matrizen gleich. Sie ist eine invariante Eigenschaft eines vorgegebenen Netzes. Die Nummerierung beeinflußt lediglich die Verteilung der Nicht-Null-Elemente innerhalb der Matrix. Diese ist aber für den benötigten Speicherplatz und die Geschwindigkeit der Gleichungslösung von großer Bedeutung.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	●	○		○	○													
2	●	○	○		○	○												
3		○	○			○												
4	●			○	○		○	○										
5	●	○		○	○	○		○	○									
6		○	○		○	○				○								
7			○			○	○		○	○								
8			○	○		○	○	○		○	○							
9			○	○		○	○				○							
10				○			○	○			○	○						
11				○	○		○	○	○		○	○						
12					○	○		○	○				○					
13							○			○	○		○	○		○	○	
14								○	○		○	○	○		○	○		
15									○	○		○	○				○	
16										○			○	○		○	○	
17											○	○		○	○	○	○	
18											○	○		○	○	○	○	

Bild 3.7 Muster der Gesamtsteifigkeitsmatrix für die Nummerierung nach Bild 3.6 a. Die Bandbreite ist 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	●	○					○	○										
2	●	○	○					○	○									
3		○	○	○					○	○								
4			○	○	○					○	○							
5				○	○	○					○	○						
6					○	○						○						
7	●						○	○					○	○				
8	●	○					○	○	○				○	○				
9		○	○					○	○	○				○	○			
10			○	○				○	○	○					○	○		
11				○	○				○	○	○					○	○	
12					○	○				○	○						○	
13						○							○	○				
14							○	○					○	○	○			
15								○	○					○	○	○		
16									○	○					○	○	○	
17										○	○					○	○	○
18											○	○					○	○

Bild 3.8 Muster der Gesamtsteifigkeitsmatrix für die Nummerierung nach Bild 3.6 b. Die Bandbreite ist 8.

3.3 Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften

Bei Vorhandensein von Symmetrien ist es möglich, nur einen Teil der Struktur in das Rechenmodell aufzunehmen. Hierdurch vereinfacht sich die Analyse und die Kosten für die Analyse werden z.T. erheblich gesenkt. In Bezug auf die geometrische Gestalt der Strukturen kommen im wesentlichen folgende Symmetriearten vor:

- Symmetrie in Bezug auf eine oder mehrere Ebenen (Spiegelsymmetrie)
- Symmetrie in Bezug auf eine Achse (Rotationssymmetrie)
- Zyklische Symmetrie (z.B. ein Laufrad mit einer endlichen Anzahl von Schaufeln)

Hinsichtlich der Lasten gibt es

- Symmetrie
- Antisymmetrie
- keine Symmetrie

3.4 Beispiele

Beispiel 1 Spiegelsymmetrie für Struktur und Lasten

Es genügt, die Hälfte der Struktur nach Bild 3.9 b zu berechnen.

