

Домашнее задание 2

Для всех итерационных методов использовались критерии малости невязки ($\frac{\|Ax^k - b\|}{\|b\|} \leq \epsilon$) и малости нормы разности двух последовательных приближений ($\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$), где $\epsilon = 0.000001$ и в качестве нормы используется 2-норма векторов.

Для всех методов максимальное количество итераций $maxIterations = 1,000,000$.

В методе Зайделя с релаксацией для всех матриц использовалось $\omega = 0.5$.

Для метода Якоби проверялось условие сходимости $\rho(D^{-1}R) < 1$, где ρ - спектральный радиус матрицы ($\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа), D - диагональная матрица, $R = A - D$. Это необходимо, так как на неподходящих под это условие матрицах невозможно было найти ответ в силу ограничений на операцию деления для типа float64 (после нескольких десятков итераций из-за деления на относительно маленькое число вектор x равнялся $[\infty, \dots, \infty]$). Стоит отметить, что матрицы, которые не подходили под это условие, также не подходили под условие диагонального преобладания, которое является существенным (хоть и не необходимым) для сходимости метода Якоби.

В методе сопряженных градиентов все матрицы приводятся к симметричной положительно определенной матрице посредством домножения исходного уравнения $Ax = b$ на A^T (слева), так что $A^T Ax = A^T b$.

$A_{symmetric}$ - матрица A и ее вектор b , домноженные слева на A^T .

$\mu(A)$ - число обусловленности.

Все результаты переведены из научной записи ($1e + 1$) в десятичную.

Диагональная матрица

Матрица хорошо обусловленная, т. к. $\det(A_{diag}) \approx 79,649,555,832,435,952,568,192$,
 $\mu(A_{diag}) = \|A_{diag}\| * \|A_{diag}^{-1}\| = 13.329146508625698$

A											b	
73	-8	-1	-2	2	-9	3	1	-10	-3	0	-10	-6
-9	89	-1	0	8	3	7	6	-10	7	-6	6	9
-2	0	79	7	-8	8	7	5	0	8	-4	8	6
-5	-5	-5	91	-8	-7	-3	8	-5	-10	7	7	4
8	-8	3	3	90	-8	-5	7	7	-1	-10	1	7
-3	-10	7	8	-7	98	-5	-5	7	-3	-10	-8	-3
4	-1	-9	-10	-2	-1	73	3	0	7	-7	2	-2
9	2	-4	-7	5	-10	-10	92	7	-9	-2	-3	-4
-1	-10	-1	-10	-10	-6	5	-4	87	-6	3	-2	4
-4	-6	-1	9	-6	-10	8	-3	-8	86	2	1	2
1	1	5	4	7	9	6	3	-1	0	68	9	9
0	5	4	5	-1	-4	-1	-1	2	-4	-1	56	9

$A_{\text{symmetric}}$										b		
5702	-1333	-405	-446	806	-1059	515	808	-759	-350	-74	-592	-629
-1333	8382	106	-473	-95	-776	497	454	-1909	139	-126	702	832
-405	106	6640	227	-502	1347	-155	-201	-176	689	294	735	452
-446	-473	227	8765	-423	-28	-1157	144	-1143	145	760	856	344
806	-95	-502	-423	8535	-1179	-468	1322	-283	-642	-102	11	491
-1059	-776	1347	-28	-1179	10147	-576	-1436	106	-1168	83	-769	-451
515	497	-155	-1157	-468	-576	5643	-369	427	1096	-116	-70	-327
808	454	-201	144	1322	-1436	-369	8982	300	-1230	-46	-204	-406
-759	-1909	-176	-1143	-283	106	427	300	7997	-1061	-63	12	169
-350	139	689	145	-642	-1168	1096	-1230	-1061	7808	81	-254	151
-74	-126	294	760	-102	83	-116	-46	-63	81	4924	427	736
-592	702	735	856	11	-769	-70	-204	12	-254	427	3242	595

Результаты:

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
Количество итераций	-	11	7	25	12	-
Критерий окончания итераций	-	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	Малость невязки	-
x_1	-0.04140748	-0.08219178	-0.08219178	-0.04109589	-0.04140747	-0.04140748
x_2	0.0951535	0.1011236	0.09281207	0.04848392	0.09515349	0.0951535
x_3	0.07045395	0.07594937	0.07386856	0.03745448	0.07045396	0.07045395
x_4	0.04999145	0.04395604	0.04859829	0.02320996	0.04999148	0.04999145
x_5	0.09185645	0.07777778	0.08925145	0.04185914	0.09185645	0.09185645
x_6	-0.00910101	-0.03061224	-0.02652613	-0.01425151	-0.00910098	-0.00910101
x_7	-0.00180436	-0.02739726	-0.00377595	-0.00786627	-0.00180429	-0.00180436
x_8	-0.03653304	-0.04347826	-0.03869037	-0.02089832	-0.03653296	-0.03653304
x_9	0.07336947	0.04597701	0.06900295	0.0287478	0.07336951	0.07336947
x_{10}	0.03064549	0.02325581	0.03024415	0.01333687	0.03064556	0.03064549
x_{11}	0.09893318	0.13235294	0.12128454	0.06387051	0.09893317	0.09893318
x_{12}	0.1443634	0.16071429	0.14361446	0.07596003	0.1443634	0.1443634

Вычисление метода сопряженных градиентов и метода Гаусса выполнялось на симметричной матрице, остальные методы были вычислены на изначальное матрице.

Случайная матрица с выборкой [0,1)

det(A_random) = -0.007392078169007411, mu(A_random) = ||A_random|| * ||A_random^-1|| = 171.57062069397406

A										b
0.09310	0.46296	0.93137	0.30380	0.60630	0.90974	0.00426	0.19193	0.12714	0.98395	0.41040
0.24521	0.76891	0.47166	0.55561	0.76400	0.41916	0.42559	0.74468	0.95186	0.81468	0.93407
0.20463	0.51378	0.84973	0.84296	0.02374	0.44718	0.66388	0.61766	0.57209	0.25182	0.25237
0.88916	0.98856	0.61451	0.44720	0.89148	0.86907	0.50745	0.06848	0.86180	0.84522	0.49320
0.23916	0.23566	0.37235	0.87459	0.97991	0.58573	0.70257	0.17351	0.22382	0.82836	0.67732
0.17299	0.63587	0.46413	0.88649	0.38913	0.35721	0.93878	0.19617	0.65420	0.82861	0.62401
0.44414	0.05817	0.73251	0.30840	0.17337	0.26483	0.31740	0.64132	0.73144	0.53343	0.80028
0.43692	0.52223	0.08441	0.47346	0.94672	0.80371	0.70694	0.45602	0.69618	0.14082	0.10161
0.74979	0.91611	0.41144	0.98386	0.02433	0.70182	0.64097	0.78008	0.01748	0.49528	0.04442
0.75950	0.49040	0.62319	0.77167	0.47742	0.62423	0.76287	0.99692	0.64978	0.39911	0.30820
0.01054	0.00871	0.45547	0.58313	0.67816	0.75775	0.39740	0.58843	0.48111	0.13340	0.84128
0.16602	0.06466	0.78431	0.62658	0.43781	0.06728	0.47534	0.63883	0.59357	0.72091	0.19221

A_symmetric										b
4.32860	3.99913	2.72190	4.02301	3.14499	3.29613	2.77881	2.54551	3.25875	3.25499	
3.99913	5.79533	3.67262	5.06622	3.95397	4.61251	3.89278	3.73887	3.98181	4.67136	
2.72190	3.67262	3.48268	3.37672	2.65894	3.46967	2.79404	2.64362	3.62647	3.83958	
4.02301	5.06622	3.37672	5.96422	4.08711	4.37998	3.29952	4.01039	4.01840	4.54352	
3.14499	3.95397	2.65894	4.08711	4.05610	3.75951	2.54847	3.04612	2.99136	3.50605	
3.29613	4.61251	3.46967	4.37998	3.75951	4.50313	3.09145	3.17113	3.77247	4.02348	
2.77881	3.89278	2.79404	3.29952	2.54847	3.09145	3.25688	2.24767	2.72087	3.45720	
2.54551	3.73887	2.64362	4.01039	3.04612	3.17113	2.24767	3.64560	3.16916	3.73490	
3.25875	3.98181	3.62647	4.01840	2.99136	3.77247	2.72087	3.16916	5.07639	4.46737	
3.25499	4.67136	3.83958	4.54352	3.50605	4.02348	3.45720	3.73490	4.46737	4.98484	
2.42863	3.40900	2.42971	3.03193	2.97243	2.75708	2.48397	2.59751	2.22107	3.10237	
2.79500	3.66512	2.88644	3.11504	2.74696	3.21662	2.82167	2.35331	2.87909	3.44315	

Результаты

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
Количество итераций	-	∞	56	84	14	-
Критерий окончания итераций	-	-	Малость нормы приближений	Малость нормы приближений	Малость невязки	-
x_1	1.24386958	∞	5.07222390	2.53611195	1.24386957	1.24386958
x_2	-1.46857295	∞	0.064430212	-0.07782169	-1.46857295	-1.46857295
x_3	-0.29223781	∞	0.026281931	-0.17580902	-0.29223781	-0.29223781
x_4	1.10681103	∞	-6.48895878	-1.87528237	1.10681102	1.10681103
x_5	0.58006511	∞	5.17476138	0.68376892	0.58006511	0.58006511
x_6	-0.31909681	∞	11.2342668	2.00074065	-0.31909681	-0.31909681
x_7	-0.76018098	∞	-8.91521041	-0.21629973	-0.76018099	-0.76018098
x_8	-0.97736241	∞	1.7939253	-1.552086	-0.97736241	-0.97736241
x_9	0.75454575	∞	633.812509	15.83035935	0.75454575	0.75454575
x_{10}	-0.62774438	∞	2.68475	-12.26533549	-0.62774438	-0.62774438
x_{11}	-0.2649922	∞	0.632206	-3.45405884	-0.2649922	-0.2649922

Метод	Точное решение	Якоби	Зайделя	Зайделя с релаксацией	Сопряжённых градиентов	Гаусса
x_{12}	1.98558713	∞	676.603626	2.21005337	1.98558712	1.98558713

Гильбертова матрица

[illegible]

A											b	
1.00000	0.50000	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.97844
0.50000	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.18721
0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.14532
0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.95626
0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.64579
0.16667	0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.24603
0.14286	0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.23098
0.12500	0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.17866
0.11111	0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.62681
0.10000	0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.74929
0.09091	0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.04545	0.37816
0.08333	0.07692	0.07143	0.06667	0.06250	0.05882	0.05556	0.05263	0.05000	0.04762	0.04545	0.04348	0.02893

Результаты

Все методы вычислялись на симметричной матрице, метод Якоби не дал ответа, так как не выполнялись условия накладываемые на матрицу, которые описаны выше.