Lista 1

Sunday, 26 February 2023 13:42

Lista 1

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy następujące podzbiory $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi:

1. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 5a + 2b = 0\}$
2. $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}$
3. $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 5a + 2b = 2a - c = 0\}$
4. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 0\}$
5. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| + |b| = 1\}$
6. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 0\}$
7. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |2a| - |b| = 1\}$
8. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| = 1\}$
9. $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : ab = a\}$

• prosta wektorowa zerowego

Zadanie 3. Rozważmy zbiór wszystkich (nieskończonych) ciągów o elementach w $\mathbb{R}$. Definiujemy dodawanie takich ciągów po współrzędnych, tak samo mnożenie przez skalar, tj.:

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \quad \alpha(a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots) .$$

Jest to przestrzeń liniowa, gdzie 0 to ciąg złożony z samych 0. Dla podanych poniżej podzbiorów tej przestrzeni liniowej określ, które z nich są podprzestrzeniami liniowymi, a które nie. Odpowiedzi uzasadnij.

(a) Zbiór ciągów $(a_1, a_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$.

(b) Zbiór ciągów $(b_1, b_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 2$ mamy $b_n = 3 \cdot b_{n-1} + 2^n - 1$.

(c) Zbiór ciągów $(c_1, c_2, \ldots)$ takich, że dla każdego $n \geq 3$ mamy $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2}$.

(d) Zbiór ciągów $(d_1, d_2, \ldots)$ takich, że skończenie wiele liczb spośród $d_1, d_2, \ldots$ jest dodatnia.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}, \mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą jej podprzestrzeniami.
Pokaż, że $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą $\mathbb{W} \cup \mathbb{W}'$.

– z wyłączeniem zbioru, że suma podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową i zbioru pustego – łatwo, że $\mathbb{W}+\mathbb{W}'$ jest najmniejszym tego przykładu;

– weźmy S, będące najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą $\mathbb{W} \cup \mathbb{W}'$, weźmy wektor $\vec{w} \in \mathbb{W}$ oraz $\vec{w}' \in \mathbb{W}'$ i z $\vec{w}, \vec{w}' \in S$, więc weźmy wektor $\vec{w} \in \mathbb{W}$ oraz $\vec{w}' \in \mathbb{W}'$ i z $\vec{w}, \vec{w}' \in S$, więc

$\vec{w} \in \mathbb{W} + \mathbb{W}'$, bo $(\vec{w} + \vec{0}) \in \mathbb{W} + \mathbb{W}'$

$\vec{w}' \in \mathbb{W} + \mathbb{W}'$, bo $(\vec{0}' + \vec{w}) \in \mathbb{W} + \mathbb{W}'$

zatem $S \subseteq \mathbb{W} + \mathbb{W}'$

– weźmy dowolny wektor $\vec{v} \in \mathbb{W} + \mathbb{W}'$, można go zapisać jako $\vec{w} + \vec{w}'$ dla pewnych $\vec{w} \in \mathbb{W}$ i $\vec{w}' \in \mathbb{W}'$, czyli $\vec{w} = \vec{v} - \vec{w}'$, i z przykładu podpunktu wiemy, że $\vec{w} + \vec{w}' \in S$, zatem skoro dowolny wektor z S i $\vec{v} + \vec{w}'$ należy – z tego wynika, że $\vec{v} \in S$ to wynika, że przecież to $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ także będzie najmniejszą taką przestrzenią

Zadanie 5. Niech $\mathbb{V}$ — przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$ oraz $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}$ dla $i \in I$ będą jej podprzestrzeniami. Pokaż, że $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$ jest największą przestrzenią liniową zawartą w każdej z $\mathbb{W}_i$.
Pokaż też, że dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}_1, \ldots, \mathbb{V}_k$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, iloczyn kartezjański $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{V}_i$ z dodawaniem i mnożeniem po współrzędnych, jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 6. Pokaż (nie używając pojęcia wymiaru ani niezależności liniowej), że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiące prostą przechodzącą przez $(0,0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 7. Niech $\mathbb{V}$, przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{F}$, $U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ będzie układem wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ciąg skalarów, takich że $\alpha_1 \neq 0$. Pokaż, że

$$\mathrm{LIN}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i, v_2, \ldots, v_k\right)\right) = \mathrm{LIN}\left((v_1, v_2 \ldots, v_k)\right).$$

Zadanie 8. Przedstaw wektor $\vec{w}$ jako kombinację podanych wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ (lub uzasadnij, że to niemożliwe), nad ciałem $\mathbb{R}$:

1. $\vec{w} = (1,5)$, $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (2,0)$.

2. $\vec{w} = (5,10,11)$, $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,3,2)$, $\vec{v}_3 = (1,1,1)$.
3. $\vec{w} = (5,10,11)$, $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,3,2)$, $\vec{v}_3 = (1,8,7)$.
4. $\vec{w} = (4,17,18)$, $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,3,2)$, $\vec{v}_3 = (3,9,11)$.

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,1))$? A do do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,2))$?

