Домашнее задание 1

Задание 1

Многочлен $P_n(x) = 3200x^5 + 480x^4 - 73624x^3 - 10686x^2 + 245645x - 59598$

Локализация

Производная $P_n'(x) = 16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645$
$16000x^4 + 1920x^3 - 220872x^2 - 21372x + 245645 = 0$
Корни: $x \approx -3.5554$
$x \approx -1.1580$
$x \approx 1.0534$
$x \approx 3.5400$

Возьмём отрезки с концами близкими к корням уравнения производной в качестве разбиения

x	**-4.5**	**-2.5**	**-0.5**	**1.5**	**3.5**	**5.5**
$P_n(x)$	-380475	116127	-175959	63075	-734643	5263335

Выберем отрезки $[-4.5; -2.5]$, $[-2.5; -0.5]$, $[-0.5; 1.5]$, $[1.5; 3.5]$, $[3.5; 5.5]$

Для любого a и b, которые являются границами выбранных отрезков, выполняется условие: $f(a)f(b) < 0$

Так как мы нашли пять отрезков, удовлетворяющих этому условию, и максимальное количество корней уравнения многочлена пятой степени равно пяти, то на каждом отрезке ровно один корень

Нахождение корней методом Ньютона

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P_n'(x_n)}$, $\epsilon = 10^{-6}$

итерации	$[-4.5; -2.5]$	$[-2.5; -0.5]$	$[-0.5; 1.5]$	$[1.5; 3.5]$	$[3.5; 5.5]$
1	-4.3312899768	-2.2612397820	0.2155502511	1.8219837248	4.8739461899
2	-4.300928818	-2.2500386685	0.2496899396	1.7532514185	4.5286058187
3	-4.3000008506	-2.2500000005	0.2499999724	1.7500074089	4.4127323851
4	-4.3000000000	-2.2500000000	0.2500000000	1.7500000000	4.4001411870
корень	-4.3	-2.25	0.25	1.75	4.4

Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$
Значения получены из программы, в качестве начального приближения бралось такое x_0, что $f(x_0)f(x_0)'' = P_n(x_0)P_n(x_0)'' > 0$

Задание 2

Будем везде брать $x_0 = 0.5$

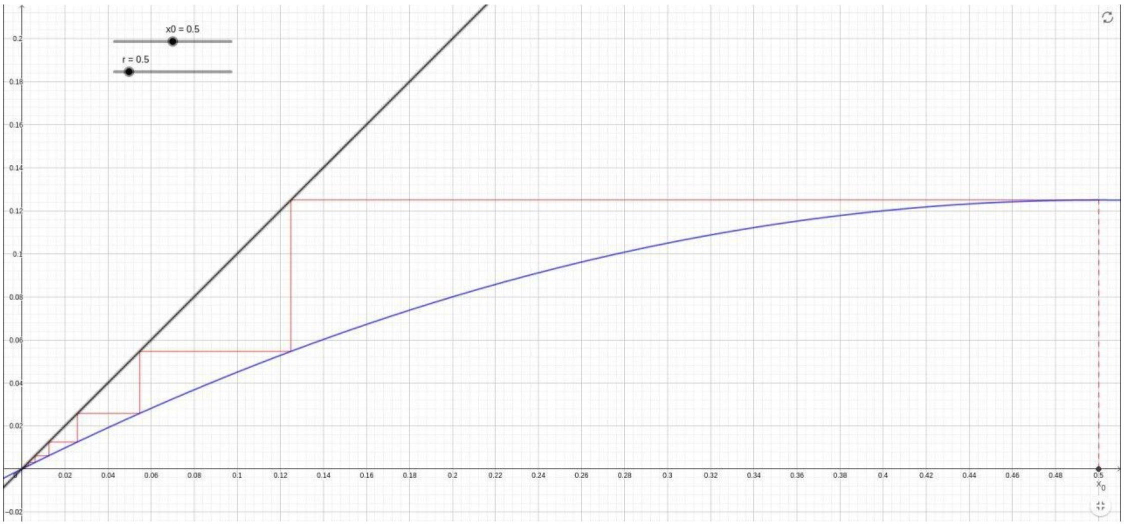
1. $0 < r < 1$

   - Возьмём $r = 0.5$

     $\phi(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

     $\phi'(x) = \frac{1}{2} - x$

     по теореме о сходимости метода простых итераций итерационная последовательность сходится к корню $x = 0$, так как на отрезке $x \in [0-\delta, 0+\delta]$ $\phi'(x)$ непрерывна и $|\phi'(x)| < 1$



2. $1 < r < 3$

   - $1 < r < 2$

     пусть $r = 1.5$

     $\phi(x) = \frac{3}{2}x(1-x)$

     $\phi'(x) = \frac{3}{2} - 3x$

     при $x \in [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta]$ $|\phi'(x)| < 1$ и непрерывно $\implies$ по теореме о сходимости метода простых итераций последовательность сходится к корню $x = \frac{1}{3}$

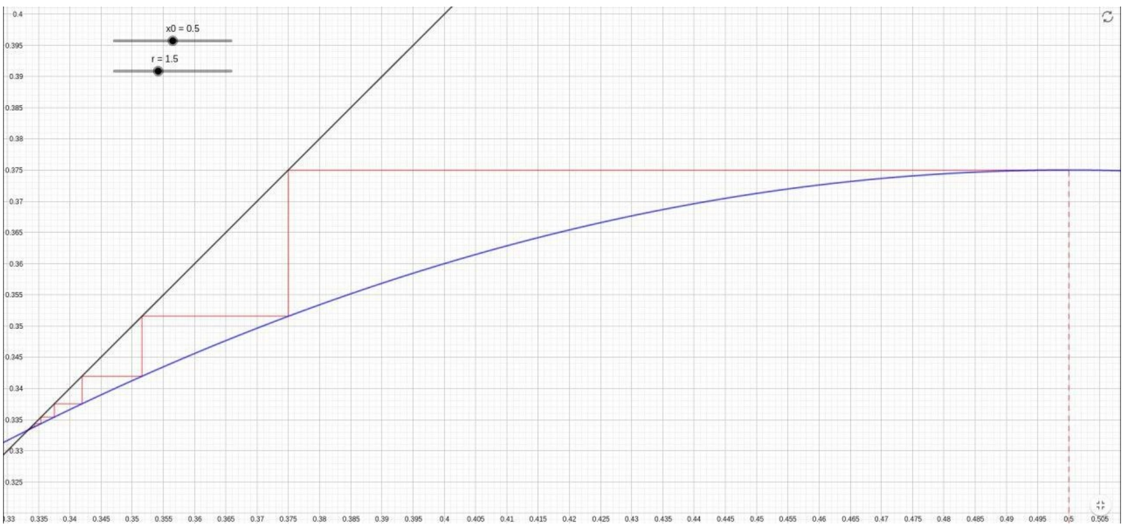


     график иллюстрирует монотонную сходимость

   - $2 < r < 3$

пусть $r = 2.5$

$\phi(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$

$\phi'(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{x}$

аналогично итерационная последовательность сходится к корню $x = \frac{3}{5}$

так как при $x \in [\frac{3}{5} - \delta, \frac{3}{5} + \delta]$

$|\phi'(x)| < 1$ и непрерывна

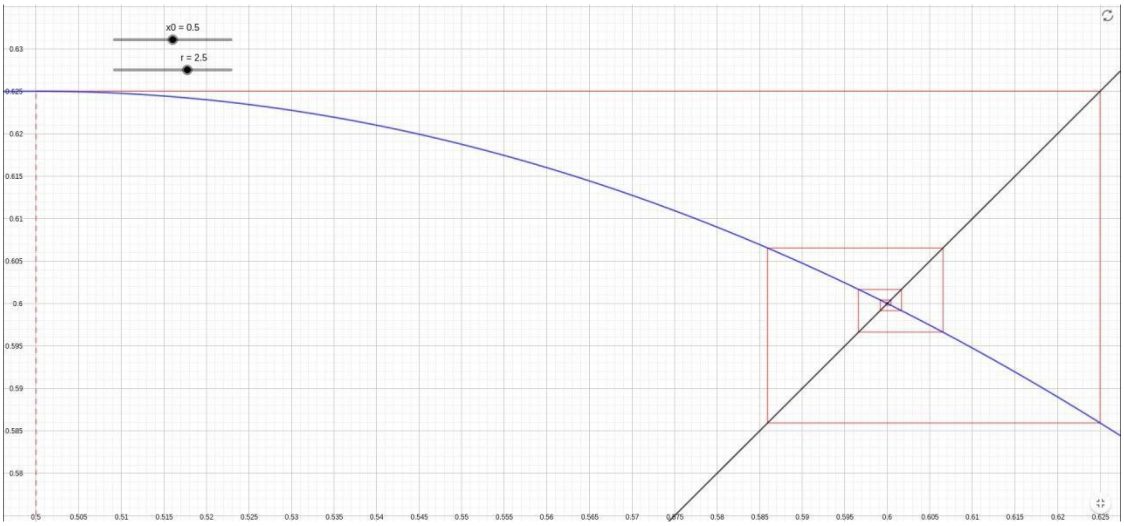
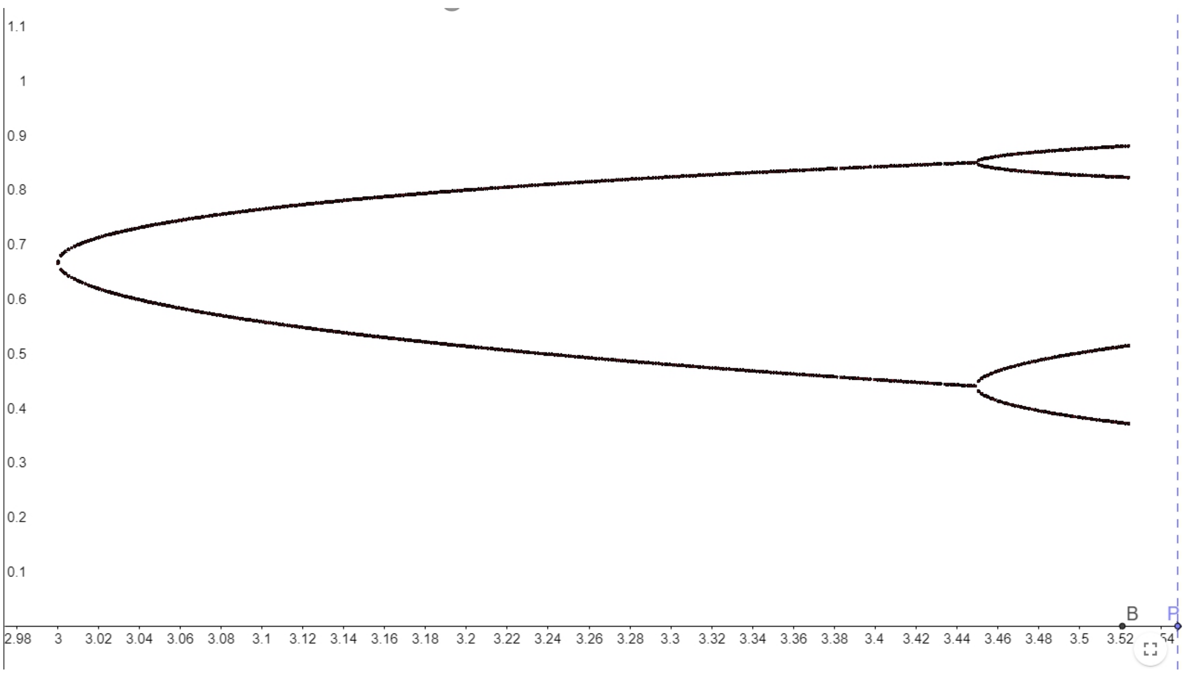
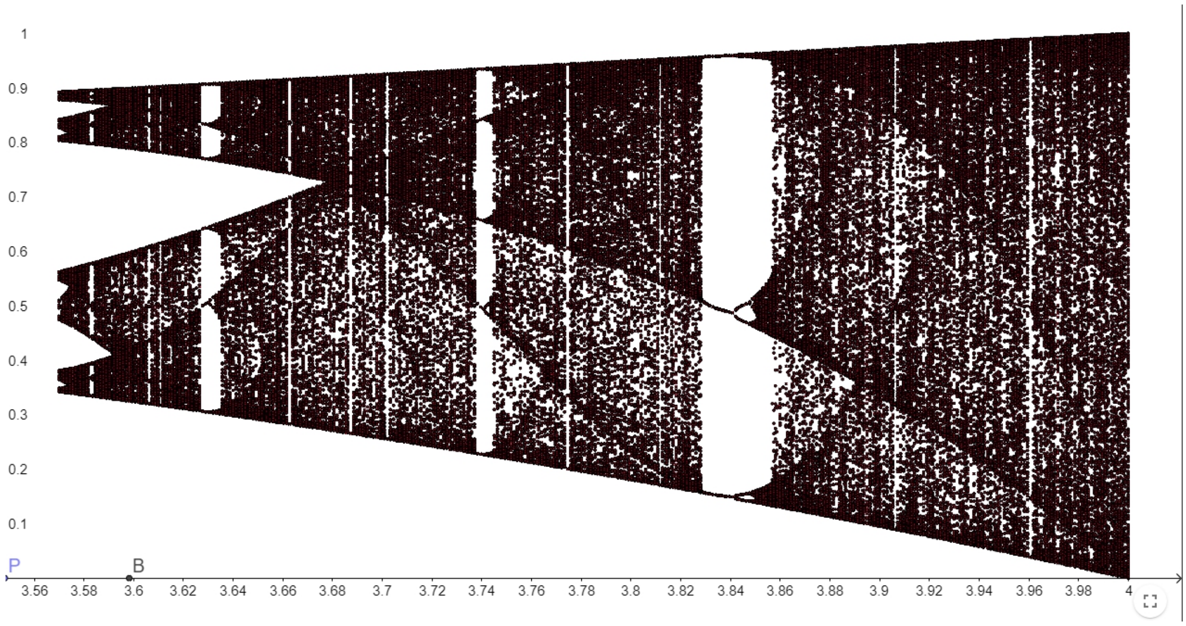


график иллюстрирует колебательную сходимость

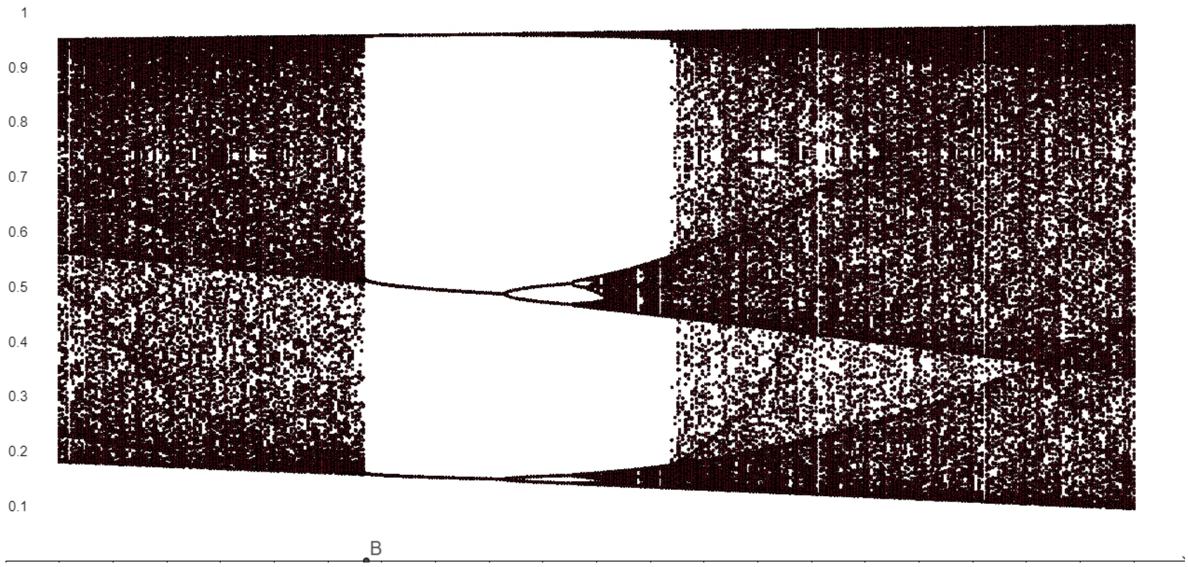
Рассмотрим каскад бифуркаций удвоения периода в диапозоне $3 < r < r_1$, где $r_1 = 3.5699456 - \frac{1}{4.66920116}$. Итерационная последовательность распадается на подпоследовательности, каждая из которых имеет свой предел. Таких промежутков бесконечно много, но они аналогичны, рассмотрим один из них:



Покажем, что в диапозоне $r_\infty < r < 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на детерминированный хаос:

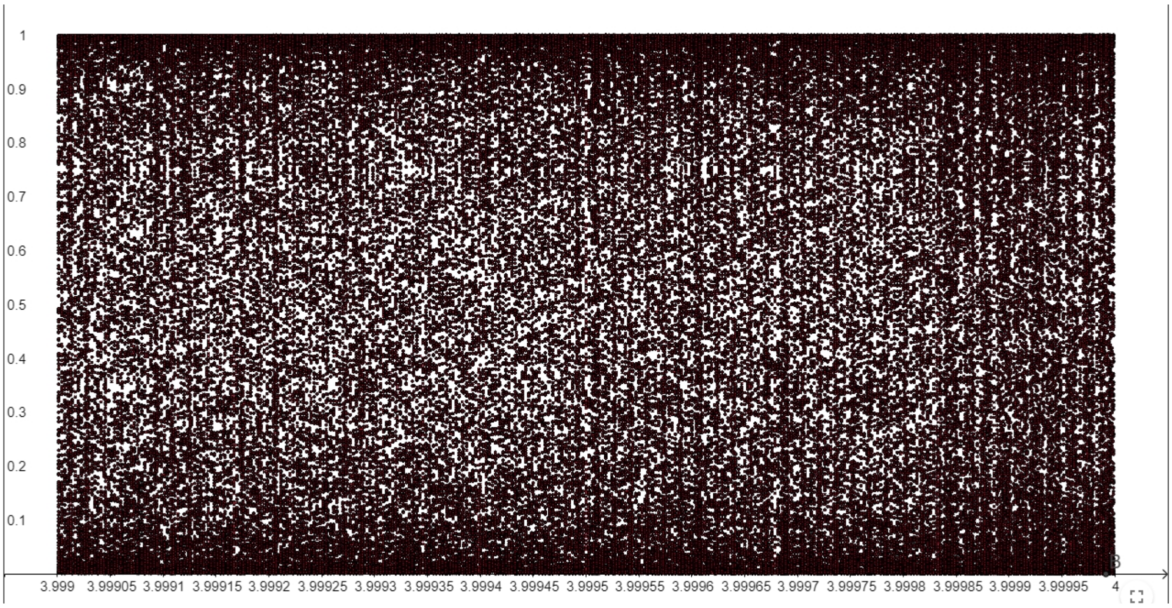


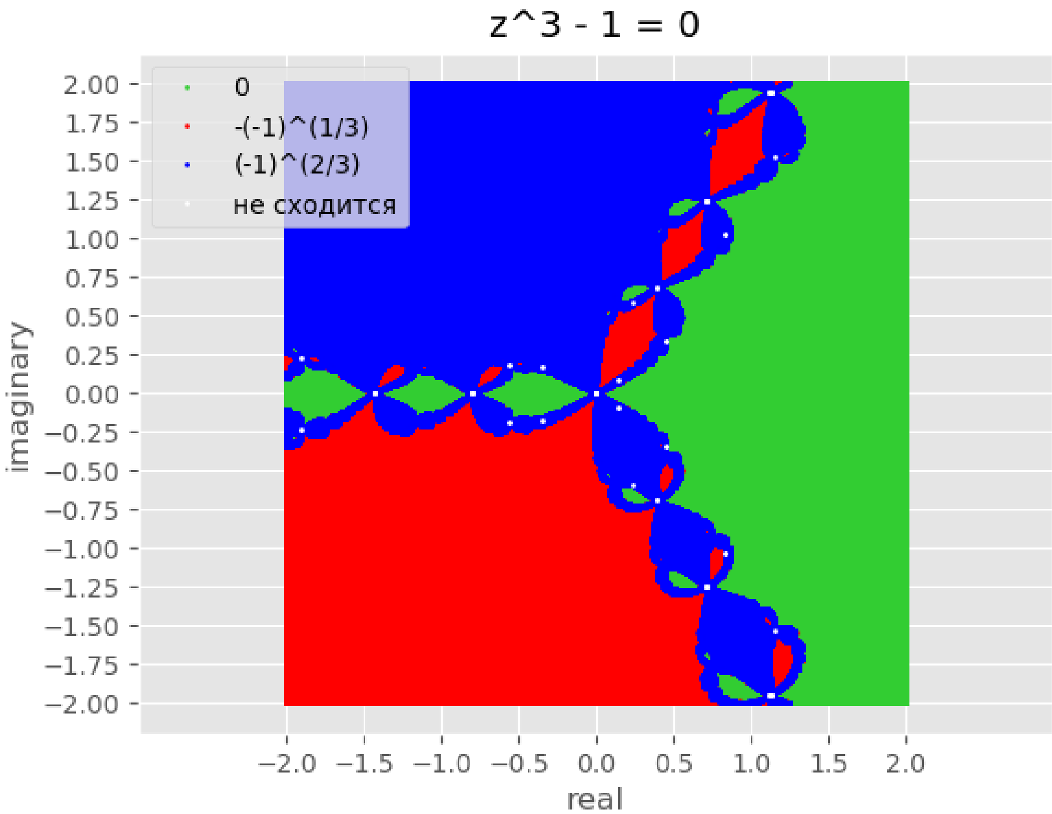
Также заметим, что если рассмотреть один из подпромежутков, то при некоторых значениях r имеются области сгущения и разрежения итерационной последовательсти. Этот график рассматривает часть предыдущего графика для наглядности



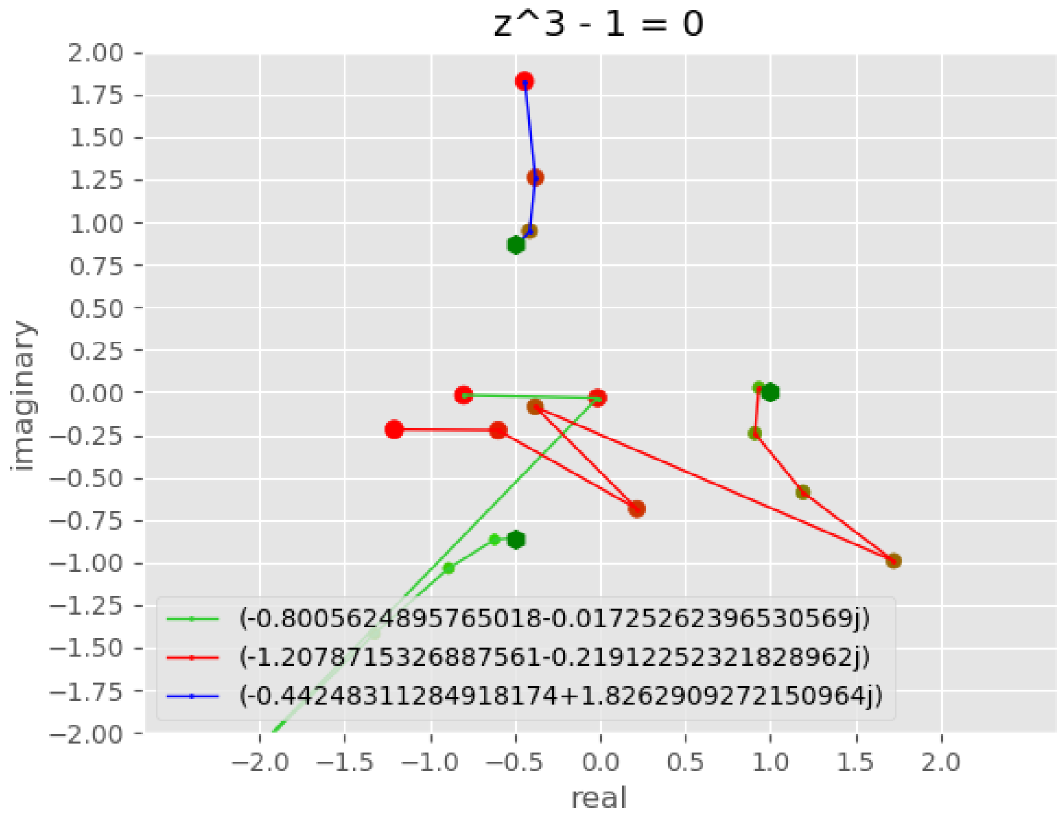
Этот график показывает, что в окрестности $r = 4$ поведение итерационной последовательности становится похожим на белый шум

Задание 3





для случайных начальных значений:



z^3 - 1 = 0
imaginary
real
(-0.8005624895765018-0.01725262396530569j)
(-1.2078715326887561-0.21912252321828962j)
(-0.44248311284918174+1.8262909272150964j)