

Домашнее задание 1

Задание 1

Многочлен $P_n(x) = 3200x^5 + 480x^4 - 73624x^3 - 10686x^2 + 245645x - 59598$

Локализация

Производная $P'_n(x) = 16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645$

$$16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645 = 0$$

Корни: $x \approx -3.5554$

$$x \approx -1.1580$$

$$x \approx 1.0534$$

$$x \approx 3.5400$$

Возьмём отрезки с концами близкими к корням уравнения производной в качестве разбиения

x	-4.5	-2.5	-0.5	1.5	3.5	5.5
$P_n(x)$	-380475	116127	-175959	63075	-734643	5263335

Выберем отрезки $[-4.5; -2.5]$, $[-2.5; -0.5]$, $[-0.5; 1.5]$, $[1.5; 3.5]$, $[3.5; 5.5]$

Для любого a и b , которые являются границами выбранных отрезков, выполняется условие: $f(a)f(b) < 0$

Так как мы нашли пять отрезков, удовлетворяющих этому условию, и максимальное количество корней уравнения многочлена пятой степени равно пяти, то на каждом отрезке ровно один корень

Нахождение корней методом Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P'_n(x_n)}, \epsilon = 10^{-6}$$

итерации	$[-4.5; -2.5]$	$[-2.5; -0.5]$	$[-0.5; 1.5]$	$[1.5; 3.5]$	$[3.5; 5.5]$
1	-4.3312899768	-2.2612397820	0.2155502511	1.8219837248	4.8739461899
2	-4.300928818	-2.2500386685	0.2496899396	1.7532514185	4.5286058187
3	-4.3000008506	-2.2500000005	0.2499999724	1.7500074089	4.4127323851
4	-4.3000000000	-2.2500000000	0.2500000000	1.7500000000	4.4001411870
корень	-4.3	-2.25	0.25	1.75	4.4

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0 , что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0 , что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$

Задание 2

Будем везде брать $x_0 = 0.5$

1. $0 < r < 1$

- Возьмём $r = 0.5$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{2} - x$$

По теореме о сходимости метода простых итераций итерационная последовательность сходится к корню $x = 0$, так как на отрезке $x \in [0 - \delta, 0 + \delta]$ производная $\phi'(x)$ непрерывна и $|\phi'(x)| < 1$

Путь итерационной последовательности:

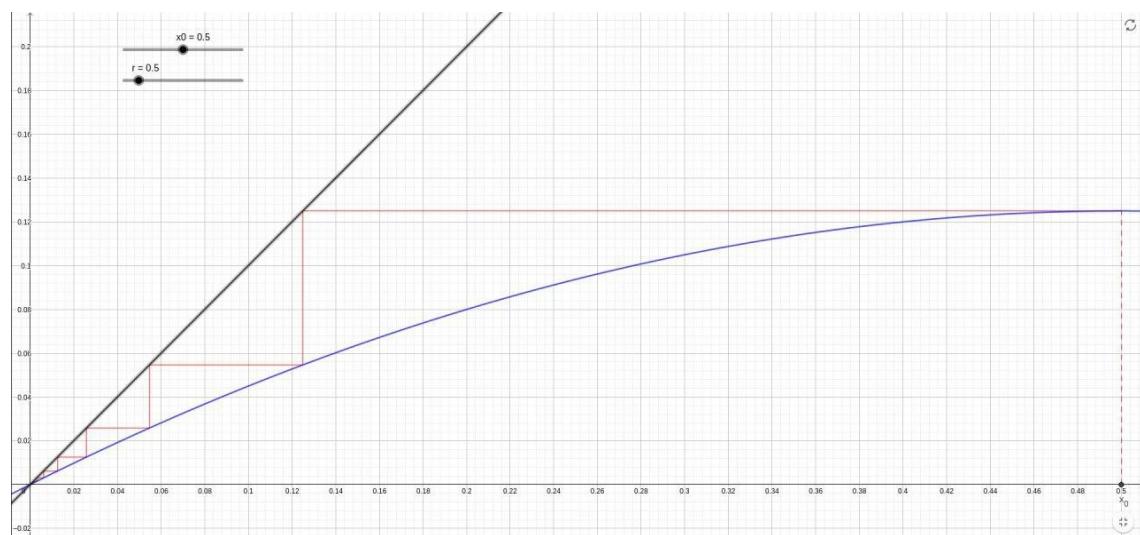


График: $i \rightarrow x_i$



2. $1 < r < 3$

- $1 < r < 2$

Пусть $r = 1.5$

$$\phi(x) = \frac{3}{2}x(1 - x)$$

$$\phi'(x) = \frac{3}{2} - 3x$$

При $x \in [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta]$ производная непрерывна и $|\phi'(x)| < 1 \implies$ по теореме о

сходимости метода простых итераций последовательность сходится к корню

$$x = \frac{1}{3}$$

Путь итерационной последовательности:

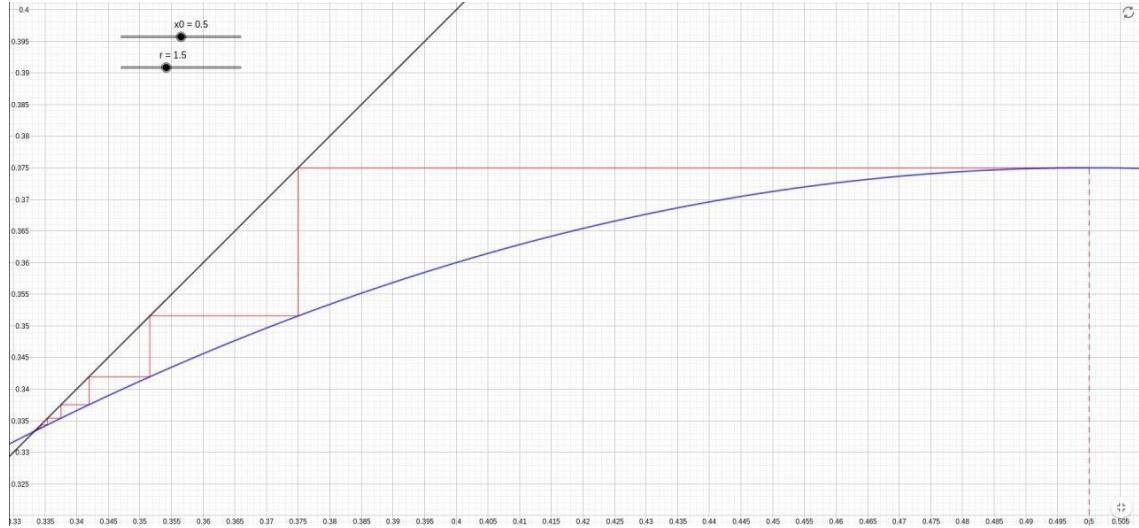


График: $i \rightarrow x_i$



График иллюстрирует монотонную сходимость.

- $2 < r < 3$

пусть $r = 2.5$

$$\phi(x) = \frac{5}{2}x(1 - x)$$

$$\phi'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{x}$$

Аналогично итерационная последовательность сходится к корню $x = \frac{3}{5}$, т. к. при $x \in [\frac{3}{5} - \delta, \frac{3}{5} + \delta]$ производная непрерывна и ее модуль $|\phi'(x)| < 1$ меньше единицы (т.е. выполняется условие Липшица).

Путь итерационной последовательности:

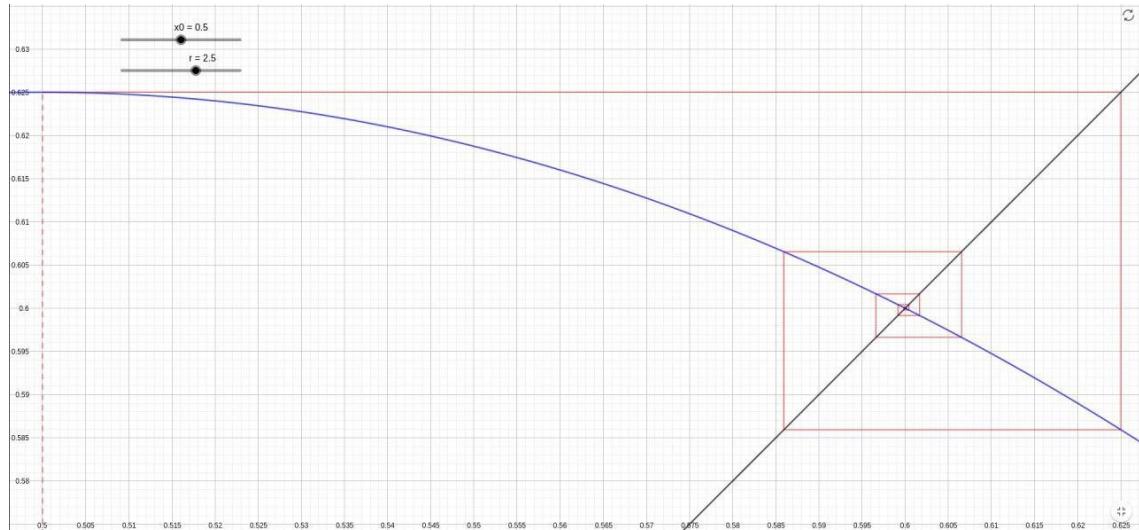
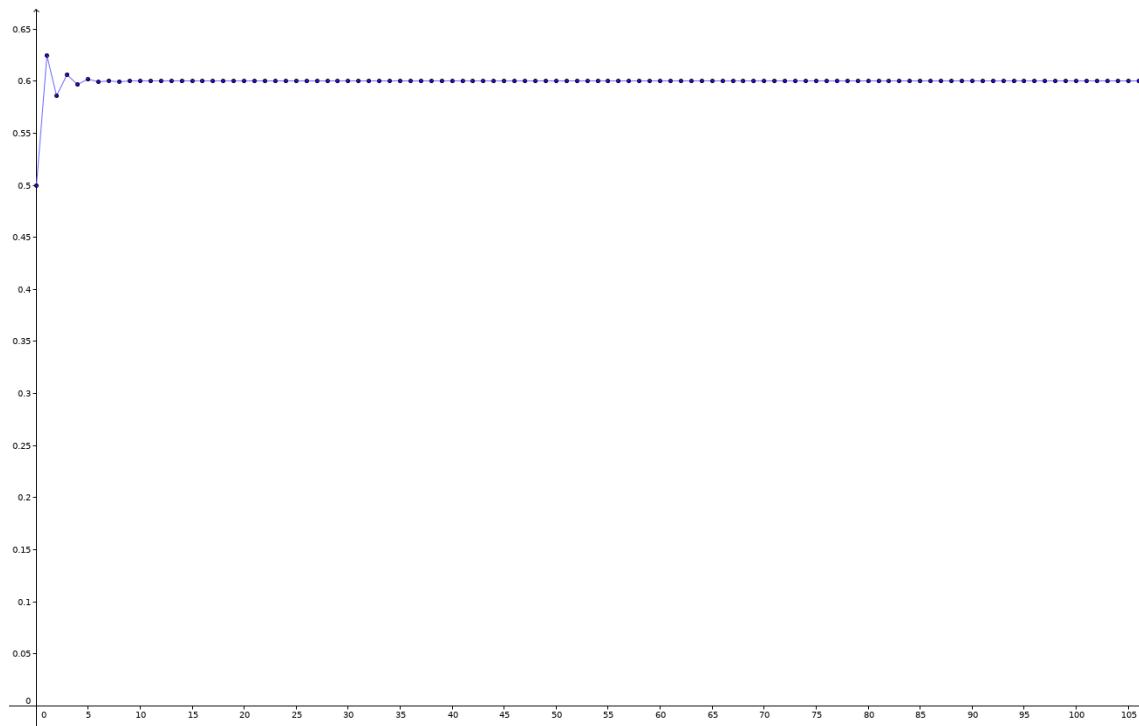


