

Домашнее задание 2

Диагональная матрица

| <i>A</i> | | | | | | | | | | | | <i>b</i> |
|----------|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----------|
| 73 | -8 | -1 | -2 | 2 | -9 | 3 | 1 | -10 | -3 | 0 | -10 | -6 |
| -9 | 89 | -1 | 0 | 8 | 3 | 7 | 6 | -10 | 7 | -6 | 6 | 9 |
| -2 | 0 | 79 | 7 | -8 | 8 | 7 | 5 | 0 | 8 | -4 | 8 | 6 |
| -5 | -5 | -5 | 91 | -8 | -7 | -3 | 8 | -5 | -10 | 7 | 7 | 4 |
| 8 | -8 | 3 | 3 | 90 | -8 | -5 | 7 | 7 | -1 | -10 | 1 | 7 |
| -3 | -10 | 7 | 8 | -7 | 98 | -5 | -5 | 7 | -3 | -10 | -8 | -3 |
| 4 | -1 | -9 | -10 | -2 | -1 | 73 | 3 | 0 | 7 | -7 | 2 | -2 |
| 9 | 2 | -4 | -7 | 5 | -10 | -10 | 92 | 7 | -9 | -2 | -3 | -4 |
| -1 | -10 | -1 | -10 | -10 | -6 | 5 | -4 | 87 | -6 | 3 | -2 | 4 |
| -4 | -6 | -1 | 9 | -6 | -10 | 8 | -3 | -8 | 86 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 5 | 4 | 7 | 9 | 6 | 3 | -1 | 0 | 68 | 9 | 9 |
| 0 | 5 | 4 | 5 | -1 | -4 | -1 | -1 | 2 | -4 | -1 | 56 | 9 |

| <i>A symmetric</i> | | | | | | | | | | | | <i>b</i> |
|--------------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|----------|
| 5702 | -1333 | -405 | -446 | 806 | -1059 | 515 | 808 | -759 | -350 | -74 | -592 | -629 |
| -1333 | 8382 | 106 | -473 | -95 | -776 | 497 | 454 | -1909 | 139 | -126 | 702 | 832 |
| -405 | 106 | 6640 | 227 | -502 | 1347 | -155 | -201 | -176 | 689 | 294 | 735 | 452 |
| -446 | -473 | 227 | 8765 | -423 | -28 | -1157 | 144 | -1143 | 145 | 760 | 856 | 344 |
| 806 | -95 | -502 | -423 | 8535 | -1179 | -468 | 1322 | -283 | -642 | -102 | 11 | 491 |
| -1059 | -776 | 1347 | -28 | -1179 | 10147 | -576 | -1436 | 106 | -1168 | 83 | -769 | -451 |
| 515 | 497 | -155 | -1157 | -468 | -576 | 5643 | -369 | 427 | 1096 | -116 | -70 | -327 |
| 808 | 454 | -201 | 144 | 1322 | -1436 | -369 | 8982 | 300 | -1230 | -46 | -204 | -406 |
| -759 | -1909 | -176 | -1143 | -283 | 106 | 427 | 300 | 7997 | -1061 | -63 | 12 | 169 |
| -350 | 139 | 689 | 145 | -642 | -1168 | 1096 | -1230 | -1061 | 7808 | 81 | -254 | 151 |
| -74 | -126 | 294 | 760 | -102 | 83 | -116 | -46 | -63 | 81 | 4924 | 427 | 736 |
| -592 | 702 | 735 | 856 | 11 | -769 | -70 | -204 | 12 | -254 | 427 | 3242 | 595 |

Результаты:














| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------------|-------------|
| Количество итераций | 1 | 11 | 7 | 25 | 12 | 1 |
| Критерий окончания итераций | - | Малость невязки | Малость невязки | Малость невязки | Малость невязки | - |
| x_1 | -0.04140748 | -0.08219178 | -0.08219178 | -0.04109589 | -0.04140747 | -0.04140748 |
| x_2 | 0.0951535 | 0.1011236 | 0.09281207 | 0.04848392 | 0.09515349 | 0.0951535 |
| x_3 | 0.07045395 | 0.07594937 | 0.07386856 | 0.03745448 | 0.07045396 | 0.07045395 |
| x_4 | 0.04999145 | 0.04395604 | 0.04859829 | 0.02320996 | 0.04999148 | 0.04999145 |
| x_5 | 0.09185645 | 0.07777778 | 0.08925145 | 0.04185914 | 0.09185645 | 0.09185645 |
| x_6 | -0.00910101 | -0.03061224 | -0.02652613 | -0.01425151 | -0.00910098 | -0.00910101 |
| x_7 | -0.00180436 | -0.02739726 | -0.00377595 | -0.00786627 | -0.00180429 | -0.00180436 |
| x_8 | -0.03653304 | -0.04347826 | -0.03869037 | -0.02089832 | -0.03653296 | -0.03653304 |
| x_9 | 0.07336947 | 0.04597701 | 0.06900295 | 0.0287478 | 0.07336951 | 0.07336947 |
| x_{10} | 0.03064549 | 0.02325581 | 0.03024415 | 0.01333687 | 0.03064556 | 0.03064549 |
| x_{11} | 0.09893318 | 0.13235294 | 0.12128454 | 0.06387051 | 0.09893317 | 0.09893318 |
| x_{12} | 0.1443634 | 0.16071429 | 0.14361446 | 0.07596003 | 0.1443634 | 0.1443634 |

Случайная матрица

| A | | | | | | | | | | b |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.09310 | 0.46296 | 0.93137 | 0.30380 | 0.60630 | 0.90974 | 0.00426 | 0.19193 | 0.12714 | 0.98395 | 0.41040 |
| 0.24521 | 0.76891 | 0.47166 | 0.55561 | 0.76400 | 0.41916 | 0.42559 | 0.74468 | 0.95186 | 0.81468 | 0.93407 |
| 0.20463 | 0.51378 | 0.84973 | 0.84296 | 0.02374 | 0.44718 | 0.66388 | 0.61766 | 0.57209 | 0.25182 | 0.25237 |
| 0.88916 | 0.98856 | 0.61451 | 0.44720 | 0.89148 | 0.86907 | 0.50745 | 0.06848 | 0.86180 | 0.84522 | 0.49320 |
| 0.23916 | 0.23566 | 0.37235 | 0.87459 | 0.97991 | 0.58573 | 0.70257 | 0.17351 | 0.22382 | 0.82836 | 0.67732 |
| 0.17299 | 0.63587 | 0.46413 | 0.88649 | 0.38913 | 0.35721 | 0.93878 | 0.19617 | 0.65420 | 0.82861 | 0.62401 |
| 0.44414 | 0.05817 | 0.73251 | 0.30840 | 0.17337 | 0.26483 | 0.31740 | 0.64132 | 0.73144 | 0.53343 | 0.80028 |
| 0.43692 | 0.52223 | 0.08441 | 0.47346 | 0.94672 | 0.80371 | 0.70694 | 0.45602 | 0.69618 | 0.14082 | 0.10161 |
| 0.74979 | 0.91611 | 0.41144 | 0.98386 | 0.02433 | 0.70182 | 0.64097 | 0.78008 | 0.01748 | 0.49528 | 0.04442 |
| 0.75950 | 0.49040 | 0.62319 | 0.77167 | 0.47742 | 0.62423 | 0.76287 | 0.99692 | 0.64978 | 0.39911 | 0.30820 |
| 0.01054 | 0.00871 | 0.45547 | 0.58313 | 0.67816 | 0.75775 | 0.39740 | 0.58843 | 0.48111 | 0.13340 | 0.84128 |
| 0.16602 | 0.06466 | 0.78431 | 0.62658 | 0.43781 | 0.06728 | 0.47534 | 0.63883 | 0.59357 | 0.72091 | 0.19221 |

| | | | | | | | | | |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| <i>A symmetric</i> | | | | | | | | | <i>b</i> |
| 4.32860 | 3.99913 | 2.72190 | 4.02301 | 3.14499 | 3.29613 | 2.77881 | 2.54551 | 3.25875 | 3.25499 |
| 3.99913 | 5.79533 | 3.67262 | 5.06622 | 3.95397 | 4.61251 | 3.89278 | 3.73887 | 3.98181 | 4.67136 |
| 2.72190 | 3.67262 | 3.48268 | 3.37672 | 2.65894 | 3.46967 | 2.79404 | 2.64362 | 3.62647 | 3.83958 |
| 4.02301 | 5.06622 | 3.37672 | 5.96422 | 4.08711 | 4.37998 | 3.29952 | 4.01039 | 4.01840 | 4.54352 |
| 3.14499 | 3.95397 | 2.65894 | 4.08711 | 4.05610 | 3.75951 | 2.54847 | 3.04612 | 2.99136 | 3.50605 |
| 3.29613 | 4.61251 | 3.46967 | 4.37998 | 3.75951 | 4.50313 | 3.09145 | 3.17113 | 3.77247 | 4.02348 |
| 2.77881 | 3.89278 | 2.79404 | 3.29952 | 2.54847 | 3.09145 | 3.25688 | 2.24767 | 2.72087 | 3.45720 |
| 2.54551 | 3.73887 | 2.64362 | 4.01039 | 3.04612 | 3.17113 | 2.24767 | 3.64560 | 3.16916 | 3.73490 |
| 3.25875 | 3.98181 | 3.62647 | 4.01840 | 2.99136 | 3.77247 | 2.72087 | 3.16916 | 5.07639 | 4.46737 |
| 3.25499 | 4.67136 | 3.83958 | 4.54352 | 3.50605 | 4.02348 | 3.45720 | 3.73490 | 4.46737 | 4.98484 |
| 2.42863 | 3.40900 | 2.42971 | 3.03193 | 2.97243 | 2.75708 | 2.48397 | 2.59751 | 2.22107 | 3.10237 |
| 2.79500 | 3.66512 | 2.88644 | 3.11504 | 2.74696 | 3.21662 | 2.82167 | 2.35331 | 2.87909 | 3.44315 |

Результаты














| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|----------------|--|---|---|------------------------|-------------|
| Количество итераций | 1 |  | 56 | 84 | 14 | 1 |
| Критерий окончания итераций | - | Spectral radius of matrix is less than 1, aborting calculation (см. комментарии) (TBD) | Малость нормы разницы двух последовательных приближений | Малость нормы разницы двух последовательных приближений | Малость невязки | - |
| x_1 | 1.24386958 |  | 5.07222390 | 2.53611195 | 1.24386957 | 1.24386958 |
| x_2 | -1.46857295 |  | 0.064430212 | -0.07782169 | -1.46857295 | -1.46857295 |
| x_3 | -0.29223781 |  | 0.026281931 | -0.17580902 | -0.29223781 | -0.29223781 |
| x_4 | 1.10681103 |  | -6.48895878 | -1.87528237 | 1.10681102 | 1.10681103 |
| x_5 | 0.58006511 |  | 5.17476138 | 0.68376892 | 0.58006511 | 0.58006511 |
| x_6 | -0.31909681 |  | 11.2342668 | 2.00074065 | -0.31909681 | -0.31909681 |
| x_7 | -0.76018098 |  | -8.91521041 | -0.21629973 | -0.76018099 | -0.76018098 |
| x_8 | -0.97736241 |  | 1.7939253 | -1.552086 | -0.97736241 | -0.97736241 |
| x_9 | 0.75454575 |  | 633.812509 | 15.83035935 | 0.75454575 | 0.75454575 |
| x_{10} | -0.62774438 |  | 2.68475 | -12.26533549 | -0.62774438 | -0.62774438 |
| x_{11} | -0.2649922 |  | 0.632206 | -3.45405884 | -0.2649922 | -0.2649922 |
| x_{12} | 1.98558713 |  | 676.603626 | 2.21005337 | 1.98558712 | 1.98558713 |

Гильбертова матрица

| <i>A</i> | | | | | | | | | | | | <i>b</i> |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 1.00000 | 0.50000 | 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.97844 |
| 0.50000 | 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.18721 |
| 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.14532 |
| 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.95626 |
| 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.64579 |
| 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.24603 |
| 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.23098 |
| 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.17866 |
| 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.62681 |
| 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.74929 |
| 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.04545 | 0.37816 |
| 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.04545 | 0.04348 | 0.02893 |

| <i>A symmetric</i> | | | | | | | | | | | | <i>b</i> |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 1.56498 | 0.92308 | 0.67582 | 0.53944 | 0.45145 | 0.38940 | 0.34302 | 0.30690 | 0.27792 | 0.25409 | 0.23414 | 0.21716 | 1.76640 |
| 0.92308 | 0.57089 | 0.42857 | 0.34762 | 0.29425 | 0.25598 | 0.22701 | 0.20421 | 0.18575 | 0.17047 | 0.15759 | 0.14657 | 1.13524 |
| 0.67582 | 0.42857 | 0.32600 | 0.26667 | 0.22708 | 0.19845 | 0.17661 | 0.15934 | 0.14528 | 0.13360 | 0.12371 | 0.11524 | 0.87851 |
| 0.53944 | 0.34762 | 0.26667 | 0.21933 | 0.18750 | 0.16434 | 0.14660 | 0.13250 | 0.12100 | 0.11142 | 0.10329 | 0.09631 | 0.72909 |
| 0.45145 | 0.29425 | 0.22708 | 0.18750 | 0.16074 | 0.14118 | 0.12614 | 0.11417 | 0.10438 | 0.09620 | 0.08926 | 0.08328 | 0.62818 |
| 0.38940 | 0.25598 | 0.19845 | 0.16434 | 0.14118 | 0.12420 | 0.11111 | 0.10067 | 0.09211 | 0.08496 | 0.07887 | 0.07363 | 0.55423 |
| 0.34302 | 0.22701 | 0.17661 | 0.14660 | 0.12614 | 0.11111 | 0.09950 | 0.09023 | 0.08261 | 0.07624 | 0.07082 | 0.06614 | 0.49716 |
| 0.30690 | 0.20421 | 0.15934 | 0.13250 | 0.11417 | 0.10067 | 0.09023 | 0.08187 | 0.07500 | 0.06925 | 0.06435 | 0.06012 | 0.45150 |
| 0.27792 | 0.18575 | 0.14528 | 0.12100 | 0.10438 | 0.09211 | 0.08261 | 0.07500 | 0.06874 | 0.06349 | 0.05902 | 0.05516 | 0.41400 |
| 0.25409 | 0.17047 | 0.13360 | 0.11142 | 0.09620 | 0.08496 | 0.07624 | 0.06925 | 0.06349 | 0.05866 | 0.05455 | 0.05099 | 0.38255 |
| 0.23414 | 0.15759 | 0.12371 | 0.10329 | 0.08926 | 0.07887 | 0.07082 | 0.06435 | 0.05902 | 0.05455 | 0.05073 | 0.04743 | 0.35575 |
| 0.21716 | 0.14657 | 0.11524 | 0.09631 | 0.08328 | 0.07363 | 0.06614 | 0.06012 | 0.05516 | 0.05099 | 0.04743 | 0.04436 | 0.33260 |

Результаты

| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|-----------------|--|---|---|---|------------|
| Количество итераций | 1 |  | 398'143 | 760'067 | 7 | 1 |
| Критерий окончания итераций | - | Spectral radius of matrix is less than 1, aborting calculation (см. комментарии) (TBD) | Малость нормы разницы двух последовательных приближений | Малость нормы разницы двух последовательных приближений | Малость нормы разницы двух последовательных приближений | - |
| x_1 | 46781720.8 |  | 17.81627383 | -3583.32097743 | 30.78958822 | 863.078119 |
| x_2 | 849034980 |  | -91.70662594 | 91128.5186219 | -214.16477372 | 191.0547 |
| x_3 | 181684671000 |  | 57.41217542 | -481556.34841693 | 220.24024254 | 980106.815 |
| x_4 | 447964920000 |  | 45.41660631 | 634810.5275951 | 160.16744491 | 518299.37 |
| x_5 | 17765826500000 |  | 20.08695618 | 390529.52021387 | 9.5460452 | 3125122.47 |
| x_6 | 7351576700000 |  | 2.7947155 | -474326.46996043 | -94.26656176 | 2369739.56 |
| x_7 | 213749747000000 |  | -6.48350621 | -470036.33912928 | -132.4074806 | 2395753.35 |
| x_8 | 84020107000000 |  | -10.46428639 | -1280820.31120389 | -118.56941313 | 478289.70 |
| x_9 | 447139526000000 |  | -11.35370314 | 1242462.62332825 | -70.5986475 | 34288.02 |
| x_{10} | 25426524000000 |  | -10.57752072 | 1554802.01113041 | -3.02426836 | 16908362.2 |
| x_{11} | 134524619000000 |  | -8.98870386 | -639258.44737977 | 73.89735875 | 851236572 |
| x_{12} | 4109452800000 |  | -7.07703951 | -568582.92197412 | 153.43207369 | 530440.05 |

Комментарии (TBD)

[Метод Гаусса для плохо обусловленных матриц коэффициентов является вычислительно неустойчивым. Например, для матриц Гильберта метод приводит к очень большим ошибкам даже при небольшой размерности этих матриц. Уменьшить вычислительную ошибку можно с помощью метода Гаусса с выделением главного элемента, который является условно устойчивым. Широкое применение метода Гаусса связано с тем, что плохо обусловленные матрицы встречаются на практике относительно редко.]?

<Про обусловленность... Также поч там не робит метод Якоби...>