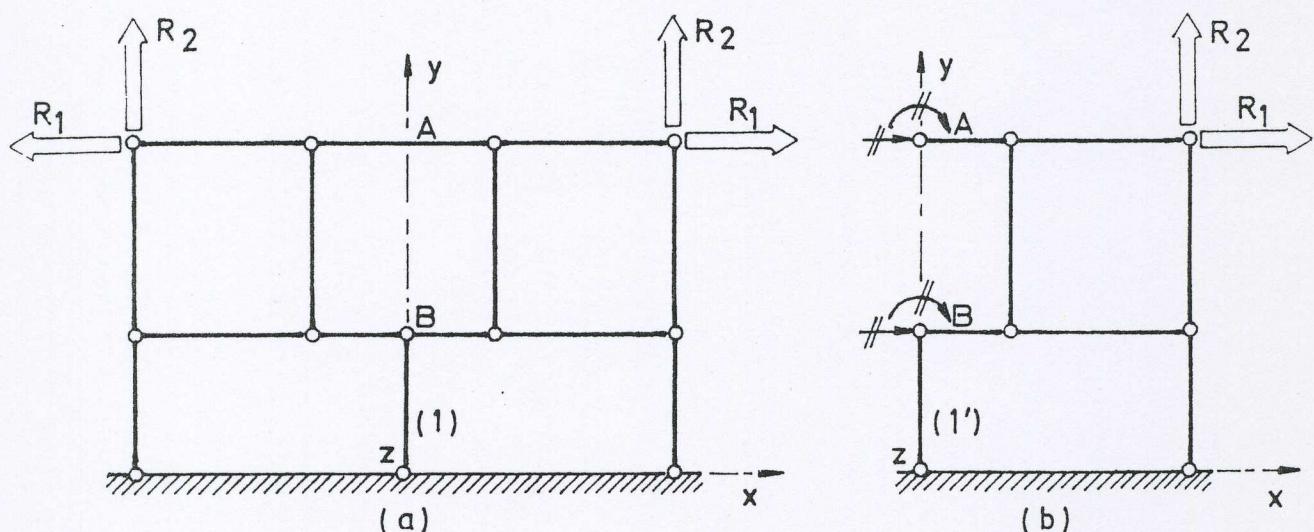


Bild 3.9 Symmetrischer Rahmen mit symmetrischer Belastung

Der Balken (1') im Rechenmodell besitzt nur den halben Querschnitt des Balkens (1). An den Punkten A und B müssen die Freiheitsgrade 1 (Translation in x-Richtung), 5 (Rotation um die y-Achse) und 6 (Rotation um die z-Achse) unterdrückt werden.

Beispiel 2 Spiegelsymmetrie der Struktur und
Antisymmetrie der Belastung

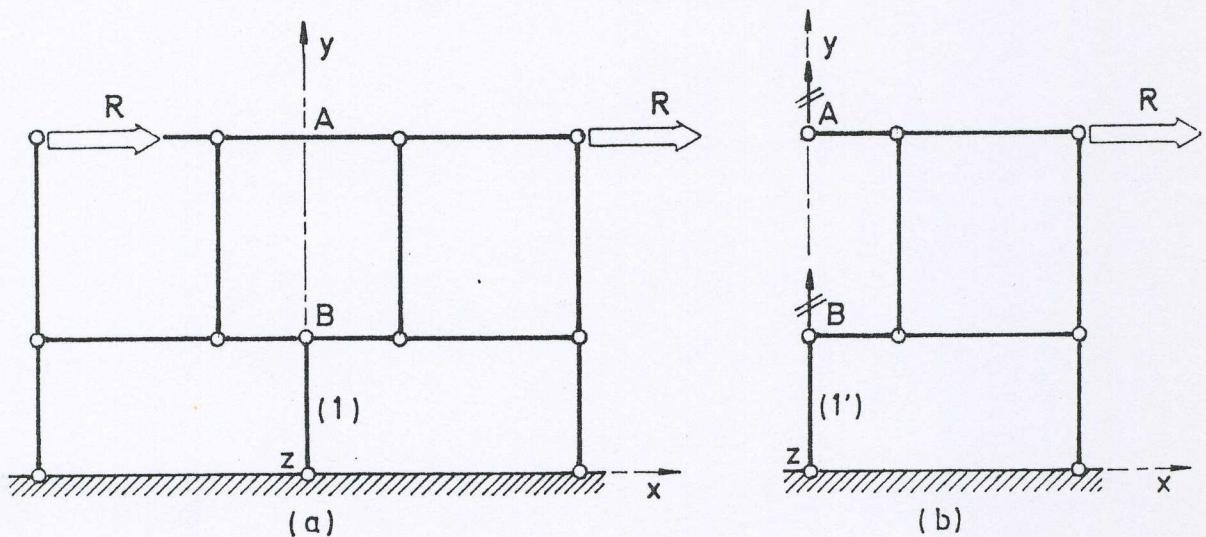


Bild 3.10 Symmetrischer Rahmen mit antisymmetrischer Belastung

Der Balken (1') hat wiederum nur halben Querschnitt. An den Stellen A und B sind die Freiheitsgrade 2 (Translation in y-Richtung), 3 (Translation in z-Richtung) und 4 (Rotation um die x-Achse) zu unterdrücken.

