

Домашнее задание 2

Для всех итерационных методов использовались критерии малости невязки ($\frac{\|Ax^k - b\|}{\|b\|} \leq \epsilon$) и малости нормы разности двух последовательных приближений ($\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$), где $\epsilon = 0.000001$ и в качестве нормы используется 2-норма векторов.

Для всех методов максимальное количество итераций $maxIterations = 1,000,000$.

В методе Зайделя с релаксацией для всех матриц использовалось $\omega = 0.5$.

Для метода Якоби проверялось условие сходимости $\rho(D^{-1}R) < 1$, где ρ - спектральный радиус матрицы ($\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа), D - диагональная матрица, $R = A - D$. Это необходимо, так как на неподходящих под это условие матрицах невозможно было найти ответ в силу ограничений на операцию деления для типа float64 (после нескольких десятков итераций из-за деления на относительно маленькое число вектор x ровнялся $[\infty, \dots, \infty]$). Стоит отметить, что матрицы, которые не подходили под это условие, также не подходили под условие диагонального преобладания, которое является существенным (хоть и не необходимым) для сходимости метода Якоби.

$A_{symmetric}$ - матрица A и ее вектор b , домноженные слева на A^T .

$\mu(A)$ - число обусловленности.

Все результаты переведены из научной записи ($1e + 1$) в десятичную.

Диагональная матрица

Матрица хорошо обусловленная, т. к. $\det(A_{diag}) \approx 79,649,555,832,435,952,568,192$,

$\mu(A_{diag}) = \|A_{diag}\| * \|A_{diag}^{-1}\| = 13.329146508625698$

| A | | | | | | | | | | | | b |
|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 73 | -8 | -1 | -2 | 2 | -9 | 3 | 1 | -10 | -3 | 0 | -10 | -6 |
| -9 | 89 | -1 | 0 | 8 | 3 | 7 | 6 | -10 | 7 | -6 | 6 | 9 |
| -2 | 0 | 79 | 7 | -8 | 8 | 7 | 5 | 0 | 8 | -4 | 8 | 6 |
| -5 | -5 | -5 | 91 | -8 | -7 | -3 | 8 | -5 | -10 | 7 | 7 | 4 |
| 8 | -8 | 3 | 3 | 90 | -8 | -5 | 7 | 7 | -1 | -10 | 1 | 7 |
| -3 | -10 | 7 | 8 | -7 | 98 | -5 | -5 | 7 | -3 | -10 | -8 | -3 |
| 4 | -1 | -9 | -10 | -2 | -1 | 73 | 3 | 0 | 7 | -7 | 2 | -2 |
| 9 | 2 | -4 | -7 | 5 | -10 | -10 | 92 | 7 | -9 | -2 | -3 | -4 |
| -1 | -10 | -1 | -10 | -10 | -6 | 5 | -4 | 87 | -6 | 3 | -2 | 4 |
| -4 | -6 | -1 | 9 | -6 | -10 | 8 | -3 | -8 | 86 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 5 | 4 | 7 | 9 | 6 | 3 | -1 | 0 | 68 | 9 | 9 |
| 0 | 5 | 4 | 5 | -1 | -4 | -1 | -1 | 2 | -4 | -1 | 56 | 9 |

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| $A_{symmetric}$ | | | | | | | | | | | | b |
| 5702 | -1333 | -405 | -446 | 806 | -1059 | 515 | 808 | -759 | -350 | -74 | -592 | -629 |
| -1333 | 8382 | 106 | -473 | -95 | -776 | 497 | 454 | -1909 | 139 | -126 | 702 | 832 |
| -405 | 106 | 6640 | 227 | -502 | 1347 | -155 | -201 | -176 | 689 | 294 | 735 | 452 |
| -446 | -473 | 227 | 8765 | -423 | -28 | -1157 | 144 | -1143 | 145 | 760 | 856 | 344 |
| 806 | -95 | -502 | -423 | 8535 | -1179 | -468 | 1322 | -283 | -642 | -102 | 11 | 491 |
| -1059 | -776 | 1347 | -28 | -1179 | 10147 | -576 | -1436 | 106 | -1168 | 83 | -769 | -451 |
| 515 | 497 | -155 | -1157 | -468 | -576 | 5643 | -369 | 427 | 1096 | -116 | -70 | -327 |
| 808 | 454 | -201 | 144 | 1322 | -1436 | -369 | 8982 | 300 | -1230 | -46 | -204 | -406 |
| -759 | -1909 | -176 | -1143 | -283 | 106 | 427 | 300 | 7997 | -1061 | -63 | 12 | 169 |
| -350 | 139 | 689 | 145 | -642 | -1168 | 1096 | -1230 | -1061 | 7808 | 81 | -254 | 151 |
| -74 | -126 | 294 | 760 | -102 | 83 | -116 | -46 | -63 | 81 | 4924 | 427 | 736 |
| -592 | 702 | 735 | 856 | 11 | -769 | -70 | -204 | 12 | -254 | 427 | 3242 | 595 |

Результаты:

| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------------|-------------|
| Количество итераций | - | 11 | 7 | 25 | 12 | - |
| Критерий окончания итераций | - | Малость невязки | Малость невязки | Малость невязки | Малость невязки | - |
| x_1 | -0.04140748 | -0.08219178 | -0.08219178 | -0.04109589 | -0.04140747 | -0.04140748 |
| x_2 | 0.0951535 | 0.1011236 | 0.09281207 | 0.04848392 | 0.09515349 | 0.0951535 |
| x_3 | 0.07045395 | 0.07594937 | 0.07386856 | 0.03745448 | 0.07045396 | 0.07045395 |
| x_4 | 0.04999145 | 0.04395604 | 0.04859829 | 0.02320996 | 0.04999148 | 0.04999145 |
| x_5 | 0.09185645 | 0.07777778 | 0.08925145 | 0.04185914 | 0.09185645 | 0.09185645 |
| x_6 | -0.00910101 | -0.03061224 | -0.02652613 | -0.01425151 | -0.00910098 | -0.00910101 |
| x_7 | -0.00180436 | -0.02739726 | -0.00377595 | -0.00786627 | -0.00180429 | -0.00180436 |
| x_8 | -0.03653304 | -0.04347826 | -0.03869037 | -0.02089832 | -0.03653296 | -0.03653304 |
| x_9 | 0.07336947 | 0.04597701 | 0.06900295 | 0.0287478 | 0.07336951 | 0.07336947 |
| x_{10} | 0.03064549 | 0.02325581 | 0.03024415 | 0.01333687 | 0.03064556 | 0.03064549 |
| x_{11} | 0.09893318 | 0.13235294 | 0.12128454 | 0.06387051 | 0.09893317 | 0.09893318 |
| x_{12} | 0.1443634 | 0.16071429 | 0.14361446 | 0.07596003 | 0.1443634 | 0.1443634 |

Вычисление метода сопряженных градиентов и метода Гаусса выполнялось на симметричной матрице, остальные методы были вычислены на изначальное матрице.

Случайная матрица с выборкой [0,1)

$det(A_{random}) = -0.007392078169007411, \mu(A_{random}) = \|A_{random}\| * \|A_{random}^{-1}\| = 171.57062069397406$

| | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| A | | | | | | | | | | b |
| 0.09310 | 0.46296 | 0.93137 | 0.30380 | 0.60630 | 0.90974 | 0.00426 | 0.19193 | 0.12714 | 0.98395 | 0.41040 |
| 0.24521 | 0.76891 | 0.47166 | 0.55561 | 0.76400 | 0.41916 | 0.42559 | 0.74468 | 0.95186 | 0.81468 | 0.93407 |
| 0.20463 | 0.51378 | 0.84973 | 0.84296 | 0.02374 | 0.44718 | 0.66388 | 0.61766 | 0.57209 | 0.25182 | 0.25237 |
| 0.88916 | 0.98856 | 0.61451 | 0.44720 | 0.89148 | 0.86907 | 0.50745 | 0.06848 | 0.86180 | 0.84522 | 0.49320 |
| 0.23916 | 0.23566 | 0.37235 | 0.87459 | 0.97991 | 0.58573 | 0.70257 | 0.17351 | 0.22382 | 0.82836 | 0.67732 |
| 0.17299 | 0.63587 | 0.46413 | 0.88649 | 0.38913 | 0.35721 | 0.93878 | 0.19617 | 0.65420 | 0.82861 | 0.62401 |
| 0.44414 | 0.05817 | 0.73251 | 0.30840 | 0.17337 | 0.26483 | 0.31740 | 0.64132 | 0.73144 | 0.53343 | 0.80028 |
| 0.43692 | 0.52223 | 0.08441 | 0.47346 | 0.94672 | 0.80371 | 0.70694 | 0.45602 | 0.69618 | 0.14082 | 0.10161 |
| 0.74979 | 0.91611 | 0.41144 | 0.98386 | 0.02433 | 0.70182 | 0.64097 | 0.78008 | 0.01748 | 0.49528 | 0.04442 |
| 0.75950 | 0.49040 | 0.62319 | 0.77167 | 0.47742 | 0.62423 | 0.76287 | 0.99692 | 0.64978 | 0.39911 | 0.30820 |
| 0.01054 | 0.00871 | 0.45547 | 0.58313 | 0.67816 | 0.75775 | 0.39740 | 0.58843 | 0.48111 | 0.13340 | 0.84128 |
| 0.16602 | 0.06466 | 0.78431 | 0.62658 | 0.43781 | 0.06728 | 0.47534 | 0.63883 | 0.59357 | 0.72091 | 0.19221 |

| $A_{symmetric}$ | | | | | | | | | b |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4.32860 | 3.99913 | 2.72190 | 4.02301 | 3.14499 | 3.29613 | 2.77881 | 2.54551 | 3.25875 | 3.25499 |
| 3.99913 | 5.79533 | 3.67262 | 5.06622 | 3.95397 | 4.61251 | 3.89278 | 3.73887 | 3.98181 | 4.67136 |
| 2.72190 | 3.67262 | 3.48268 | 3.37672 | 2.65894 | 3.46967 | 2.79404 | 2.64362 | 3.62647 | 3.83958 |
| 4.02301 | 5.06622 | 3.37672 | 5.96422 | 4.08711 | 4.37998 | 3.29952 | 4.01039 | 4.01840 | 4.54352 |
| 3.14499 | 3.95397 | 2.65894 | 4.08711 | 4.05610 | 3.75951 | 2.54847 | 3.04612 | 2.99136 | 3.50605 |
| 3.29613 | 4.61251 | 3.46967 | 4.37998 | 3.75951 | 4.50313 | 3.09145 | 3.17113 | 3.77247 | 4.02348 |
| 2.77881 | 3.89278 | 2.79404 | 3.29952 | 2.54847 | 3.09145 | 3.25688 | 2.24767 | 2.72087 | 3.45720 |
| 2.54551 | 3.73887 | 2.64362 | 4.01039 | 3.04612 | 3.17113 | 2.24767 | 3.64560 | 3.16916 | 3.73490 |
| 3.25875 | 3.98181 | 3.62647 | 4.01840 | 2.99136 | 3.77247 | 2.72087 | 3.16916 | 5.07639 | 4.46737 |
| 3.25499 | 4.67136 | 3.83958 | 4.54352 | 3.50605 | 4.02348 | 3.45720 | 3.73490 | 4.46737 | 4.98484 |
| 2.42863 | 3.40900 | 2.42971 | 3.03193 | 2.97243 | 2.75708 | 2.48397 | 2.59751 | 2.22107 | 3.10237 |
| 2.79500 | 3.66512 | 2.88644 | 3.11504 | 2.74696 | 3.21662 | 2.82167 | 2.35331 | 2.87909 | 3.44315 |

Результаты

| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|----------------|----------|---------------------------|---------------------------|------------------------|-------------|
| Количество итераций | - | ∞ | 56 | 84 | 14 | - |
| Критерий окончания итераций | - | - | Малость нормы приближений | Малость нормы приближений | Малость невязки | - |
| x_1 | 1.24386958 | ∞ | 5.07222390 | 2.53611195 | 1.24386957 | 1.24386958 |
| x_2 | -1.46857295 | ∞ | 0.064430212 | -0.07782169 | -1.46857295 | -1.46857295 |
| x_3 | -0.29223781 | ∞ | 0.026281931 | -0.17580902 | -0.29223781 | -0.29223781 |
| x_4 | 1.10681103 | ∞ | -6.48895878 | -1.87528237 | 1.10681102 | 1.10681103 |
| x_5 | 0.58006511 | ∞ | 5.17476138 | 0.68376892 | 0.58006511 | 0.58006511 |
| x_6 | -0.31909681 | ∞ | 11.2342668 | 2.00074065 | -0.31909681 | -0.31909681 |
| x_7 | -0.76018098 | ∞ | -8.91521041 | -0.21629973 | -0.76018099 | -0.76018098 |
| x_8 | -0.97736241 | ∞ | 1.7939253 | -1.552086 | -0.97736241 | -0.97736241 |
| x_9 | 0.75454575 | ∞ | 633.812509 | 15.83035935 | 0.75454575 | 0.75454575 |
| x_{10} | -0.62774438 | ∞ | 2.68475 | -12.26533549 | -0.62774438 | -0.62774438 |
| x_{11} | -0.2649922 | ∞ | 0.632206 | -3.45405884 | -0.2649922 | -0.2649922 |
| x_{12} | 1.98558713 | ∞ | 676.603626 | 2.21005337 | 1.98558712 | 1.98558713 |

Все методы вычислялись на симметричной матрице, метод Якоби не дал ответа, так как не выполнялись условия накладываемые на матрицу, которые описаны выше.

Гильбертова матрица

Результаты для Гильбертовой матрицы имеют большие ошибки, так как она плохо обусловлена и имеет относительно большую размерность.

[illegible]

$$\mu(A_{Hilbert}) = \|A_{Hilbert}\| * \|A_{Hilbert}^{-1}\| = 18,114,388,365,948,876$$

| A | | | | | | | | | | | | b |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.00000 | 0.50000 | 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.97844 |
| 0.50000 | 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.18721 |
| 0.33333 | 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.14532 |
| 0.25000 | 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.95626 |
| 0.20000 | 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.64579 |
| 0.16667 | 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.24603 |
| 0.14286 | 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.23098 |
| 0.12500 | 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.17866 |
| 0.11111 | 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.62681 |
| 0.10000 | 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.74929 |
| 0.09091 | 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.04545 | 0.37816 |
| 0.08333 | 0.07692 | 0.07143 | 0.06667 | 0.06250 | 0.05882 | 0.05556 | 0.05263 | 0.05000 | 0.04762 | 0.04545 | 0.04348 | 0.02893 |

| $A_{symmetric}$ | | | | | | | | | | | | b |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.56498 | 0.92308 | 0.67582 | 0.53944 | 0.45145 | 0.38940 | 0.34302 | 0.30690 | 0.27792 | 0.25409 | 0.23414 | 0.21716 | 1.76640 |
| 0.92308 | 0.57089 | 0.42857 | 0.34762 | 0.29425 | 0.25598 | 0.22701 | 0.20421 | 0.18575 | 0.17047 | 0.15759 | 0.14657 | 1.13524 |
| 0.67582 | 0.42857 | 0.32600 | 0.26667 | 0.22708 | 0.19845 | 0.17661 | 0.15934 | 0.14528 | 0.13360 | 0.12371 | 0.11524 | 0.87851 |
| 0.53944 | 0.34762 | 0.26667 | 0.21933 | 0.18750 | 0.16434 | 0.14660 | 0.13250 | 0.12100 | 0.11142 | 0.10329 | 0.09631 | 0.72909 |
| 0.45145 | 0.29425 | 0.22708 | 0.18750 | 0.16074 | 0.14118 | 0.12614 | 0.11417 | 0.10438 | 0.09620 | 0.08926 | 0.08328 | 0.62818 |
| 0.38940 | 0.25598 | 0.19845 | 0.16434 | 0.14118 | 0.12420 | 0.11111 | 0.10067 | 0.09211 | 0.08496 | 0.07887 | 0.07363 | 0.55423 |
| 0.34302 | 0.22701 | 0.17661 | 0.14660 | 0.12614 | 0.11111 | 0.09950 | 0.09023 | 0.08261 | 0.07624 | 0.07082 | 0.06614 | 0.49716 |
| 0.30690 | 0.20421 | 0.15934 | 0.13250 | 0.11417 | 0.10067 | 0.09023 | 0.08187 | 0.07500 | 0.06925 | 0.06435 | 0.06012 | 0.45150 |
| 0.27792 | 0.18575 | 0.14528 | 0.12100 | 0.10438 | 0.09211 | 0.08261 | 0.07500 | 0.06874 | 0.06349 | 0.05902 | 0.05516 | 0.41400 |
| 0.25409 | 0.17047 | 0.13360 | 0.11142 | 0.09620 | 0.08496 | 0.07624 | 0.06925 | 0.06349 | 0.05866 | 0.05455 | 0.05099 | 0.38255 |
| 0.23414 | 0.15759 | 0.12371 | 0.10329 | 0.08926 | 0.07887 | 0.07082 | 0.06435 | 0.05902 | 0.05455 | 0.05073 | 0.04743 | 0.35575 |
| 0.21716 | 0.14657 | 0.11524 | 0.09631 | 0.08328 | 0.07363 | 0.06614 | 0.06012 | 0.05516 | 0.05099 | 0.04743 | 0.04436 | 0.33260 |

Результаты

| Метод | Точное решение | Якоби | Зайделя | Зайделя с релаксацией | Сопряжённых градиентов | Гаусса |
|-----------------------------|---------------------|----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------|
| Количество итераций | - | ∞ | 398,143 | 760,067 | 7 | - |
| Критерий окончания итераций | - | - | Малость нормы приближений | Малость нормы приближений | Малость нормы приближений | - |
| x_1 | 46,781,720.8 | ∞ | 17.81627383 | -3,583.32097743 | 30.78958822 | 863.078119 |
| x_2 | 849,034,980 | ∞ | -91.70662594 | 91,128.5186219 | -214.16477372 | 191.0547 |
| x_3 | 181,684,671,000 | ∞ | 57.41217542 | -481,556.34841693 | 220.24024254 | 980,106.815 |
| x_4 | 447,964,920,000 | ∞ | 45.41660631 | 634,810.5275951 | 160.16744491 | 518,299.37 |
| x_5 | 17,765,826,500,000 | ∞ | 20.08695618 | 390,529.52021387 | 9.5460452 | 3,125,122.47 |
| x_6 | 7,351,576,700,000 | ∞ | 2.7947155 | -474,326.46996043 | -94.26656176 | 2,369,739.56 |
| x_7 | 213,749,747,000,000 | ∞ | -6.48350621 | -470,036.33912928 | -132.4074806 | 2,395,753.35 |
| x_8 | 84,020,107,000,000 | ∞ | -10.46428639 | -1,280,820.31120389 | -118.56941313 | 478,289.70 |
| x_9 | 447,139,526,000,000 | ∞ | -11.35370314 | 1,242,462.62332825 | -70.5986475 | 34,288.02 |
| x_{10} | 25,426,524,000,000 | ∞ | -10.57752072 | 1,554,802.01113041 | -3.02426836 | 16,908,362.2 |
| x_{11} | 134,524,619,000,000 | ∞ | -8.98870386 | -639,258.44737977 | 73.89735875 | 851,236,572 |
| x_{12} | 4,109,452,800,000 | ∞ | -7.07703951 | -568,582.92197412 | 153.43207369 | 530,440.05 |

Все методы вычислялись на симметричной матрице, метод Якоби не дал ответа, так как не выполнялись условия накладываемые на матрицу, которые описаны выше.

```
//TODO:
// Проверить все критерии окончания итераций

// Проверить, правильно ли указано, где использовались изначальные, а где симметричные матрицы

// Объяснить использование именно симметричных матриц там, где они используются

// (Не обязательно) Объяснить неточность решений обоими методами Зайделя для случайной матрицы
// неоптимальным критерием окончания итераций (возможно, лучше предоставить решение только с невязкой
и
// объяснить это)

// Раньше Зайдель и Градиенты давали одинаковый ответ на Гильберта, разобраться и, если что, пофиксить.
// Теперь в Гильберте даже ничего общего просто нет, выглядит печально.

// Просмотреть все еще раз, может что-то забыл
```