Lista 7

Saturday, 8 April 2023 23:21

lista7

Lista 7 (powtórkowa)

Wiekszość zadań na tej liście to zadania z egzaminów, kolokwiów itp. Dotyczą list 1-6.

Zadanie 1. Dla podanych poniżej zbiorów powiedz, czy są one przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Odpowiedzi krótko uzasadnij w przypadku odpowiedzi negatywnej.

1. $\{[v_1,\ldots,v_n]^T \in \mathbb{R}^n : v_1 = v_2 = \cdots = v_n\}$
2. $\{[v_1,\ldots,v_n]^T \in \mathbb{R}^n : |v_1| = |v_2| = \cdots = |v_n|\}$
3. $\{[v_1,\ldots,v_n]^T \in \mathbb{R}^n : v_1 \cdot v_2 \cdots v_n = 1\}$
4. $\{[v_1,\ldots,v_n]^T \in \mathbb{R}^n : v_1 \cdot v_2 \cdots v_n = 0\}$
5. $\{[v_1,\ldots,v_{2n+1}]^T \in \mathbb{R}^{2n+1} : v_1 = v_3 = \ldots = v_{2n+1} = 0\}$
6. $\{[v_1,\ldots,v_n]^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n i v_i = 0\}$
7. Wielomiany o współczynnikach z $\mathbb{R}$, których pierwsza i druga pochodna są równe.
8. Wielomiany p o współczynnikach z $\mathbb{R}$, takie że $p(3) - p(4) = 0$.

Zadanie 2. Które z podanych poniżej przekształceń są przekształceniami liniowymi? Każdą odpowiedź negatywną krótko uzasadnij.

(A) A to suma drugiej i trzeciej pochodnej wielomianu, tj. $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $A(f) = f'' + f'''$.
(B) B to iloczyn drugiej i trzeciej pochodnej wielomianu, tj. $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $B(f) = f'' \cdot f'''$.
(C) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C(x, y, z) = (x + y, y - z, 0)$
(D) $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x, y, z) = (xy, y + 1, -z)$
(E) E przekształca nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych w nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych, $E((a_i)_{i=1}^\infty)$ jako n-ty wyraz ma minimum z $a_1, \ldots, a_n$.
(F) F przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $F((a_1, a_2, \ldots)) = (0, 1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \ldots)$.
(G) G przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $G((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$.
(H) $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x, y, z) = (2x, x + y - z, 1)$.

Zadanie 3. Podaj bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $F_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ zadanego przez macierz M:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Mówimy, że macierz A jest *antysymetryczna*, jeśli $A^T = -A$.
Pokaż, że dla n nieparzystego macierz antysymetryczna rozmiaru $n \times n$ nie jest odwracalna.

Zadanie 5 (*). Dla macierzy M niech I będzie podzbiorem zbioru indeksów wierszy, zaś J kolumn. Przez $M_{I,J}$ oznaczmy macierz powstałą z M przez wybranie wierszy z I oraz kolumn z J i usunięcie pozostałych wierszy i kolumn (tj. odpowiedni minor). Dodatkowo, niech $\bar{I}$ oznacza dopełnienie I w zbiorze indeksów wierszy, zaś $\bar{J}$ dopełnienie J w zbiorze indeksów kolumn.
Niech $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, takie że $|I| = |J|$. Rozważmy macierz M kwadratową rozmiaru $n \times n$ taką że $M_{\bar{I},\bar{J}}$ oraz $M_{I,J}$ zawierają same 0. Niech $M_1 = M_{\bar{I},J}$, $M_2 = M_{I,\bar{J}}$ będą odwracalne. Pokaż, że
- M jest odwracalna;
- $M^{-1}_{J,\bar{I}} = M_1^{-1}$ oraz $M^{-1}_{\bar{J},I} = M_2^{-1}$;
- $M^{-1}_{\bar{J},\bar{I}}$, $M^{-1}_{J,I}$ są macierzami zerowymi.

$$\begin{bmatrix} 0 & V \\ -H & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -H^{-1} \\ V^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. *Śladem* macierzy kwadratowej nazywamy sumę elementów na jej przekątnej, tj.

$$\operatorname{tr}\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pokaż, że:
- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
- dla macierzy podobnych $A \sim B$ zachodzi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Zadanie 7. Niech A^* oznacza macierz, którą uzyskujemy z A przez symetrię względem „drugiej" przekątnej, tzn. tej od lewego dolnego rogu do prawego górnego. Wyraź $\det(A^*)$ przez $\det(A)$. Niech A° oznacza macierz A obróconą o $180°$. Wyraź $\det(A^\circ)$ przez $\det(A)$.
Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A^\circ = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli k-ta potęga M^k macierzy kwadratowej M jest nieodwracalna (gdzie $k \geq 1$ jest liczbą naturalną), to również M jest nieodwracalna.

Zadanie 9. Podaj macierz odwrotną do poniższej macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. Dla przestrzeni liniowych $S = \mathrm{LIN}(\{(3,0,3,3,2,0), (3,1,3,2,3,1)\}$ oraz $T = \mathrm{LIN}(\{(1,1,1,0,3,1), (0,3,0,-3,-1,3)\}$ oblicz $\dim(S+T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S+T$.

Zadanie 11. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Pokaż, że:
- $\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$, gdzie L_M to przekształcenie $v \mapsto Mv$, analogicznie L_{M^2}.
- $\operatorname{rk}(M + M^2) \leq \operatorname{rk}(M)$.

I $L_M(v) = Mv$, przekształcenie liniowe

$\ker(L_M) \subseteq \ker(L_{M^2})$

– weźmy $v \in \ker(L_M)$

$L_M(v) = \vec{0}$ $\quad L_{M^2}(v) = M^2 v = M(Mv) = M \cdot \vec{0} = 0$

$Mv = \vec{0}$ $\quad \Downarrow$ $\quad v \in \ker(L_{M^2})$ $\quad \operatorname{rk}(L) \overset{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{Im} L)$

II $\operatorname{rk}(M + M^2) \leq \operatorname{rk}(M)$

FAKT: $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(A)$, bo $\operatorname{rk}(L_{AB}) \leq \operatorname{rk}(L_A)$

$M + M^2 = M(Id + M)$

$\operatorname{rk}(M + M^2) \leq \operatorname{rk}(M) \leq \operatorname{rk}(Id + M)$

Zadanie 1. Dla podanych poniżej zbiorów powiedz, czy są one przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Odpowiedzi krótko uzasadnij w przypadku odpowiedzi negatywnej.

– dopełnienie na dodawanie wektorów
– dopełnienie na mnożenie przez skalar

6) weźmy dowolne wektory należące, wtedy 2) ... wektory kontrprzykład ...

7) weźmy ... należące ...

$\alpha(p+q)(x) = \alpha p(x) + \alpha q(x)$

8) $(p+q)(3) - (p+q)(4) = 0 = p(3) + q(3) - p(4) - q(4)$

$\alpha(p(3) - p(4)) = 0$

$\alpha p(3) - \alpha p(4) = 0$

Zadanie 2. Które z podanych poniżej przekształceń są przekształceniami liniowymi? Każdą odpowiedź negatywną krótko uzasadnij.

Liniowość:
- $L(\alpha v) = \alpha L(v)$
- $L(v + w) = L(v) + L(w)$

A) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $\quad A(f) = f'' + f'''$ $\quad f'' = (3x^2)'' = 18x$

- niech $\alpha = 3$ $\quad f = x^3$

$L(3x^3) = 18x + 18$

$3(L(x^3)) = 3(6x + 6) = 18x + 18$

$L(3x^3 + x^2) = L(x^3) + L(x^2)$

B) Niech $\alpha = 3$ $\quad f = x^3$

$L(3x^3) = 18x \cdot 18 = 324x$

$3L(x^3) = 3 \cdot (6x \cdot 6) = 108x$

C) $C(x, y, z) = (x + y, y - z, 0)$

$C(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha y, \alpha y - \alpha z, 0)$

$\alpha C(x, y, z) = (\alpha x + \alpha y, \alpha y - \alpha z, 0)$

$C((x,y,z) + (x',y',z')) = C(x + x', y + y', z + z') = (x + x' + y + y', y + y' - z - z', 0)$

$C(x,y,z) + C(x',y',z') = (x + y, y - z, 0) + (x' + y', y' - z', 0) = (x + x' + y + y', y + y' - z - z', 0)$

$D(x, y, z) = (xy, y + 1, -z)$

$\alpha D(x, y, z) = (\alpha xy, \alpha y + \alpha, -\alpha z)$

$D(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha^2 xy, \alpha y + 1, -\alpha z)$

(E) E przekształca nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych w nieskończone ciągi o wyrazach rzeczywistych, $E((a_i)_{i=1}^\infty)$ jako n-ty wyraz ma minimum z $a_1, \ldots, a_n$.

, po dodaniu minimum to 1

(F) F przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $F((a_1, a_2, \ldots)) = (0, 1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \ldots)$.

$\alpha F((a_1, \ldots)) = \alpha(0, 1 a_1, 2 a_2, \ldots) = (0, \alpha a_1, 2\alpha a_2, \ldots)$

$F(\alpha(a_1, \ldots)) = (0, \alpha a_1, 2\alpha a_2, \ldots)$

$F((a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)) = (0, a_1 + b_1, 2a_2 + 2b_2, \ldots)$

$F((a_1, a_2, \ldots)) + F((b_1, b_2, \ldots)) = (0, a_1 + b_1, 2a_2 + 2b_2, \ldots)$

(G) G przekształca nieskończone ciągi liczb rzeczywistych w nieskończone ciągi liczb rzeczywistych, gdzie $G((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$.

$\alpha G((a_1, \ldots)) = (\alpha a_2, \ldots)$ $\quad G((a_1, \ldots)) + G((b_1, \ldots)) = (a_2 + b_2, \ldots)$

$G(\alpha(a_1, \ldots)) = (\alpha a_2, \ldots)$ $\quad G((a_1 + b_1, \ldots)) = (a_2 + b_2, \ldots)$

(H) $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $D(x, y, z) = (2x, x + y - z, 1)$.

$D(x, y, z) + D(x', y', z') = (2x, x + y - z, 1) + (2x', x' + y' - z', 1) =$
$= (2x + 2x', x + y + x' + y' - z - z', 2)$

$D(x + x', y + y', z + z') = (2(x + x'), x + x' + y + y' - z - z', 1)$

$D(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x, \alpha x + \alpha y - \alpha z, 1)$

$\alpha D(x, y, z) = \alpha(2x, x + y - z, 1) = (2\alpha x, \alpha x + \alpha y - \alpha z, \alpha)$

Zadanie 3. Podaj bazy obrazu i jądra przekształcenia liniowego $F_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ zadanego przez macierz M:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

– obraz – przestrzeń rozpięta na kolumnach macierzy, ich kombinacje liniowe $\operatorname{im}(M)$

$\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$

można też przekształcić macierz jednostkową

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 + 3w_1]{w_2 + 4w_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{3}w_2;\ \frac{1}{2}w_3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBLICZANIE BAZY:
- * jądra – szukamy wektora, który przemnożony przez macierz da $\vec{0}$
- – przekształcenia na kolumnach macierzy tak, aby dostać kolumnę $\vec{0}$ i te same przekształcenia na Id
- * obrazu – szukamy kolumn niezależnych liniowo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

uzależniamy od wektorów

$x_1 = x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = x_2 - 3x_2 + 2x_4 - 5x_5 - x_4 + 2x_5 =$
$x_3 = -3x_2 + 2x_4 - 5x_5 \qquad = -2x_2 + x_4 - 3x_5$

$$\begin{cases} x_1 = -2t + p - 3s \\ x_2 = t \\ x_3 = -3t + 2p - 5s \\ x_4 = p \\ x_5 = s \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\ker(M) = \mathrm{Lin}((-2, 1, -3, 0, 0); (1, 0, 2, 1, 0); (-3, 0, -5, 0, 1))$

OBRAZ:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

nie są liniowo niezależne, bo istnieje nietrywialne jądro, bierzemy dwa wektory niezależne, bo w jądrze są 3 wektory

– tylko dwa górne nam się udało pokazać jako niezależne (2 pierwsze kolumny)

$\operatorname{im}(M) = \mathrm{Lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ → są liniowo niezależne + można z nich wyprowadzić kolejne kolumny w $\mathbb{R}^3$ (jądro było 3 wymiarowe)

I sposób

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli k-ta potęga M^k macierzy kwadratowej M jest nieodwracalna (gdzie $k \geq 1$ jest liczbą naturalną), to również M jest nieodwracalna.

– załóżmy, że M^k jest nieodwracalna, wtedy T: M także jest nieodwracalna

– Załóżmy nie wprost, że M jest odwracalna, wtedy istnieje M^{-1} t.ż. $M \cdot M^{-1} = Id$, teraz wykaże z indukcji pomocniczy lemat, że jeśli M jest odwracalne, to M^k także

$A = \{k \in \mathbb{N}_+ \mid M^k \text{ odwracalne}\}$

P: M odwracalne z założeń

K: teraz M^{k+1}

$M^{k+1} = M^k \cdot M$, zatem $A = \mathbb{N}_+$ (bo jest z zał. indukcyjnego odwracalne)

wracając do dowodu, skoro M jest odwracalne, to M^k także, zatem mamy sprzeczność z zał. z zadania, że M^k jest nieodwracalne, zatem jeśli M^k jest nieodwracalne, to M także

II sposób

$\det(M^k) = 0 \Rightarrow \det(M) = 0$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(M \cdot M^{k-1}) = \det(M) \cdot \det(M^{k-1}) = \det(M) \cdot \det(M) \cdot \det(M^{k-2}) = \ldots = \det(M) \cdot \det(M) \cdot \ldots \cdot \det(M) = 0$

bo M^k ~~jest~~ nieodwracalna

Zadanie 7. Niech A^* oznacza macierz, którą uzyskujemy z A przez symetrię względem „drugiej" przekątnej, tzn. tej od lewego dolnego rogu do prawego górnego. Wyraź $\det(A^*)$ przez $\det(A)$. Niech A° oznacza macierz A obróconą o $180°$. Wyraź $\det(A^\circ)$ przez $\det(A)$.
Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A^\circ = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ $\quad$ 3x2 $\quad$ 2x3 $\quad A^{*T} = A^\circ$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$

$\det(A^*) = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{matrix} = (45 + 84 + 96) - (105 + 72 + 48) = 0$

$\det(A^\circ) = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix} = (45 + 96 + 84) - (105 + 72 + 48) = 0$

$\det(A) = \det(A^\circ)$, bo A° powstaje poprzez zamianę rzędów i kolumn, a to nie zmienia wyznacznika, u nas w przykładzie III wiersz staje się I, a I kolumna zamienia się z III, tych zamian jest zawsze parzysta ilość

$\det(A) = \det(A^*)$, bo A^* też powstaje przez zamianę kolumn i wierszy, oprócz tego $\det(A^*) = \det(A^{*T})$, a wiemy, że $A^{*T} = A^\circ$, zatem $\det(A^*) = \det(A^\circ)$

Zadanie 4. Mówimy, że macierz A jest *antysymetryczna*, jeśli $A^T = -A$.
Pokaż, że dla n nieparzystego macierz antysymetryczna rozmiaru $n \times n$ nie jest odwracalna.

* kilka faktów
- $\det(M) = 0$, gdzie M to macierz nieodwracalna
- skoro $A^T = -A$, to $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$ (z zał. zadania)
- $\det(k \cdot A) = \det(k \cdot Id_n \cdot A) = \det(k \cdot Id_n) \cdot \det(A) = \det\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix} \cdot \det(A) = k^n \cdot \det(A)$

dla A, będącego macierzą antysymetryczną, skorzystam z powyższych faktów:

$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A)$, zatem

$\det(A) = (-1)^n \cdot \det(A)$ na II stronę

$\det(A) - (-1)^n \cdot \det(A) = 0$

$\det(A)(1 - (-1)^n) = 0$, zatem dla n nieparzystego

$\det(A)(1 + 1) = 0$, czyli A musi być macierzą nieodwracalną, bo tylko wtedy $\det(A) = 0$

Zadanie 9. Podaj macierz odwrotną do poniższej macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -5 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Zadanie 10. Dla przestrzeni liniowych $S = \mathrm{LIN}(\{(3,0,3,3,2,0), (3,1,3,2,3,1)\}$ oraz $T = \mathrm{LIN}(\{(1,1,1,0,3,1), (0,3,0,-3,-1,3)\}$ oblicz $\dim(S+T)$ oraz $\dim(S \cap T)$. Podaj dowolną bazę $S+T$.

LEMAT: $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$

– sprawdzamy kombinacje liniowe

S: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

T: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ → niezależne, teraz sprawdzamy sumę

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[3w_3]{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 \cdot (-1)]{w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & +3 & +1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 \cdot 3,\ w_3 \cdot (-1)]{w_4 + w_3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & +3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3 + w_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BAZA S+T

$\dim(S + T) = 3 \quad \dim(S) = 2 \quad \dim(T) = 2$

$\dim(S \cap T) = 4 - 3 = 1$

Zadanie 6. *Śladem* macierzy kwadratowej nazywamy sumę elementów na jej przekątnej, tj.

$$\operatorname{tr}\left((a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pokaż, że:
- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
- dla macierzy podobnych $A \sim B$ zachodzi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

a) $\begin{bmatrix} A & \sim \\ \sim & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \sim \\ \sim & B \end{bmatrix}$ ← przekątna się nie zmienia

b) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad * \; 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$

↓ po transpozycji

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad * \; 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$ $\quad$ dzięki $A - m \times n$, $B - n \times m$

$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m b_{ji} \cdot a_{ij}\right) = \operatorname{tr}(BA)$

c) macierze podobne

$A \sim B \iff \exists_C : A = (C^{-1} \cdot B) C$

$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}((C^{-1}B)C) = $ z podpunktu b $= \operatorname{tr}(CC^{-1} \cdot B) = \operatorname{tr}(Id \cdot B) = \operatorname{tr}(B)$