Lista 5

Thursday, 23 March 2023 14:18

lista5

Lista 5

Zadanie 1. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. (Uzasadnij odpowiedź).

Wskazówka: Zmienną rozmiaru macierzy n oznaczmy jak n. Zmienną rzędu macierzy M^k dla wybranego k oznaczmy jak r. Zmienną rozmiaru jądra macierzy M^k dla wybranego k oznaczmy jak d. Wtedy $r + d = n$. Zmienną d wyznaczamy, rozwiązując równanie rekurencyjne $d(k) = d(k-1) + d(k-2)$ z warunkami początkowymi $d(1) = 1$ i $d(2) = 2$. Wzór na r otrzymujemy z wzoru na d.

Zadanie 4. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne.
- Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to AB jest też odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^T jest odwracalna i zachodzi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zadanie 5.* (**Nie trzeby się do podstawy**). Pokaż, że każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze D_{α} mogą być ostatnie w tej reprezentacji.

Pokaż też, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz (jednej) macierzy górnotrójkątnej (może ona mieć zera na przekątnej).

Wskazówka: Rozważmy n ciągów $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ dla $i = 1, \dots, n$ z kolumn macierzy A. Zastosuj dodawanie wierszami i przestawianie wierszy do ciągu $(1, 0, \dots, 0)$ i zauważ, że operacje te są realizowalne przez mnożenie macierzy elementarnych. Co więcej, macierze D_{α} mogą być ostatnie na tej drodze, bo wiersze między pierwszym a ostatnim mnożeniem mają dokładnie jedną liczbę różną od zera. Wskazówka: Rozważ macierz A^T i zastosuj do niej rozkład z punktu wyżej. Wtedy $A = (A^T)^T$ i macierze D_{α} będą na początku rozkładu A^T.

Zadanie 6. Podaj macierz odwrotną do macierzy (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7. Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnotrójkątną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątna/górnotrójkątna/diagonalna.

Zadanie 8. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 9. Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_3)$;
- obrót prostokątny $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft$ kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrię $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.

Zadanie 10. Niech V będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopniu najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^3, x^2, x^1, x^0 oraz $x^3, x^2 + x^1, x^1 + x^0, x^0 + x^3$ i $x^3 + x^2, x^2 + x^1, x^1 + x^0, x^0$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : V \to V$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w obrót podanych powyżej baz.

Zadanie 11. Podaj macierze zmiany bazy pomiędzy każdą z par poniższych baz:

- baza standardowa w $\mathbb{R}^3$,
- $[1, 1, 1]^T, [1, 1, 0]^T, [1, 0, 0]^T$,
- $[1, 1, -1]^T, [1, -1, 1]^T, [-1, 1, 1]^T$.

Zadanie 1. Wyznacz bazę jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

– eliminacja Gaussa na kolumnach (w sensie dzielenia ze resztą) pozwala zachować całkowitoliczbowość, więc jest dobry

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_3 - 2k_1]{k_2 - k_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_4 + 3k_2]{k_3 + k_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -7 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{k_3 - 3k_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_4 + 2k_3]{k_3 + k_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_4 + 6k_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

obliczenie

BAZA: $(0, 1, -3, 0, 2)$; $(-5, 1, 1, 1, 6)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_3 - k_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_4 - 5k_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

– rząd wyznacz przekrzyżowanym gaussem, redukcja z macierzy

– rząd w wierszach

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_3 - pk_1]{k_2 - k_1} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 0 & 1-p & 0 & 1-p \\ 0 & 1-p^2 & 0 & 1-p^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{k_3 - (1+p)k_2} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 0 & 1-p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $p \neq 1$ i $p \neq -1$ 2 wiersze niezerowe $rk(M) = 2$

dla $p = 1$ 1 wiersz niezerowy $rk(M) = 1$

dla $p = -1$ 2 wiersze niezerowe $rk(M) = 2$

Zadanie 3. Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$ postaci:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$. (Uzasadnij odpowiedź).

Wskazówka: Zmienną rozmiaru macierzy n oznaczmy jak n. Zmienną rzędu macierzy M^k dla wybranego k oznaczmy jak r. Zmienną rozmiaru jądra macierzy M^k dla wybranego k oznaczmy jak d. Wtedy $r + d = n$. Zmienną d wyznaczamy, rozwiązując równanie rekurencyjne $d(k) = d(k-1) + d(k-2)$ z warunkami początkowymi $d(1) = 1$ i $d(2) = 2$. Wzór na r otrzymujemy z wzoru na d.

Zadanie 4. Niech A, B będą macierzami kwadratowymi tego samego rozmiaru. Pokaż, że

- Jeśli AB jest odwracalna to A i B również są odwracalne:
  - Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  - Jeśli A jest odwracalna, to AB jest też odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
  - Jeśli A jest odwracalna, to A^T jest odwracalna i zachodzi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
  - Jeśli A jest odwracalna, to A^{-1} jest odwracalna i zachodzi $(A^{-1})^{-1} = A$.

$f_y = id \longrightarrow$ k jest "na" i y jest 1-1

$f(y(x)) = x$ $\quad f(y(x)) = f(y(x))$

$x = x$

dla dowolnej dodatniej

$f: X \to X$

odwracalna, to AB jest odwracalna, to A i B są odwracalne.

Jeśli A, B są odwracalne, to AB też jest odwracalne i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1 sposób: chcemy $AB^{-1} = A$, $BA^{-1} = B$, $AB^{-1}A^{-1} = I$ $\quad B_1 = M B_2 \quad B_1 A B_2 = B_2 M \cdot B_2$

Jeśli $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, to $(AB)^{-1}A^{-1} = I$, więc chcemy znaleźć odwrotne do A, takie że jest odwrotne

$(AB)^{-1}AB = (B^{-1}A^{-1})AB = I$, więc chcemy znaleźć odwrotne do B, takie że jest odwrotne

2. Jeśli odwracalna jest macierz $B = B^{-1}$ dla odwrotnej, czyli $BB^{-1} = I$, to $B^{-1} = B$ i $BB = I$

czyli $B^{-1} = B$ i $BB = I$

Jeśli jest odwracalna jest chcemy $AB = I$ to

Dowód $C = C^{-1}$ $\quad$ Dowód, że $A^{-1}A^{-1} = I$ i $A^{-1}A^{-1}AA = I$

Jeśli jest odwracalna to $AB^{-1} = I$ $\quad$ $A^{-1}A^{-1}AA = I$

$