Домашнее задание 1

Задание 1

Многочлен $P_n(x) = 3200x^5 + 480x^4 - 73624x^3 - 10686x^2 + 245645x - 59598$

Локализация

Производная $P_n'(x) = 16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645$
$16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645 = 0$
Корни: $x \approx -3.5554$
$x \approx -1.1580$
$x \approx 1.0534$
$x \approx 3.5400$

Возьмём отрезки с концами близкими к корням уравнения производной в качестве разбиения

x	**-4.5**	**-2.5**	**-0.5**	**1.5**	**3.5**	**5.5**
$P_n(x)$	-380475	116127	-175959	63075	-734643	5263335

Выберем отрезки $[-4.5; -2.5],\ [-2.5; -0.5],\ [-0.5; 1.5],\ [1.5; 3.5],\ [3.5; 5.5]$

Для любого a и b, которые являются границами выбранных отрезков, выполняется условие: $f(a)f(b) < 0$

Так как мы нашли пять отрезков, удовлетворяющих этому условию, и максимальное количество корней уравнения многочлена пятой степени равно пяти, то на каждом отрезке ровно один корень

Нахождение корней методом Ньютона

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P_n'(x_n)}$, $\epsilon = 10^{-6}$

итерации	$[-4.5; -2.5]$	$[-2.5; -0.5]$	$[-0.5; 1.5]$	$[1.5; 3.5]$	$[3.5; 5.5]$
1	-4.3312899768	-2.2612397820	0.2155502511	1.8219837248	4.8739461899
2	-4.300928818	-2.2500386685	0.2496899396	1.7532514185	4.5286058187
3	-4.3000008506	-2.2500000005	0.2499999724	1.7500074089	4.4127323851
4	-4.3000000000	-2.2500000000	0.2500000000	1.7500000000	4.4001411870
корень	-4.3	-2.25	0.25	1.75	4.4

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$
Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$

Задание 2

Будем везде брать $x_0 = 0.5$

1. $0 < r < 1$
   - Возьмём $r = 0.5$

$\phi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

$\phi'(x) = \frac{1}{2} - x$

По теореме о сходимости метода простых итераций итерационная последовательность сходится к корню $x = 0$, так как на отрезке $x \in [0-\delta, 0+\delta]$ проиходная $\phi'(x)$ непрерывна и $|\phi'(x)| < 1$

Путь итерационной последовательности:

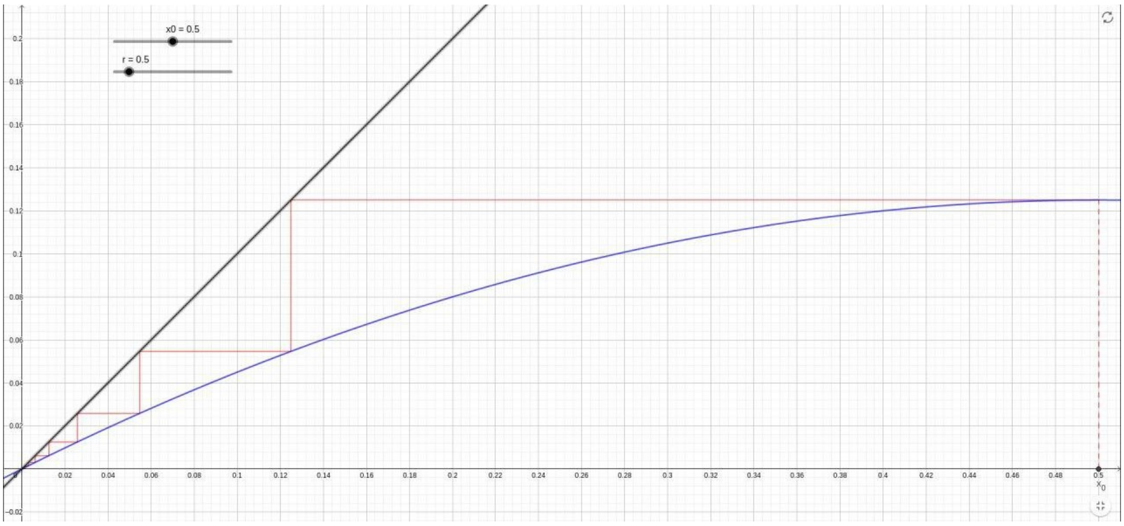


График: i -> x_i

2. $1 < r < 3$

- $1 < r < 2$

  Пусть $r = 1.5$

  $\phi(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$

  $\phi'(x) = \frac{3}{2} - 3x$

  При $x \in [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta]$ производная непрерывна и $|\phi'(x)| < 1 \implies$ по теореме о сходимости метода простых итераций последовательность сходится к корню $x = \frac{1}{3}$

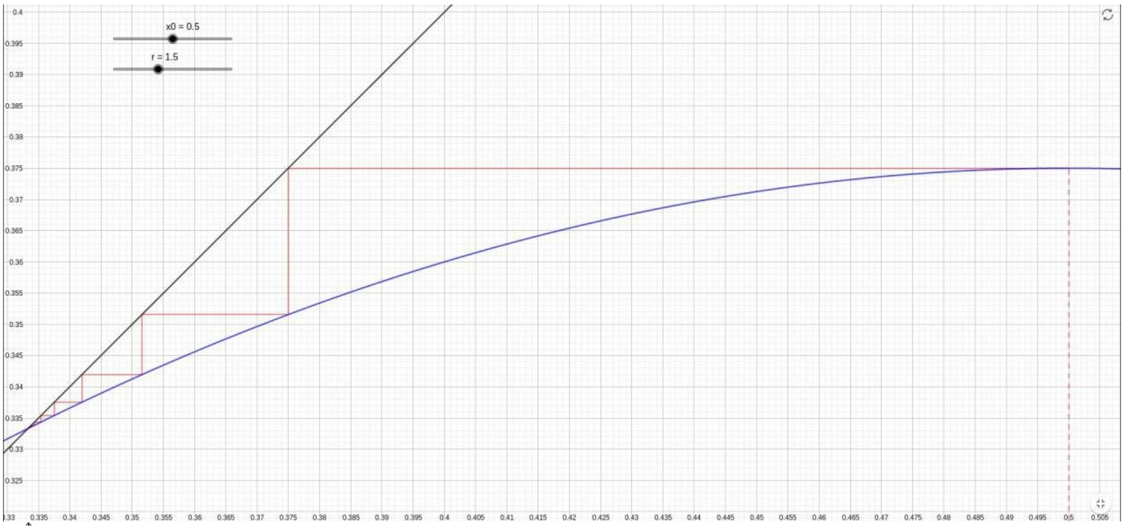
  Путь итерационной последовательности:

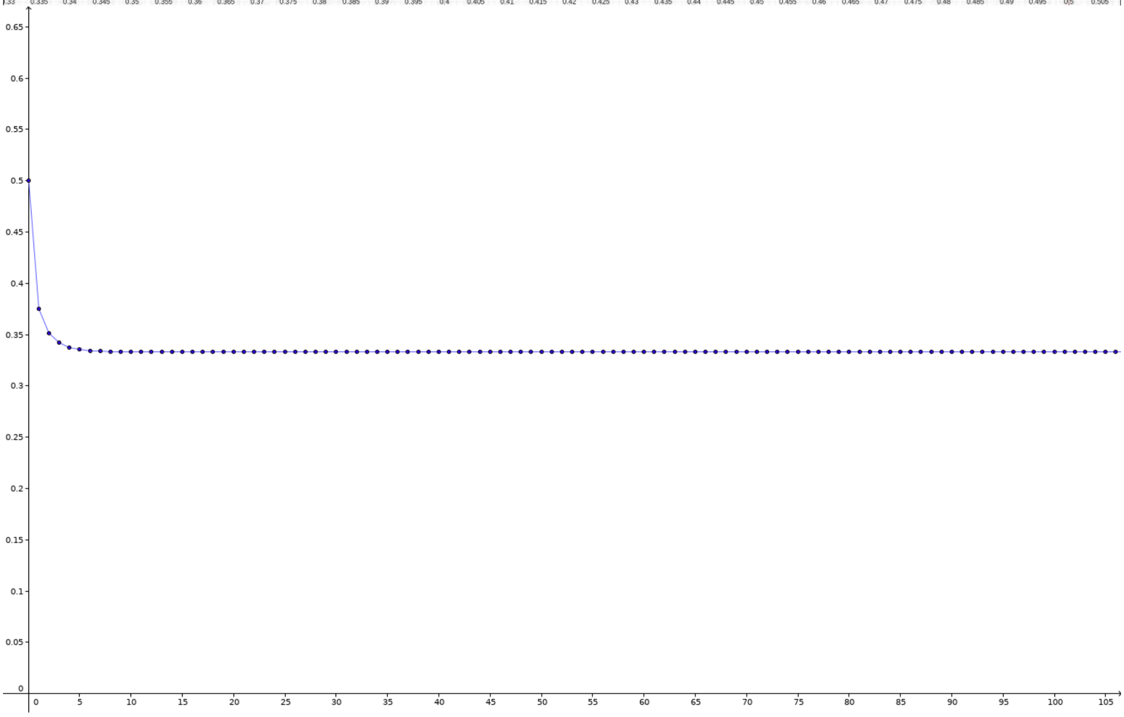
  График: i -> x_i

  График иллюстрирует монотонную сходимость.

- $2 < r < 3$

  пусть $r = 2.5$





$\phi(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$

$\phi'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{x}$

Аналогично итерационная последовательность сходится к корню $x = \frac{3}{5}$, т. к. при $x \in [\frac{3}{5} - \delta, \frac{3}{5} + \delta]$ производная непрерывна и ее модуль $|\phi'(x)| < 1$ меньше единицы (т.е. выполняется условие Липшица).

Путь итерационной последовательности:

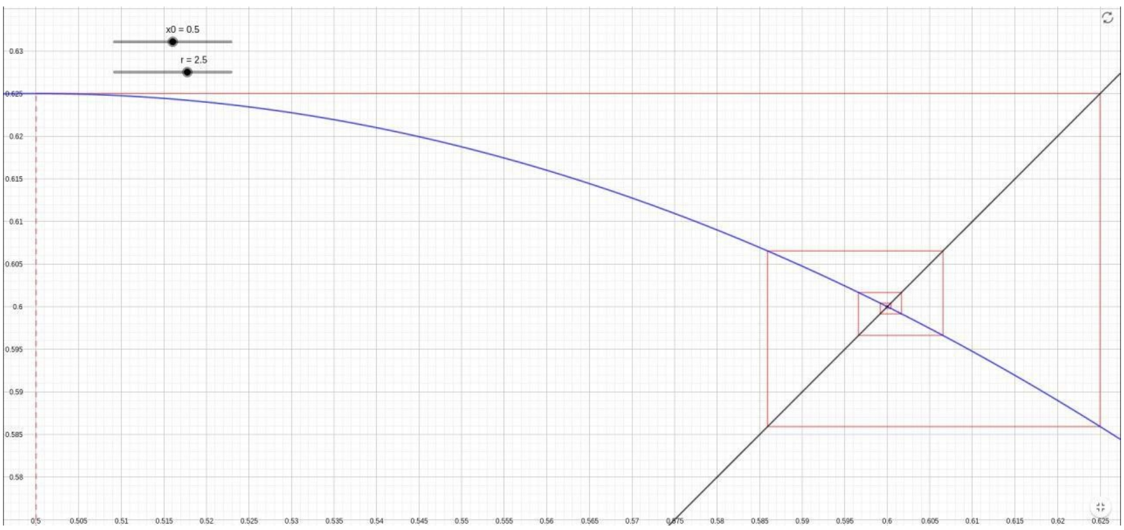
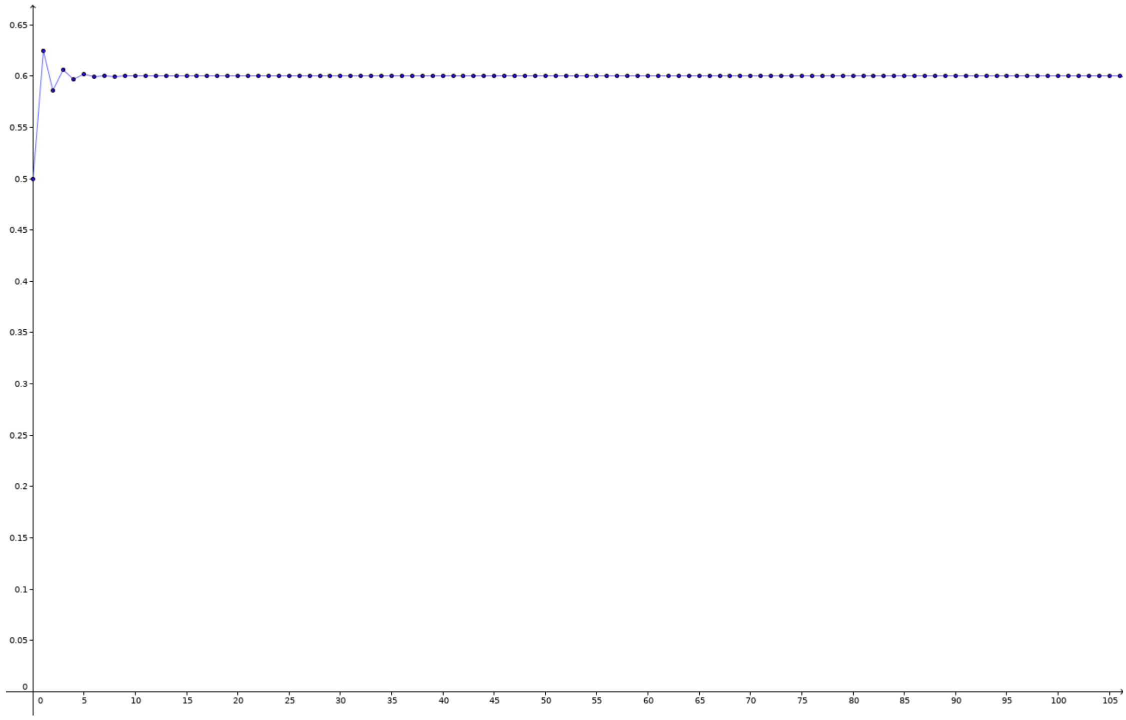
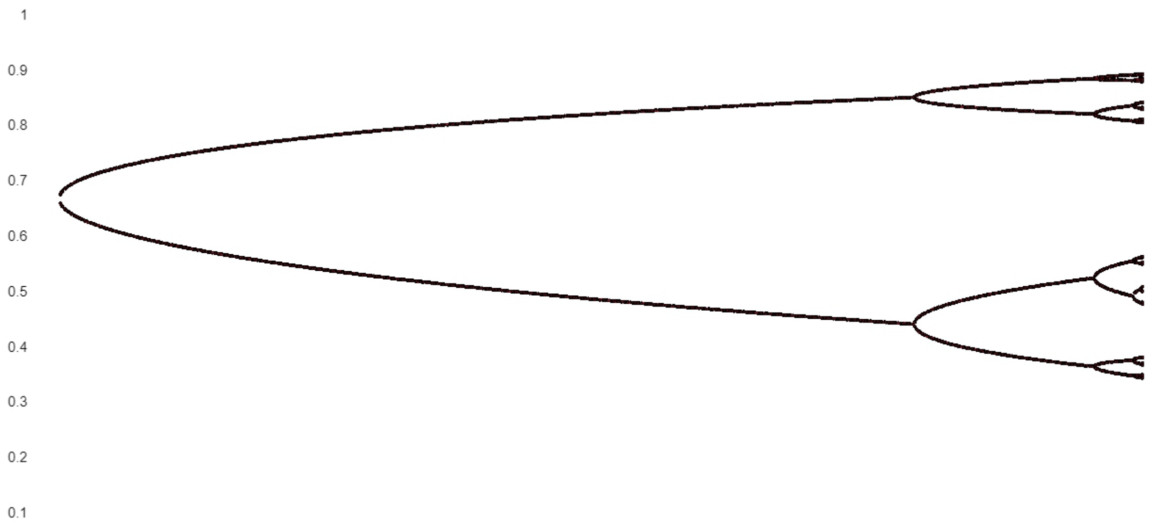


График: i -> x_i



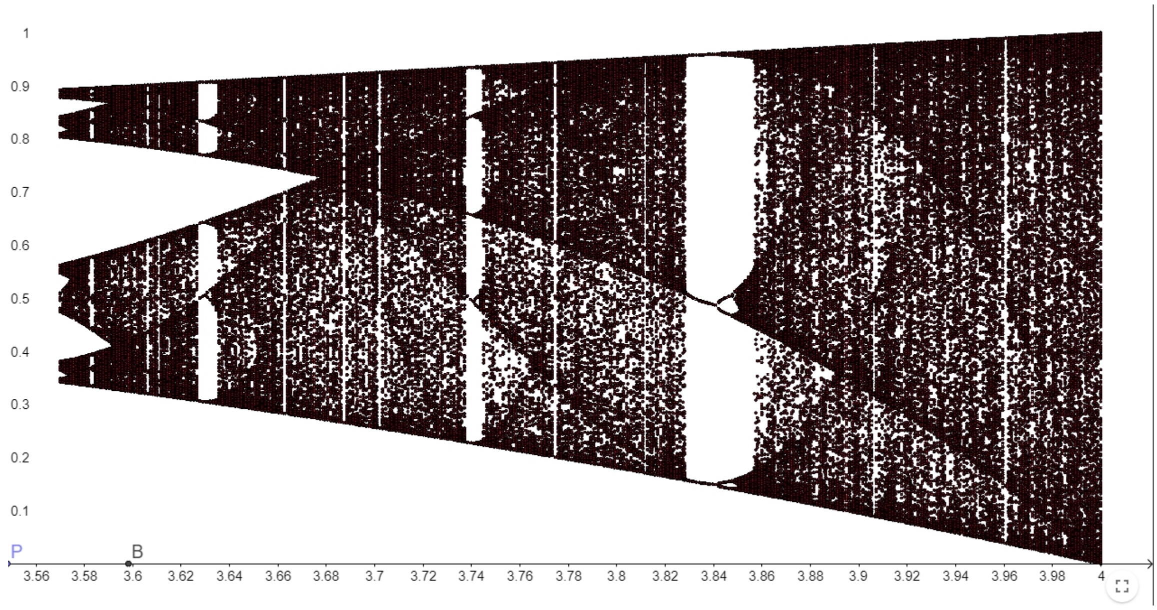
В данном случае мы уже имеем колебательную сходимость.

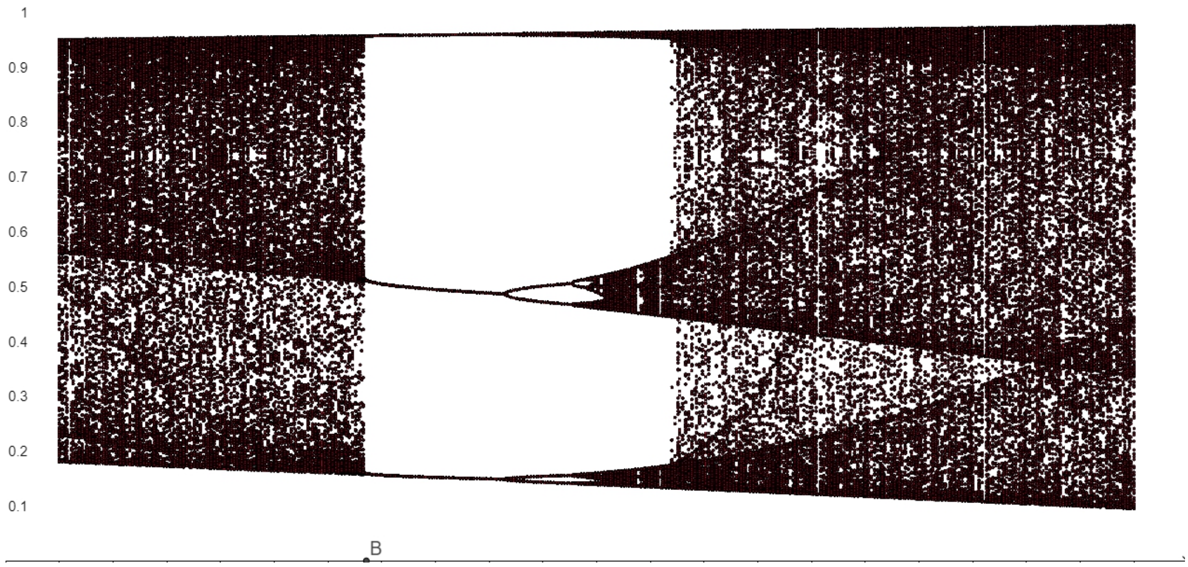
3. При r $\in$ (3; r_∞) мы уже не можем применить теорему о сходимости, т.к. не выполняется условие Липшица $\Longrightarrow$ итерационная последовательность не сходится к одному корню. Она распадается на 2, 4, 8... подпоследовательностей, каждая из которых имеет свой предел. Это можно проследить на графике:



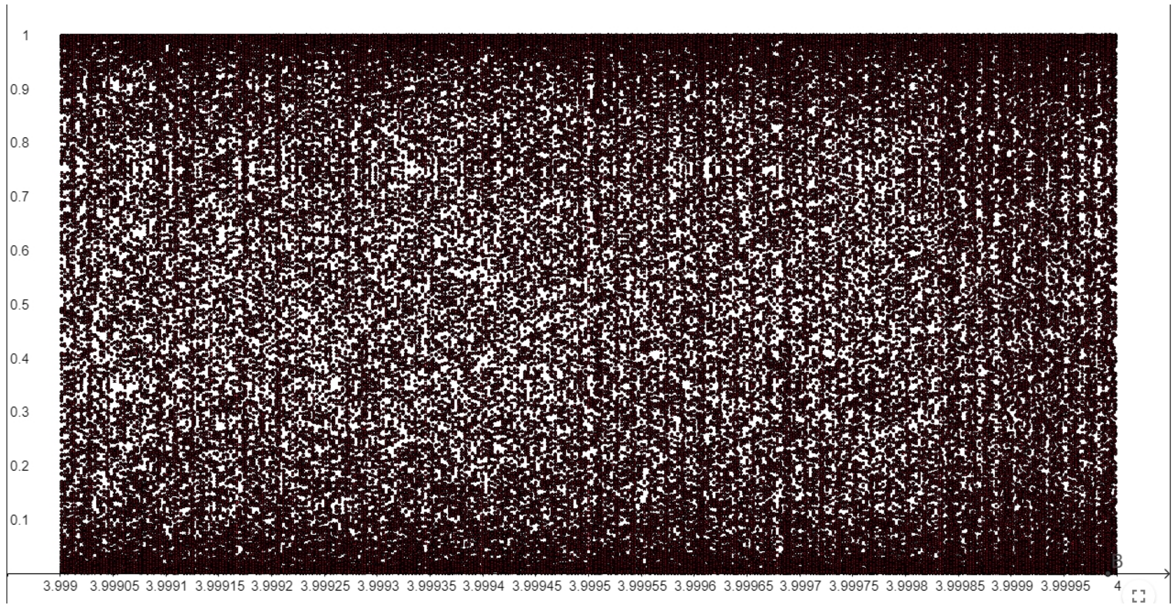
4. Покажем, что в диапозоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на случайное (детерминированный хаос):

Также заметим, что если рассмотреть один из подпромежутков, то при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательсти. Этот график рассматривает часть предыдущего графика для наглядности





Этот график показывает, что в окрестности $r = 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на белый шум


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
3.999 3.99905 3.9991 3.99915 3.9992 3.99925 3.9993 3.99935 3.9994 3.99945 3.9995 3.99955 3.9996 3.99965 3.9997 3.99975 3.9998 3.99985 3.9999 3.99995 4

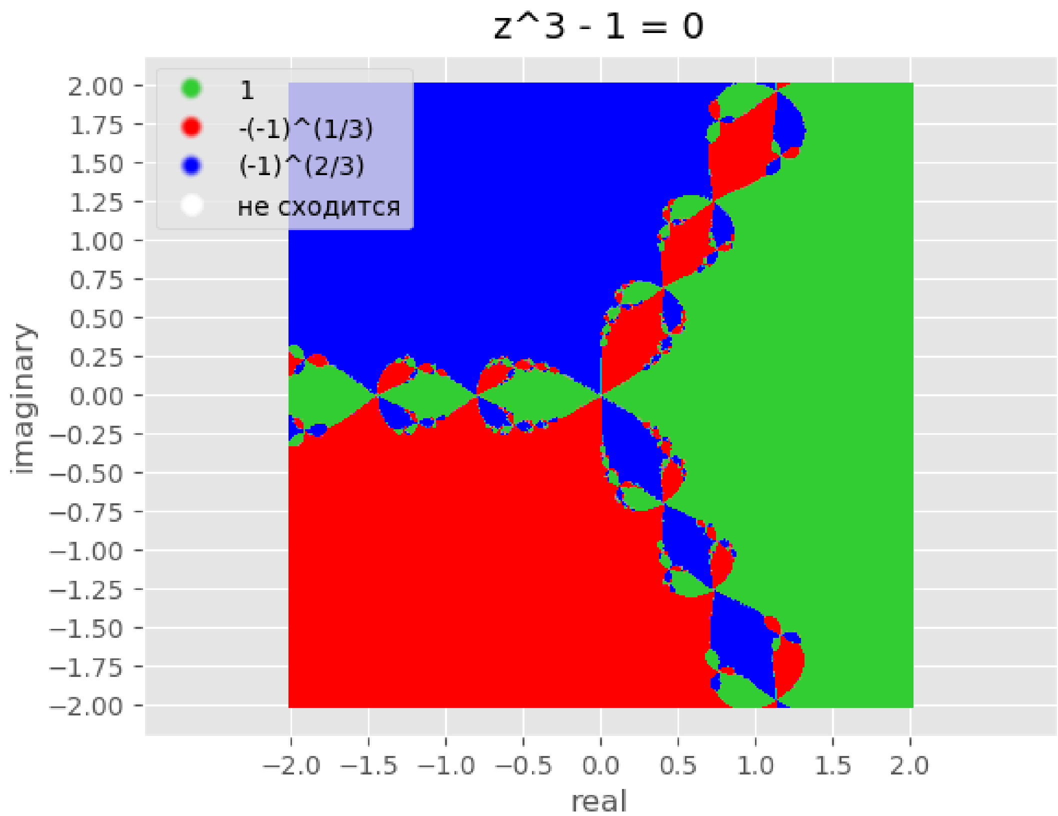
Задание 3

Корни находились методом Ньютона, как и в первом задании.

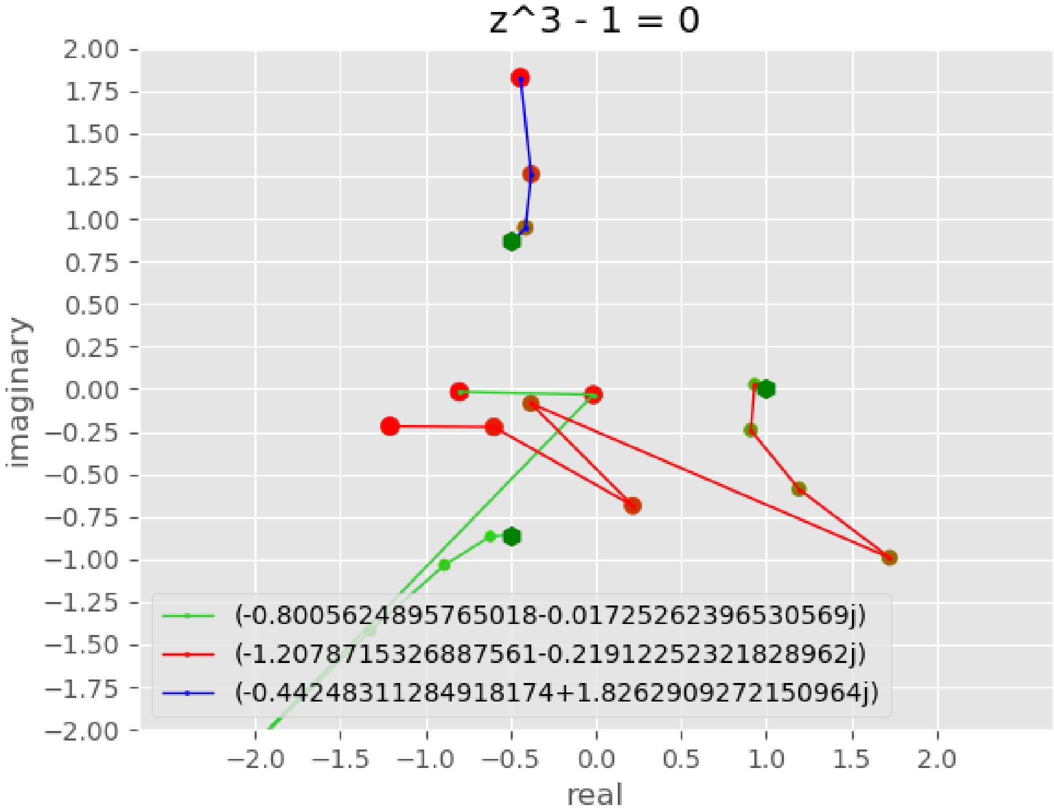
Для каждой точки (пикселя) с помощью метода Ньютона определяли, к какому корню она сходится. Критерием окончания итераций была малость невязки, то есть $abs(f(z^n) < \epsilon)$.

На легенде указаны цвета, соответствующие корням уравнения. Раньше из-за опечатки первому цвету соотвествовал 0, хотя подразумевалась 1.

Можно достичь и большего разрешения графика, но это займёт значительно больше времени.



Для случайных начальных значений:



z^3 - 1 = 0
imaginary
real
(-0.8005624895765018-0.01725262396530569j)
(-1.2078715326887561-0.21912252321828962j)
(-0.44248311284918174+1.8262909272150964j)