

Домашнее задание 2

Для всех итерационных методов использовались критерии малости невязки ($\frac{\|Ax^k - b\|}{\|b\|} \leq \epsilon$) и малости нормы разности двух последовательных приближений ($\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$), где $\epsilon = 0.000001$ и в качестве нормы используется 2-норма векторов.

Для всех методов максимальное количество итераций $maxIterations = 1,000,000$.

В методе Зайделя с релаксацией для всех матриц использовалось $\omega = 0.5$.

Для метода Якоби проверялось условие сходимости $\rho(D^{-1}R) < 1$, где ρ - спектральный радиус матрицы ($\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа), D - диагональная матрица, $R = A - D$. Это необходимо, так как на неподходящих под это условие матрицах невозможно было найти ответ в силу ограничений на операцию деления для типа float64 (после нескольких десятков итераций из-за деления на относительно маленькое число вектор x ровнялся $[\infty, \dots, \infty]$). Стоит отметить, что матрицы, которые не подходили под это условие, также не подходили под условие диагонального преобладания, которое является существенным (хоть и не необходимым) для сходимости метода Якоби.

$A_{symmetric}$ - матрица A и ее вектор b , домноженные слева на A^T .

$\mu(A)$ - число обусловленности.

Все результаты переведены из научной записи ($1e + 1$) в десятичную.

Диагональная матрица

Матрица хорошо обусловленная, т. к. $\det(A_{diag}) \approx 79,649,555,832,435,952,568,192$,

$\mu(A_{diag}) = \|A_{diag}\| * \|A_{diag}^{-1}\| = 13.329146508625698$

A												b
73	-8	-1	-2	2	-9	3	1	-10	-3	0	-10	-6
-9	89	-1	0	8	3	7	6	-10	7	-6	6	9
-2	0	79	7	-8	8	7	5	0	8	-4	8	6
-5	-5	-5	91	-8	-7	-3	8	-5	-10	7	7	4
8	-8	3	3	90	-8	-5	7	7	-1	-10	1	7
-3	-10	7	8	-7	98	-5	-5	7	-3	-10	-8	-3
4	-1	-9	-10	-2	-1	73	3	0	7	-7	2	-2
9	2	-4	-7	5	-10	-10	92	7	-9	-2	-3	-4
-1	-10	-1	-10	-10	-6	5	-4	87	-6	3	-2	4
-4	-6	-1	9	-6	-10	8	-3	-8	86	2	1	2
1	1	5	4	7	9	6	3	-1	0	68	9	9
0	5	4	5	-1	-4	-1	-1	2	-4	-1	56	9

$A_{\text{symmetric}}$												b
5702	-1333	-405	-446	806	-1059	515	808	-759	-350	-74	-592	-629
-1333	8382	106	-473	-95	-776	497	454	-1909	139	-126	702	832
-405	106	6640	227	-502	1347	-155	-201	-176	689	294	735	452
-446	-473	227	8765	-423	-28	-1157	144	-1143	145	760	856	344
806	-95	-502	-423	8535	-1179	-468	1322	-283	-642	-102	11	491
-1059	-776	1347	-28	-1179	10147	-576	-1436	106	-1168	83	-769	-451
515	497	-155	-1157	-468	-576	5643	-369	427	1096	-116	-70	-327
808	454	-201	144	1322	-1436	-369	8982	300	-1230	-46	-204	-406
-759	-1909	-176	-1143	-283	106	427	300	7997	-1061	-63	12	169
-350	139	689	145	-642	-1168	1096	-1230	-1061	7808	81	-254	151
-74	-126	294	760	-102	83	-116	-46	-63	81	4924	427	736
-592	702	735	856	11	-769	-70	-204	12	-254	427	3242	595

Результаты:

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
Количество итераций	-	11	7	25	12	-
Критерий окончания итераций	-	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	-
x_1	-0.04140748	-0.04140749	-0.04140746	-0.04140746	-0.04140747	-0.04140748
x_2	0.0951535	0.09515358	0.09515349	0.09515349	0.09515349	0.0951535
x_3	0.07045395	0.07045396	0.07045395	0.07045395	0.07045396	0.07045395
x_4	0.04999145	0.04999137	0.04999146	0.04999146	0.04999148	0.04999145
x_5	0.09185645	0.09185642	0.09185645	0.09185645	0.09185645	0.09185645
x_6	-0.00910101	-0.00910103	-0.00910101	-0.00910101	-0.00910098	-0.00910101
x_7	-0.00180436	-0.00180441	-0.00180437	-0.00180437	-0.00180429	-0.00180436
x_8	-0.03653304	-0.0365331	-0.03653304	-0.03653304	-0.03653296	-0.03653304
x_9	0.07336947	0.07336941	0.07336948	0.07336948	0.07336951	0.07336947
x_{10}	0.03064549	0.03064545	0.03064549	0.03064549	0.03064556	0.03064549
x_{11}	0.09893318	0.09893329	0.09893318	0.09893318	0.09893317	0.09893318
x_{12}	0.1443634	0.14436339	0.1443634	0.1443634	0.1443634	0.1443634

Зайдель с релаксацией

ω	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
Количество итераций	67	32	18	11	6	13	30	477	1246
Критерий окончания итераций	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость нормы приближений
x_1	-0.04140798	-0.04140763	-0.04140762	-0.04140755	-0.04140746	-0.04140753	-0.0414074	-0.04140755	4.82649867e+153
x_2	0.09515285	0.0951533	0.09515333	0.09515343	0.09515349	0.09515357	0.09515341	0.09515359	-6.24654080e+153
x_3	0.07045402	0.07045396	0.07045395	0.07045394	0.07045395	0.07045396	0.07045392	0.070454	-4.56076098e+153
x_4	0.04999094	0.0499913	0.04999133	0.0499914	0.04999146	0.04999139	0.04999153	0.04999137	5.42807994e+153
x_5	0.09185657	0.09185647	0.09185646	0.09185644	0.09185645	0.09185647	0.09185641	0.09185652	-6.18030114e+153
x_6	-0.00910089	-0.00910098	-0.00910099	-0.009101	-0.00910101	-0.00910099	-0.00910105	-0.00910096	-4.92477100e+153
x_7	-0.00180449	-0.00180441	-0.00180441	-0.00180439	-0.00180437	-0.00180433	-0.00180442	-0.00180428	-7.20828321e+153
x_8	-0.03653278	-0.03653296	-0.03653298	-0.03653302	-0.03653304	-0.03653304	-0.03653304	-0.03653301	-3.80561603e+153
x_9	0.07336907	0.07336937	0.0733694	0.07336945	0.07336948	0.07336947	0.07336949	0.07336948	-1.52883428e+153
x_{10}	0.0306454	0.03064547	0.03064548	0.03064549	0.03064549	0.03064551	0.03064544	0.03064556	-5.89437547e+153
x_{11}	0.09893303	0.09893313	0.09893314	0.09893317	0.09893318	0.09893317	0.09893322	0.0989331	8.52105145e+153
x_{12}	0.14436378	0.14436352	0.14436348	0.14436343	0.1443634	0.14436341	0.14436338	0.14436343	-2.13265646e+153

Полужирным выделен столбец с наиболее приближенным решением.

Вычисление метода сопряженных градиентов выполнялось на симметричной матрице, остальные методы были вычислены на изначальное

Случайная матрица с выборкой [0,1)

det(A_{random}) = -0.007392078169007411, \mu(A_{random}) = \|A_{random}\| * \|A_{random}^{-1}\| = 171.57062069397406

A										b
0.09310	0.46296	0.93137	0.30380	0.60630	0.90974	0.00426	0.19193	0.12714	0.98395	0.41040
0.24521	0.76891	0.47166	0.55561	0.76400	0.41916	0.42559	0.74468	0.95186	0.81468	0.93407
0.20463	0.51378	0.84973	0.84296	0.02374	0.44718	0.66388	0.61766	0.57209	0.25182	0.25237
0.88916	0.98856	0.61451	0.44720	0.89148	0.86907	0.50745	0.06848	0.86180	0.84522	0.49320
0.23916	0.23566	0.37235	0.87459	0.97991	0.58573	0.70257	0.17351	0.22382	0.82836	0.67732
0.17299	0.63587	0.46413	0.88649	0.38913	0.35721	0.93878	0.19617	0.65420	0.82861	0.62401
0.44414	0.05817	0.73251	0.30840	0.17337	0.26483	0.31740	0.64132	0.73144	0.53343	0.80028
0.43692	0.52223	0.08441	0.47346	0.94672	0.80371	0.70694	0.45602	0.69618	0.14082	0.10161
0.74979	0.91611	0.41144	0.98386	0.02433	0.70182	0.64097	0.78008	0.01748	0.49528	0.04442
0.75950	0.49040	0.62319	0.77167	0.47742	0.62423	0.76287	0.99692	0.64978	0.39911	0.30820
0.01054	0.00871	0.45547	0.58313	0.67816	0.75775	0.39740	0.58843	0.48111	0.13340	0.84128
0.16602	0.06466	0.78431	0.62658	0.43781	0.06728	0.47534	0.63883	0.59357	0.72091	0.19221

A_{symmetric}										b
4.32860	3.99913	2.72190	4.02301	3.14499	3.29613	2.77881	2.54551	3.25875	3.25499	
3.99913	5.79533	3.67262	5.06622	3.95397	4.61251	3.89278	3.73887	3.98181	4.67136	
2.72190	3.67262	3.48268	3.37672	2.65894	3.46967	2.79404	2.64362	3.62647	3.83958	
4.02301	5.06622	3.37672	5.96422	4.08711	4.37998	3.29952	4.01039	4.01840	4.54352	
3.14499	3.95397	2.65894	4.08711	4.05610	3.75951	2.54847	3.04612	2.99136	3.50605	
3.29613	4.61251	3.46967	4.37998	3.75951	4.50313	3.09145	3.17113	3.77247	4.02348	
2.77881	3.89278	2.79404	3.29952	2.54847	3.09145	3.25688	2.24767	2.72087	3.45720	
2.54551	3.73887	2.64362	4.01039	3.04612	3.17113	2.24767	3.64560	3.16916	3.73490	
3.25875	3.98181	3.62647	4.01840	2.99136	3.77247	2.72087	3.16916	5.07639	4.46737	
3.25499	4.67136	3.83958	4.54352	3.50605	4.02348	3.45720	3.73490	4.46737	4.98484	
2.42863	3.40900	2.42971	3.03193	2.97243	2.75708	2.48397	2.59751	2.22107	3.10237	
2.79500	3.66512	2.88644	3.11504	2.74696	3.21662	2.82167	2.35331	2.87909	3.44315	

Результаты

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
Количество итераций	-	∞	4817	84	14	-
Критерий окончания итераций	-	-	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость невязки	-
x ₁	1.24386958	∞	1.24348944	1.24389686	1.24386957	1.24386958
x ₂	-1.46857295	∞	-1.46910708	-1.46869427	-1.46857295	-1.46857295
x ₃	-0.29223781	∞	-0.29329896	-0.29237825	-0.29223781	-0.29223781
x ₄	1.10681103	∞	1.10722594	1.10701024	1.10681102	1.10681103
x ₅	0.58006511	∞	0.57901472	0.57997646	0.58006511	0.58006511
x ₆	-0.31909681	∞	-0.31792918	-0.31899153	-0.31909681	-0.31909681
x ₇	-0.76018098	∞	-0.76075622	-0.76036542	-0.76018099	-0.76018098
x ₈	-0.97736241	∞	-0.97693195	-0.97742324	-0.97736241	-0.97736241
x ₉	0.75454575	∞	0.75560964	0.75470961	0.75454575	0.75454575
x ₁₀	-0.62774438	∞	-0.62638351	-0.62767549	-0.62774438	-0.62774438
x ₁₁	-0.2649922	∞	-0.26561152	-0.26504602	-0.2649922	-0.2649922
x ₁₂	1.98558713	∞	1.98491365	1.98561424	1.98558712	1.98558713

Зайдель с релаксацией

ω	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
Количество итераций	2030	13139	8974	6513	4816	3521	2001	1280	2001
Критерий окончания итераций	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость невязки	Малость нормы приближений
x_1	1.23942956	1.24207652	1.242887	1.24326765	1.24348944	1.24363749	1.24374892	1.24389686	1.2440182
x_2	-1.47182301	-1.47045915	-1.46975194	-1.4693559	-1.46910708	-1.46893633	-1.46881034	-1.46869427	-1.46852545
x_3	-0.30052741	-0.29636285	-0.29469743	-0.2938292	-0.29329896	-0.29293871	-0.29267072	-0.29237825	-0.29204871
x_4	1.10702051	1.10785254	1.10761034	1.10738701	1.10722594	1.10711044	1.1070278	1.10701024	1.10687266
x_5	0.57088997	0.57578551	0.5775704	0.57847172	0.57901472	0.57938182	0.5796559	0.57997646	0.58030057
x_6	-0.30896799	-0.31434055	-0.31632013	-0.31732363	-0.31792918	-0.31833873	-0.31864402	-0.31899153	-0.31935781
x_7	-0.76228023	-0.76197548	-0.76139175	-0.7610095	-0.76075622	-0.76057922	-0.76045004	-0.76036542	-0.76018071
x_8	-0.9717595	-0.97522578	-0.97622027	-0.97667257	-0.9769319	-0.97710404	-0.97723431	-0.97742324	-0.97755583
x_9	0.76226108	0.75859112	0.75699284	0.75613757	0.75560964	0.75524958	0.75498248	0.75470961	0.75437337
x_{10}	-0.61498737	-0.62201495	-0.62445326	-0.62566158	-0.62638351	-0.62638351	-0.62723411	-0.62767549	-0.62809696
x_{11}	-0.27030566	-0.26752867	-0.26647655	-0.26593792	-0.26561152	-0.26561152	-0.26522591	-0.26504602	-0.26484666
x_{12}	1.9781789	1.98250394	1.98387518	1.98452949	1.98491365	1.98517081	1.98536403	1.98561424	1.98582526

Полужирным выделен столбец с наиболее приближенным решением.

Все методы кроме Гаусса вычислялись на симметричной матрице, метод Якоби не дал ответа, так как не выполнялись условия накладываемые на матрицу, которые описаны выше.

Гильбертова матрица

Результаты для Гильбертовой матрицы имеют большие ошибки, так как она плохо обусловлена и имеет относительно большую размерность.

[illegible]

$$\mu(A_{Hilbert}) = \|A_{Hilbert}\| * \|A_{Hilbert}^{-1}\| = 18,114,388,365,948,876$$

A												b
1.00000	0.50000	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.97844
0.50000	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.18721
0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.14532
0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.95626
0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.64579
0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.24603
0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.23098
0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.17866
0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.62681
0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.74929
0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.04545	0.37816
0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.04545	0.04348	0.02893

$A_{symmetric}$												b
1.56498	0.92308	0.67582	0.53944	0.45145	0.38940	0.34302	0.30690	0.27792	0.25409	0.23414	0.21716	1.76640
0.92308	0.57089	0.42857	0.34762	0.29425	0.25598	0.22701	0.20421	0.18575	0.17047	0.15759	0.14657	1.13524
0.67582	0.42857	0.32600	0.26667	0.22708	0.19845	0.17661	0.15934	0.14528	0.13360	0.12371	0.11524	0.87851
0.53944	0.34762	0.26667	0.21933	0.18750	0.16434	0.14660	0.13250	0.12100	0.11142	0.10329	0.09631	0.72909
0.45145	0.29425	0.22708	0.18750	0.16074	0.14118	0.12614	0.11417	0.10438	0.09620	0.08926	0.08328	0.62818
0.38940	0.25598	0.19845	0.16434	0.14118	0.12420	0.11111	0.10067	0.09211	0.08496	0.07887	0.07363	0.55423
0.34302	0.22701	0.17661	0.14660	0.12614	0.11111	0.09950	0.09023	0.08261	0.07624	0.07082	0.06614	0.49716
0.30690	0.20421	0.15934	0.13250	0.11417	0.10067	0.09023	0.08187	0.07500	0.06925	0.06435	0.06012	0.45150
0.27792	0.18575	0.14528	0.12100	0.10438	0.09211	0.08261	0.07500	0.06874	0.06349	0.05902	0.05516	0.41400
0.25409	0.17047	0.13360	0.11142	0.09620	0.08496	0.07624	0.06925	0.06349	0.05866	0.05455	0.05099	0.38255
0.23414	0.15759	0.12371	0.10329	0.08926	0.07887	0.07082	0.06435	0.05902	0.05455	0.05073	0.04743	0.35575
0.21716	0.14657	0.11524	0.09631	0.08328	0.07363	0.06614	0.06012	0.05516	0.05099	0.04743	0.04436	0.33260

Результаты

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
Количество итераций	-	∞	398,143	760,067	7	-
Критерий окончания итераций	-	-	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	-
x_1	46,781,720.8	∞	17.81627383	13.59259054	30.78958822	45,265,704.4
x_2	849,034,980	∞	-91.70662594	-50.1964698	-214.16477372	659,344,900
x_3	181,684,671,000	∞	57.41217542	-9.36478784	220.24024254	175,785,318,000
x_4	447,964,920,000	∞	45.41660631	25.1416908	160.16744491	368,364,680,000
x_5	17,765,826,500,000	∞	20.08695618	37.5052128	9.5460452	17,187,250,800,000
x_6	7,351,576,700,000	∞	2.7947155	33.97546353	-94.26656176	4,828,561,300,000
x_7	213,749,747,000,000	∞	-6.48350621	22.36168168	-132.4074806	206,767,041,000,000
x_8	84,020,107,000,000	∞	-10.46428639	8.05421755	-118.56941313	71,456,332,000,000
x_9	447,139,526,000,000	∞	-11.35370314	-5.92643626	-70.5986475	432,489,716,000,000
x_{10}	25,426,524,000,000	∞	-10.57752072	-18.17157193	-3.02426836	14,749,839,000,000
x_{11}	134,524,619,000,000	∞	-8.98870386	-28.21655783	73.89735875	130,105,349,000,000
x_{12}	4,109,452,800,000	∞	-7.07703951	-36.08952116	153.43207369	3,316,454,400,000

Все методы кроме Гаусса вычислялись на симметричной матрице, метод Якоби не дал ответа, так как не выполнялись условия накладываемые на матрицу, которые описаны выше.

Зайдель с релаксацией

ω	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
Количество итераций	185583	120961	319056	414714	398142	363660	325175	287488	284479
Критерий окончания итераций	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений
x_1	12.45735149	13.59259054	15.54226661	17.17102813	18.32733882	19.28733667	20.11665229	20.82124765	20.95783141
x_2	-42.16990369	-50.1964698	-67.01833735	-83.6407377	-96.88758447	-109.07498782	-120.64638756	-131.53443995	-137.43737209
x_3	-15.03626063	-9.36478784	10.10297418	37.22152853	65.93834905	98.75745282	136.01428033	177.39689121	215.82139365
x_4	15.68948962	25.1416908	42.83523425	52.89231299	47.94855696	27.18763017	-12.33209807	-73.76324533	-158.09591985
x_5	32.82293346	37.5052128	38.10781851	29.21042675	17.82324155	13.08942376	27.17120943	75.13329426	168.93399591
x_6	36.40362643	33.97546353	21.12497652	6.219322	-1.22110243	-3.845516	-12.17854094	-49.57096774	-151.81298181
x_7	30.08359599	22.36168168	4.88624721	-7.45543882	-10.24163292	-9.72592771	-4.79410375	23.98705356	129.5272028
x_8	17.53141079	8.05421755	-6.63175693	-13.2797707	-12.94586775	-11.45413122	-11.65292221	-29.1608636	-121.7423807
x_9	1.62508751	-5.92643626	-13.40884746	-14.17771238	-12.15842686	-10.39304299	-8.34356988	5.68911053	101.09153762
x_{10}	-15.58536192	-18.17157193	-16.60794121	-12.40065164	-9.64240105	-8.08854043	-7.52909133	-15.19504408	-88.80157926
x_{11}	-32.72714399	-28.21655783	-17.45091263	-9.36512388	-6.41796127	-5.28021713	-4.77879557	1.10966491	79.6237402
x_{12}	-48.93477415	-36.08952116	-16.88569228	-5.88748334	-3.04711138	-2.40556084	-2.63307817	-6.33197759	-60.4717764

Полужирным выделен столбец с наиболее приближенным решением.