Beispiel 3 Spiegelsymmetrie der Struktur und
keine Symmetrie der Belastung

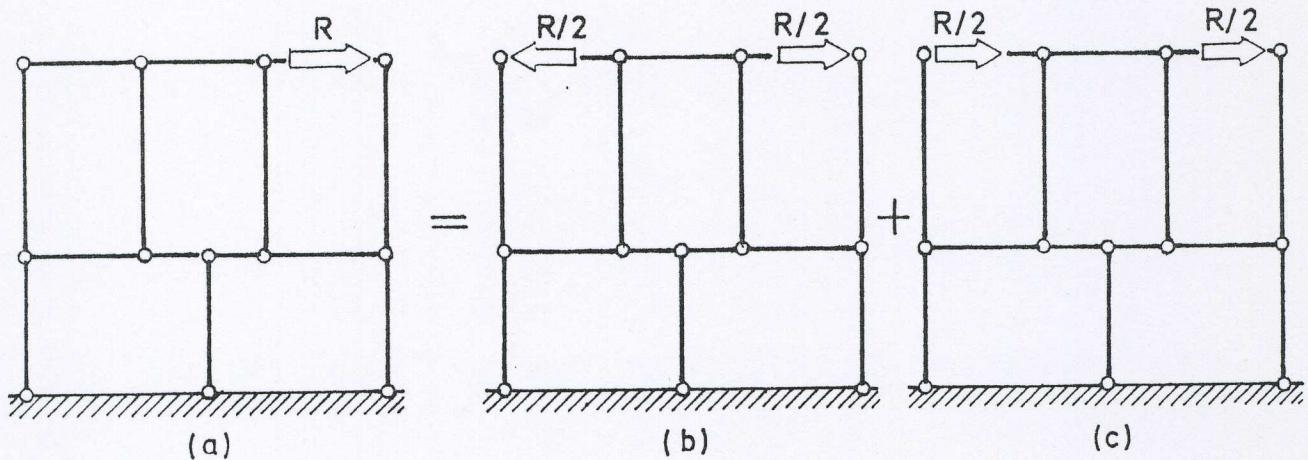


Bild 3.11 Symmetrischer Rahmen mit unsymmetrischer Belastung

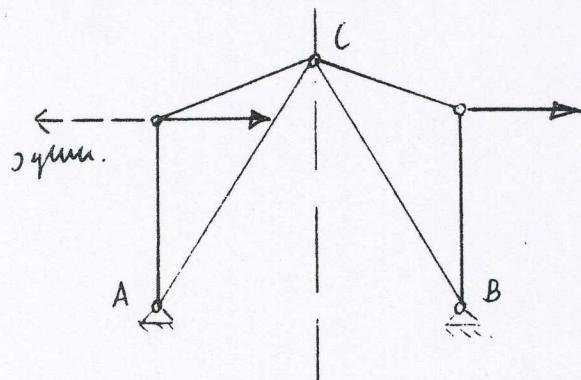
Die Lösung des Falls (a) kann durch Überlagerung der Falls (b) und des Falls (c) gefunden werden. Fall (b) wird entsprechend Beispiel 1, Fall (c) entsprechend Beispiel 2 behandelt. Es muß also die halbe Struktur mit der Belastung $R/2$ mit zwei verschiedenen Randbedingungen gerechnet werden. Es müssen zwei Rechenläufe durchgeführt und die Resultate anschließend superponiert werden. Dies ist nur bei linearen Problemen erlaubt. Kompliziertere Fälle findet man in [1.16]. Zu raffinierte Methoden sind indessen fehleranfällig und erfordern u.U. mehr Mannkosten als bei den Rechenkosten eingespart werden kann.

Definition von Antisymmetrie

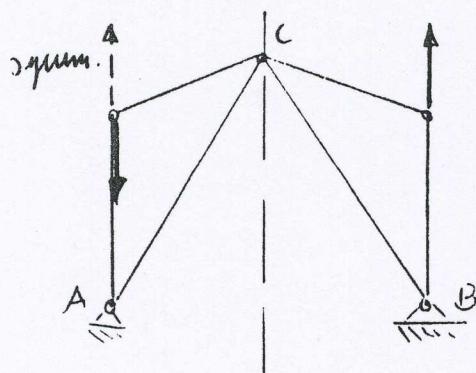
Die Struktur ist spiegelsymmetrisch.

Die Kräfte in der einen Hälfte der Struktur haben die entgegengesetzte Richtung zu der Richtung, die sie hätten, wenn sie symmetrisch zu den Kräften in der anderen Hälfte der Struktur wären.

