

5. Das Zusammenfügen der Elemente zur Gesamtstruktur
Die Grundschritte der Matrizenverschiebungsmethode

In Abschnitt 4 wurden die Steifigkeitseigenschaften einiger ausgewählter Elemente hergeleitet, die für die Idealisierung einer Struktur in Frage kommen. Nunmehr sollen die Grundgleichungen gefunden werden, die das Zusammenfügen der einzelnen finiten Elemente zur idealisierten Gesamtstruktur (assembled structure) beschreiben. Das Ziel ist, eine Beziehung zwischen den äußeren Kräften

$$R = \{R_1 \ R_2 \ \dots \ R_j \ \dots \ R_m\} \quad (5.1)$$

und den Verschiebungen der Strukturknoten

$$r = \{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_j \ \dots \ r_m\} \quad (5.2)$$

zu gewinnen. Hierbei ist m die Anzahl der globalen Freiheitsgrade. Die gesuchte Beziehung hat prinzipiell die Form

$$R = K r \quad (5.3)$$

mit K Gesamtsteifigkeitsmatrix.

Von dem Umstand, daß in Gleichung (5.3) die Verschiebungen r der Strukturknoten als Unbekannte auftreten, röhrt der Name Matrizen-Verschiebungs-Methode. Die grundlegende Konzeption der Methode beruht auf der Annahme, daß die tatsächliche, i.a. kontinuierliche Struktur in befriedigender Weise repräsentiert wird durch die aus diskreten Elementen aufgebaute idealisierte Struktur (assembly of discrete elements), wobei die einzelnen Elemente vereinfachte elastische Eigenschaften besitzen und nur an (Struktur-) Knotenpunkten miteinander verknüpft sind. Die Methode garantiert zumindest kinematische und statische Verträglichkeit an den Strukturknoten. Nicht immer erfüllt ist die volle kinematische Verträglichkeit an den gemeinsamen Rändern benachbarter Elemente und die statische Verträglichkeit zwischen den Spannungen im Innern des Elements und den Elementknotenkräften.

Für das Weitere gehen wir aus von der Beziehung zwischen den Elementknotenkräften und den Elementknotenverschiebungen nach Gleichung (4.24). Für ein typisches Element mit der Nummer g lautet sie

$$P_g = k_g \varphi_g \quad (5.4)$$

Besteht die idealisierte Struktur aus insgesamt N Elementen, so lassen sich die N Gleichungen vom Typ (5.4) zu der Gleichung

$$P = k \varphi \quad (5.5)$$

zusammenfassen mit den Spaltenvektoren

$$P = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_g \ \dots \ P_N\} \quad (5.6)$$

$$\varphi = \{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_g \ \dots \ \varphi_N\} \quad (5.7)$$

und der Diagonalmatrix

$$k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_g \ \dots \ k_N] \quad (5.8)$$

Die Gleichung (5.5) darf nicht mit der äußerlich gleichen Beziehung (4.24) verwechselt werden.

5.1 Die Inzidenzmatrix

Während der Spaltenvektor Γ nach Gleichung (5.2) jede Knotenverschiebung nur einmal enthält, kommt im Spaltenvektor φ nach Gleichung (5.7) dieselbe Knotenverschiebung mehrmals vor, je nachdem, wieviele Elementknoten einen gemeinsamen Strukturknoten bilden. Zwischen φ und Γ besteht eine Beziehung gemäß

$$\varphi_{n \times 1} = C_{n \times m} \Gamma_{m \times 1} \quad (5.9)$$

wobei n = Zahl der Freiheitsgrade pro Element mal Anzahl N der Elemente.

Die Zeilen der ($n \times m$) Matrix \mathbf{Q} bestehen aus lauter Nullen mit Ausnahme einer Eins, die einen bestimmten Freiheitsgrad in \mathbf{q} mit dem identisch in \mathbf{r} gleichsetzt. Zur Veranschaulichung betrachten wir das ebene Fachwerk nach Bild 5.1.

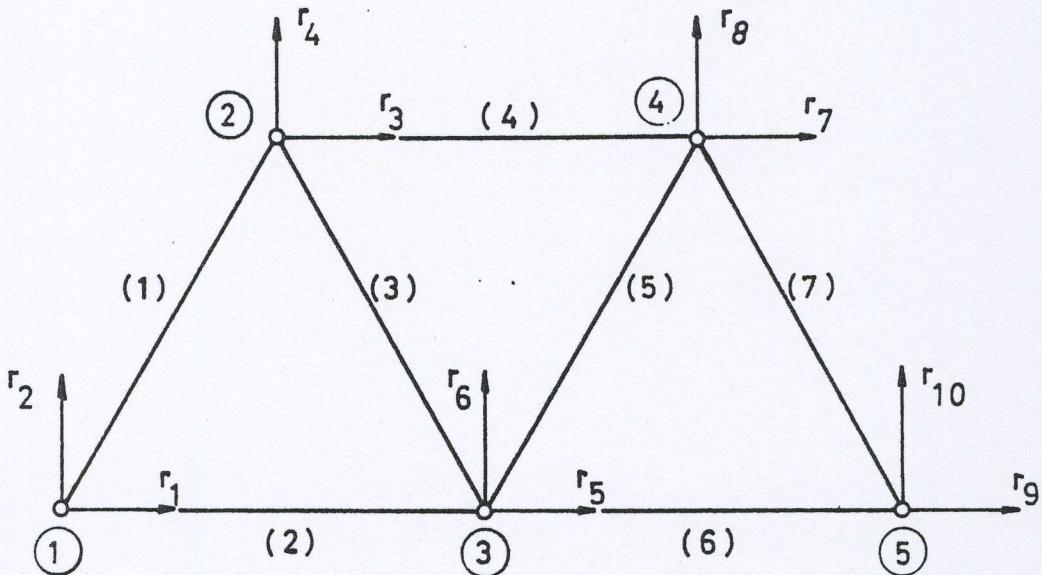


Bild 5.1 Zur Erläuterung der Inzidenzmatrix

Es besteht aus 7 Stabelementen, von denen jedes 4 Elementfreiheitsgrade besitzt. Der Spaltenvektor \mathbf{q} ist demzufolge vom Typ (28×1) . Den 5 Strukturknoten sind je 2 Freiheitsgrade eigen, so daß der Spaltenvektor \mathbf{r} vom Typ (10×1) ist. Die Gleichung (5.9) nimmt für das betrachtete Beispiel die Gestalt der Gleichung (5.10) an.

$$\begin{bmatrix}
 \varphi_1 \\
 \varphi_2 \\
 \varphi_3 \\
 \varphi_4 \\
 \varphi_5 \\
 \varphi_6 \\
 \varphi_7
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 \rho_{1x}, 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2y}, 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2y}, 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 3 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 3 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2y}, 3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 4 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 4 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 4 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \rho_{2y}, 4 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 5 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 5 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 5 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \rho_{2y}, 5 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 6 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 6 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_{2x}, 6 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \rho_{2y}, 6 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \rho_{1x}, 7 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \rho_{1y}, 7 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \rho_{2x}, 7 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \rho_{2y}, 7 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5 \\
 r_6 \\
 r_7 \\
 r_8 \\
 r_9 \\
 r_{10}
 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

5.2 Statische Verträglichkeit an den Strukturknoten

Läßt man die Strukturknoten virtuelle Verschiebungen δr durchlaufen, wobei die virtuellen Verschiebungen der Elementknoten sich nach

$$\delta \varphi = \mathbf{a} \delta r \quad (5.11)$$

berechnen, erhält man für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

$$\delta W_a = \delta r^t R \quad (5.12)$$

und für die innere virtuelle Arbeit

$$\delta W_i = \sum_{g=1}^N (\delta \varphi_g^t P_g) = \delta \varphi^t P \quad (5.13)$$

$$\text{Es gilt } \delta W_a = \delta W_i \quad (2.15)$$

$$\text{oder } \delta r^t R = \delta \varphi^t P \quad (5.14)$$

Mit (5.11) erhält man aus (5.14)

$$\delta r^t (R - \mathbf{a}^t P) = 0 \quad (5.15)$$

Da δr willkürliche virtuelle Verschiebungen sind, folgt aus (5.15)

$$R = \mathbf{a}^t P \quad (5.16)$$

Die Gleichung (5.16) besagt, daß die Summe der an einem Strukturknoten vorhandenen Elementknotenkräfte gleich der dort angreifenden äußeren Kraft ist, oder anders ausgedrückt, daß an jedem einzelnen Strukturknoten Kräftegleichgewicht herrscht. Dies soll an dem Beispiel des ebenen Fachwerks nach Bild 5.1 explizit gezeigt werden.

Das Fachwerk sei gemäß Bild 5.2 statisch unbestimmt gelagert und durch die eingeprägte Kraft R_6 belastet.

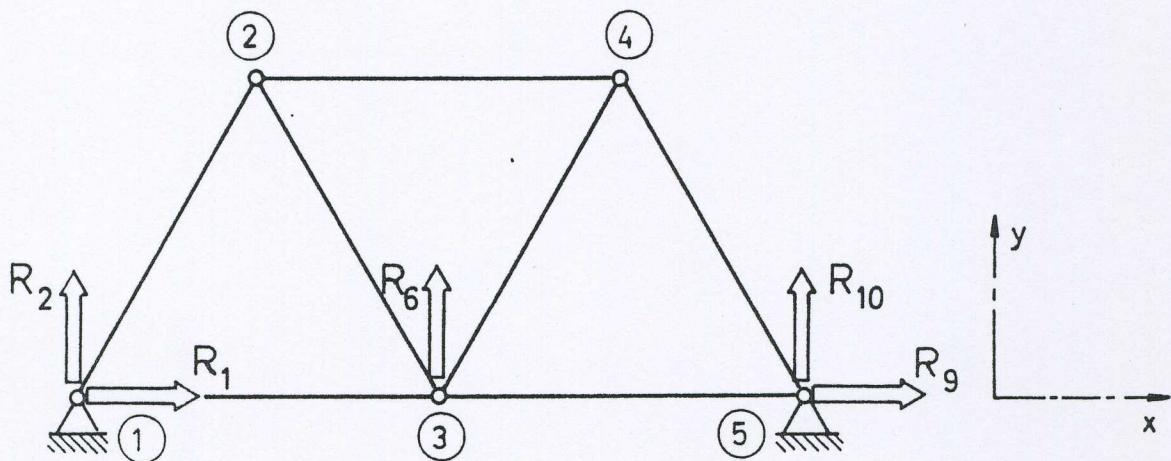


Bild 5.2 Zum Gleichgewicht an den Strukturknoten

Die durch R_6 hervorgerufenen Stützreaktionen R_1 , R_2 , R_9 und R_{10} zählen mit zu den äußeren Kräften. Gleichung (5.17) ist die explizite Gleichung (5.16) für das betrachtete Beispiel. Aus (5.17) findet man für den Knoten 1 die "Gleichgewichtsbedingungen"

$$R_1 = P_{1x,1} + P_{1x,2}$$

$$R_2 = P_{1y,1} + P_{1y,2}$$

5.3 Die Gesamtsteifigkeitsmatrix

Mit den Gleichungen (5.5) und (5.9) erhält man aus (5.16)

$$R = \alpha^t k \alpha \quad (5.18)$$

Führt man die Abkürzung

$$K = \alpha^t k \alpha \quad (5.19)$$

ein, so wird aus (5.18)

$$R = K r \quad (5.3)$$

Die Beziehung zwischen den äußeren Kräften R und den Verschiebungen r der Strukturknoten wird durch die Gesamtsteifigkeitsmatrix K hergestellt. Die Berechnung von K nach Gleichung (5.19) erfordert scheinbar die zweifache Matrizenmultiplikation $\alpha^t k \alpha$. Bei der praktischen Berechnung von K macht man jedoch davon Gebrauch, daß die Matrizenoperation nach (5.19) darauf hinausläuft, die Elementsteifigkeiten k_g in ihre richtige Position in der Matrix K zu bringen und die sich überlappenden Anteile zu addieren.

Zum Beweis fassen wir die Elemente der Inzidenzmatrix α zu Untermatrizen zusammen

$$\alpha = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_g \ \dots \ \alpha_N\} \quad (5.20)$$

wobei N Anzahl der diskreten Elemente, die bei der Idealisierung der Struktur verwendet werden.

(Für das ebene Fachwerk des Bildes 5.1 findet man aus Gleichung (5.10), daß eine typische Untermatrix α_g vom Typ 4×10 ist.)

Mit (5.20) und (5.8) wird

$$\mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T & \mathbf{a}_2^T & \dots & \mathbf{a}_g^T & \dots & \mathbf{a}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & k_g & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_g \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$$

$$K = \mathbf{a}^T \mathbf{k} \mathbf{a} = \sum_{g=1}^N \mathbf{a}_g^T \mathbf{k}_g \mathbf{a}_g \quad (5.21)$$

Zur Veranschaulichung soll für das ebene Fachwerk des Bildes 5.1 der Anteil

$$\mathbf{a}_2^T \mathbf{k}_2 \mathbf{a}_2 \quad (5.22)$$

des Stabelements 2 explizit berechnet werden.

Aus (5.10) liest man ab

$$\mathbf{a}_2 \quad (4 \times 10) = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{array} \right] \quad 0_{4 \times 4} \quad (5.23)$$

Für ebene Probleme reduziert sich die Gleichung (4.30) auf

$$\mathbf{k}_o = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12} m_{12} \\ m_{12} l_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Da die lokale x^* -Achse des Stabes 2 mit der globalen x -Achse zusammenfällt, ist

$$l_{12} = 1 \text{ und } m_{12} = 0$$

und damit

$$k_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Mit (5.24) erhält man aus (4.31) die globale Steifigkeit des Stabelements 2

$$k_2 = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Die Durchführung der Operation (5.22) mit den Matrizen (5.23) und (5.25) unter Verwendung des Falkschen Schemas zeigt Bild 5.3.

Bild 5.1 Zur Berechnung von α_2^t k_2 α_2

5.4 Berücksichtigung von Randbedingungen

Die Matrix K nach der Rechenvorschrift (5.19) bzw. (5.21) ist die Steifigkeitsmatrix für die gesamte Struktur, wobei sie zunächst als frei beweglicher Körper betrachtet worden ist. Die Gleichung (5.3) kann ebenso wie (5.16) als Gleichgewichtsaussage gedeutet werden: die an den Strukturknoten angreifenden äußeren Kräfte sind im Gleichgewicht mit den Elementknotenkräften (= elastische Rückstellkräfte). Da im Spaltenvektor R auch die Reaktionskräfte als äußere Kräfte enthalten sind, werden nicht alle in der Beziehung (5.3) enthaltenen Gleichungen unabhängig voneinander sein. So sind bei räumlichen bzw. ebenen Problemen wegen der 6 bzw. 3 Überalles-Gleichgewichtsbedingungen in der Beziehung (5.3) 6 bzw. 3 abhängige Gleichungen enthalten. Das hat zur Folge, daß die Matrix K singulär ist und nicht invertiert werden kann. Die Singularität von K lässt sich in der Weise beseitigen, daß man die für die Gesamtstruktur möglichen Festkörperbewegungen verhindert, in dem man an geeigneten Knoten gewisse Freiheitsgrade unterdrückt. Eine statisch bestimmte Lagerung der Gesamtstruktur sichert dies auf jeden Fall.

Durch Streichen der betroffenen Zeilen im Spaltenvektor r und der entsprechenden Spalten in der Inzidenzmatrix α ergeben sich die reduzierten Matrizen r_L und α_L . Aus ihnen erhält man mit der Rechenvorschrift (5.21) die reduzierte Steifigkeitsmatrix

$$K_{LL} = \alpha_L^T K \alpha_L \quad (5.26)$$

und aus (5.3) wird

$$R_L = K_{LL} r_L \quad (5.27)$$

Nach vollzogener Inversion der Matrix K_{LL} lassen sich die unbekannten Verschiebungen r_L gemäß

$$r_L = K_{LL}^{-1} R_L \quad (5.28)$$

berechnen.

