Lista 13

Saturday, 27 May 2023 13:45

lista13

$(x_1 \cdot x_2)^{-1} = x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}$

$(x^{-1})^n = x^{-n}$ dla $n \in \mathbb{Z}$

Lista 13

Zadanie 1. Rozważmy grupę G i zdefiniujmy w niej *sprzężenie* (względem elementy g) $\varphi_g : G \to G$:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1} \ .$$

Pokaż, że
- $\varphi_{ab} = \varphi_a\varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G;
- jeśli $H \leq G$ to $\varphi_a(H) \leq G$ (podgrupa sprzężona).

Zadanie 2. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1}x_2^{z_2}\cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k}(x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}}\cdots(x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k}(x_{k-1})^{-z_{k-1}}\cdots(x_1)^{-z_1} \ .$$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 4. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Zadanie 5. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 6. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.
- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1h_2 \ : \ h_1 \in H_1, \ h_2 \in H_2\}$. (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)

Zadanie 7 (* Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 8. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzyelementowego S_3.

Zadanie 9. Niech S_n będzie grupą permutacji n elementów. Pokaż, że:
- $\langle (i, i+1); (1, 2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, n-1$;
- $\langle (1, 2); (2, 3, \ldots, n) \rangle = S_n$.

Zadanie 10. Dla podanych poniżej permutacji σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} .$$

podaj permutację odwrotną σ^{-1}; rozłóż σ oraz σ^{-1} na cykle. Podaj rząd σ oraz σ^{-1}.

Zadanie 11.
- Wyznacz permutacje odwrotne do permutacji $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Przedstaw permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 11 & 2 & 6 & 5 & 4 & 9 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ jako złożenie cykli rozłącznych.
- Przedstaw permutacje $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ jako złożenia transpozycji.
- Jakie są rzędy permutacji z powyższych podpunktów?

Definicja 14.14 (Potęga, rząd). Potęgą elementu a nazywamy dowolny element postaci a^n, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Dla $n = 0$ oznacza on e, dla $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ razy}}$, dla $n < 0$: $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Rząd elementu to najmniejsza dodatnia potęga n taka że $a^n = e$. Rząd elementu jest *nieskończony* (*nieokreślony*), jeśli nie ma takiego skończonego n.

Rząd grupy to ilość jej elementów (może, ale nie musi, być skończony).

Fakt 14.15. *Rząd a i rząd a^{-1} jest taki sam.*

Fakt 14.16. *W grupie skończonej każdy element ma rząd skończony.*

Lemat 14.17. *Jeśli $a \in G$ ma skończony rząd p, to $a^\ell = e \iff p|\ell$.*

Zadanie 2. Pokaż, że dla $x_1, \ldots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \ldots, z_k$ zachodzi:

$$L = (x_1^{z_1}x_2^{z_2}\cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k}\underset{S}{\overset{}{(x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}}}}\cdots(x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k}\underset{P}{(x_{k-1})^{-z_{k-1}}}\cdots(x_1)^{-z_1} \ .$$

– zróbmy lemat pomocniczy:

LEMAT 1

$(x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1}$

dowód będzie indukcyjny

P: $x_1^{-1} = x_1^{-1}$

$(x_1 \cdot x_2)^{-1} = ?$

– wiemy, że każdy element grupy ma 1 element odwrotny LEMAT 14.4

• elementem odwrotnym do $x_1 \cdot x_2$ jest $(x_1 \cdot x_2)^{-1}$ zobaczmy jak wygląda

$(x_1 \cdot x_2)(x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}) = x_1 \cdot e \cdot x_1^{-1} = x_1 \cdot x_1^{-1} = e$, z LEMATU 14.4

skoro jest 1 element odwrotny, to $(x_1 \cdot x_2)^{-1} = x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}$

K: z zał. indukcyjnego $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{-1} = (x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_1^{-1})$, dowód dla $n+1$ elementów

$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1})^{-1} = (\underbrace{(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)}_{\text{element grupy}} \cdot x_{n+1})^{-1} = (x_{n+1})^{-1}(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = (x_{n+1})^{-1} \cdot x_n^{-1} \cdot x_{n-1}^{-1} \cdot \ldots$