Beispiel 1 zwei horizontale Kräfte

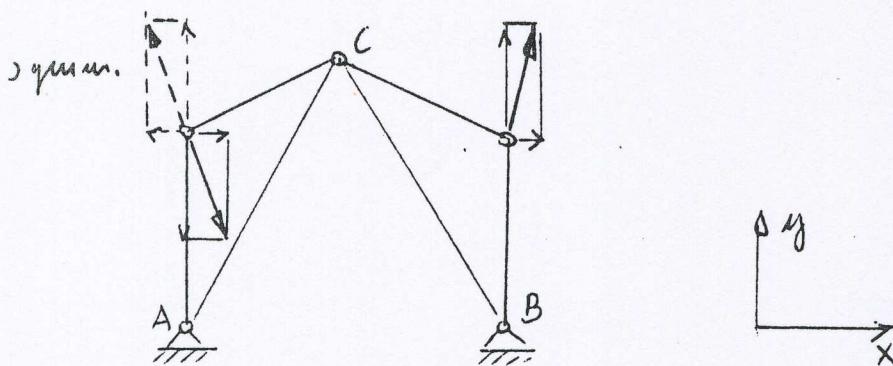


Beispiel 2 zwei vertikale Kräfte

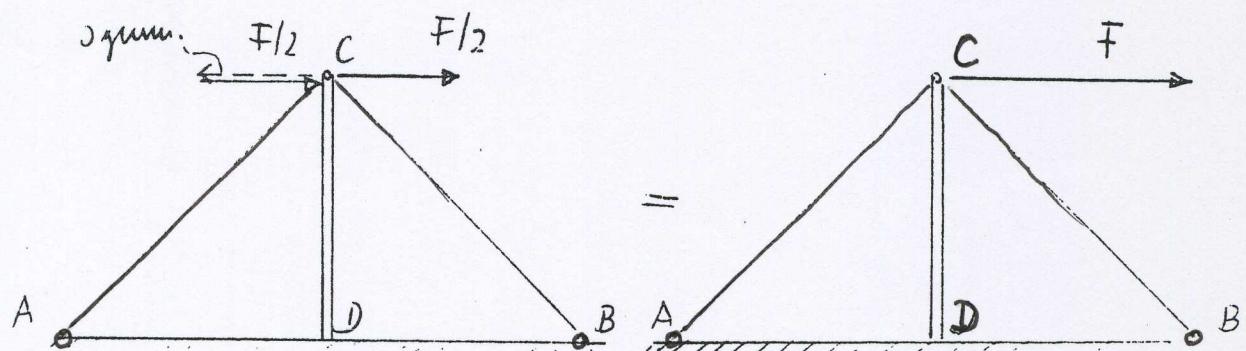


3.13b

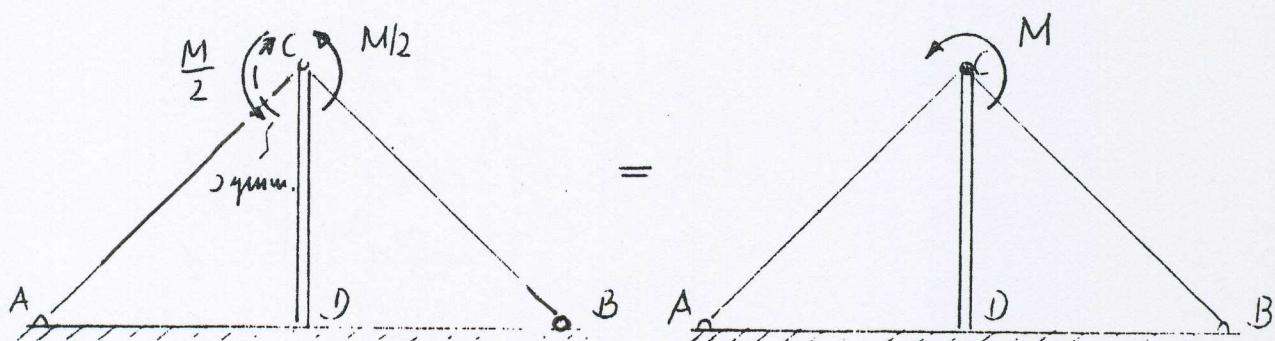
Beispiel 3 zwei schräge Kräfte



Beispiel 4 eine horizontale Kraft



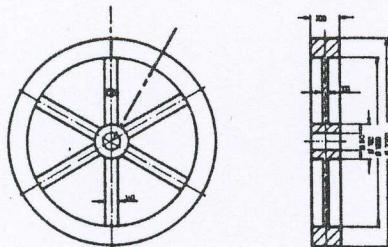
Beispiel 5 ein Einzelement



In allen fünf Beispielen macht der Punkt C keine Verschiebung in y-Richtung

Beispiel 4

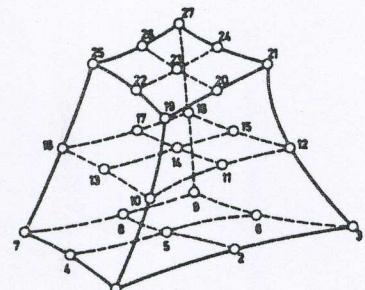
IDEALISIERUNG EINES SPEICHENRADES



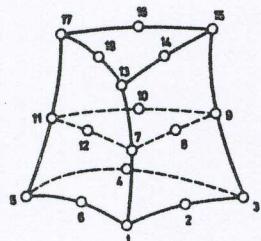
WERKSTATTZEICHNUNG

GEWÄHLTE ELEMENTE AUS ASKA

12 ST. HEXEC27

27 KNOTENPUNKTE
81 FREIHEITSGRADE

5 ST. PENTAC18

18 KNOTENPUNKTE
54 FREIHEITSGRADE