Zadanie 10. Pokaż następujące fakty wprost z definicji, tj. rozpisując odpowiednie kombinacje liniowe:

a) Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $U \subseteq \mathbb{V}$ układem wektorów. Wtedy:
zbiór liniowo niezależny $\Leftrightarrow$ $\mathrm{SLIN}(U) = \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U))$.

b) Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, oraz $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ wektorami z tego ciała. Jeśli skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ są niezerowe to

$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\alpha_1 \vec{v}_1, \ldots, \alpha_k \vec{v}_k).$$

c) • Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k).$$

d) • Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha \vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k).$$

Zadanie 11 (* nie liczy się do podstawy). *Kombinacją wypukłą* wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ jest kombinacja liniowa $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ przy czym $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \wedge 0 \leq \alpha_i \leq 1$ dla każdego $1 \leq i \leq k$.
Pokaż, że w $\mathbb{R}$ kombinacja wypukła wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ to najmniejszy wielokąt wypukły zawierający je wszystkie. (Wielokąt jest wypukły, jeśli nie ma kąta większego niż 180°.)

tzw. dodatki

Zadanie 9. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^3$ (zbiór trzyelementowych ciągów elementów z $\mathbb{Z}_3$, nad ciałem $\mathbb{Z}_3$). Ile wektorów należy do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,1))$? A do do $\mathrm{LIN}((1,2,1),(2,1,2))$?

a) $\mathrm{Lin}((1,2,1),(2,1,1)) = \{\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$= (\alpha_1 + 2\alpha_2;\ 2\alpha_1 + \alpha_2;\ \alpha_1 + \alpha_2) ;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\}$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

czy są liniowo niezależne?

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$

są liniowo niezależne, rozpiszmy wszystkie kombinacje liniowe tych wektorów:

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 \cdot (1,2,1) + \alpha_4 \cdot (2,1,1) = (0,0,0)$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$ —— || —— || —— $= (2,1,1)$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0$ —— || —— $= (1,2,1)$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1$ —— || —— $= (0,0,2)$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$ —— || —— $= (0,2,0)$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 1$ —— || —— $= (1,2,0)$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 0 \quad (2,1,2) = (2,1,2)$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 2 \quad (2,1,2) + (1,2,1) = (0,0,0)$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2 \quad (1,2,1) + (2,1,1) = (1,0,0)$

mamy 9 wektorów (wszystkie, czyli są wszystkie liniowo)

b) $\mathrm{Lin} = \{(1,2,1),(2,1,2)\}$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$\alpha = \{0, 1, 2\}$

czy są liniowo niezależne?

$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow -4\alpha_1 + \alpha_2 = -3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2 \end{cases}$ nie są liniowo niezależne

3 wektory

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 \cdot (1,2,1) + \alpha_4 \cdot (2,1,2) =$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$ —— || —— || —— $= (2,1,2)$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad (1,2,1) + (2,1,2) = (3,3,3) =$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2 \quad (1,2,1) + (4,2,4) = (5,4,5) =$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \quad (1,2,1)$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 1 \quad (2,1,2) + (2,1,2) = (4,5,4) =$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 0 \quad (2,1,2) =$

$\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 2 \quad (2,1,2) + (4,2,4) = (6,3,6) =$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2 \quad (4,2,4) = (1,2,1)$

Zadanie 6. Pokaż (nie używając pojęcia wymiaru ani niezależności liniowej), że każda podprzestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$ jest jednej z postaci:

- jedynie wektor zerowy: $\{\vec{0}\}$
- wielokrotności ustalonego wektora z $\mathbb{R}^2$ (czyli wektory stanowiące prostą przechodzącą przez $(0,0)$)
- całe $\mathbb{R}^2$.

– weźmy dowolną podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{V})$, z definicji: podprzestrzeń ma wśród tych punktów

– weźmy dowolny wektor $\vec{w} \in \mathbb{V}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ z definicji: wtedy, że gdy α wszystkie α punkt $(0,0)$ musimy też pokazać, że punkt $(0,0)$

– weźmy dowolny wektor $\vec{v} \in \mathbb{V}$

1° $\Rightarrow$ $\vec{v}$ jest prostej równej po wektorze $\vec{w}$, wtedy dowolne i wielokrotne tu wektor do $\vec{w}$ wszystkie całą prostą!

2° $\Rightarrow$ $\vec{v}$ o prostej równej po wektorze $\vec{w}$, ale wtedy II warunek

• wektory wszystkie α punkt $(0,0)$
• prost wektor $\vec{w}$

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{Z}_p$ istnieje element odwrotny, tj. dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p$ różnego od 0 istnieje a^{-1} takie że $a \cdot a^{-1} = 1$. Możesz to zrobić według następującego schematu:

- dla ustalonego $a \neq 0$ rozważ $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$;
- pokaż, że elementy w tym ciągu są niezerowe i różne;
- wywnioskuj z tego, że a ma element odwrotny w $\mathbb{Z}_p$.

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$

weźmy dowolne $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$

weźmy dowolne $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$

$\forall a \forall b\ (a \cdot b = 1 \Rightarrow b \cdot a = 1)$ — algorytm Euklidesa

zatem

$1 = ax + py \mod p$

$1 \bmod p = (ax + py) \bmod p$

$1 \bmod p = (ax \bmod p) \cdot (y \bmod p) = a \bmod p \cdot y \bmod p = a \cdot y \pmod p$

$1 = ax$

x jest odwrotnością a

1° $x = a^{-1}$ bo $a \cdot x = 1$

2° $\forall x \in \mathbb{Z}_p\ \forall y \in \mathbb{Z}_p$ weźmy takie współczynniki x' i y' $x' = x \bmod p$ (to własne zwarcanie $x' = x$)

$a \cdot x' = 1$

$a \cdot x \bmod p = 1$

$a \cdot x \bmod p = 1$

$a \cdot x \bmod p