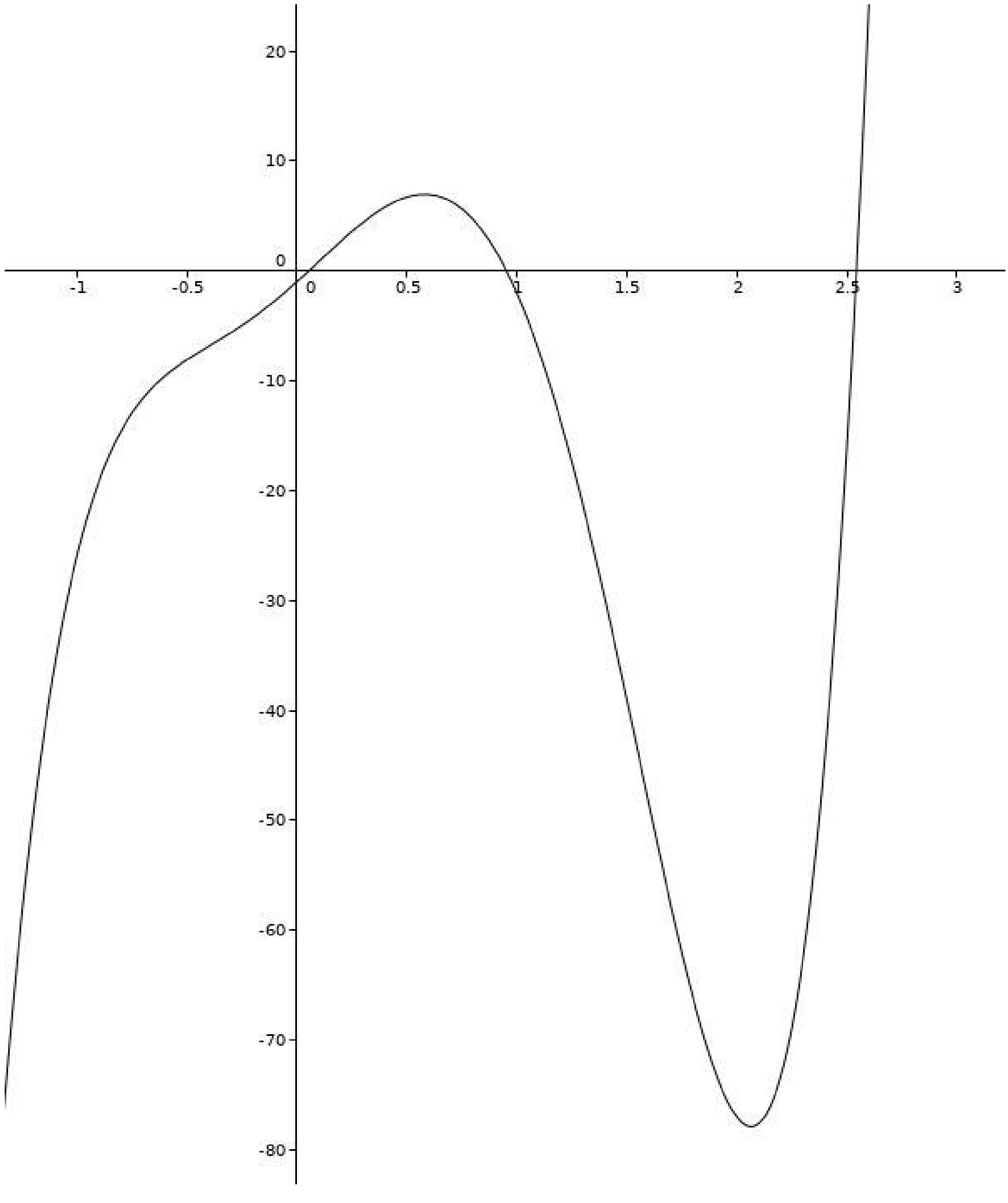
Домашнее задание 1

Задание 1

Многочлен $P_n(x) = 9x^5 - 19x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 18x - 1$ (коэффициенты подобраны случайно)

Локализация

Для локализации рассмотрим график $y(x) = 9x^5 - 19x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 18x - 1$



Исходя из графика, выберем следующие отрезки : $[0; 0.5],\ [0.5; 1],\ [2.5; 3]$

Нахождение корней методом Ньютона

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P_n'(x_n)},\ \epsilon = 10^{-6}$

итерации	$[0; 0.5]$	$[0.5; 1]$	$[2.5; 3]$
1	0.0555555556	0.9565217391	2.7181964573
2	0.0547038071	0.9535880624	2.5805022265
3	0.0547036825	0.9535746571	2.5463736795
4	-	0.9535746568	2.5444097003
5	-	-	2.5444034177
6	-	-	2.5444034176
корень	0.0547036825	0.9535746568	2.5444034176

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$
Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$

Задание 2

Будем везде брать $x_0 = 0.5$

1. $0 < r < 1$
    - Возьмём $r = 0.5$

      $\phi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

      $\phi'(x) = \frac{1}{2} - x$

      По теореме о сходимости метода простых итераций итерационная последовательность сходится к корню $x = 0$, так как на отрезке $x \in [0-\delta, 0+\delta]$ проихводная $\phi'(x)$ непрерывна и $|\phi'(x)| < 1$

      Путь итерационной последовательности:

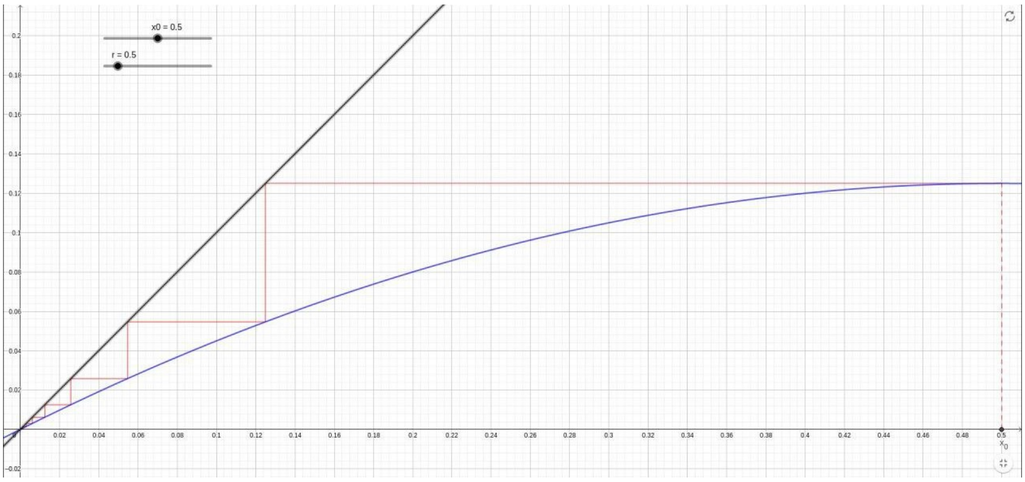
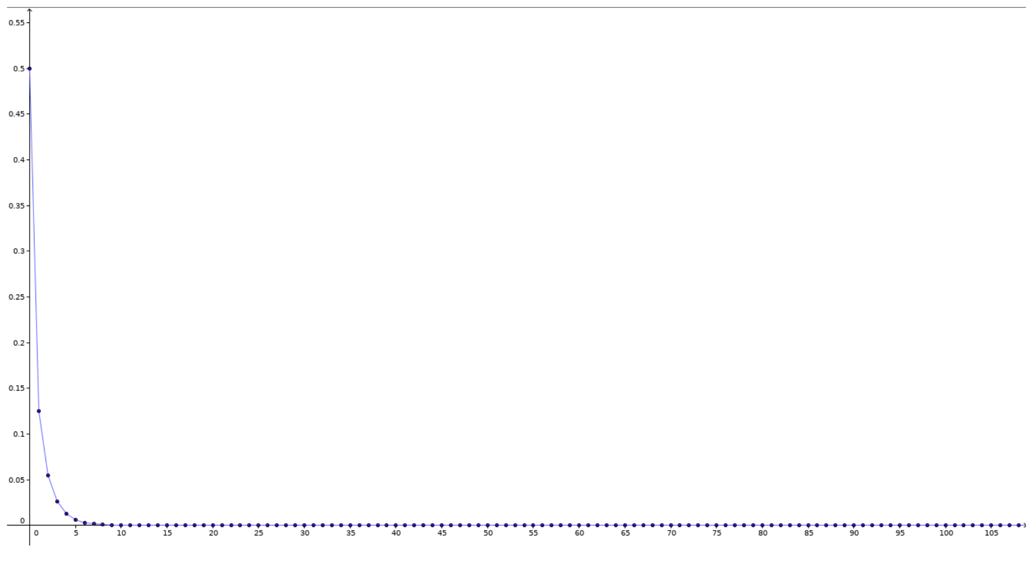
      