Veranschaulichung am Beispiel des Stabelements

Für ein einzelnes Stabelement (Bild 5.4) lautet die Gleichung

$$R = kr \quad (5.3)$$

explizit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix}}_{P^*} = \frac{AE}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{K^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{bmatrix}}_{\varphi^*} \quad (4.16)$$

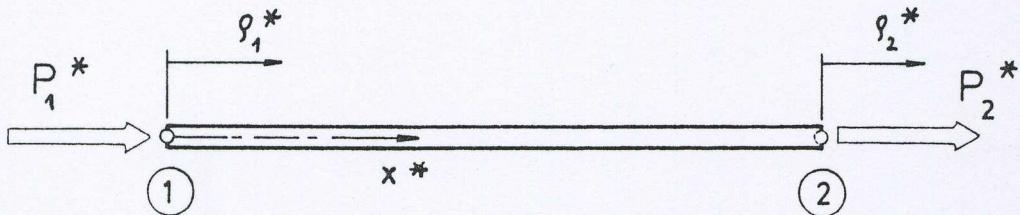


Bild 5.4 Stabelement

- Nachweis, daß in (4.16) die Kräftegleichgewichtsbedingung $\sum x_i^* = 0$ enthalten ist:

Man erhält aus (4.16) durch Ausmultiplizieren

$$p_1^* = \frac{AE}{l} (\rho_1^* - \rho_2^*)$$

$$p_2^* = \frac{AE}{l} (-\rho_1^* + \rho_2^*)$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt $p_1^* + p_2^* = 0$

- Nachweis, daß die Matrix K^* singulär, d.h. nicht invertierbar ist:

Es soll versucht werden, mit Hilfe der Inversionsformel (2.7.1) auf Blatt 2.10 der Einführung in die Matrizenrechnung die Inverse von K^* zu berechnen.

Die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ist

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Im vorliegenden Fall ist $D = 1 - 1 = 0$. Es existiert keine Inverse von k^* . D.h. ρ_1^* und ρ_2^* lassen sich nicht aus (4.16) berechnen. Dies ist physikalisch durchaus anschaulich: ein frei beweglicher Stab, auf den ein im Gleichgewicht befindliches System von Kräften einwirkt, lässt sich (kraftlos) beliebig im Raum, z.B. in x^* -Richtung, verschieben. ρ_1^* und ρ_2^* bleiben unbestimmt. Lediglich ihre Differenz $\rho_1^* - \rho_2^*$ ist eindeutig.

3. Reduzierte Steifigkeitsmatrix und Berechnung von r_L

Unterdrückt man die Verschiebung des Knotens 1:

$$\rho_1^* = 0,$$

so lassen sich die 1. Zeile in P^* , k^* und φ^* sowie die 1. Spalte in k^* streichen.

Die Gleichung

$$R_L = K_{LL} r_L \quad (5.27)$$

lautet im vorliegenden Fall explizit

$$P_2^* = \frac{AE}{l} \rho_2^*$$

Durch "Inversion" erhält man

$$\rho_2^* = \frac{1}{AE} P_2^*$$

Veranschaulichung am Beispiel des Fachwerks nach Bild 5.1 bzw. Bild 5.2

Die Gleichung

$R = Kr$ lautet für das Fachwerk nach Bild 5.1 bzw. Bild 5.2 explizit

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{1,10} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{2,10} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{3,10} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{4,10} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{5,10} \\ \vdots & & & & & & & & & \\ R_6 & K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{6,10} \\ R_7 & K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{7,10} \\ R_8 & K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{8,10} \\ R_9 & K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{9,10} \\ R_{10} & K_{101} & K_{102} & K_{103} & K_{104} & K_{105} & K_{106} & K_{107} & K_{108} & K_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \end{bmatrix}$$

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 unbekannte Stützreaktionen

R_6 vorgegebene (bekannte) äußere Kraft

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_8$ unbekannte Vierkantlastungen

Durch Weglassen der Spalten und Zeilen, die nicht auf die unterdrückten Freiheitsgrade (r_1, r_2, r_3, r_5) beziehen, erhält man die reduzierte Gleichung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{K_{LL}}$

R_L

Kurz geschrieben

$$R_L = K_{LL} r_L \quad (5.27)$$

aufgelöst nach den unbekannten Verschiebungen:

$$r_L = K_L^{-1} R_L \quad (5.28)$$

Für die Bestimmung der unbekannten Stützreaktionen stehen prinzipiell zwei Wege offen:

Entweder man setzt die aus (5.28) gewonnen Verschiebungen in die Gleichung

$$R = K r \quad (5.3)$$

ein und erhält über eine Matrizenmultiplikation die noch unbekannten Zeilen des Spaltenvektors

oder man benutzt nacheinander die Gleichungen

$$\varphi = D r \quad (5.9)$$

$$P = k \varphi \quad (5.5)$$

$$R = D^t P \quad (5.16)$$

Da die Elementknotenverschiebungen φ bzw. φ^* ohnehin für die Berechnung der Spannungen (siehe z.B. Gleichung (4.107)) benötigt werden, ist der zweite Weg zu bevorzugen.

