

TP Méthodes Numériques

Modélisation d'une corde de guitare et du tympan

PAUL BOUTON KYLIAN VINCENT

4 mai 2016

Partie I : Modélisation et simulation d'une corde de guitare

Question 1

Avec une solution sous la forme $u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$ on a :

$$\frac{\partial^2 u(x) \cos(\omega t)}{\partial t^2} = -\omega u(x) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x) \cos(\omega t)}{\partial x^2} = -u''(x) \cos(\omega t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & -\omega^2 u(x) \cos(\omega t) - \frac{T}{\mu} u''(x) \cos(\omega t) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que

$$U_n(x) = B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n(x, t)}{\partial t^2} &= B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right) \frac{n^2 \pi^2 \gamma^2}{L^L} \\ \frac{\partial^2 U_n(x, t)}{\partial x^2} \gamma^2 &= -u''(x) \cos(\omega t) = \frac{n^2 \pi^2 \gamma^2}{L^L} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right) \\ &= \frac{\partial^2 U_n(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Par principe de superposition :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \sin(n)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x) \cos(\omega t) \\ &= \operatorname{Re}(u(x)e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

Et l'équation (1) donne :

$$(1) \Leftrightarrow \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 u(x) \cos(\omega t) \Leftrightarrow \gamma^2 u''(x) = -\omega^2 u(x) \cos(\omega t)$$

On a donc :

$$\gamma^2 u''(x) e^{-i\omega t} = -\omega^2 e^{-i\omega t} u(x) \Leftrightarrow u''(x) + \frac{\omega^2}{\gamma^2} u(x) = 0$$

On trouve le discriminant $\Delta = 0$. La solution générale de cette équation est donc de la forme $A \cos(\frac{\omega}{\gamma}x) + B \sin(\frac{\omega}{\gamma}x)$

Or, en utilisant les conditions aux limites on a :

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Leftrightarrow A = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x, u(x) = 0 \\ u(L) = 0 &\Leftrightarrow B \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}L\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow B = 0 \text{ ou } \frac{\omega}{\gamma} = n\pi \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi\gamma}{L} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Rightarrow u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi\gamma}{L}t\right)$$

La solution générale correspond à la superposition des modes propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi\gamma}{L}t\right)$$

On a : $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Ainsi la fréquence fondamentale f_1 :

- Diminue quand la longueur de la corde augmente
- Est multipliée par 2 quand la longueur est divisée par 2
- Augmente quand la masse linéique diminue
- Augmente quand la tension augmente

Question 2

On a :

$$\begin{aligned} u(x+h, t) + u(x-h, t) &= [u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)] + [u(x, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)] + o(h^2) \\ &\Leftrightarrow h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -2u(x, t) + u(x+h, t) + u(x-h, t) + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{h^2}(u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)) + o(h^2)$$

Et ainsi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^2}(u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n)$$

De même :

$$u(x, t+k) + u(x, t-k) = [u(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)] + [u(x, t) - k \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)] + o(h^2)$$

$$\Leftrightarrow k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -2u(x, t) + u(x, t+k) + u(x, t-k) + o(h^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{k^2}(u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)) + o(h^2)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{k^2}(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1})$$

On calcule maintenant $I = u(x+2h, t) + u(x-2h, t) - 4[u(x+h, t) + u(x-h, t)] + 6u(x, t)$:

$$\begin{aligned} I &= u(x, t) + 2h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{(2h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \frac{(2h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(h^4) \\ &\quad + u(x, t) - 2h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \frac{(2h)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(h^4) \\ &\quad - 4[2u(x, t) + 2 \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2 \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)] + 6u(x, t) + o(h^4) \\ &= h^4 \left(2 \frac{16}{4!} - \frac{8}{4!} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(h^4) \\ &= h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(h^4) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l, t_k) &= \frac{1}{h^4}(u_{l+2}^n + u_{l-2}^n - 4(u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) + u_{l-2}^n + 6u_l^n) + o(1) \\ &\approx \frac{1}{h^4}(u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n) \end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + o(1) \right) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x+h,t) - 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x-h,t) \right) + o(1) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u(x+h,t+k) - u(x+h,t-k)}{2k} - \frac{u(x,t+k) - u(x,t-k)}{k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(x-h,t+k) - u(x-h,t-k)}{2k} \right) + o(1) \\
&\approx \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} - 2u_l^{n+1} + 2u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^{n-1}) \\
&\approx \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1})
\end{aligned}$$

On insère maintenant ces résultats dans le schéma implicite associé à l'EDP :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^2} (u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) &\approx \gamma^2 \left(\frac{1}{h^2} (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_l^n) \right) - \frac{\kappa^2}{h^4} (u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n) \\
&\quad - \frac{2\sigma_0}{2k} (u_l^{n+1} - u_l^{n-1}) + \frac{2\sigma_1}{2kh} (u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1}) \\
\Leftrightarrow 0 &\approx \frac{\sigma_1}{kh^2} (u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^{n-1} - u_{l+1}^{n-1}) + \left(-\frac{1}{k^2} - \frac{\sigma_0}{k} + \frac{2\sigma_1}{kh^2} \right) (u_l^{n+1} + u_l^{n-1}) + \frac{\sigma_1}{kh^2} u_{l+1}^{n+1} - \frac{\kappa^2}{h^4} (u_{l-2}^n - u_{l+2}^n) \\
&\quad + \left(\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2}{h^4} \right) (u_{l-1}^n + u_{l+1}^n) + \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2\gamma^2}{h^2} - \frac{6\kappa^2}{h^4} \right) u_l^n
\end{aligned}$$

Ainsi par identification on retrouve bien :

$$\begin{aligned}
&a_1 u_{l-1}^{n+1} + a_2 u_l^{n+1} + a_3 u_{l+1}^{n+1} \\
&+ b_1 u_{l-2}^n + b_2 u_{l-1}^n + b_3 u_l^n + b_4 u_{l+1}^n + b_5 u_{l+2}^n \\
&+ c_1 u_{l-1}^{n-1} + c_2 u_l^{n-1} + c_3 u_{l+1}^{n-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_3 = \frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} \\
b_1 &= \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4}
\end{aligned}$$

Question 3

On a montré dans la question précédente que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^2}(u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n)$$

En appliquant cette équation en $x = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \approx \frac{1}{h^2}(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n)$$

Or ceci est valable quel que soit t , et d'après les conditions aux limites on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad u(0, t) = 0$$

Donc on a :

$$u_{-1} \approx -u_1$$

Par un raisonnement identique en $x = L$, avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = u(L, t) = 0$$

Donc de même :

$$u_{N-1} \approx -u_{N+1}$$

Soit r^n tel que :

$$r^n = \begin{bmatrix} r_0^n \\ r_1^n \\ \vdots \\ r_j^n \\ \vdots \\ r_{N-1}^n \\ r_N^n \end{bmatrix}$$

Et :

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}}^{n+1} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}^n + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{u}}^{n-1} = r^n$$

Pour $k = 0$ (et de manière identique pour $k = N$) on a :

$$\begin{aligned} r_0^n &= u_0^{n+1} + u_0^n + u_0^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\forall t = n, u_0^n = u_N^n = 0$.

Pour $k = 1$ (et de manière identique pour $k = N - 1$) on a :

$$\begin{aligned} r_1^n &= a_1 u_0^{n+1} + a_2 u_1^{n+1} + a_1 u_2^{n+1} + b_2 u_0^n + (b_3 - b_1) u_1^n + b_2 u_2^n + b_1 u_3^n + c_1 u_0^{n-1} + c_2 u_1^{n-1} + c_3 u_2^{n-1} \\ &= a_1 u_0^{n+1} + a_2 u_1^{n+1} + a_1 u_3^{n+1} + b_3 u_1^n + b_1 u_{-1}^n + b_2 u_2^n + b_1 u_3^n + c_1 u_0^{n-1} + c_2 u_1^{n-1} + c_3 u_2^{n-1} \end{aligned}$$

On reconnaît alors le schéma numérique pour $k = 1$ et donc $r_1^n = 0$.

Enfin, pour $k \in [2; N - 2]$ on trouve immédiatement le schéma en développant les produits matriciels :

$$\begin{aligned} r_k^n &= a_1 u_{k-1}^{n+1} + a_2 u_k^{n+1} + a_1 u_{k+1}^{n+1} + b_1 u_{k-2}^n + b_2 u_{k-1}^n + b_3 u_k^n + b_2 u_{k+1}^n + b_1 u_{k+2}^n + c_1 u_{k-1}^{n-1} + c_2 u_k^{n-1} + c_3 u_{k+1}^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\forall t = n, \forall k \in [0; N], r_k^n = 0$. Le schéma peut être donc s'écrire sous la forme matricielle proposée.

Question 4

En calculant la matrice D_{xxxx} on trouve :

$$\mathbf{D}_{xxxx} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & & & & \mathbf{0} \\ -4 & 6 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 6 & -4 \\ \mathbf{0} & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

Calculons les différentes matrices :

$$(1 + \sigma_0 k) \mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2} & -\frac{\sigma_1 k}{h^2} & & & & \mathbf{0} \\ -\frac{\sigma_1 k}{h^2} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & -\frac{\sigma_1 k}{h^2} & 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$-2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & & & & \mathbf{0} \\ e_1 & e_2 & \ddots & & & \\ e_3 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & e_2 & e_1 & \\ \mathbf{0} & & e_3 & e_1 & e_0 & \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} e_0 &= -2 + \frac{2\gamma k^2}{h^2} + \frac{5\kappa^2 k^2}{h^4} \\ &= -2 + \frac{2\gamma k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} - \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \\ &= b_3 - b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{-\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4} \\ &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} \\ &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \\ &= b_1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx} &= \begin{bmatrix} b_3 - b_1 & b_2 & & & & \mathbf{0} \\ b_2 & b_3 & \ddots & & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b_3 & b_2 & \\ \mathbf{0} & & b_1 & b_2 & b_3 - b_1 & \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} \end{aligned}$$

Enfin :

$$(1 + \sigma_0 k) \mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} & \frac{\sigma_1 k}{h^2} & & & & \mathbf{0} \\ \frac{\sigma_1 k}{h^2} & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \frac{\sigma_1 k}{h^2} & 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Question 5

On reprend l'équation caractéristique de l'EDP avec $\tilde{u}(x, t) = e^{st+j\beta x}$ on trouve :

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{u}(x, t) &= -\beta^2 \gamma^2 \tilde{u}(x, t) - \kappa^2 \beta^4 \tilde{u}(x, t) - 2s\sigma_0 \tilde{u}(x, t) - 2\sigma_1 s \beta^2 \tilde{u}(x, t) \\ \Leftrightarrow s^2 &= -\beta^2 \gamma^2 - \kappa^2 \beta^4 - 2s\sigma_0 - 2\sigma_1 s \beta^2 \\ \Leftrightarrow s^2 + s(2\sigma_0 + 2\sigma_1 \beta^2) &+ \beta^2 \gamma^2 + \kappa^2 \beta^4 = 0 \end{aligned}$$

On trouve ainsi le discriminant de cette équation en s :

$$\Delta = (2\sigma_0 + 2\sigma_1 \beta^2)^2 - 4(\beta^2 \gamma^2 + \kappa^2 \beta^4)$$

En considérant $\sigma_0 \geq 0$ et $\sigma_1 \geq 0$ petits on peut donc conclure que $\Delta \leq 0$. On trouve deux solutions s_+ et s_- complexes :

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= \frac{-2\sigma_0 - 2\sigma_1 \beta^2 \pm \sqrt{\delta}}{2} \\ &= -\sigma_0 - \sigma_1 \beta^2 \pm \sqrt{(\sigma_0 + \sigma_1 \beta^2)^2 - (\beta^2 \gamma^2 + \kappa^2 \beta^4)} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\sigma(\beta) = -\sigma_0 - \sigma_1 \beta^2, \quad \omega(\beta) = \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 - (\sigma_0 + \sigma_1 \beta^2)^2}$$

On a alors l'équation du second degré suivante en β^2 (On note $\omega(\beta) = \omega$) :

$$\omega^2 = \gamma^2 \beta^2 + \kappa^2 \beta^4 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 \beta^4 - 2\sigma_0 \sigma_1 \beta^2 \Leftrightarrow 0 = (\kappa^2 - \sigma_1^2) \beta^4 + (\gamma^2 - 2\sigma_0 \sigma_1) \beta^2 - (\sigma_0^2 + \omega^2)$$

Avec :

$$\Delta = (\gamma^2 - 2\sigma_0 \sigma_1)^2 + 4(\kappa^2 - \sigma_1^2)(\sigma_0^2 + \omega^2)$$

Or on a supposé $\sigma_0 \geq 0$ et $\sigma_1 \geq 0$ petits, donc on peut approximer Δ par :

$$\Delta = \gamma^4 + 4\kappa^2 \omega^2$$

Ainsi, en prenant la solution positive :

$$\beta^2 = \frac{-\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2\omega^2}}{2\kappa^2} = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2\omega^2}}{2\kappa^2}$$

On a donc trouvé :

$$\begin{aligned}\sigma(\omega) &= -\sigma_0 - \sigma_1\beta^2 \\ &= -\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega), \quad \text{où } \omega(\beta) = \sqrt{\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - (\sigma_0 + \sigma_1\beta^2)^2}\end{aligned}$$

Vérifions maintenant les deux équations sur les valeurs σ_0 et σ_1 :

$$\begin{aligned}\frac{6 \ln(10)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} \right) &= \frac{6 \ln(10)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)T_{60}(\omega_2) - \xi(\omega_1)T_{60}(\omega_1)}{T_{60}(\omega_1)T_{60}(\omega_2)} \right) \\ &= \frac{6 \ln(10)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{6 \ln(10) \frac{\xi(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} - 6 \ln(10) \frac{\xi(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}}{(6 \ln(10))^2 \frac{1}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)}} \right) \\ &= \frac{(-\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega_1))(-\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega_2))}{\xi(\omega_2)\xi(\omega_1)} \frac{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2) - \sigma(\omega_2)\xi(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)} \\ &= \frac{\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2) - \sigma(\omega_2)\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \frac{(\sigma_0 + \sigma_1\xi(\omega_1))\sigma(\omega_2) - \xi(\omega_1)(\sigma_0 + \sigma_1\xi(\omega_2))}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \frac{\sigma_0(\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1))}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_0\end{aligned}$$

De manière analogue on a :

$$\begin{aligned}\frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right) &= \frac{1}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} (\sigma(\omega_2) - \sigma(\omega_1)) \\ &= \frac{-\sigma_0 - \sigma_1\xi(\omega_1) + \sigma_0 + \sigma_1\xi(\omega_2)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_1\end{aligned}$$

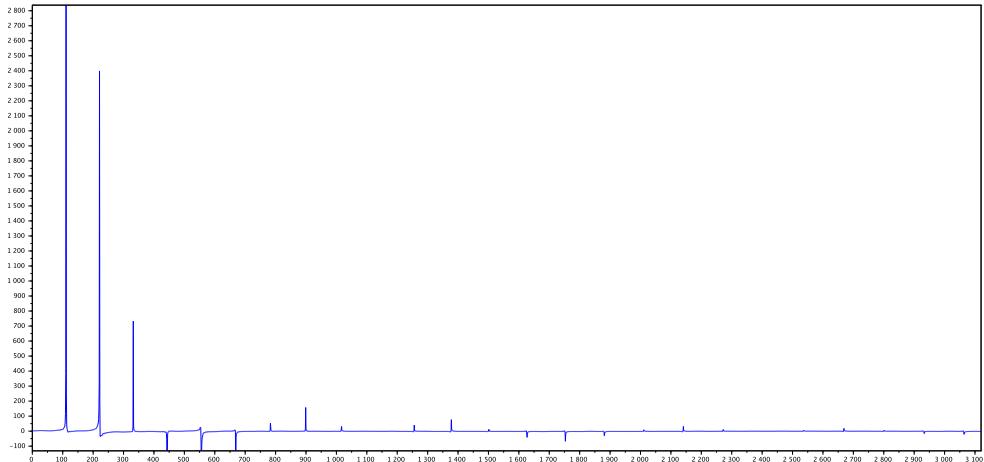
Question 6

Le programme scilab *guitare.sce* rendu permet de tracer les positions de la corde au cours du temps, ses oscillations aux positions des micros ainsi que le spectre de la transformée de Fourier. Pour afficher les positions de la corde au cours du temps il est nécessaire de décommenter les lignes 81 à 91. Seule 1 image sur 5 calculées est alors affichée, cela permettant une rapidité d'exécution accrue. Une animation gif des positions obtenues est fournie dans le fichier *q7_animation_guitare(corde_+_position).gif*

Le son modélisé est automatiquement joué à la fin de la simulation. Pour interpoler les po-

sitions de la corde au niveau des micros (ceux-ci ne se trouvant pas forcément sur un point de discrétisation) nous avons fait une moyenne sur le point précédent et le point suivant la position du micro.

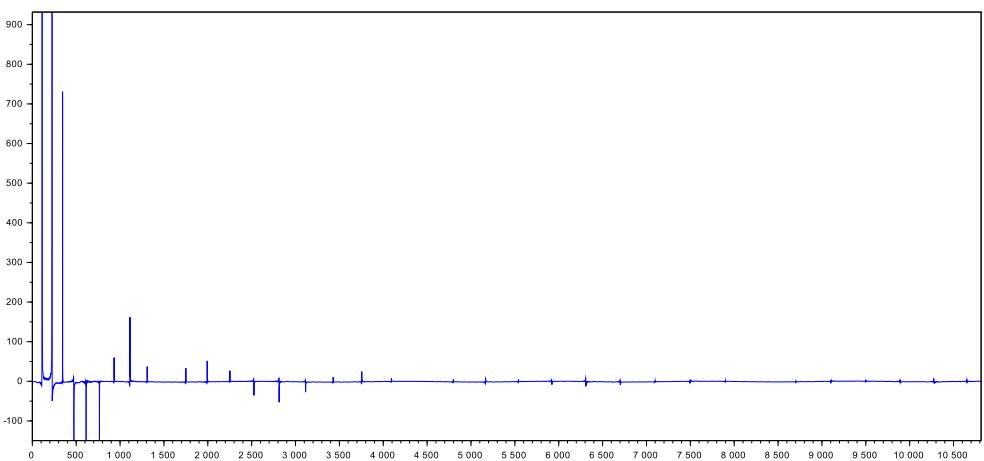
Question 7



D'après le spectre de la transformée de Fourier du signal, on observe bien une fréquence fondamentale de 110Hz.

En ce qui concerne la position du pincement, plus on pince la corde en son milieu, moins il y a d'harmoniques présentes (pour $x_0 = 0.5$ les premières harmoniques se trouvent vers 500Hz). Ainsi, le son possède moins de timbre et se rapproche du son d'une cloche.

Lorsque l'on augmente B, il y a une augmentation du nombre d'harmoniques. Ci-dessous, la transformée de Fourier du signal obtenue pour B=0.01 :



Le son possède également un timbre différent : ce dernier semble résonner. Cependant, pour

un B strictement supérieur à 0.01, notre modélisation ne produit plus aucun son. Enfin, une baisse de B ne semble pas avoir une incidence trop importante sur notre spectre ainsi que sur le son joué.

Question 8

Écrivons l'expression du laplacien en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

On a donc après changement de variables :

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a^2 \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{a^2 \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

or, on a :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}$$

On obtient donc en égalisant les deux expressions et en simplifiant par $\frac{T}{a^2}$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \text{ (equation 1)}$$

Pour les trois autres équations, il s'agit seulement d'une réécriture (changement de coordonnées) des équations cartésiennes en coordonnées polaires. On a ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta}, & \eta \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \tau > 0 \\ w(1, \theta, \tau) = 0 \\ w(\eta, \theta, 0) = w_0(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) \\ \frac{\partial w(\eta, \theta, 0)}{\partial \tau} = 0 \end{cases}$$

Question 9

Écrivons le développement de Taylor de w_{ij}^{n+1} et de w_{ij}^{n-1} à l'ordre 3 :

$$w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^n + d\tau \frac{\partial w_{ij}^n}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w_{ij}^n}{\partial^2 \tau} + \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w_{ij}^n}{\partial^3 \tau} + O(d\tau^4)$$

$$w_{ij}^{n-1} = w_{ij}^n - d\tau \frac{\partial w_{ij}^n}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w_{ij}^n}{\partial^2 \tau} + \frac{d\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 w_{ij}^n}{\partial^3 \tau} + O(d\tau^4)$$

En additionnant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{w_{ij}^{n-1} + w_{ij}^{n+1} - 2w_{ij}^n}{d\tau} = \frac{\partial^2 w_{ij}^n}{\partial^2 \tau} + O(d\tau^2)$$

On répète cette opération pour les dérivées secondes en η et θ . Pour la dérivée première en η , le processus est un peu différent. Soustrayons entre eux nos deux développements de Taylor :

$$\frac{w_{ij}^{n-1} - w_{ij}^{n+1}}{2d\eta} = \frac{\partial w_{ij}^n}{\partial \eta} + \frac{d\tau^2}{3} \frac{\partial^3 w_{ij}^n}{\partial^3 \eta} + O(d\eta^3)$$

En regroupant $\frac{d\tau^2}{3} \frac{\partial^3 w_{ij}^n}{\partial^3 \eta} + O(d\eta^3)$ dans un $O(d\eta^2)$, on obtient :

$$\frac{w_{ij}^{n-1} - w_{ij}^{n+1}}{2d\eta} = \frac{\partial w_{ij}^n}{\partial \eta} + O(d\eta^2)$$

Ainsi, en injectant ces expressions dans l'équation décrivant notre système et en négligeant les termes d'ordre deux, on obtient (on pose $\eta_i = id\eta$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{ij}^{n+1} - 2w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta_i^2} \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{d\theta^2} + \frac{1}{id\eta} \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2d\eta} \end{array} \right.$$

Question 10

Commençons par les conditions initiales. En reprenant les deux développement de Taylor de la question précédente, en $n = 0$, on obtient :

$$w_{ij}^1 = w_{ij}^0 + d\tau \frac{\partial w_{ij}^0}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w_{ij}^0}{\partial^2 \tau} + O(d\tau^3)$$

$$w_{ij}^{-1} = w_{ij}^0 - d\tau \frac{\partial w_{ij}^0}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 w_{ij}^0}{\partial^2 \tau} + O(d\tau^3)$$

cependant, la vitesse initiale étant nulle, les dérivées premières s'annulent. On a donc, en soustrayant les deux équations :

$$w_{ij}^1 - w_{ij}^{-1} = O(d\tau^3) \Leftrightarrow w_{ij}^1 \approx w_{ij}^{-1}$$

Enfin, on réutilise le fait que la vitesse initiale est nulle pour justifier que $w_{ij}^{-1} = w_{ij}^0$. Au final, on obtient :

$$w_{ij}^1 \approx w_{ij}^0$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [1; N_\theta], w_{N_n, \theta}^n = 0$$

En effet, la membrane est fixe à ses extrémités.

Question 11

Écrivons le schéma en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \rho \frac{w_{ij}^{n+1} - 2w_{ij}^n + w_{ij}^{n-1}}{dt^2} = T \left(\frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \right.$$

Sur le schéma on constate que $dx = dy = d\eta$. Ainsi, on a en se référant à ce dernier :

$$\left\{ \rho \frac{w_{11}^{n+1} - 2w_{11}^n + w_{11}^{n-1}}{d\tau^2} = T \left(\frac{w_{2,1}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,5}^n}{d\eta^2} + \frac{w_{2,3}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,7}^n}{d\eta^2} \right) \right.$$

De plus par rotation du repère cartésien de $\frac{\pi}{4}$ on ne change pas le pas de discréétisation. Ainsi, on a toujours $dx = dy = a^2 d\eta$ et $d\tau^2 = \frac{T}{\rho a^2} dt^2$. On obtient donc :

$$\left\{ \frac{w_{11}^{n+1} - 2w_{11}^n + w_{11}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{w_{2,2}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,6}^n}{d\eta^2} + \frac{w_{2,4}^n - 2w_{1,1}^n + w_{2,8}^n}{d\eta^2} \right.$$

En sommant les deux équations, on obtient :

$$2 \frac{w_{11}^{n+1} - 2w_{11}^n + w_{11}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{1}{d\eta^2} \sum_{j=1}^{N_\theta} (w_{2,j}^n - w_{1,1}^n)$$

Or, $N_\theta = 8 = 2 \times 4$. D'où :

$$\frac{w_{11}^{n+1} - 2w_{11}^n + w_{11}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{4}{N_\theta d\eta^2} \sum_{j=1}^{N_\theta} (w_{2,j}^n - w_{1,1}^n)$$

Ce raisonnement peut être généralisé pour des valeurs quelconques de N_θ . En effet Si on ajoute une rotation supplémentaire, on augmente N_θ de 4. On aura donc toujours $N_\theta = 4 \times (\text{nombre de rotations})$. Ainsi, on conservera les mêmes facteurs devant la somme.

Question 12

En injectant la forme exponentielle de $w_{pi,j}^n$ dans notre équation, on obtient après simplification des exponentielles complexes :

$$\frac{\cos(\alpha_3 d\tau) - 1}{d\tau^2} = \frac{\cos(\alpha_1 d\eta) - 1}{d\eta^2} + \frac{\cos(\alpha_2 d\theta) - 1}{d\theta^2 \eta^2} + 2I \frac{\cos(\alpha_1 d\eta) - 1}{\eta^2 d\eta}$$

Ainsi, le troisième terme du membre de droite étant complexe, il est nul (le terme de gauche

est un réel pur). De plus, on a $\sin(a)^2 = \frac{1-\cos(a)}{2}$ ainsi, on en déduit l'égalité suivante :

$$\frac{\sin(\alpha_3 d\tau)^2}{d\tau^2} = \frac{\sin(\alpha_1 d\eta)^2}{d\eta^2} + \frac{\sin(\alpha_2 d\theta)^2}{d\theta^2 \eta^2}$$

or :

$$\frac{\sin(\alpha_3 d\tau)^2}{d\tau^2} \leq \frac{1}{d\tau^2}$$

Donc :

$$\frac{\sin(\alpha_1 d\eta)^2}{d\eta^2} + \frac{\sin(\alpha_2 d\theta)^2}{d\theta^2 \eta^2} \leq \frac{1}{d\tau^2}$$

Cette inégalité est vraie pour tout α_1 et α_2 réel et donc en particulier pour α_1 et α_2 tels que : $\sin(\alpha_1 d\eta)^2 = 1$ et $\sin(\alpha_2 d\theta)^2 = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d\tau^2} &\geq \frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{d\theta^2 \eta^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{d\tau^2} &\geq \frac{d\theta^2 \eta^2 + d\eta^2}{\eta^2 d\eta^2 d\theta^2} \Leftrightarrow d\tau^2 \leq \frac{\eta^2 d\eta^2 d\theta^2}{d\theta^2 \eta^2 + d\eta^2} \Leftrightarrow d\tau \leq \frac{\eta d\eta d\theta}{\sqrt{d\theta^2 \eta^2 + d\eta^2}} \end{aligned}$$

Question 13

Lorsque nous avons effectué nos développements de Taylor pour approximer nos dérivées, nous avons obtenu des approximation en $O(d\eta^2)$, $O(d\theta^2)$, $O(d\tau^2)$. Notre schéma numérique est donc équivalent à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + O(d\tau^2) = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + O(d\eta^2) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + O(d\theta^2) \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} + O(d\eta^2)$$

Si on soustrait l'équation exacte et notre équation approché, on obtient une erreur de troncature en $O(d\eta^2 + d\theta^2 + d\tau^2)$. Ainsi, notre schéma est d'ordre 2 en temps et en espace.

Question 14

Écrivons $w(\eta, \theta, \tau)$ sous sa forme exponentielle : $w(\eta, \theta, \tau) = \operatorname{Re}(F(\eta, \theta)e^{iw\tau})$. En injectant cette dans l'équation différentielle et en simplifiant par $e^{iw\tau}$, On obtient :

$$-w^2 F(\eta, \theta) = \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 F(\eta, \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F(\eta, \theta)}{\partial \eta}$$

Comme $F(\eta, \theta)$ est de la forme :

$$F(\eta, \theta) = \sum_n F_n(\eta) \cos(n\theta)$$

Par principe de superposition, chaque F_n vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -w^2 F_n(\eta) e^{in\theta} &= \frac{d^2 F_n(\eta)}{d\eta^2} e^{in\theta} + \frac{-n^2}{\eta^2} F_n(\eta) e^{in\theta} + \frac{1}{\eta} \frac{dF_n(\eta)}{d\eta} e^{in\theta} \\ \Leftrightarrow (w^2 - \frac{n^2}{\eta^2}) F_n(\alpha) + w^2 \frac{d^2 F_n(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{w}{\eta} \frac{dF_n(\alpha)}{d\alpha} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \frac{n^2}{\alpha^2}) F_n(\alpha) + \frac{d^2 F_n(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dF_n(\alpha)}{d\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

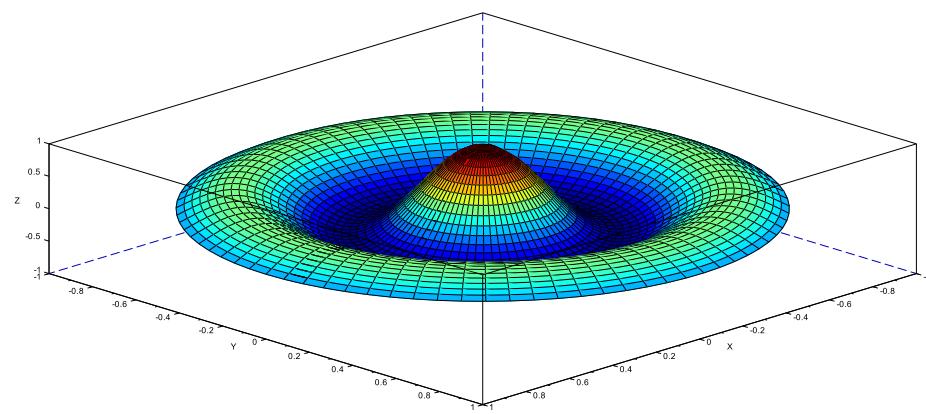
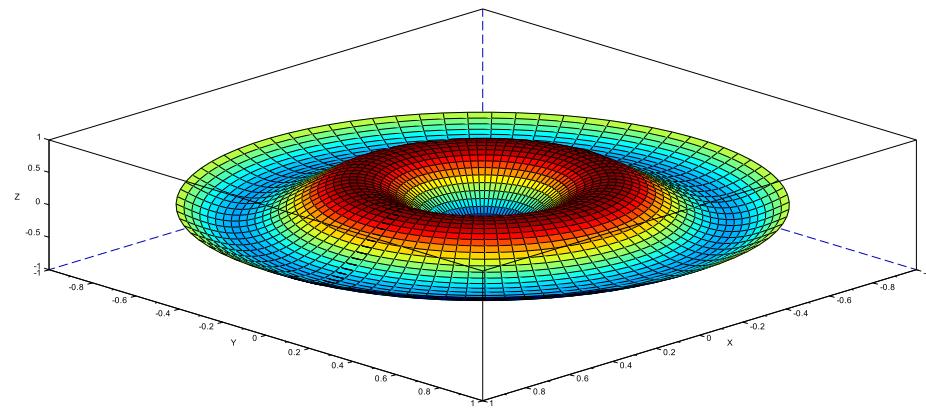
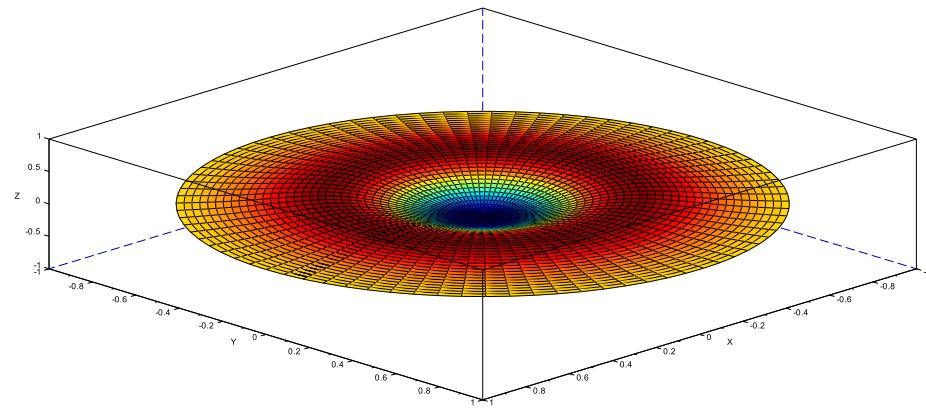
Question 15

Afin de programmer notre schéma, nous avons utilisé des matrices contenant les positions des points (représentation de la coordonnée θ suivant les colonnes et de la coordonnée η suivant les lignes). Ainsi, nous obtenons une relation de récurrence matricielle permettant de calculer w_{ij}^{n+1} . Cependant, les conditions aux limites de notre schéma nous ont imposé de particulariser le calcul de certaines lignes et colonnes de notre matrice :

- Nous mettons la dernière ligne de notre matrice à 0 (membrane fixée aux bords)
- La première et la dernière colonnes de notre matrice sont égales (condition de 2π -périodicité de w_{ij}^n)
- Les coefficients de notre première ligne valent tous w_{11}^n . En effet, cette ligne représente le centre de notre membrane.

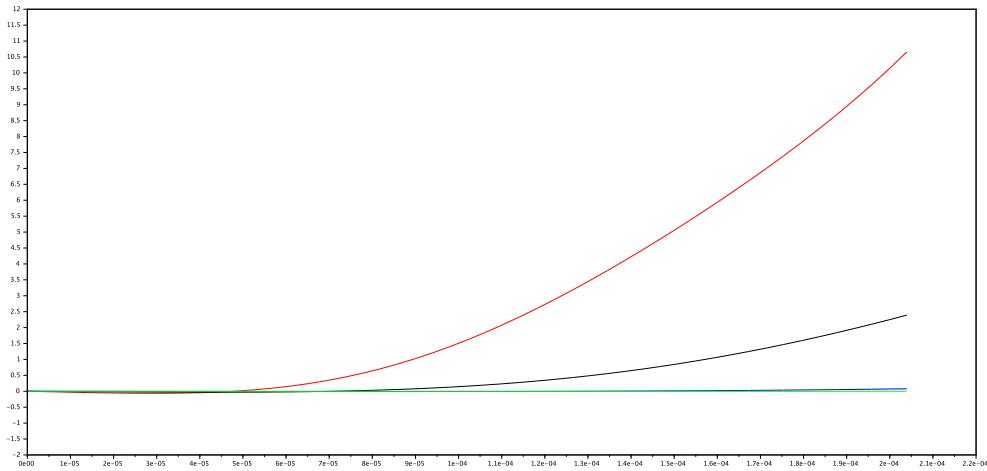
Enfin, notre calcul matriciel ne permet pas de calculer correctement la première et la dernière colonne de notre matrice. Effectivement, pour la dernière colonne (respectivement la première), les termes en $j + 1$ correspondent à la deuxième (respectivement l'avant-dernière) colonne de notre matrice (condition de 2π -périodicité de w_{ij}^n). Nous sommes donc obligé de corriger notre calcul après application de notre relation matricielle.

Ainsi, après simulation, on obtient une animation conforme à nos attentes :

FIGURE 1 – $\tau = 0$ FIGURE 2 – $\tau = 100$ FIGURE 3 – $\tau = 200$

Question 16

On obtient les courbes suivantes :



Tracé de l'erreur relative pour différentes valeurs de CFL en fonction du temps(rouge=0.9, noir=0.5, bleu=0.2, vert=0.1). On observe une erreur relative très importante dès un nombre faible itérations (les courbes ci-dessus ont été obtenues avec 50 itérations). En effet, la courbe discrétisée et la courbe réelle se désynchronisent lors de la simulation. Ainsi, lorsque les deux se trouvent en opposition de phase, l'erreur relatives est très grande. Cependant, les oscillations au cours du temps des deux membranes restent elles très similaires.

Question 17

En simulant notre membrane, on obtient un schéma numérique proche de la solution analytique. Cependant, le déphasage s'opère encore plus vite que pour notre membrane classique :

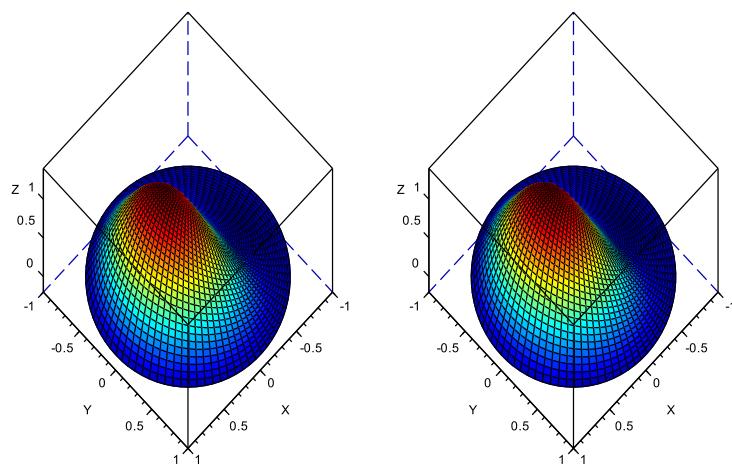
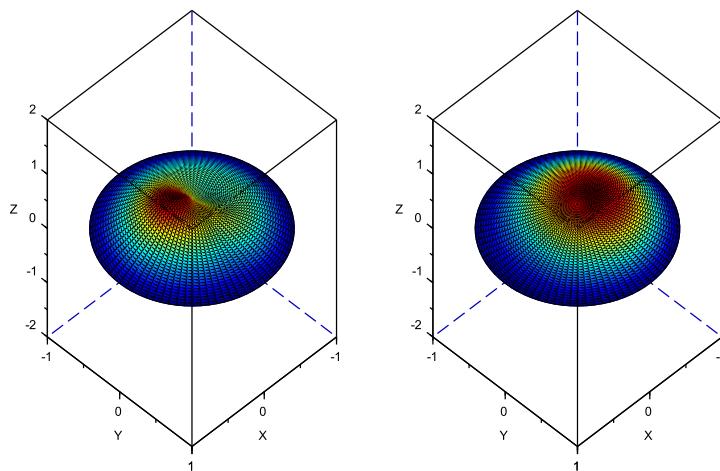
FIGURE 4 – $\tau = 0$ 

FIGURE 5 – fin de la première oscillation

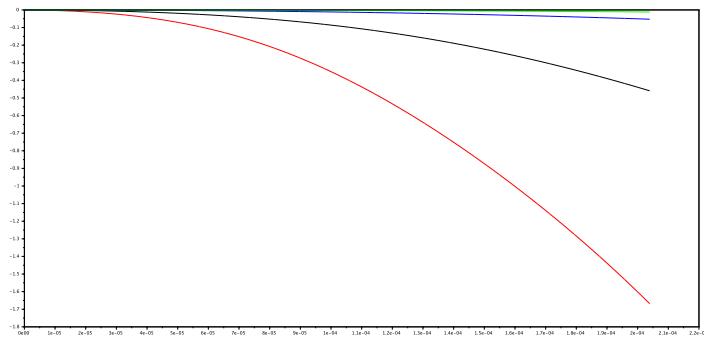


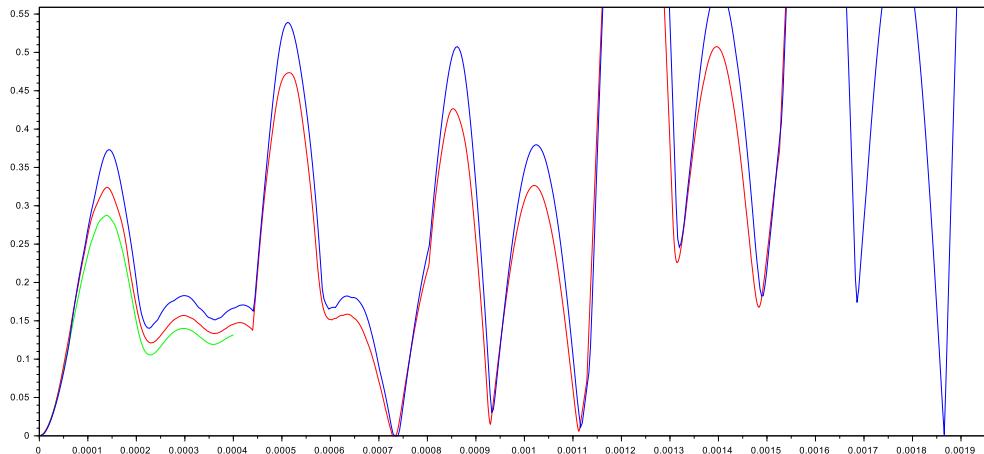
FIGURE 6 – Erreur relative sur 50 itérations

Question 18

Lors de nos deux simulations, la solution numérique et la solution analytique se décalent. Néanmoins, ce décalage est beaucoup plus rapide pour la simulation de question 17. Or, la grande différence entre ces deux schéma est la présence d'un $\cos(\theta)$ qui vient s'additionner dans la deuxième équation. Ainsi, on peut en déduire que c'est ce terme, et donc la discréétisation de θ qui influe sur la précision du schéma et donc sur le déphasage observé.

Expérimentalement cette hypothèse se vérifie. En effet si on augmente le pas de η pour diminuer celui de θ (et donc ne pas perdre en terme de rapidité d'exécution), les deux simulations deviennent beaucoup plus synchrones.

Question 19



Selon le graphe obtenu (vert= $(N_\theta = 80, N_\eta = 40)$, bleu= $(40,20)$ et rouge= $(160,80)$), on observe que plus le schéma spatial est précis (maillage plus fin), moins l'erreur est grande. Cependant, si le schéma était d'ordre deux en espace, pour un schéma deux fois plus précis (courbes rouge et verte par exemple), l'erreur devrait être divisée par 4. Sur notre graphique cela n'est pas le cas et est sûrement du au déphasage rapide des deux modélisations (exacte et numérique).

Question 20

En simulant le mode $(1,1)$ (nous avons modifié la condition initiale) et en le comparant avec les animations fournies, nous avons conclu que notre simulation était correcte. En effet, les formes des déformatiosn correspondent aux formes attendues pour un mode $(1,1)$.