      График: i -> x_i

2. $1 < r < 3$
    - $1 < r < 2$

      Пусть $r = 1.5$

      $\phi(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$

      $\phi'(x) = \frac{3}{2} - 3x$

При $x \in [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta]$ производная непрерывна и $|\phi'(x)| < 1 \implies$ по теореме о сходимости метода простых итераций последовательность сходится к корню $x = \frac{1}{3}$

Путь итерационной последовательности:

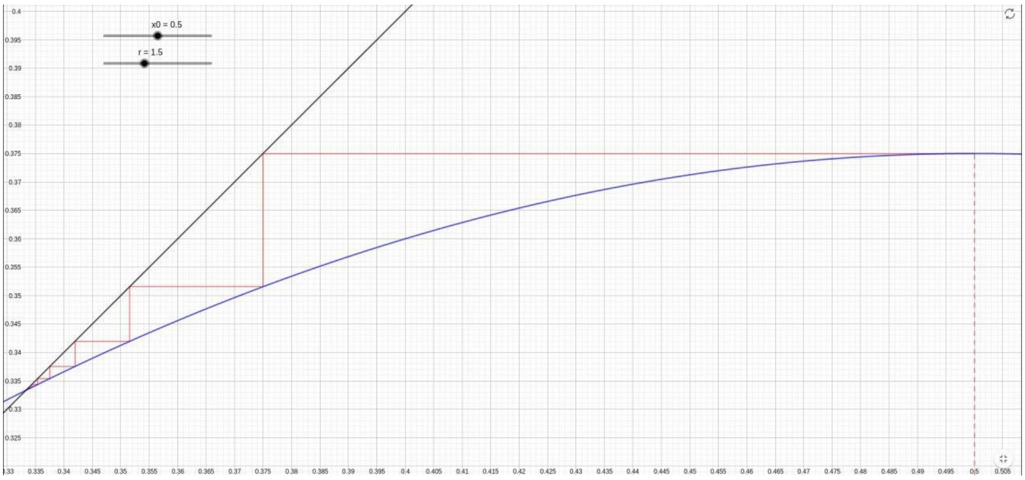


График: i -> x_i

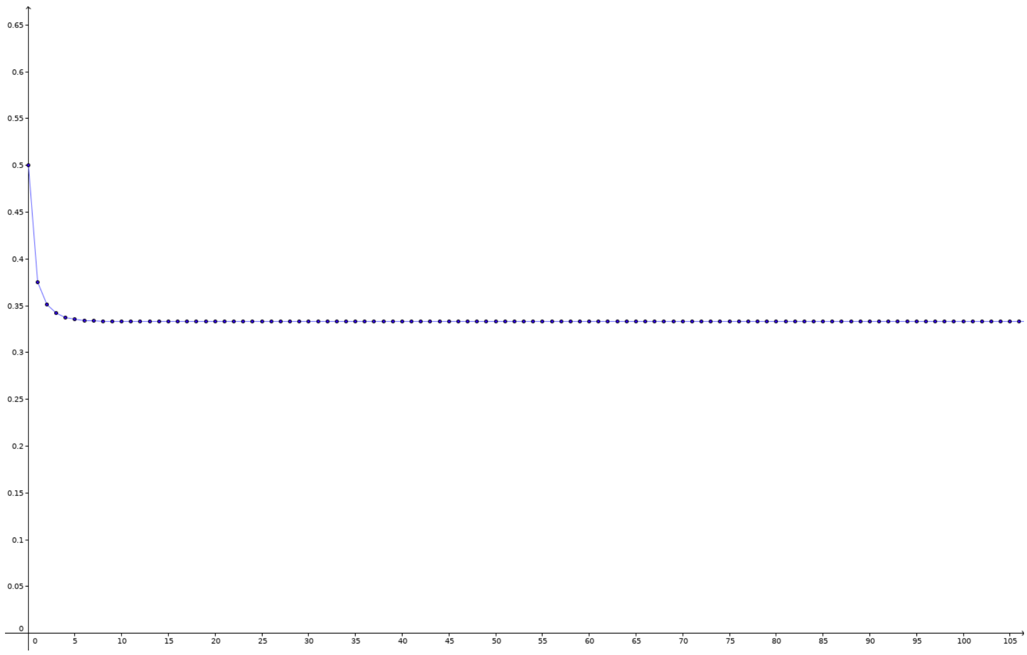


График иллюстрирует монотонную сходимость.

- $2 < r < 3$

  пусть $r = 2.5$

  $\phi(x) = \frac{5}{2}x(1 - x)$

  $\phi'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{x}$

  Аналогично итерационная последовательность сходится к корню $x = \frac{3}{5}$, т. к. при $x \in [\frac{3}{5} - \delta, \frac{3}{5} + \delta]$ производная непрерывна и ее модуль $|\phi'(x)| < 1$ меньше единицы (т.е. выполняется условие Липшица).

  Путь итерационной последовательности:

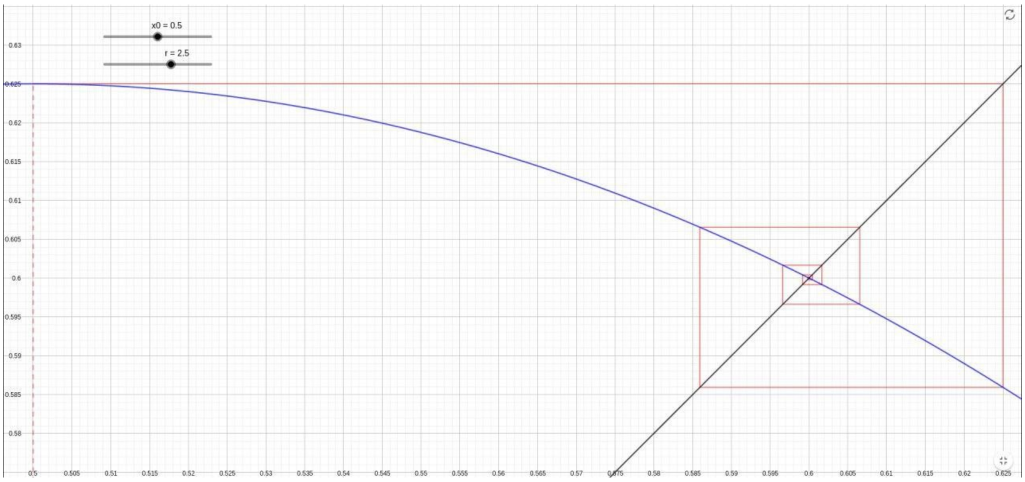
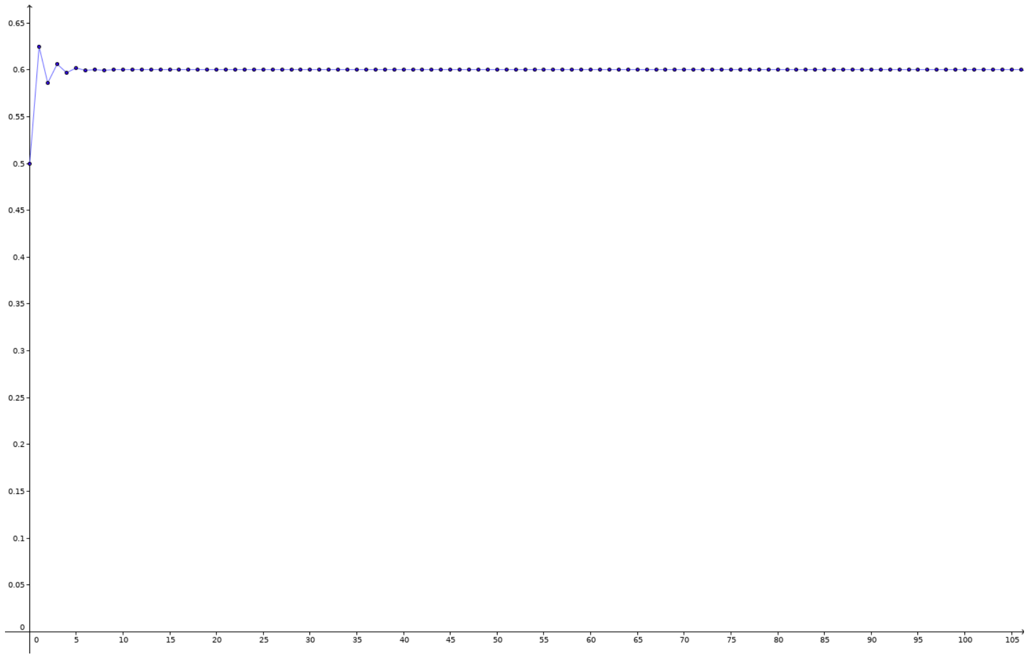
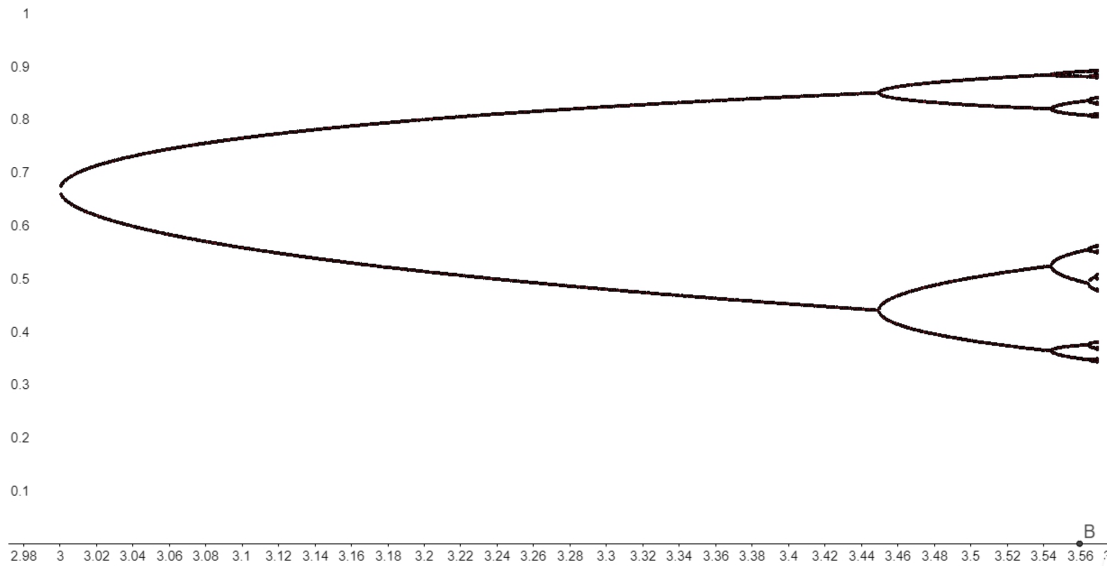


График: i -> x_i



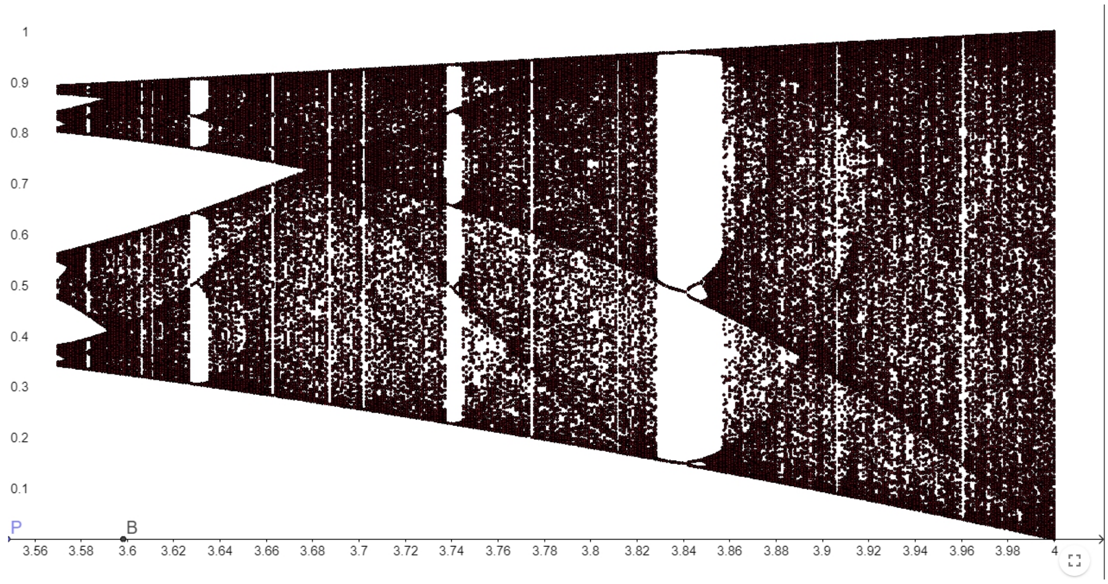
В данном случае мы уже имеем колебательную сходимость.

3. При r $\in (3; r_{\infty})$ мы уже не можем применить теорему о сходимости, т.к. не выполняется условие Липшица $\implies$ итерационная последовательность не сходится к одному корню. Она распадается на 2, 4, 8... подпоследовательностей, каждая из которых имеет свой предел. Это можно проследить на графике:

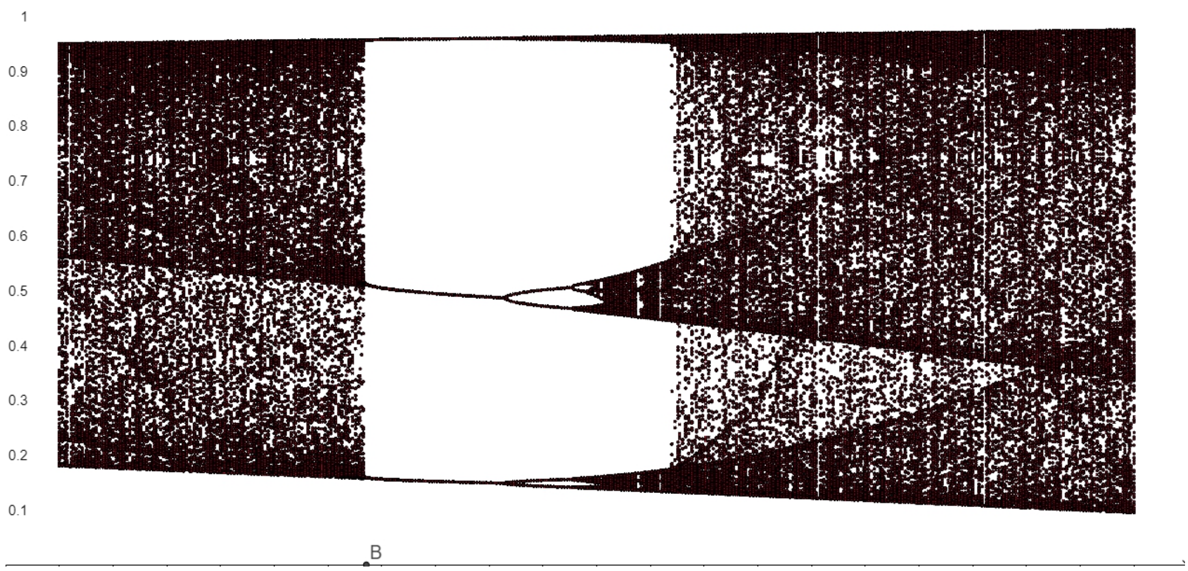


>

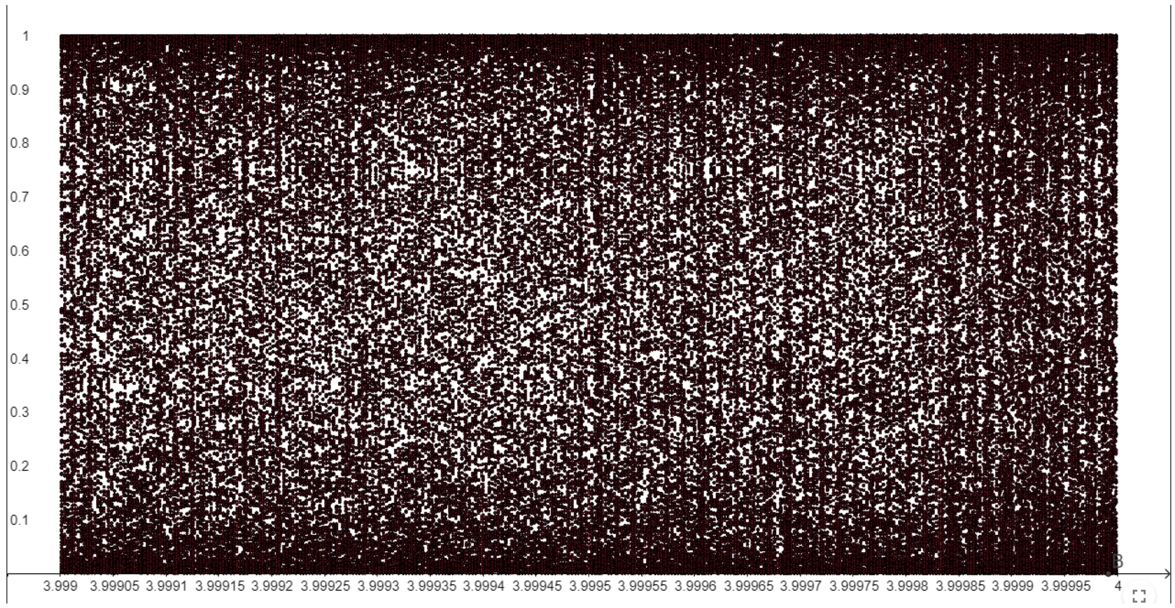
4. Покажем, что в диапозоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на случайное (детерминированный хаос):



Также заметим, что если рассмотреть один из подпромежутков, то при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательсти. Этот график рассматривает часть предыдущего графика для наглядности



Этот график показывает, что в окрестности $r = 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на белый шум



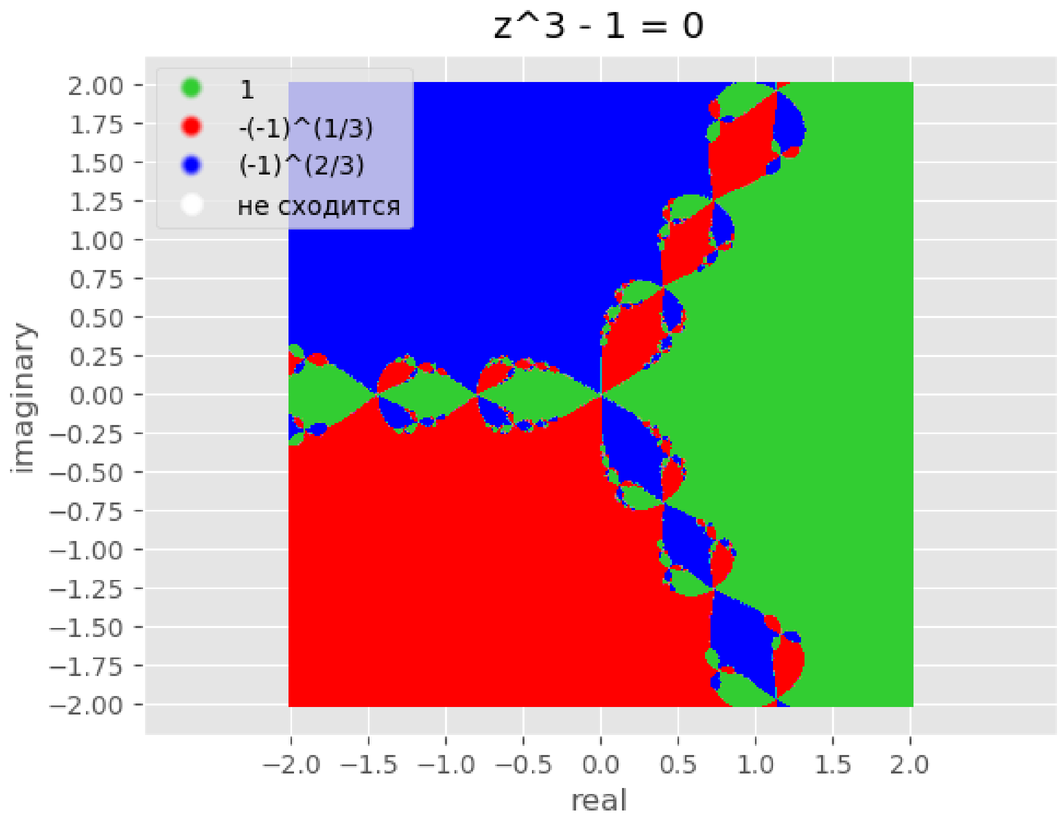
Задание 3

Корни находились методом Ньютона, как и в первом задании.

Для каждой точки (пикселя) с помощью метода Ньютона определяли, к какому корню она сходится.
Критерием окончания итераций была малость невязки, то есть $abs(f(z^n) < \epsilon)$.

На легенде указаны цвета, соответствующие корням уравнения. Раньше из-за опечатки первому цвету соотвествовал 0, хотя подразумевалась 1.

Можно достичь и большего разрешения графика, но это займёт значительно больше времени.



Для случайных начальных значений: