Lista 14

Wednesday, 25 January 2023 13:40

LISTA

1. Zbadaj zbieżność podanych wzorami ciągów funkcyjnych, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}$, $(-\infty, \infty)$,
(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$, $(-\infty, \infty)$,
(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $[0, 1]$,
(d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[0, \pi]$,
(e) $f_n(x) = \sin^n(x)$, $(-\infty, \infty)$,
(f) $f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}$, $[0, \infty)$,
(g) $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}$, $(-\infty, \infty)$,
(h) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $(0, 1]$,
(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2}$, $[-1, 1]$,
(j) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $[-1, 1]$,
(k) $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[-1, 1]$,
(l) $f_n(x) = nx^{-nx^2}$, $[0, 1]$.

2. Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx^2}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1 + nx}}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$,
(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$.

3. Udowodnij, że następujące szeregi funkcyjne są jednostajnie zbieżne na całej prostej $(-\infty, \infty)$:

(a) $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}\right|$ (b) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}\right|$ (c) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}\right|$

4. Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1 + nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0, \infty)$.

5. Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{n\, x^n}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze $(1, \infty)$, oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[2, \infty)$.

$x \in (-\infty, \infty)$

2.1

a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^4 + \underbrace{\frac{x^2}{n}}_{\to 0}} = x^2$

b) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ $[0,1]$

$\lim_{n\to\infty} (x^n - x^{2n}) = \lim_{n\to\infty} x^n(1 - x^n) = 0$

ZBIEŻNOŚĆ JEDNOSTAJNA

$\sup_{x\in[0,1]} \left(|f_n(x) - f(x)|\right) = \sup_{x\in[0,1]} \left|x^n - x^{2n}\right| = \frac{1}{4}$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} - 2n\, x^{2n-1}$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \neq 0$

$f'(x) = 0$

$n \cdot x^{n-1} = 2n\, x^{2n-1} \quad /: x^{n-1}$

$1 = 2x^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

$f_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

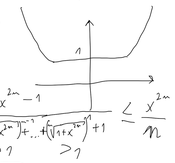
c) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ $x \in (-\infty; \infty)$

PUNKTOWA

$|x| \leq 1$ $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leq \sqrt[n]{1 + 1} \to 1$

$|x| > 1$ $\sqrt[n]{x^{2n}} \leq \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \leq \sqrt[n]{2x^{2n}} \to x^2$

$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ x^2 & |x| > 1 \end{cases}$



JEDNOSTAJNA

1° $|x| \leq 1$ $|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1\right| = \frac{1 + x^{2n} - 1}{\sqrt[n]{(1 + x^{2n})^{n-1}} + \ldots + \sqrt[n]{(1 + x^{2n})^1} + 1} \leq \frac{x^{2n}}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$

ze wzoru ≥ 1 ≥ 1

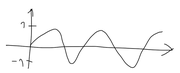
n wyrazów i każdy jest co najmniej 1

2° $|x| > 1$

$\left|\sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2\right| = \frac{1 + \cancel{x^{2n}} - \cancel{x^{2n}}}{\sqrt[n]{1 + x^{2n}}^{\frac{n-1}{n}} \cdot x^2 + \ldots + \left(1 + x^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot x^{2(n-1)} + x^{2n}} \leq \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}} x^{2\frac{n-1}{n}} + \ldots + 2^{\frac{1}{n}} x^{2\frac{1}{n}} + x^{2n}} \leq \frac{1}{n} \to 0$

Zatem $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \max\left\{\sup_{|x|\leq 1} |f_n(x) - f(x)|, \sup_{|x|>1} |f_n(x) - f(x)|\right\} \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n} \to 0$

e)



$\sin x = 1 \to \sin^n(x) = 1$

$\sin x = -1 \to \sin^n(x) = (-1)^n$ nie istnieje granica, zbieżność punktowa to też nie jest jednostajna

$\sin x \in (-1; 1) \to \sin^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

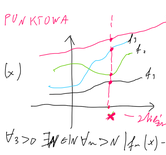
$f_n \to f$ jeśli tak, to f jest granicą punktową ciągu $\{f_n\}$

$f_n \rightrightarrows f$ – zbieżność jednostajna

ZBIEŻNOŚĆ PUNKTOWA

$\forall x \in D$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$



– czy w każdym punkcie (wartość) funkcja f_n punktu zbliża się do danego punktu ze funkcji f (wartość)

– zbieżność punktowa

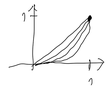
$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

ZBIEŻNOŚĆ JEDNOSTAJNA

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in D\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ → gwarantuje, że cała funkcja f_n jest blisko funkcji f

$f_n(x) = x^n$ ustalamy $x \in (0,1)$

$D = (0,1)$ $f_n(x) = x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$



$\sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = \sup_{x\in(0,1)} x^n = 1$

największe odległości między dwiema funkcjami rośnie, dążąc do 0, zatem to nie jest zbieżne jednostajnie

PUNKTOWA JEST, GDYBY 2 JEDNOSTAJNA

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in (0,1)\ |x^n - 0| < \varepsilon$

Wiech $\varepsilon = \frac{1}{2}$, mamy dowolne $N \in \mathbb{N}$. Wiech $n = N + 1$.

Wiech $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2(N+1)}}$. Wtedy $|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2(N+1)}}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N+1}{2(N+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > \varepsilon$

$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

JAK ROBIĆ

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 14

23.01.2023

1. Zbadaj zbieżność podanych wzorami ciągów funkcyjnych, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}$, $(-\infty, \infty)$,
(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$, $(-\infty, \infty)$,
(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $[0, 1]$,
(d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[0, \pi]$,
(e) $f_n(x) = \sin^n(x)$, $(-\infty, \infty)$,
(f) $f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}$, $[0, \infty)$,
(g) $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}$, $(-\infty, \infty)$,
(h) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $(0, 1]$,
(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2}$, $[-1, 1]$,
(j) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $[-1, 1]$,
(k) $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[-1, 1]$,
(l) $f_n(x) = nx^{-nx^2}$, $[0, 1]$.

2. Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx^2}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1 + nx}}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$,
(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$.

$x \in (-1; 1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ szereg potęgowy

z kryterium Leibniza $\left|\frac{1}{n+1} x^n\right| \leq \frac{1}{n+1}$

$\sum \frac{1}{n+1}$ rozbieżny

d) $\sum x^n$ rozbieżny dla $x \in (-1; 1)$

Wiemy, że ciąg x^n nie zbiega do zera, bo nie ma granicy, więc szereg rozbieżny

$\sup_x |\sum x^n| = \sup_x \frac{x^n}{1-x} = \infty$

Lista zadań 14

6. Znajdź pochodną f' oraz całkę nieoznaczoną $\int f(x)\,dx$ następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$,
(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$,
(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$,
(d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

7. „Zwiń" następujące szeregi potęgowe, to znaczy znajdź wzór na sumę, i określ dziedzinę tak powstałej funkcji:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$,
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n$.

$\to S = \frac{c_1}{1-q}$, m wzór $a_1 = 1$ (x^0) oraz $q = x$

2.7

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ to jest nie q

dla $|x| < 1$ zbieżny

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + = \frac{1}{1-x^2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

D: $|x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ | różniczkuję obustronnie

$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot x^{2n} = \frac{+2x}{(1-x)^2} \quad /\cdot\frac{x}{2}$ D $|x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n} = \frac{x^2}{2(1-x)^2}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} + 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - 1 = \frac{1}{1-x^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1$ | różniczkuję obustronnie

$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 \quad /\cdot\frac{x}{2}$ $x \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{2n} = \frac{x}{2-2x^2} - \frac{x}{2}$ | różniczkuję obustronnie

$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \cdot x^{2n} = \frac{1(2-2x^2) - x(-4x)}{(2-2x^2)^2} - \frac{1}{2} \quad /\cdot\frac{x}{2}$ $x \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{2n} = \frac{x}{2}\left(\frac{2-2x^2+4x^2}{(2-2x^2)^2}\right) - \frac{x}{4}$ dla $x \in (-1; 1)$ – dobrze

$= \frac{x}{2}\left(\frac{1+x^2}{2(1-x^2)^2}\right) - \frac{x}{4}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot x^n$ D: $x \in (-1, 1)$ – dobrze

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \quad /\cdot x$ $\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} - x$ | różniczkuję obustronnie

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^n = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} - 1$ | różniczkuję obustronnie

$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot x^n = \frac{2(1-x)}{(1-x)^2} \quad /\cdot x$

$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot x^n = \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 \quad /\cdot x^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} - x^2$ | różniczkuję obustronnie

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n+1} = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} - 2x = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} - 2x$ | różniczkuję obustronnie $\frac{2 - \cancel{4x} + \cancel{2x^2} + \cancel{4x} - \cancel{2x^2}}{\ldots}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2) \cdot x^n = \frac{(2-2x)(1-x)^2 + (2x - x^2)2(1-x)}{(1-x)^4} - 2 = \frac{2(1-x)^2 + 4x(1-x)}{1-x} - 2 = \frac{2}{1-x}$ | różniczkuję obustronnie

$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) \cdot x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad /\cdot x$

$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\sqrt{x(1-x)} < 1$

$x(1-x) < 1$

$x - x^2 - 1 < 0$

$x^2 - x + 1 > 0$

$\Delta = 1 - 4$

$\sqrt{x(1-x)}$ zbieżny punktowo

$x \cdot (1-x) \geq 0$

$x \in [0, 1]$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^{n+1}}{n \cdot \left(\sqrt{x(1-x)}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n} \sqrt{x(1-x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{x(1-x)}\right| = \sqrt{x(1-x)} < 1$ szereg zbieżny

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} n\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^k\right| = \sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^k\right| = \sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ szereg jednostajnie

$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ ← pomysł skorzystać z

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)nx^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n = 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + \ldots$

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot m \cdot x^{n-1} = 2 + 3 \cdot 2 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot x^2 + \ldots$

$\int \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$

$\int \sum_{n=1}^{\infty} x^n\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} n \cdot x^n$

$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{-1 \cdot x}{2} + \frac{x^2}{3}$

$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} \cdot \int x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot n \cdot x$

$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx^2}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1 + nx}}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$,
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$,
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$,
(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx^2}$ $x \in \mathbb{R}$

$e^{nx^2} \geq e^0$

$e^{-nx^2} \geq e^{0 \cdot n} = 1 \quad /\cdot\frac{1}{n^3}$

$\frac{1}{n^3} e^{-nx^2} \geq \frac{1}{n^3}$

$\frac{1}{n^3} e^{-nx^2} \leq \frac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ zbieżny z kryterium Weierstrassa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-nx^2}$ też jest zbieżny

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$ $x \in \left[-\frac{1}{n}; +\infty\right)$

$\sqrt{1+nx} \geq \sqrt{n}$ $\Big| 2^n$

$2^n\sqrt{1+nx} \geq 2^n\sqrt{n}$

$\frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}} \leq \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$ ← szereg zbieżny z kryterium Weierstrassa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$ zbieżny jednostajnie

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$

$\left|\frac{\cos(nx)}{10^n}\right| \leq \frac{1}{10^n}$ z kryterium Weierstrassa zbieżny

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-nx}$ zbieżny dla $x \in (0; +\infty)$

$e^x \geq e^0$

$e^x \geq e^{0 \cdot n} = 1$

$e^{-nx} \leq 1 \quad /\cdot n$

$n \cdot e^{-nx} \leq n$ ← to nam nic nie daje, jest jednostajnie zbieżny

z kryterium d'Alembertaa

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1) \cdot e^{-(n+1)x}}{n \cdot e^{-nx}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1) \cdot \cancel{e^{-nx}} \cdot e^{-x}}{n \cdot \cancel{e^{-nx}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)(e^{-x} + \frac{1}{e}^{0 \cdot x})\right| = e^{-x}$

szereg jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot x^n}$ zbieżne dla $x \in [1; +\infty)$

$x^n \geq x^0 \quad /\cdot n!$

$n!x^n \geq n!$

$\frac{1}{n!x^n} \leq \frac{1}{n!}$ ← szereg zbieżny na mocy kryt. Weierstrassa

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)! \cdot \cancel{x^{n+1}} \cdot \cancel{x^n} \cdot x} \cdot \frac{\cancel{n!} \cdot \cancel{x^n}}{1}\right| \to 0 < 1$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$ zbieżność punktowa dla $x \in \mathbb{R}$

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + x^2}}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x^2 \geq 0 \quad /+n^3$

$n^3 + x^2 \geq n^3$

$\frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3} \quad /\sqrt{\ }$

$\frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ ← z kryterium Weierstrassa szereg jest zbieżny jednostajnie

szereg

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2}$ szereg zbieżny dla $x \in (0, 1)$

$x^n < x^n \cdot 3^n$

$3^n x^n \leq 3^n \quad /: n^2$

$\frac{3^n x^n}{n^2} \leq \frac{3^n}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 3}{n^2(1+\frac{1}{n})^2} \not< 1$

wnioski, że nam to nie daje, kryterium z sup

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k \cdot x^k}{k^2}\right| = \sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k \cdot x^k}{k^2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{3^k \cdot 1}{k^2} = \frac{3^k}{k^2}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nie wiemy, bo to zbieżność punktowa

h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n$ szereg dla $x \in (0, \frac{1}{2})$ ← zbieżność punktowa

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k \cdot x^k\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nie ma zbieżności jednostajnej

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} 2^k \cdot x^k = 2^k \cdot \frac{1}{2}^k = 1^k$ nie zbieżny, nie stopnia $\neq 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \cdot x^n} < 1$

$2x < 1$

$x < \frac{1}{2}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{n}$ d'Alembert

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{5^{n+1} \cdot \cancel{x^n} \cdot \cancel{x} \cdot n}{n+1 \cdot \cancel{5^n} \cdot \cancel{x^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5 \cdot n}{n(1+\frac{1}{n})} \cdot x\right| < 1$

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{k}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{5^k}{k}\right| \not\to 0$ $x \in (-1; 1)$

$\lim_{k\to\infty} \frac{5^k}{k} \neq 0$ szereg jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie

j) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{x(1-x)})^n$

$x \cdot (1-x) \geq 0$

$x \in [0, 1]$

$\sqrt{x(1-x)} < 1$

$x(1-x) < 1$

$x - x^2 - 1 < 0$

$x^2 - x + 1 > 0$

$\Delta = 1 - 4$

$\sqrt{x(1-x)} < 1$ szereg zbieżny

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^{n+1}}{n \cdot \left(\sqrt{x(1-x)}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n} \sqrt{x(1-x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{x(1-x)}\right| = \sqrt{x(1-x)} < 1$

$\sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} n\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^k\right| = \sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^k\right| = \sup_{x\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ szereg jednostajnie

$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ zbieżne dla $x \in (0; +\infty)$

$n^x \geq n^0 \quad /\cdot n!$

$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n!}$ ← szereg zbieżny na mocy kryt. Weierstrassa

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ zbieżne dla $x \in (0; +\infty)$

$x^2 \geq x^0 \quad /+n^2$

$x^2 + n^2 \geq n^2$

$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad /\cdot x > 0$

$\frac{x}{n^2 + x^2} \leq \frac{x}{n^2}$; szereg zbieżny na mocy kryt. Weierstrassa

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x)$

$\sin x = 1 \to \sin^n(x) = 1$

$\sin x = -1 \to \sin^n(x) = (-1)^n$

$\sin x \in (-1; 1) \to \sin^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x)$ nie istnieje, nie ma zbieżności