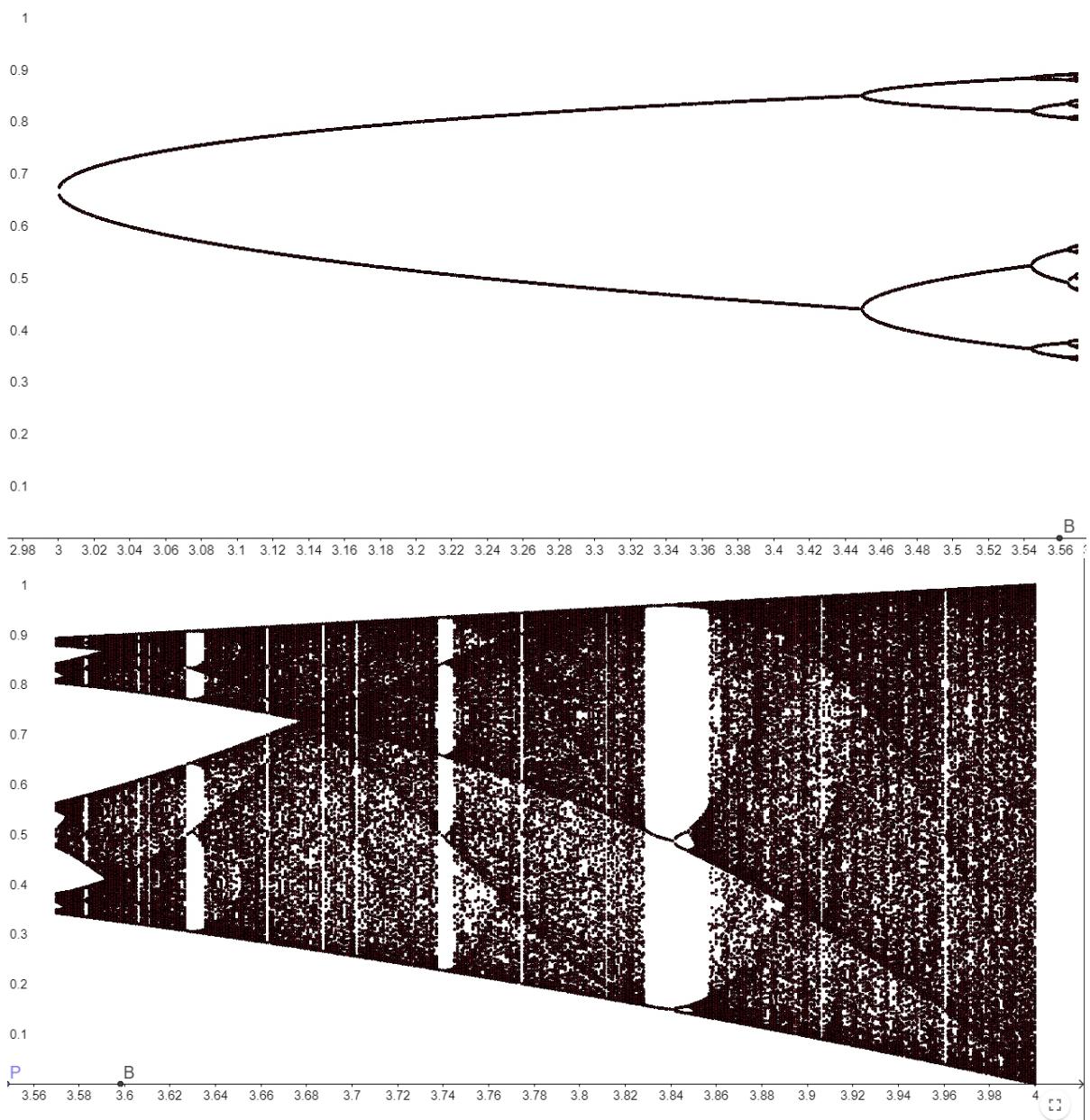
График: $i \rightarrow x_i$



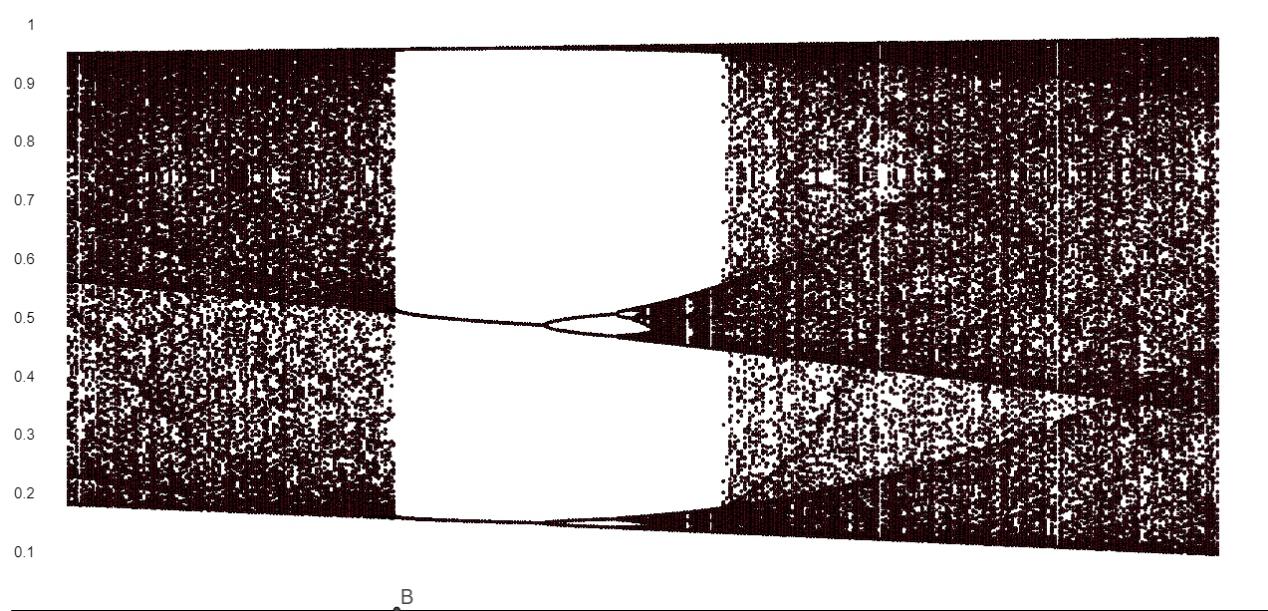
В данном случае мы уже имеем колебательную сходимость.

3. При $r \in (3; r_\infty)$ мы уже не можем применить теорему о сходимости, т.к. не выполняется условие Липшица \implies итерационная последовательность не сходится к одному корню. Она распадается на 2, 4, 8... подпоследовательностей, каждая из которых имеет свой предел. Это можно проследить на графике:
4. Покажем, что в диапазоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на случайное (детерминированный хаос):

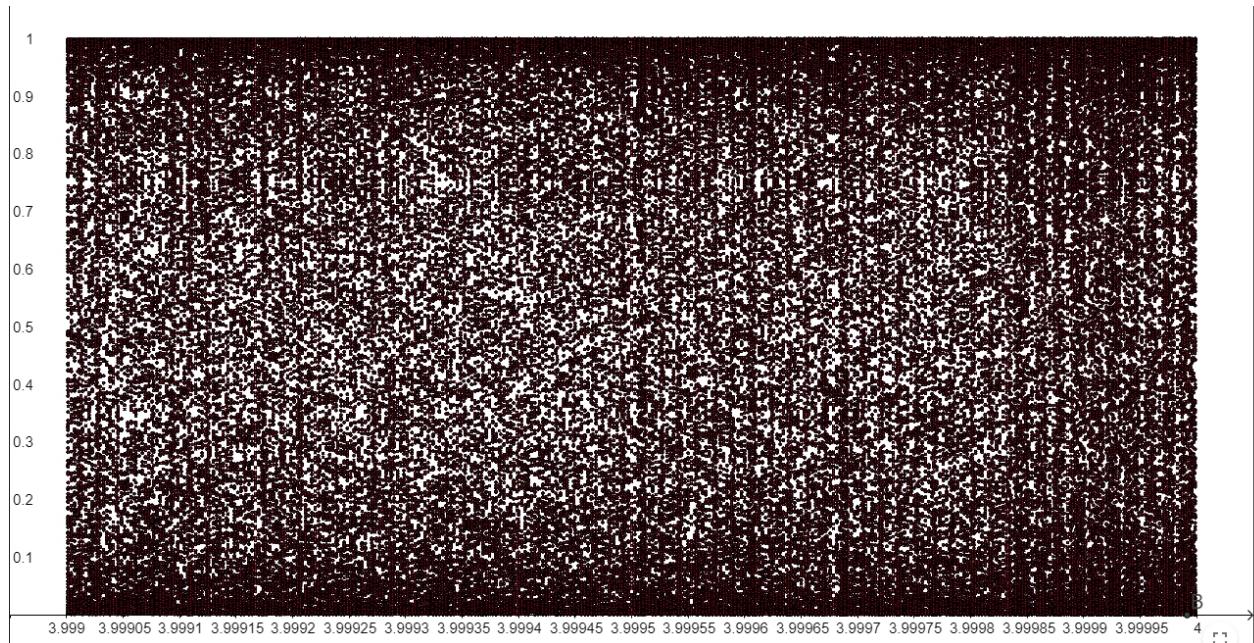
Также заметим, что если рассмотреть один из подпромежутков, то при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательности.



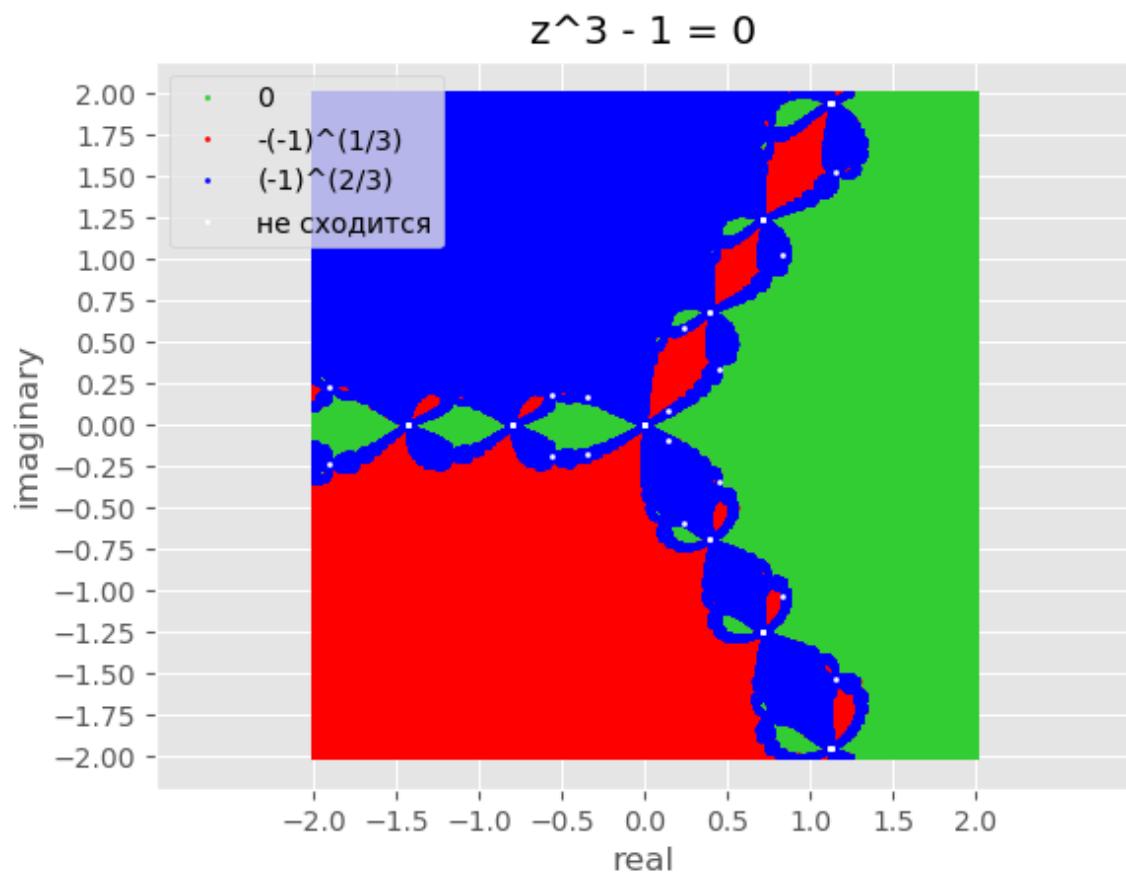
Этот график рассматривает часть предыдущего графика для наглядности



Этот график показывает, что в окрестности $r = 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на белый шум



Задание 3



Для случайных начальных значений:

