Lista 3

Thursday, 9 March 2023 14:31

Lista 3

Zadanie 1. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ zachodzi

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}') \ .$$

Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

Zadanie 2. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla

1. $S = \{(1,2,0,1), (1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0), (1,3,0,1)\}$;
2. $S = \{(2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0)\}$.

Zadanie 3. Dane są dwa układy wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ (nad ciałem $\mathbb{R}$): $S = \left\{\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 5 & -2 & 4 & -1\end{pmatrix}\right\}$ i $T = \left\{\begin{pmatrix}1 & -5 & 3 & -3 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Ile wynoszą wymiary $\mathrm{LIN}(S \cup T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$? Podaj dowolną bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$.

Udowodnij też równoważność poniższych warunków:

1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową;
3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 5. Dla podanych warstw U przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz wektorów $\vec{V}$ określ, czy $\vec{V} \in U$. Odpowiedzi uzasadnij.

(a) $U = [1,3,2] + \mathrm{LIN}([2,1,5],[2,0,1])$, $\vec{V} = [3,6,15]$
(b) $U = [1,3,2] + \mathrm{LIN}([2,1,5],[2,0,1])$, $\vec{V} = [3,6,16]$
(c) $U = [1,0,1] + \mathrm{LIN}([1,1,1],[3,-1,2])$, $\vec{V} = [-4,7,11]$
(d) $U = [1,0,1] + \mathrm{LIN}([1,1,1],[3,-1,2])$, $\vec{V} = [-8,14,22]$

Zadanie 6. Pokaż, że na zbiorze warstw (podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$) można zadać strukturę przestrzeni liniowej poprzez:

$$(\vec{u} + \mathbb{W}) + (\vec{u}' + \mathbb{W}) = (\vec{u} + \vec{u}') + \mathbb{W}$$
$$\alpha(\vec{u} + \mathbb{W}) = (\alpha\vec{u}) + \mathbb{W}$$

Ile wynosi wymiar tak zdefiniowanej przestrzeni (w zależności od $\dim \mathbb{V}$ i $\dim \mathbb{W}$)?

Wskazówka: W drugim punkcie: rozważ bazę $\mathbb{W}$ i rozszerz ją do bazy $\mathbb{V}$.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $\vec{v} \in \mathbb{V}$ takie że $F(\vec{v}) \neq \vec{0}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonałami liniowymi*). Pokaż, że istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takie że

$$F((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ .$$

Wskazówka: Wystarczy zadać F na bazie standardowej.

Zadanie 8. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x,y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$, $\mathbb{R}^2$
- $L'(x,y,z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$, $\mathbb{R}^3$
- $L''(x,y,z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$. $\mathbb{R}^3$

Zadanie 9. Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym i jest funkcją „na” $\mathbb{W}$. Załóżmy, że $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \mathbb{V}$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)) = \mathbb{W}$.

Zadanie 10. Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)$ są liniowo niezależne. Pokaż, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne.

Zadanie 11 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(\vec{v}) = \vec{0}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(\vec{v}) = \vec{0}$ dla dowolnego wektora $\vec{v}$, to zachodzi również $L^n(\vec{v}) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $\vec{v}, L(\vec{v}), L^2(\vec{v}), \ldots, L^n(\vec{v})$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 9. Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym i jest funkcją „na” $\mathbb{W}$. Załóżmy, że $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \mathbb{V}$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)) = \mathbb{W}$.

zał: $F: V \to W$ jest „na”

$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = V$ T: $\mathrm{Lin}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)) = W$

– weźmy dowolny wektor $w \in W$, skoro F jest „na” to istnieje wektor $v \in V$, t.ż. $F(v) = w$. Ponadto $V = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$, czyli v można zapisać jako kombinację liniową wektorów, czyli $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, korzystając z liniowości przekształcenia
$w = F(v) = F(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \ldots + \alpha_n F(v_n)$, czyli każdy wektor $w \in W$ można zapisać jako kombinację liniową wektorów z W, czyli $\mathrm{Lin}(F(v_1), \ldots, F(v_n)) = W$

Zadanie 1. Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ zachodzi $\dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}') = 1 + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$. Udowodnij, że suma $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest jedną z przestrzeni $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$, a przecięcie $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$—drugą.

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

$\dim(W \cap W') \leq \dim(W)$
$\dim(W \cap W') \leq \dim(W')$

$\dim(W + W') = 1 + \dim(W \cap W')$
$\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$

$2\dim(W \cap W') = \dim(W) + \dim(W') - 1$

Zauważmy, że $\dim(W) \geq \dim(W \cap W')$ oraz $\dim(W') \geq \dim(W \cap W')$

$\dim(W+W') = 1 + \dim(W \cap W')$

BSO $\dim(W) \geq \dim(W')$

T: $W + W' = W$, $W \cap W' = W'$

$\dim(W) \geq \dim(W \cap W') + 1$ oraz $\dim(W') \geq \dim(W \cap W') + 1$

$2\dim(W \cap W') = \dim(W) + \dim(W') - 1 \geq 2\dim(W \cap W') + 2 - 1 = 2\dim(W \cap W') + 1$

$2\dim(W \cap W') \geq 2\dim(W \cap W') + 1$ co jest niemożliwe

$2\dim(W+W') + 1 = \dim(W) + \dim(W') \geq 2\dim(W \cap W')$

$\dim(W) \geq \dim(W \cap W')$
$\dim(W') \geq \dim(W \cap W')$

$1 + \dim(W \cap W') \geq \dim(W) \geq \dim(W \cap W')$

$\dim(W) = 1 + \dim(W \cap W')$
$\dim(W') = \dim(W \cap W')$

$\dim(W+W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$

Zadanie 10. Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)$ są liniowo niezależne. Pokaż, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne.

zał: $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)$ są liniowo niezależne

T: $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ są liniowo niezależne

$L: V \to U$ L jest liniowe, gdy
(i) $L(\alpha v) = \alpha \cdot L(v)$
(ii) $L(v + u) = L(v) + L(u)$

(i) $F(\alpha v_i) = \alpha F(v_i)$
(ii) $F(u_i + v_i) = F(u_i) + F(v_i)$

wiemy, że $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n)$ są liniowo niezależne, więc
$\alpha_1 F(\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_n F(\vec{v}_n) = \vec{0} \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$
$F(\alpha_1 v_1) + \ldots + F(\alpha_n v_n) = \vec{0}$, zatem $v_1 \ldots v_n$ są liniowo niezależne

Zadanie 5. Dla podanych warstw U przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz wektorów $\vec{V}$ określ, czy $\vec{V} \in U$. Odpowiedzi uzasadnij.
(a) $U = [1,3,2] + \mathrm{LIN}([2,1,5],[2,0,1])$, $\vec{V} = [3,6,15]$
(b) $U = [1,3,2] + \mathrm{LIN}([2,1,5],[2,0,1])$, $\vec{V} = [3,6,16]$
(c) $U = [1,0,1] + \mathrm{LIN}([1,1,1],[3,-1,2])$, $\vec{V} = [-4,7,11]$
(d) $U = [1,0,1] + \mathrm{LIN}([1,1,1],[3,-1,2])$, $\vec{V} = [-8,14,22]$

a) $(1,3,2) + \alpha(2,1,5) + \beta(2,0,1) = (3,6,15)$
$1 + 2\alpha + 2\beta = 3 \Rightarrow 1 + 6 - 4 = 3 = 3$ należy
$3 + \alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$
$2 + 5\alpha + \beta = 15 \Rightarrow \beta = -2$

b) $(1,3,2) + \alpha(2,1,5) + \beta(2,0,1) = (3,6,16)$
$3 + \alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$
$2 + 5\alpha + \beta = 16 \Rightarrow \beta = 16 - 2 - 15 = -1$
nie należy

c) $(1,0,1) + \alpha(1,1,1) + \beta(3,-1,2) = (-4,7,11)$
$\alpha = 4$, $\beta = -3$
nie należy

d) $(1,0,1) + \alpha(1,1,1) + \beta(3,-1,2) = (-8,14,22)$
nie należy

Zadanie 4. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq \mathbb{V}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: 1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$; 2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U = \vec{u} + \mathbb{W}$; 3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zachodzi $U = \vec{u} + \mathbb{W}$. Udowodnij też równoważność poniższych warunków: 1. istnieje wektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową; 2. istnieje wektor $\vec{u} \in U$, taki że $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową; 3. dla każdego wektora $\vec{u} \in U$ zbiór $U - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową.

zał: $W \leq V$ i $U \subseteq V$

I $\vec{u} + W = \{\vec{u} + \vec{w} : \vec{w} \in W\}$

$1 \Rightarrow 2$
zał: $\exists \vec{u} \in V$ $U = \vec{u} + W$
$\vec{0} \in W$ $\vec{u} + \vec{0} \in \vec{u} + W = U$

$2 \Rightarrow 3$ $u \in U$ $U = u + W$
LEMAT: $w \in W \Rightarrow w + W = W$
weźmy dowolny $v \in U$

$3 \Rightarrow 2$ $U \neq \emptyset$

II $\vec{u}$
$U - \vec{u}$ – podprzestrzeń liniowa
$U - \vec{u} = V$
$U = \vec{u} + W$

Zadanie 6. Pokaż, że na zbiorze warstw (podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$) można zadać strukturę przestrzeni liniowej poprzez: $(\vec{u} + \mathbb{W}) + (\vec{u}' + \mathbb{W}) = (\vec{u} + \vec{u}') + \mathbb{W}$, $\alpha(\vec{u} + \mathbb{W}) = (\alpha\vec{u}) + \mathbb{W}$. Ile wynosi wymiar tak zdefiniowanej przestrzeni (w zależności od $\dim \mathbb{V}$ i $\dim \mathbb{W}$)?

$(\vec{v} + W) + (\vec{v}' + W) = (\vec{v} + \vec{v}') + W$

$\alpha(\vec{u} + W) = (\alpha\vec{u}) + W$

– element neutralny $(\vec{u} + W) + (\vec{0} + W) = (\vec{u} + \vec{0}) + W = \vec{u} + W$

– przemienność $(\vec{u} + \vec{v}) + W = (\vec{v} + \vec{u}) + W$

FAKT:

Zadanie 2. Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ dla 1. $S = \{(1,2,0,1), (1,1,1,0)\}$, $T = \{(1,0,1,0), (1,3,0,1)\}$; 2. $S = \{(2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0)\}$.

WAŻNE: $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

1. $S = \{(1,2,0,1), (1,1,1,0)\}$ $T = \{(1,0,1,0), (1,3,0,1)\}$

$\dim(S) + \dim(T) = 2 + 2 = 4$

$\dim(S+T) = 3$

$\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T) = 4 - 3 = 1$

2. $S = \{(2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1)\}$, $T = \{(3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0)\}$

$\dim(S) = 3$

$\dim(T) = 3$

$\dim(S+T) = 4$

$\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T) = 3 + 3 - 4 = 2$

Zadanie 3. Dane są dwa układy wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ (nad ciałem $\mathbb{R}$): $S = \{(3\ -1\ 1\ 1\ 5), (0\ 5\ -2\ 4\ -1)\}$ i $T = \{(1\ -5\ 3\ -3\ 3), (-1\ -3\ 3\ -2\ 0)\}$. Ile wynoszą wymiary $\mathrm{LIN}(S \cup T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$? Podaj dowolną bazę $\mathrm{LIN}(S \cup T)$.

S: $3\ -1\ 1\ 1\ 5$; $0\ 5\ -2\ 4\ -1$ $\dim(S) = 2$

T: $1\ -5\ 3\ -3\ 3$; $-1\ -3\ 3\ -2\ 0$ $\dim(T) = 2$

$\dim(S \cup T) = 3$

$\dim(\mathrm{Lin}(S \cup T)) = 3$

$\dim(\mathrm{Lin}(T)) = 2$ $\dim(\mathrm{Lin}(S)) = 2$

$\dim(\mathrm{Lin}(S) \cap \mathrm{Lin}(T)) = 4 - 3 = 1$

Zadanie 8. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?
- $L(x,y) = (2x - y, x + 3y - 1, 5x + 2y)$,
- $L'(x,y,z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$,
- $L''(x,y,z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$.

$L: V \to U$ L jest liniowe, gdy
(i) $L(\alpha v) = \alpha \cdot L(v)$
(ii) $L(v + u) = L(v) + L(u)$

1. KONTRPRZYKŁAD
$x = 1$ $y = 0$ $\alpha = 2$
$\alpha \cdot (L(x,y)) \stackrel{?}{=} L(\alpha(x,y))$
$\alpha(L(x,y)) = \alpha(2 \cdot 1 - 0, 1 + 0 - 1, 5 + 0) = \alpha(2,0,5) = (4,0,10)$
$L(\alpha(x,y)) = L(2(1,0)) = L(2,0) = (2 \cdot 2 - 0, 2 + 0 - 1, 10 + 0) = (4,1,10)$

2. $L'(x,y,z) = (3x + 5y - 2z, 2x - y)$
(i) $\alpha \cdot (L'(x,y,z)) \stackrel{?}{=} L(\alpha(x,y,z))$
$\alpha(3x + 5y - 2z, 2x - y) = (3\alpha x + 5\alpha y - 2\alpha z, 2\alpha x - \alpha y)$
$L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (3\alpha x + 5\alpha y - 2\alpha z, 2\alpha x - \alpha y)$
(ii) $L(v + u) \stackrel{?}{=} L(v) + L(u)$
$v = (x,y,z)$ $u = (a,b,c)$
$v + u = (x + a, y + b, z + c)$
$L(v + u) = [3(x+a) + 5(y+b) - 2(z+c), 2(x+a) - (y+b)]$
$= [3x + 3a + 5y + 5b - 2z - 2c, 2x + 2a - y - b]$
$L(v) = [3x + 5y - 2z, 2x - y]$
$L(u) = [3a + 5b - 2c, 2a - b]$
$L(v) + L(u) = [3x + 3a + 5y + 5b - 2z - 2c, 2x - y + 2a - b]$

3. $L''(x,y,z) \stackrel{?}{=} (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$
(i) $\alpha(L''(x,y,z)) \stackrel{?}{=} L(\alpha(x,y,z))$
$L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x \cdot \alpha y + \alpha z, -2\alpha x - \alpha z, -2\alpha y - \alpha z)$
$\neq \alpha(xy + z, -2x - z, -2y - z)$
(ii) $L''(x,y,z) = (x \cdot y + z, -2x - z, -2y - z)$
$L''(a,b,c) = (ab + c, -2a - c, -2b - c)$

$v = (x,y,z) = (1,2,3)$
$u = (a,b,c) = (2,3,4)$
KONTRPRZYKŁAD
$L''(u + v) = L''(3,5,7) = (15 + 7, -6 - 7, -10 - 7) = (22, -13, -17)$
$L''(u) + L''(v) = (2 + 3, -2 - 3, -4 - 3) + (6 + 4, -8, -10) = (5, -5, -7) + (10, -8, -10) = (15, -13, -17)$