Lista 8

Thursday, 13 April 2023 14:11

lista8

Lista 8

Zadanie 1. Pokaż, że układ równań wynikający przez
- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez skalar $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania $\sum 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wyjściowemu.

Udowodnić, że każdy elementarny krok sprowadzający macierz do postaci schodkowej zachowuje wymiar przestrzeni wierszowej.

Zadanie 2. Pokaż też, że jeśli macierz A' wynikamy z macierzy A poprzez elementarne operacje wierszowe, to ker A = ker A'.

Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowej) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy?

Napisać ciąg operacji sprowadzający A do postaci schodkowej (wierszowej) i ciąg operacji przekształcający wiersze macierzy A w wiersze macierzy schodkowej. Użyć do tego tylko operacji wierszowych.

Zadanie 3. Dla jakich wartości p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\begin{cases} 5x_1 + px_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ px_1 + px_2 + 2x_3 = 2+p \end{cases}.$$

Zadanie 4. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Zadanie 5. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times 1$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dokonać konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.
Dla jakich wartości n wygrana jest zawsze możliwa?
Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

Zadanie 6. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & -7 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Proponowana metoda eliminacji.

Zadanie 7. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & -x_n & = & 0 \\ x_n & -x_1 & = & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ x_n & +x_1 & = & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

$(\eta + \mathrm{id})(\eta - \mathrm{id}) = \mathcal{A} - \rho$ [illegible]

Zadanie 9 (* *Nie liczy się do podstawy*). Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Zastosujemy zasadę ciągłości i wyznaczmy wielomian opisujący zachowanie gdy macierz A jest nieodwracalna i zachowujemy zasadę ciągłości.

Zadanie 10. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:
- $L(x, y, z) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'(x, y, z) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Znaleźć macierz przekształcenia L oraz jądro (kernel) jej oraz obraz (image) [illegible]

Zadanie 11. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ
- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I) = \chi_{A^T}(\lambda)$$

Znaleźć Czynnik jądra jądra (kernel) jądra macierzy [illegible]

Zadanie 1. Pokaż, że układ równań wynikający przez
- zamianę i-tego oraz j-tego równania
- dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
- przemnożenie i-tego równania przez skalar $\alpha \neq 0$
- usunięcie trywialnego równania $\sum 0 \cdot x_i = 0$

jest równoważny wyjściowemu.

Udowodnić, że każdy elementarny krok sprowadzający macierz do postaci schodkowej (wierszowej) zachowuje wymiar przestrzeni wierszowej macierzy.

Zadanie 2. Pokaż też, że jeśli macierz A' wynikamy z macierzy A poprzez elementarne operacje wierszowe, to ker A = ker A'.

Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowej) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy?

Napisać ciąg operacji sprowadzający A do postaci schodkowej (wierszowej) i ciąg operacji przekształcający wiersze macierzy A w wiersze macierzy schodkowej. Użyć do tego tylko operacji wierszowych.

Zadanie 3. Dla jakich wartości p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\begin{cases} 5x_1 + px_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ px_1 + px_2 + 2x_3 = 2+p \end{cases}.$$

Zadanie 4. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{Z}_{13}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = 1 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^3 z = \lambda \\ x + y + \lambda^3 z = \lambda^2 \end{cases}.$$

Zadanie 5. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times 1$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dokonać konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i na sąsiednich. Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.
Dla jakich wartości n wygrana jest zawsze możliwa?
Podaj prosty algorytm, który rozwiązuje grę, jeśli jest to możliwe (istnieje algorytm zachłanny.)

Zadanie 6. Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & -7 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Proponowana metoda eliminacji.

Zadanie 7. Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ x_2 & -x_3 & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & -x_n & = & 0 \\ x_n & -x_1 & = & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & = & 0 \\ x_2 & +x_3 & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & +x_n & = & 0 \\ x_n & +x_1 & = & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2, to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

$(\eta + \mathrm{id})(\eta - \mathrm{id}) = \mathcal{A} - \rho$ [illegible]

Zadanie 9 (* *Nie liczy się do podstawy*). Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Zastosujemy zasadę ciągłości i wyznaczmy wielomian opisujący zachowanie gdy macierz A jest nieodwracalna i zachowujemy zasadę ciągłości.

Zadanie 10. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:
- $L(x, y, z) = (2x - y, 0, y + z)$;
- $L'(x, y, z) = (0, 0, y)$;
- $L''(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 0)$.

Znaleźć macierz przekształcenia L oraz jądro (kernel) jej oraz obraz (image) [illegible]

Zadanie 11. Rozważmy macierz kwadratową M oraz jej macierz transponowaną M^T. Udowodnij, że M oraz M^T mają te same wartości własne oraz że dla ustalonej wartości własnej λ
- jej krotności algebraiczne dla M oraz M^T są takie same;
- jej krotności geometryczne dla M oraz M^T są takie same.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I) = \chi_{A^T}(\lambda)$$

Znaleźć Czynnik jądra jądra (kernel) jądra macierzy [illegible]

Zadanie 2. Pokaż też, że jeśli macierz A' wynikamy z macierzy A poprzez elementarne operacje wierszowe, to ker A = ker A'.

Niech A będzie macierzą w postaci schodkowej (wierszowej) i niech każdy element wiodący w wierszu będzie równy 1. Wykonaj operacje wierszowe, tak by te elementy wiodące były jedyne w kolumnie. Jak wygląda baza jądra tak uzyskanej macierzy?

Napisać ciąg operacji sprowadzający A do postaci schodkowej (wierszowej) i ciąg operacji przekształcający wiersze macierzy A w wiersze macierzy schodkowej. Użyć do tego tylko operacji wierszowych.