List 9

Sunday, 11 December 2022 06:17

Lista09

4. Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:
(a) $(x+1)^6$, (b) x^6-4x^3+4, (c) $\frac{1}{1-x}$,
(d) $x^3\log x$, (e) e^{2x-1}; (f) $(x^2+1)^3$,
(g) e^{x^2}, (h) $\log(x^2)$, (i) $(x-7)^{50}$.

4, h) $f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x$

$f''(x) = -2\frac{1}{x^3}\cdot 2x + \frac{1}{x^2}\cdot 2$

$f'''(x) = 12\cdot\frac{1}{x^3} + -4\frac{1}{x^3} - 4\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{4}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{+1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = \frac{0\cdot\cancel{(1-x)^2} - 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^3}$

$f'''(x) = \frac{0\cdot(1-x)^3 - 6(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{-6}{(1-x)^4}$

g) e^{x^2}

$f'(x) = e^{x^2}\cdot 2x$

$f''(x) = e^{x^2}\cdot 2 + e^{x^2}\cdot 4x$

$f'''(x) = e^{x^2}\cdot 4x + e^{x^2}\cdot 2x\cdot 4x + e^{x^2}\cdot 4 =$
$= e^{x^2}\cdot 4x + e^{x^2}\cdot 8x^2 + e^{x^2}\cdot 4$

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

5.12.2022

1. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{7x}-1}{x} & : \quad x \neq 0, \\ 7 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} & : \quad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$ $f'(0)=0$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-3e^x+2}{x^2} & : \quad x \neq 0, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

4. Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:

(a) $(x+1)^6$, (b) x^6-4x^3+4, (c) $\dfrac{1}{1-x}$,
(d) $x^3\log x$, (e) e^{2x-1}; (f) $(x^2+1)^3$,
(g) e^{x^2}, (h) $\log(x^2)$, (i) $(x-7)^{50}$.

5. Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:

(a) $\log(x^{10})$, (b) $x\log(x)$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $\sin^2(x)$, (e) $\dfrac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7, (i) e^{4x},
(j) $x+\dfrac{1}{x}$, (k) x^2e^{-x}.

6. Udowodnij, że

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

7. Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

(a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$, 2^7
(d) $\sin(\frac{1}{10})$, (e) $\arctan(\frac{1}{10})$, (f) $\sqrt{50}$.

2.7 a) $\sqrt{24}$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{24} = f(x_0 - 1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}$

$f'(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}$

2.1 jest ciągła $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{e^{7x}-1}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \frac{e^{7x}\cdot 7}{1} = 7 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 7 \end{cases}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{7h}-1}{h} - 7}{h} \overset{d'H}{=} \frac{49}{2}$

2.2 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{d'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{d'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

$A = -2$

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{h^2}-1}{\cos h - 1}+2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1+2\cos(h)-2}{h\cos(h)-h} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{d'H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}\cdot 2h - 2\sin(h)}{\cos(h)-\sin(h)-1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{d'H}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}\cdot 2h + 2e^{h^2} - 2\cos(h)}{-\sin(h)-\cos(h)-1} = 0$

$=0 \quad +2 \quad -2$

$0 \quad -1 \quad -1$

5. Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:
(a) $\log(x^{10})$, (b) $x\log(x)$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $\sin^2(x)$, (e) $\frac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7, (i) e^{4x},
(j) $x+\frac{1}{x}$, (k) x^2e^{-x}.

b) $x\log(x)$

$f'(x) = \log(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \log(x)+1$

$f''(x) = \frac{1}{x}$ dla $n>1$ $f^{n}(x) = (-1)^n(n-2)!\,x^{-n+1}$

$f'''(x) = -1\cdot\frac{1}{x^2}$

$f''''(x) = 2\cdot\frac{1}{x^3}$

$f'''''(x) = -6\cdot\frac{1}{x^4} = -6\cdot x^{-4}$

$f^{6}(x) = 24\cdot x^{-5}$

k) $x^2\cdot e^{-x}$

$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot x^2$

$f''(x) = 2\cdot e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - (2x\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot x^2) =$
$= 2\cdot e^{-x} - 2xe^{-x} - 2x\cdot e^{-x} + e^{-x}\cdot x^2 =$
$= 2e^{-x} - 4x\cdot e^{-x} + e^{-x}\cdot x^2 = e^{-x}(2-4x+x^2)$

$f'''(x) = -e^{-x}(x^2-4x+2) + e^{-x}(2x-4)$

$f^4(x) = e^{-x}(x^2-4x+2+2x-4) = e^{-x}(x^2-2x-2)$

d) $\sin^2(x)$ $f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{4}}$

$f'(x) = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x$

$f^3(x) = 4\sin 2x$

$f^4(x) = -8\cos 2x$

$f^5(x) = +16\sin 2x$

$f^6(x) = 32\cdot\cos 2x$

$f^{(n+4)}(x) = 16f^{n}(x)$

$f^4(x$

$f^{n}(x) = \begin{cases} -\cos 2x^{k-1}, \text{ dla } n = 4k,\ k\in\mathbb{N} \wedge k>0 \end{cases}$

6. Udowodnij, że
$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

$X = \left\{ n\in\mathbb{N} \,\middle|\, (f\cdot g)^{n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{k}(x)g^{(n-k)}(x) \right\}$

P: niech $n=1$

$((f\cdot g)(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = \binom{1}{0}f^{0}(x)\cdot g^{1}(x) + \binom{1}{1}f^{1}(x)\cdot g^{0}(x) =$
$= f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$

zatem $n=1\in X$

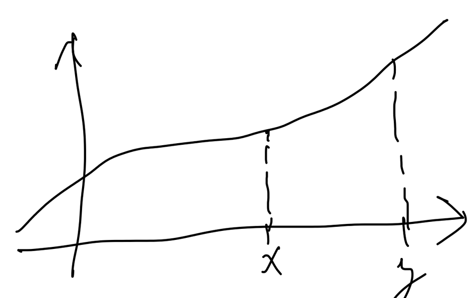
K: załóżmy, że teza zachodzi dla n, pokażę, że zachodzi dla $n+1$

WZÓR TAYLORA

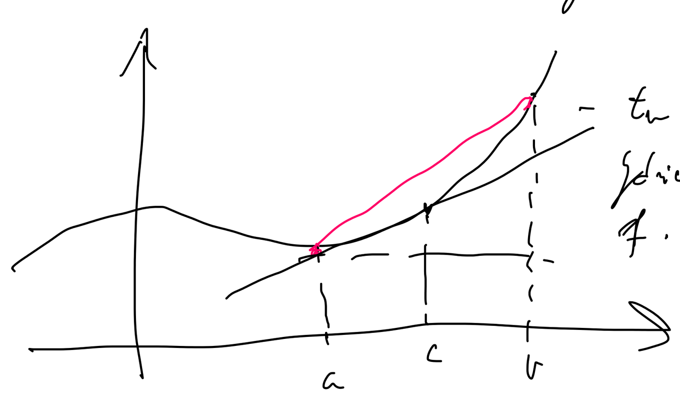
$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)}{2}f''(x) + \ldots + (y-x)^{0}f^{0}(x) =$

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + R_{n+1}(x)$

$\boxed{x\text{ – punkt wyjścia}}$



Np $e^y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\left(e^y\right)^{(n)}\Big|_{y=x=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$



– tw Lagrange'a gdzieś w tym odcinku f. przyjmie tą wartość

$f(b) = f(a) + (b-a)\cdot f'(c)$ ← niezależny od tego szukany wartość

$R_{n+1}(x) = \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta)$

jakiś punkt przybliżenia $\Theta\in(y,x)$

d) $\sin(\frac{1}{10})$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

to jest element wzoru

$f(\frac{1}{10}) \approx f(0) + \frac{1}{10}f'(0) + \frac{(\frac{1}{10})^2}{2}\cdot f''(0)$

$f(\frac{1}{10}) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}\cdot 0 = \frac{1}{10}$

$f(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ $f'(x) = \frac{1}{7}\cdot x^{-\frac{6}{7}}$

$f(126) \approx f(128) + \frac{(126-128)}{1}\cdot f'(128) + \frac{(126-128)^2}{2}\cdot f''(128)$

SZACOWANIE BŁĘDU

$f(\frac{1}{10}) \approx \frac{1}{10} + (-\cos\Theta)\frac{(\frac{1}{10})^3}{3!}$ $\Theta\in(0;\frac{1}{10})$

$-1 < -\cos\Theta < -\cos\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}\cdot 1 < f(\frac{1}{10}) < \frac{1}{10} - \frac{1}{6000}\cdot\cos\frac{1}{10}$

$|R_3(\frac{1}{10})| < \frac{1}{6000}$ $\sum_{k=0}^{n}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + R_{n+1}(x)$

a) $\sqrt{24}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f'''(25) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5^5}$

$f(24) = \sqrt{24}$

znany $\sqrt{25} = 5$

$f(24) \approx f(25) + \left(\frac{24-25}{1}\right)^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{(24-25)^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{(\sqrt{25})^3} =$

$= 5 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{25}}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{25^3}} = 5 - \frac{1}{10} - \frac{1}{8\cdot 125}$

BŁĄD

$\frac{(24-25)^3}{6}\cdot\frac{3}{8\cdot 4^5}$