5.5 Die Grundschritte der Matrizenverschiebungsmethode

Die grundsätzlichen Schritte, die bei der Berechnung einer Struktur mit Hilfe der Matrizenverschiebungsmethode durchzuführen sind, lassen sich übersichtlich in einem Flußdiagramm darstellen (Bild 5.4). Man erkennt die folgenden Schritte

1. Auswählen geeigneter Elemente; Festlegen der Position und Nummer der Strukturknoten; Einfügen und Nummerieren der Elemente (= topological description); Bereitstellen von Materialdaten und geometrischen Daten der Elemente (= Steifigkeitsdaten)
2. Bestimmen der Knotenpunktskoordinaten im globalen x, y, z-System
3. Bestimmen der lokalen Koordinaten x^*, y^*, z^*
4. Berechnen der Elementsteifigkeiten k_g^* in lokalen Koordinaten
5. Bestimmung der Matrizen α_g^* der Richtungskosinuse für jedes Element
6. Berechnen der Elementsteifigkeiten in globalen Koordinaten gemäß

$$k_g = \alpha_g^{*t} k_g^* \alpha_g^*$$

7. Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix $K = \sum (\alpha_g^t k_g \alpha_g)$ (gegebenenfalls durch Positionieren und Addieren der Elementsteifigkeiten mit Steuerliste)
8. Herstellen der reduzierten Steifigkeitsmatrix K_{LL}
9. Inversion der Steifigkeitsmatrix K_{LL}
10. Bestimmen der äußeren (gegebenenfalls äquivalenten) Knotenkräfte
11. Berechnen der thermischen Kräfte Q_g^* und Q_g
12. Addition der thermischen Kräfte und Bilden von Q_L
13. Berechnen der resultierenden Kräfte $R_L - Q_L$
14. Berechnen der Verschiebungen der Strukturknoten gemäß

$$r_L = K_{LL}^{-1} (R_L - Q_L)$$
15. Berechnen der Elementverschiebungen, Elementkräfte und Elementspannungen

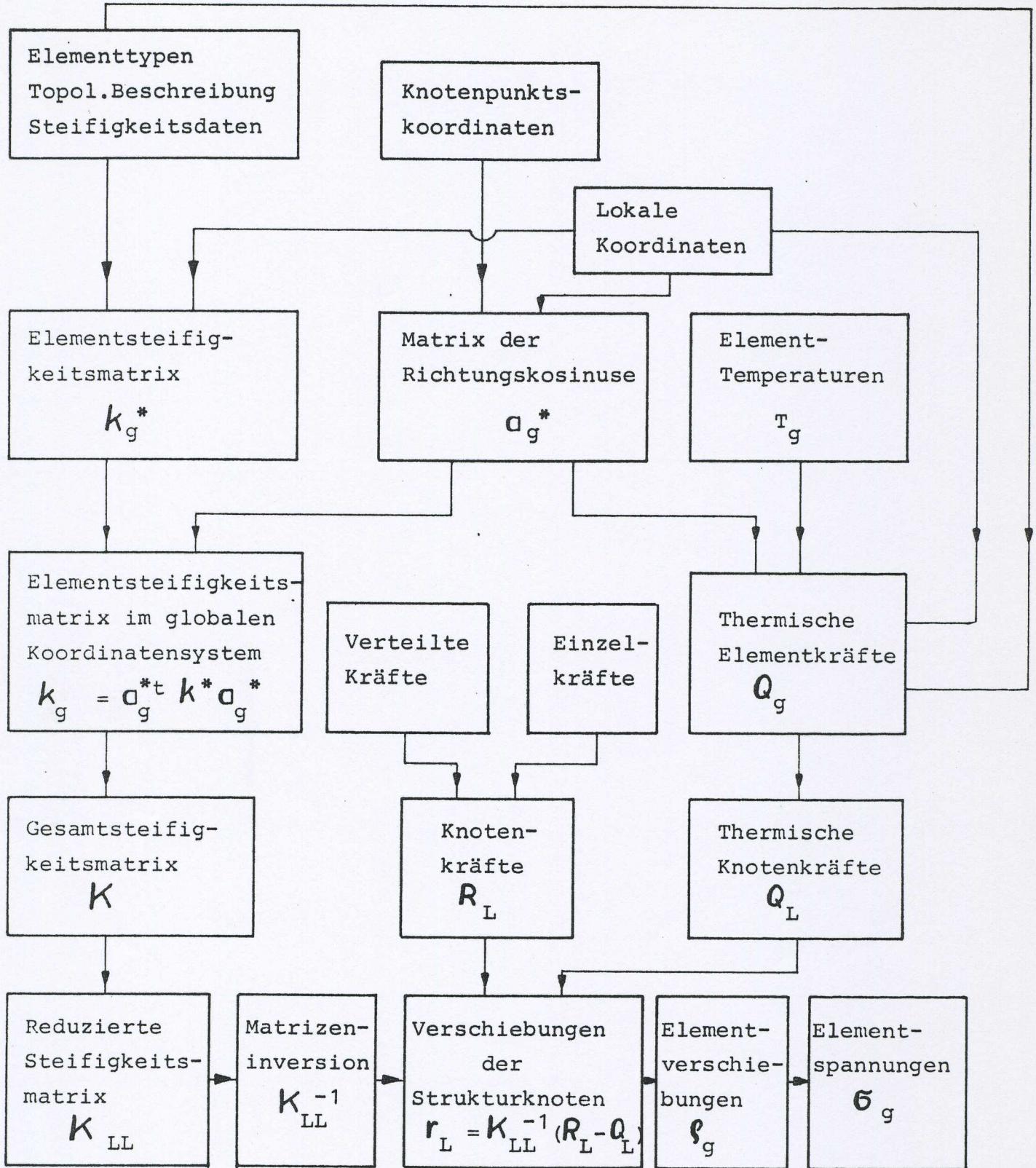


Bild 5.4 Flußdiagramm für die Berechnungsschritte der Matrizenverschiebungsmethode

6. Erweiterung der Methode, um Strukturen mit Temperaturverteilungen behandeln zu können

Die Bestimmung von Wärmespannungen und Wärmedehnungen spielt bei der Berechnung von Strukturen häufig eine wichtige Rolle. Im folgenden wird gezeigt, wie sich die Grundgleichungen der Matrizenverschiebungsmethode erweitern lassen, damit auch Temperatureinflüsse erfaßt werden können.

6.1 Erweiterung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung

Unter der Voraussetzung eines isotropen Körpers verlängern sich die Kanten dx , dy , dz eines Elementarquaders bei Erwärmung um T auf die neuen Längen $(1 + \alpha T) dx$, $(1 + \alpha T) dy$, $(1 + \alpha T) dz$, wobei α der lineare Ausdehnungskoeffizient ist. Winkeländerungen treten dabei nicht auf.

Die Wärmedehnungen berechnen sich demzufolge zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Txx} &= \frac{\alpha T dx}{dx} = \alpha T \\ \varepsilon_{Tyy} &= \frac{\alpha T dy}{dy} = \alpha T \\ \varepsilon_{Tzz} &= \frac{\alpha T dz}{dz} = \alpha T \\ \varepsilon_{Txy} &= \varepsilon_{Tyx} = \varepsilon_{Tzx} = 0\end{aligned}\tag{6.1}$$

Addiert man die Dehnungsanteile nach Gleichung (6.1) zu den rechten Seiten der Gleichungen (1.7), erhält man

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - v (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - v (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - v (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha T \\ \varepsilon_{xy} &= 2 \frac{1+v}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} &= 2 \frac{1+v}{E} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= 2 \frac{1+v}{E} \sigma_{zx}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Dabei sind ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} jetzt totale Dehnungen, die sich zusammensetzen aus (unbehinderten) Wärmedehnungen αT und elastischen Dehnungen

$$\frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right]$$

$$\frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right]$$

$$\frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right]$$

infolge von Spannungen. Die letzteren werden einerseits durch äußere Lasten andererseits aber auch durch Zwänge geweckt, die von Nachbar teilchen herrühren, deren Wärmedehnung behindert ist.

Die Gleichungen (6.2) lassen sich nach den Spannungen auflösen. Man erhält in Matrixschreibweise

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} \boldsymbol{\epsilon} + \alpha T \boldsymbol{E}_T \quad (6.3)$$

mit $\boldsymbol{\epsilon}$ gemäß Gleichung (1.4)

\boldsymbol{E} gemäß Gleichung (1.10)

$$\text{und } \boldsymbol{E}_T = \frac{E}{1-2\nu} \{ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (6.4)$$

Im Falle des ebenen Spannungszustandes lautet (6.3) explizit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E \alpha T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Mit den Spaltenvektoren

$$\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \} \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \} \quad (6.7)$$

$$\boldsymbol{E}_T = \frac{E}{1-\nu} \{ -1 \quad -1 \quad 0 \} \quad (6.7a)$$

und der (3x3) Matrix

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

geht (6.5) in die Schreibweise (6.3) über. Der Term $\alpha T \underline{\mathbf{E}}_T$ in (6.3) lässt sich als die Matrix derjenigen Spannungen interpretieren, die vorhanden sind, wenn die totalen Dehnungen $\underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}$ (d.h. wenn die Wärmdehnungen vollständig unterdrückt sind).

6.2 Auswirkung auf die Elementkräfte.

Mit der Beziehung

$$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}^* = \alpha^* \underline{\boldsymbol{\gamma}}^* \quad (4.7)$$

erhält man aus (6.3) für ein lokales kartesisches Koordinatensystem

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* = \underline{\mathbf{E}} \alpha^* \underline{\boldsymbol{\gamma}}^* + \underline{\mathbf{E}}_T \alpha T \quad (6.9)$$

und mit (6.9) aus (4.5)

$$\underline{\mathbf{P}}^* = \int_v \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{*T} \underline{\mathbf{E}} \alpha^* dV \quad \underline{\boldsymbol{\gamma}}^* + \int_v \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{*T} \underline{\mathbf{E}}_T \alpha T dV \quad (6.10)$$

Mit (4.10) und der Akürzung

$$\underline{\mathbf{Q}}^* = \int_v \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{*T} \underline{\mathbf{E}}_T \alpha T dV \quad (6.11)$$

wird

$$\underline{\mathbf{P}}^* = \underline{\mathbf{K}}^* \underline{\boldsymbol{\gamma}}^* + \underline{\mathbf{Q}}^* \quad (6.12)$$

$\underline{\mathbf{Q}}^*$ ist offenbar der Spaltenvektor der Knotenkräfte, die bei einer Temperaturerhöhung des Elements geweckt werden, wenn $\underline{\boldsymbol{\gamma}}^* = \mathbf{0}$ ist, d.h. wenn die Verschiebungen der Elementknoten unterdrückt sind.

Ist die Temperatur im Element konstant, so lässt sich Q^* in der Form schreiben

$$Q^* = h^* \alpha T \quad (6.13)$$

$$\text{wobei } h^* = \int_V \underline{\epsilon}^{*T} E_T dV = \int_V \underline{\alpha}^{*T} E_T dV \quad (6.14)$$

die thermische Steifigkeitsmatrix genannt wird.

Mit (6.13) wird aus (6.12)

$$P^* = K^* \varphi^* + h^* \alpha T \quad (6.15)$$

Für den Gelenkstab ist $E_T = -E$

und

$$h^* = - \int_0^1 \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA dx$$

$$h^* = EA \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

6.3 Transformation der thermischen Elementsteifigkeit vom lokalen in das globale Koordinatensystem

Anstelle der Gleichung

$$P = k \varphi \quad (4.24)$$

$$\text{wobei } k = a^{*T} k^* a^* \quad (4.23)$$

tritt bei Berücksichtigung von Temperatureinflüssen

$$P = k \varphi + h \alpha T = k \varphi + Q \quad (6.17)$$

$$\text{wobei } h = a^{*T} h^* \quad (6.18)$$

$$Q = a^{*T} h^* \alpha T = a^{*T} Q^* \quad (6.19)$$

Für den Gelenkstab erhält man mit (4.28) und (6.16) aus (6.18)

$$h = \begin{bmatrix} 1_{12} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ n_{12} & 0 \\ 0 & 1_{12} \\ 0 & m_{12} \\ 0 & n_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} AE$$

$$h_{6 \times 1} = AE \{ 1_{12} \quad m_{12} \quad n_{12} \quad -1_{12} \quad -m_{12} \quad -n_{12} \} \quad (6.20)$$

6.4 Auswirkung auf das Zusammenfügen der Elemente zur Gesamtstruktur

Anstelle der Gleichung

$$P_g = k_g \varphi_g \quad (5.4)$$

$$\text{tritt } P_g = k_g \varphi_g + Q_g \quad (6.21)$$

(siehe Gleichung (6.17))

und an Stelle von

$$P = k \varphi \quad (5.5)$$

$$\text{tritt } P = k \varphi + Q \quad (6.22)$$

mit dem Spaltenvektor

$$Q = \{ Q_1 \quad Q_2 \dots Q_g \dots Q_N \} \quad (6.23)$$

Die Gleichung

$$R = a^t k a \quad (5.18)$$

erweitert sich zu

$$R = a^t k a r + a^t Q \quad (6.24)$$

Mit den Abkürzungen

$$K = \alpha^t k \alpha \quad (5.19)$$

$$\text{und } Q' = \alpha^t Q \quad (6.25)$$

erhält man aus (6.24)

$$Kr = (R - Q') \quad (6.26)$$

An die Stelle der Gleichung

$$r_L = K_{LL}^{-1} R_L \quad (5.28)$$

tritt die erweiterte Gleichung

$$r_L = K_{LL}^{-1} (R_L - Q_L) \quad (6.27)$$

wobei die reduzierten Spaltenvektoren R_L und Q_L in der Weise gewonnen werden, daß man diejenigen Kräfte wegläßt, die den unterdrückten Freiheitsgraden in r entsprechen.

Schrifttum9.1 Bücher, auf die im Manuskript Bezug genommen wird

- [1.1] Leipholz, H., Einführung in die Elastizitätstheorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1968
- [1.2] Leipholz, H., Festigkeitslehre für den Konstrukteur, Springer-Verlag, Berlin 1969
- [1.3] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., Theory of Elasticity, 3rd Ed., International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, Düsseldorf 1970
- [1.4] Przemieniecki, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968
- [1.5] Pestel, E.C. and Leckie, F.A., Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill Book Co., New York 1963
- [1.6] Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau, 16. Auflage, Herausgeber: Beitz, W., Küttner, K.H., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1987
- [1.7] Young, W.C., Roark's Formulas for Stress and Strain 6th Ed., McGraw-Hill Book Company, New York Hamburg 1989
- [1.8] Robinson, J., Integrated Theory of Finite Element Methods, John Wiley and Sons, London 1973
- [1.9] Finite Element Congress Baden-Baden, Jahrgang 1972 bis 1993, Anschrift für Subskription: IKO Software Service GmbH, Postfach 80 05 65, 7000 Stuttgart 80
- [1.10] Reutlinger Arbeitstagung "Finite-Element-Methode in der Praxis", Jahrgang 1973, 1975, 1977, 1979, usw. bis 1991 Anschrift für Subskription: T-Programm GmbH, Postfach 1444, 7410 Reutlingen

- [1.11] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, 2nd Ed., International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, Düsseldorf 1959
- [1.12] Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C., Triangular Elements in Plate Bending: Conforming and Non-conforming Solutions, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 26-28, 1965, AFFDL TR 66-80, 1966
- [1.13] Finite Element Methods in the Commercial Environment, Volume 1 and 2, Lectures delivered at the Second World Congress on Finite Element Methods in Bournemouth 1978, Herausgeber: Robinson, J., Anschrift für Subskription: Robinson and Associates, Great Bidlake Manor, Bridestowe, Okehampton, Devon EX20 4NT, England
- [1.14] Calcote, L.R., The Analysis of Laminated Composite Structures, Van Nostrand Reinhold Company, New York, London 1969
- [1.15] Davies, G.A.O., Virtual Work in Structural Analysis, John Wiley and Sons, Chichester, New York 1982
- [1.16] NAFEMS (Herausgeber), A Finite Element Primer, NAFEMS PUBLICATIONS, NAFEMS, Birniehill East Kilbride, Glasgow G750QU, UK 1986
- [1.17] NAFEMS (Herausgeber), Guidelines to Finite Element Practice, NAFEMS PUBLICATIONS, NAFEMS, Birniehill East Kilbride, Glasgow G750QU, UK 1986
- [1.18] Kardestunker, H., Norrie, D.H. (Herausgeber), Finite Element Handbook, McGraw-Hill Book Co., New York, Hamburg 1987
- [1.19] Finite Elements in Engineering Applications, Proceedings of the International Finite Element Conference Stuttgart 1987, 1989
Herausgeber und Anschrift für Subskription: INTES Ingenieurgesellschaft für technische Software mbH, Nobelstraße 15, 7000 Stuttgart 80

9.2 Weitere Bücher zur Methode der Finiten Elemente

- [2.1] Argyris, J.H., Energy Theorems and Structural Analysis, 3. Auflage, Butterworths, London 1971
- [2.2] Argyris, J.H. und Griege, I., Konstruktion und Berechnung mit Finiten Elementen, ISD-Bericht Nr. 148, Stuttgart 1973
- [2.3] Gallagher, R.H., Finite Element Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1975; Finite-Element-Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1976
- [2.4] Hahn, H.G., Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M. 1975
- [2.5] Martin, H.C. and Carey, G.F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York 1973
- [2.6] Finite Elemente in der Baupraxis, Vorträge anlässlich einer Tagung an der Technischen Universität Hannover, Herausgeber: Pahl, P.J., Stein, E., Wunderlich, W., Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1978
- [2.7] Radaj, D., Festigkeitsnachweise Teil II: Sonderverfahren, Deutscher Verlag für Schweißtechnik, Düsseldorf 1974
- [2.8] New and Future Developments in Commercial Finite Element Methods, Lectures delivered at the Third World Congress on Finite Element Methods in Beverly Hills 1981, Herausgeber: Robinson, J., Anschrift für Subskription: Robinson and Associates, Great Bidlake Manor, Bridestowe, Okehampton, Devon EX20 4NT, England
- [2.9] Robinson, J., Understanding Finite Element Stress Analysis, 1981, Anschrift für Subskription: siehe [2.8]

- [2.10] Schwarz, H.R., Methode der finiten Elemente: eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis, 3. neu bearb. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 1991
- [2.11] Schwarz, H.R., FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente, B.G. Teubner, Stuttgart 1981
- [2.12] Segerlind, L.J., Applied Finite Element Analysis, 2nd Ed., John Wiley and Sons, New York, Chichester 1984
- [2.13] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd Ed., McGraw-Hill, London 1977; Methode der finiten Elemente, 2. Aufl., C. Hanser, München, Wien 1984
- [2.14] Finite Elemente in der Bruchmechanik, Beiträge zu einem Seminar über angewandte Bruchmechanik in Wien 1981, Herausgeber: Rossmannith, H.-P., Springer-Verlag, Wien, New York 1982
- [2.15] Accuracy, Reliability and Training in FEM Technology, Proceedings of the Fourth World Congress on Finite Element Methods in Interlaken 1984, Herausgeber: Robinson, J., Anschrift für Subskription: siehe [2.8]
- [2.16] Bathe, K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey 1982
Deutsche Übersetzung von Peter Zimmermann: Bathe, K.-J., Finite Elemente Methoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1986
- [2.17] Argyris, J. und Mlejnek, H.-P., Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Band I Verschiebungsmethode in der Statik, Band II Kraft- und gemischte Methoden, Nichtlinearitäten, Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig Wiesbaden 1986/87
- [2.18] Hughes, Th.J.R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey 1987

- [2.19] Kämmel, G., Franeck, H., Recke, H.-G., Einführung in die Methode der finiten Elemente, Carl Hanser Verlag, München Wien 1990
- [2.20] White, R.E., An Introduction to the Finite Element Method with Applications to Nonlinear Problems, John Wiley and Sons, New York, Chichester, 1985
- [2.21] Knothe, K. und Wessels, H., Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1991
- [2.22] Nasitta, K. und Hagel, H., Finite Elemente, Mechanik, Physik und nichtlineare Prozesse, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1992

9.3 Spezielle Zeitschriften

- [Z1] Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,
Herausgeber: J.H. Argyris, W. Prager und M. Holt,
Anschrift für Subskription: Associated Scientific Publishers,
Journal Division, P.O. Box 211, Amsterdam, The Netherlands
- [Z2] Computers and Structures, Herausgeber: H. Liebowitz,
Anschrift für Subskription: Pergamon Press Ltd.,
Headington Hill Hall, Oxford OX3 OBW, England
- [Z3] Numerical Methods in Engineering,
Herausgeber: O.C. Zienkiewicz und R.H. Gallagher,
Anschrift für Subskription: John Wiley and Sons Ltd.,
Baffins Lane, Chichester, Sussex PO 19 1 UD, England
- [Z4] FEN - Finite Element News,
Herausgeber: J. Robinson
Anschrift für Subskription: Robinson and Associates,
Great Bidlake Manor, Briddescombe, Okehampton, Devon EX20
4NT, England
- [Z5] Finite Elements in Analysis and Design,
The International Journal of Applied Finite Elements and
Computer Aided Engineering,
Herausgeber: W.D. Pilkey,
Anschrift für Subskription: Elsevier Science Publishers,
Subscription Order Department, P.O. Box 211,
1000 AE Amsterdam, The Netherlands
- [Z6] Benchmark, Herausgeber: NAFEMS,
Finite Element Methods and Standards
Anschrift für Subskription: NAFEMS NEL Technology Park,
East Kilbride, Glasgow G75 0QU, UK