

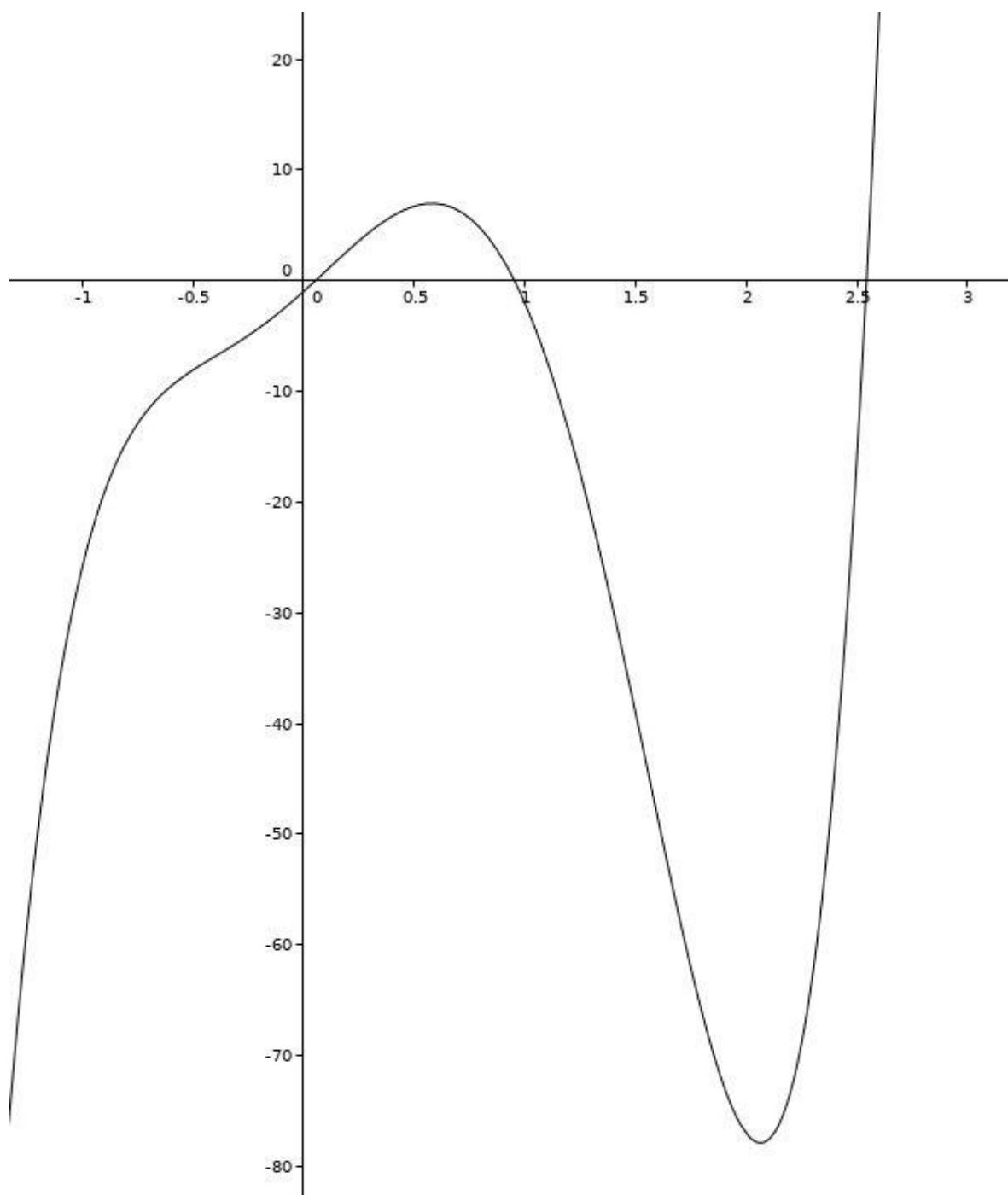
Домашнее задание 1

Задание 1

Многочлен $P_n(x) = 9x^5 - 19x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 18x - 1$ (коэффициенты подобраны случайно)

Локализация

Для локализации рассмотрим график $y(x) = 9x^5 - 19x^4 - 15x^3 + 6x^2 + 18x - 1$



Исходя из графика, выберем следующие отрезки : $[0; 0.5]$, $[0.5; 1]$, $[2.5; 3]$

Нахождение корней методом Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P'_n(x_n)}, \epsilon = 10^{-6}$$

итерации	$[0; 0.5]$	$[0.5; 1]$	$[2.5; 3]$
1	0.0555555556	0.9565217391	2.7181964573
2	0.0547038071	0.9535880624	2.5805022265
3	0.0547036825	0.9535746571	2.5463736795
4	–	0.9535746568	2.5444097003
5	–	–	2.5444034177
6	–	–	2.5444034176
корень	0.0547036825	0.9535746568	2.5444034176

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0 , что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P'_n(x_0)'' > 0$

Задание 2

Будем везде брать $x_0 = 0.5$

1. $0 < r < 1$

◦ Возьмём $r = 0.5$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{2} - x$$

По теореме о сходимости метода простых итераций итерационная последовательность сходится к корню $x = 0$, так как на отрезке $x \in [0 - \delta, 0 + \delta]$ производная $\phi'(x)$ непрерывна и $|\phi'(x)| < 1$

Путь итерационной последовательности:

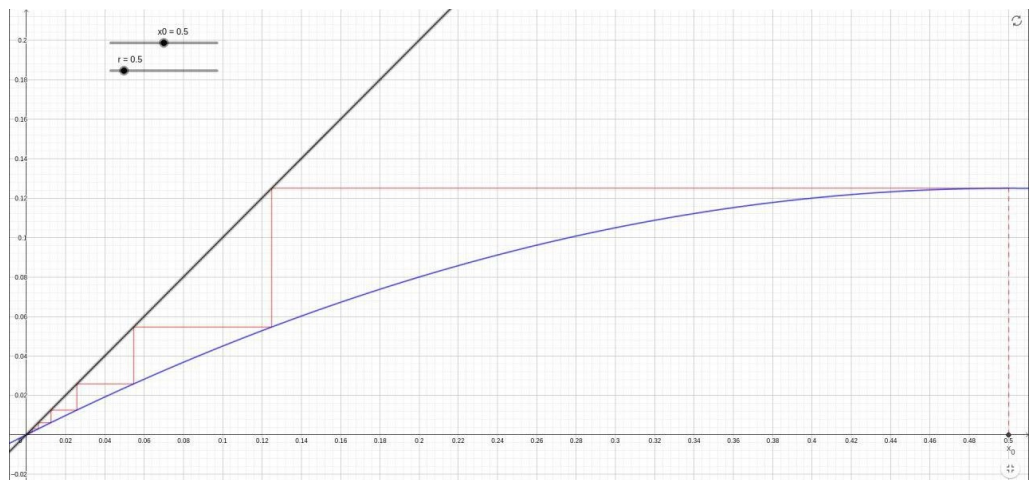
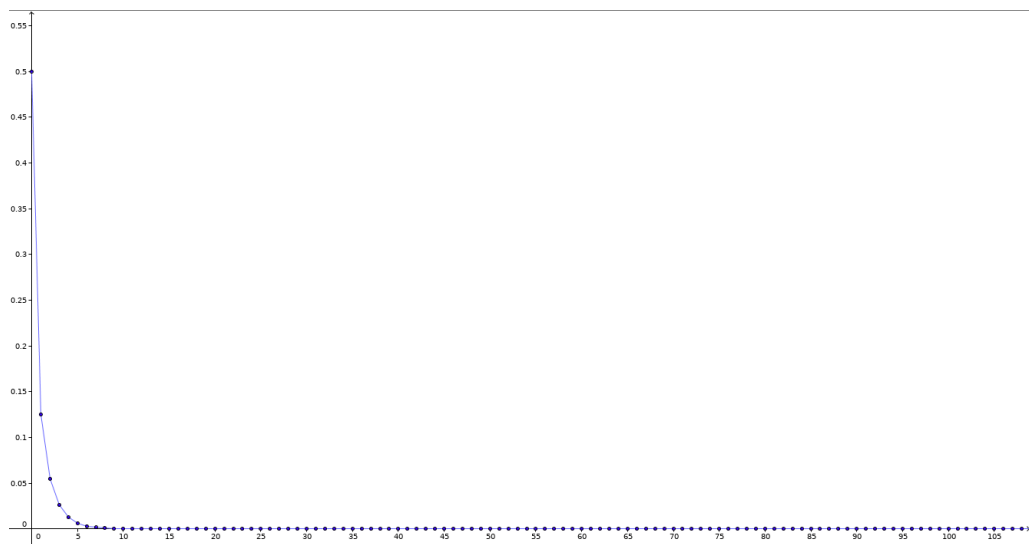


График: $i \rightarrow x_i$



2. $1 < r < 3$

◦ $1 < r < 2$

Пусть $r = 1.5$

$$\phi(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$$

$$\phi'(x) = \frac{3}{2} - 3x$$

При $x \in [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta]$ производная непрерывна и $|\phi'(x)| < 1 \implies$ по теореме о сходимости метода простых итераций последовательность сходится к корню $x = \frac{1}{3}$

Путь итерационной последовательности:

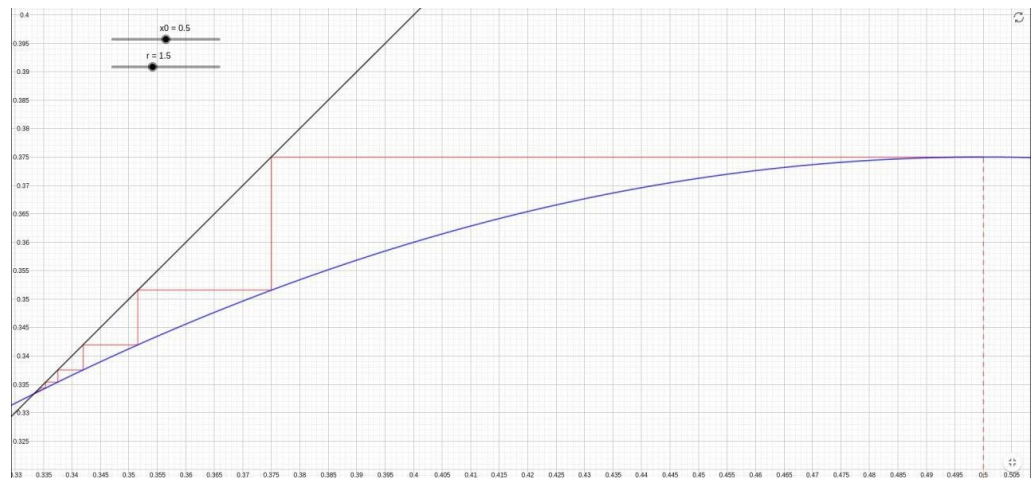


График: $i \rightarrow x_i$

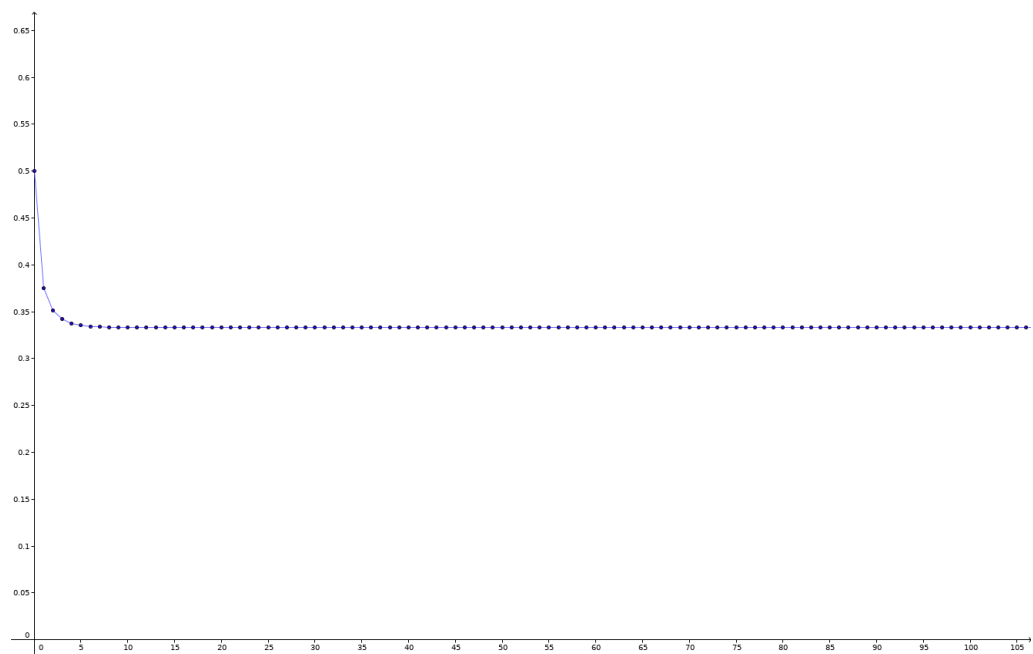


График иллюстрирует монотонную сходимость.

о $2 < r < 3$

пусть $r = 2.5$

$$\phi(x) = \frac{5}{2}x(1 - x)$$

$$\phi'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{x}$$

Аналогично итерационная последовательность сходится к корню $x = \frac{3}{5}$,

т. к. при $x \in [\frac{3}{5} - \delta, \frac{3}{5} + \delta]$ производная непрерывна и ее модуль $|\phi'(x)| < 1$ меньше единицы (т.е. выполняется условие Липшица).

Путь итерационной последовательности:

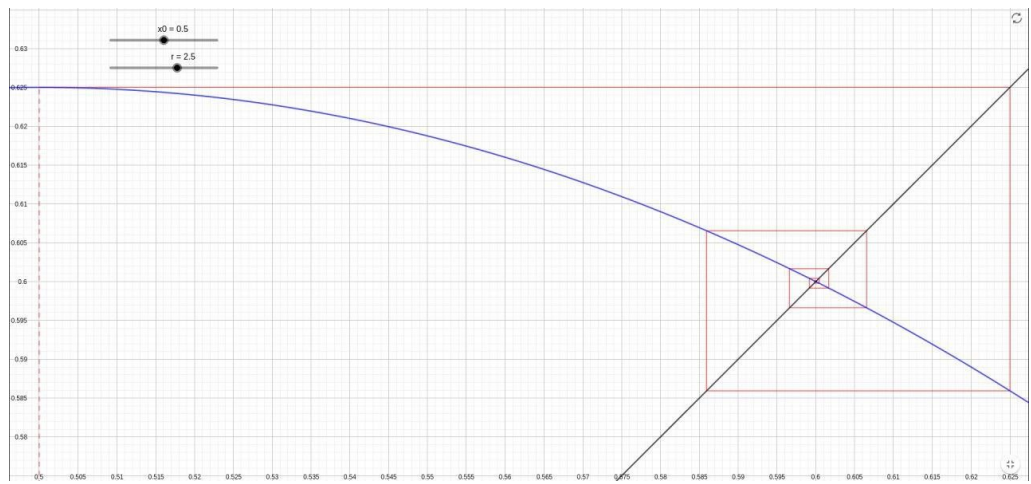
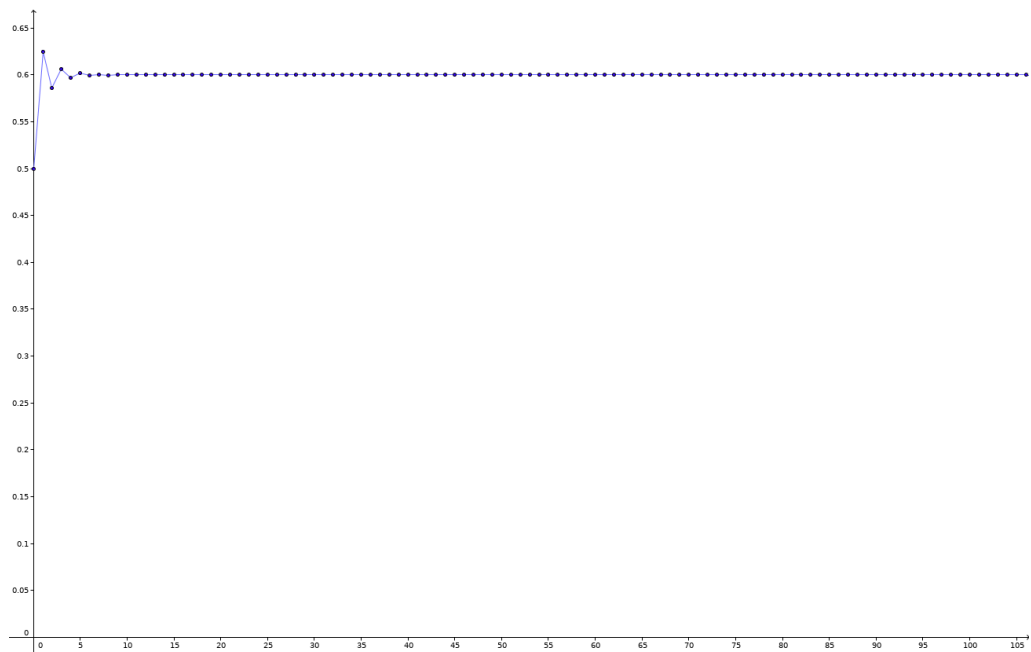
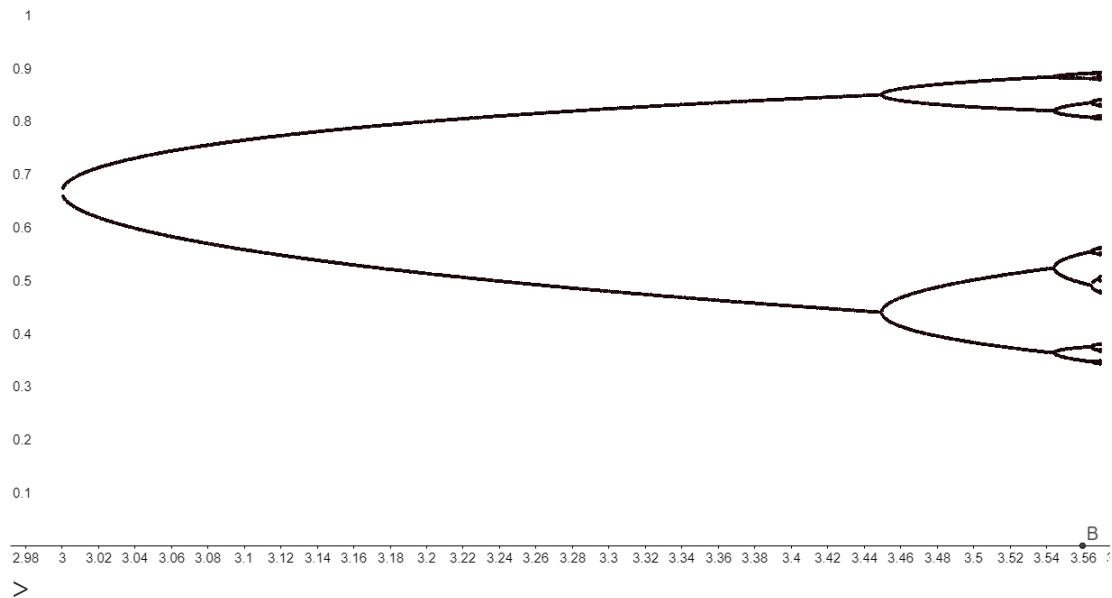


График: $i \rightarrow x_i$

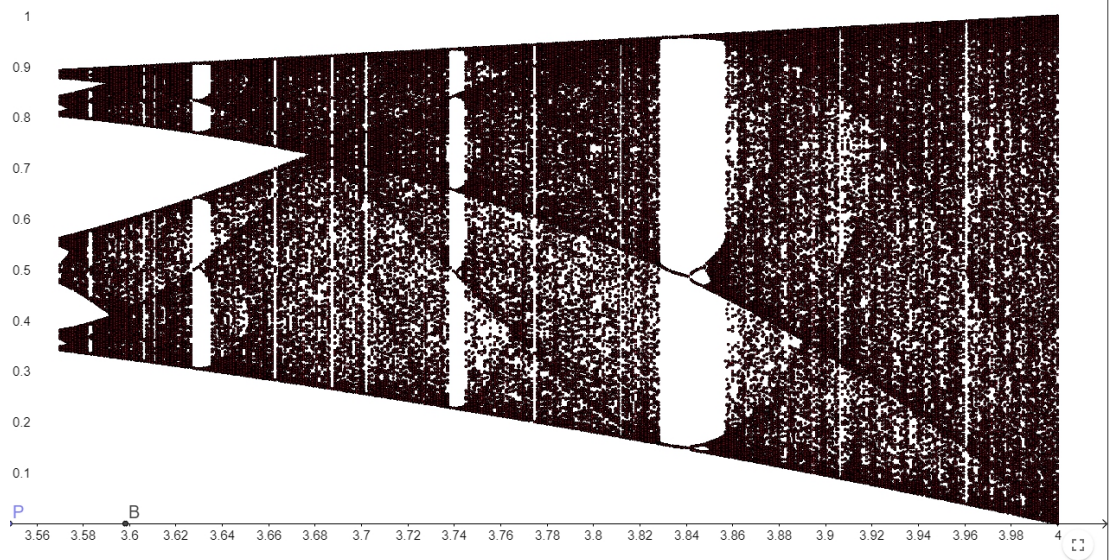


В данном случае мы уже имеем колебательную сходимость.

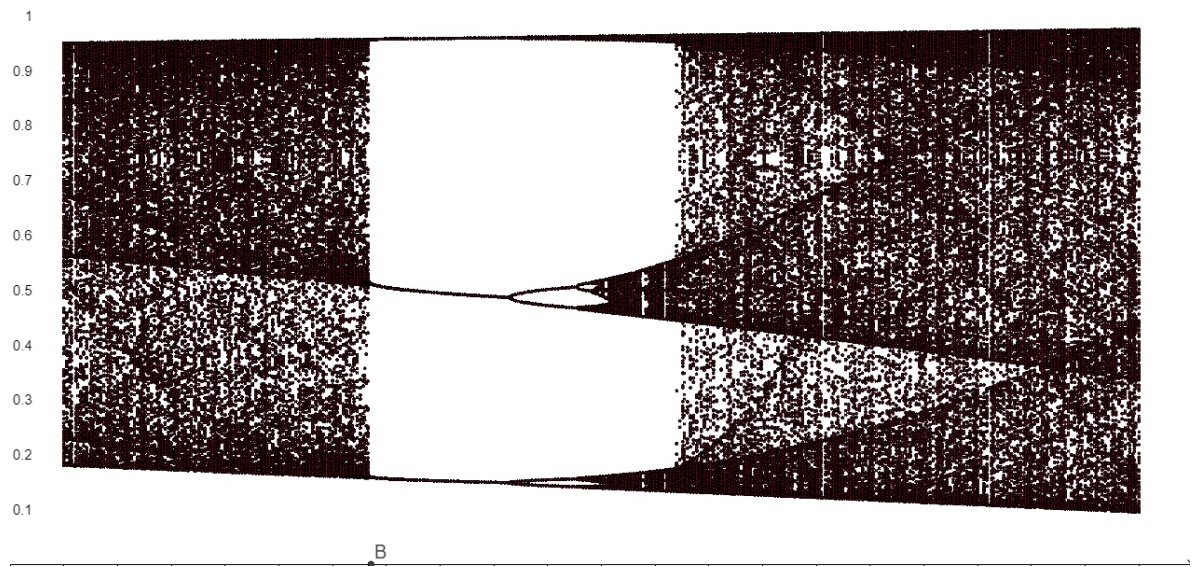
3. При $r \in (3; r_\infty)$ мы уже не можем применить теорему о сходимости, т.к. не выполняется условие Липшица \implies итерационная последовательность не сходится к одному корню. Она распадается на 2, 4, 8... подпоследовательностей, каждая из которых имеет свой предел. Это можно проследить на графике:



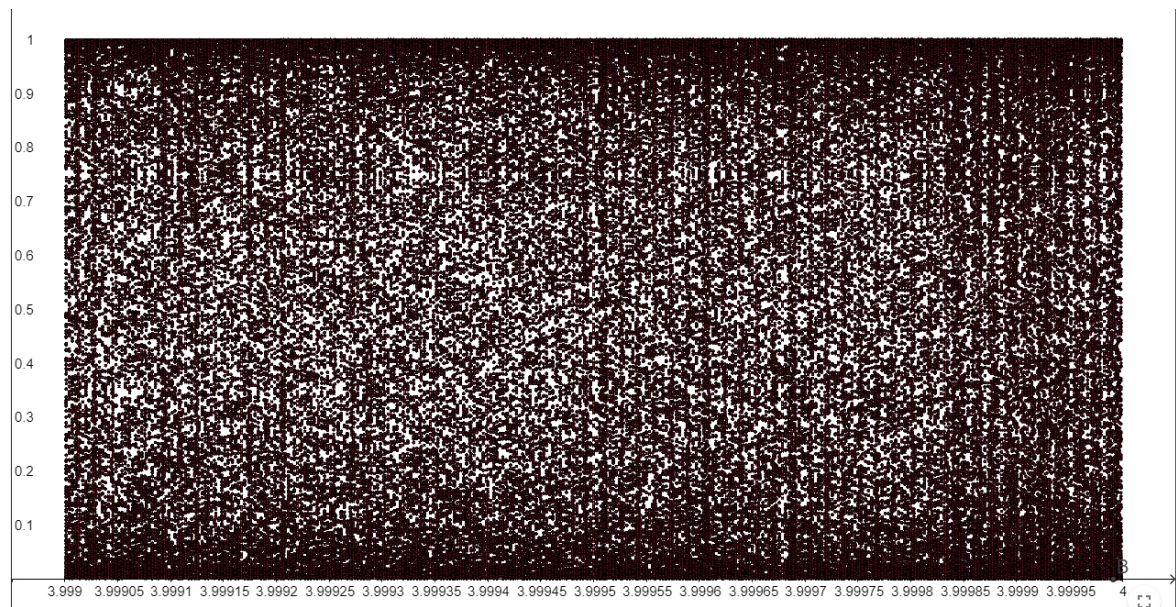
4. Покажем, что в диапазоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на случайное (детерминированный хаос):



Также заметим, что если рассмотреть один из подпромежутков, то при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательности. Этот график рассматривает часть предыдущего графика для наглядности



Этот график показывает, что в окрестности $r = 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на белый шум



Задание 3

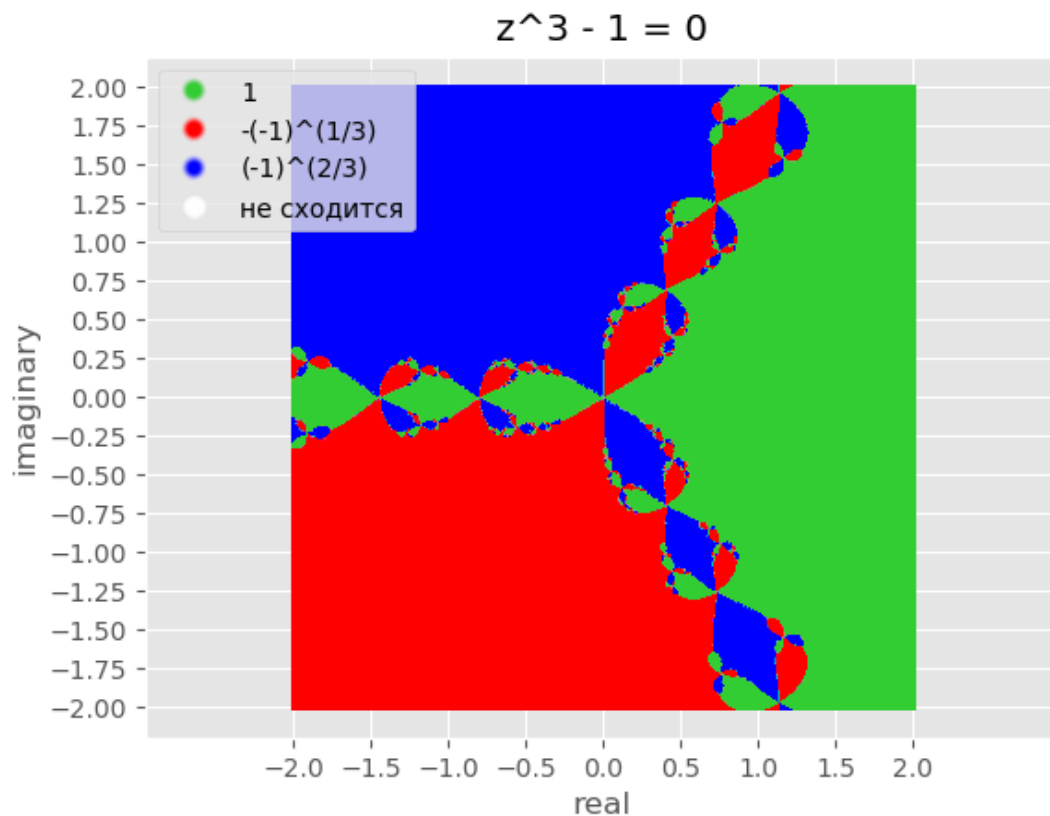
Корни находились методом Ньютона, как и в первом задании.

Для каждой точки (пикселя) с помощью метода Ньютона определяли, к какому корню она сходится.

Критерием окончания итераций была малость невязки, то есть $\text{abs}(f(z^n)) < \epsilon$.

На легенде указаны цвета, соответствующие корням уравнения. Раньше из-за опечатки первому цвету соответствовал 0, хотя подразумевалась 1.

Можно достичь и большего разрешения графика, но это займёт значительно больше времени.



Для случайных начальных значений:

