Lista 6

Thursday, 30 March 2023 14:08

lista6

Lista 6

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 2. Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

gdzie $A_{i,j}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wskazówka: Wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Zadanie 3. Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times n$, B wymiaru $m \times m$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

Wskazówka: Wyznacz eliminacją Gaussa.

Zadanie 4. Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Wskazówka: Użyj metody Gaussa.

Zadanie 5. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6 (* Alternatywny dowód tw. Cauchy'ego; nie liczy się do podstawy). Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\mathrm{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\mathrm{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\mathrm{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Zadanie 7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}.$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 8 (Wyznacznik macierzy klatkowej). Dla macierzy kwadratowych $M_1, \dots, M_k$ rozważamy macierz M postaci (*macierz klatkowa*):

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{bmatrix},$$

tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy $M_1, \dots, M_k$, a poza tymi macierzami M ma same zera. Pokaż, że

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i).$$

Wskazówka: Pokaż najpierw dla dwóch macierzy.

Zadanie 9. Oblicz wyznacznik (nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. Skonstruuj macierz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \neq 0$, której przekształcenie F_M jest bijekcją między $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^2$, tj. dla $x, y \in \mathbb{Z}$ i $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ mamy $x', y' \in \mathbb{Z}$ i analogicznie dla M^{-1}.

W tym celu pokaż, że:

- Wystarczy i potrzeba, że $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ i $M^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$.
- $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ jest równoważne z tym, że wszystkie elementy M są całkowite.
- Przypomnij jawny wzór na macierz odwrotną.

Zadanie 11. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 32 + 1 = 33 \neq 0$ $\qquad x_1 = \frac{33}{33} = 1$

$\det(A_{x_1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 17 & 16 \end{vmatrix} = 16 + 17 = 33$ $\qquad x_2 = \frac{33}{33} = 1$

$\det(A_{x_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 34 - 1 = 33$

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$

$\det(A_{x_1}) = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$ $\qquad x_1 = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1}$

$\det(A_{x_2}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin\beta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$ $\qquad x_2 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1}$

c) $\det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = (1+1+1) - (1-1-1) = 4$ $\qquad x_1 = \frac{12}{4} = 3$

$\det(A_{x_1}) = \left|\begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = (6+2+0) - (2-6+0) = 8 + 4 = 12$

$\det(A_{x_2}) = \left|\begin{matrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = (0+6-2) - (0+2-6) = 4 + 4 = 8$ $\qquad x_2 = \frac{8}{4} = 2$

$\det(A_{x_3}) = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = (2+0+6) - (6+0-2) = 8 - 4 = 4$ $\qquad x_3 = \frac{4}{4} = 1$

Zadanie 10. Skonstruuj macierz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \neq 0$, której przekształcenie F_M jest bijekcją między $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^2$, tj. dla $x, y \in \mathbb{Z}$ i $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ mamy $x', y' \in \mathbb{Z}$ i analogicznie dla M^{-1}.
W tym celu pokaż, że:
- Wystarczy i potrzeba, że $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ i $M^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$.
- $M(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ jest równoważne z tym, że wszystkie elementy M są całkowite.
- Przypomnij jawny wzór na macierz odwrotną.

odwrotność wyznacznika

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$M: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$M: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$

$M: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \iff$ wyrazy M są całkowite

$M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = pierwsza kolumna $M \in \mathbb{Z}_2$, bo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

$M: \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\text{jednoznacznie na}} \mathbb{Z}^2 \iff M[\mathbb{Z}^2] \subseteq \mathbb{Z}^2,\ M^{-1}[\mathbb{Z}^2] \subseteq \mathbb{Z}^2$

Zadanie 7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}.$$

Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

z tw. Cauchy'ego

$\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2$ — transpozycja nie wpływa na wyznacznik

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & ab-ab+cd-cd & ac-bd-ac+bd & ad+bc-bc-ad \\ ab-ab+cd-cd & b^2+a^2+d^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2+d^2+a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

$\det(AA^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 = \det(A)^2$

$(\det(A))^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 = [\det(A) - W^2][\det(A) + W^2] = 0$

$W^2 = \det(A) \lor \det(A) = -W^2$, bo

wiemy, że $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, gdyż może to przyjąć wartość ujemną, zatem $4 \cdot (-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a) = -a^4$, [rozwinięcie LAPLACE'A]

Zadanie 3. Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times n$, B wymiaru $m \times m$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$ oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$.

$\det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C) = \det(A) \cdot \det(C)$

$A_{n\times n}$ $C_{m\times m}$ $B_{m\times n}$ $0_{n\times m}$

$\det(M) = \underbrace{a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}}_{=\det(A)} \cdot \underbrace{c_{11} \cdot \ldots \cdot c_{mm}}_{=\det(C)}$

wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej

przeprowadzam eliminację Gaussa na kolumnach w części A, zauważmy, że takie same co eliminację odpowiadają tej samej macierzy A, bo ponieważ tylko 0 na prawo od nich

teraz przeprowadzam eliminację Gaussa w części B, w której już tylko nie ma wpływu na A, bo ma zera po przekątnej, zatem eliminacja w B odpowiada eliminacji w samej C

otrzymam

$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$ — policzmy teraz wyznacznik macierzy M, będzie to iloczyn przekątnej

$\det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot c_{11} \cdot c_{22} \cdot \ldots \cdot c_{mm} = \det(A) \cdot \det(C)$

Zadanie 4. Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot10^5 & 4\cdot10^4 & 4\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 2\cdot10 & 8 \\ 5\cdot10^5 & 3\cdot10^4 & 2\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 7\cdot10 & 0 \\ 2\cdot10^5 & 5\cdot10^4 & 7\cdot10^3 & 5\cdot10^2 & 6\cdot10 & 7 \\ 2\cdot10^5 & 0\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 7\cdot10 & 0 \\ 2\cdot10^5 & 8\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 0\cdot10^2 & 1\cdot10 & 7 \\ 5\cdot10^5 & 1\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 7\cdot10^2 & 9\cdot10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144228 & 4\cdot10^4 & 4\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 2\cdot10 & 8 \\ 532270 & 3\cdot10^4 & 2\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 7\cdot10 & 0 \\ 257567 & 5\cdot10^4 & 7\cdot10^3 & 5\cdot10^2 & 6\cdot10 & 7 \\ 209270 & 0\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 2\cdot10^2 & 7\cdot10 & 0 \\ 289017 & 8\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 0\cdot10^2 & 1\cdot10 & 7 \\ 519792 & 1\cdot10^4 & 9\cdot10^3 & 7\cdot10^2 & 9\cdot10 & 2 \end{bmatrix} = 17 \begin{bmatrix} x_1 & \cdots \\ x_2 & \\ x_3 & \\ x_4 & \\ x_5 & \\ x_6 & \end{bmatrix}$$

wyciągam z kolumny

- przemnażam każdą kolumnę przez skalar
- ← + dodaję kolumny do I, wyciągam skalar

z algorytmu wyznacznika musi być podzielny przez 17

Zadanie 5. Oblicz wyznacznik

$$\begin{array}{c} \\ 10\cdot \\ 10\cdot \\ 10\cdot \\ 10\cdot \\ 10\cdot \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10^4 & 10^5 \\ 1 & 20 & 300 & 4000 & 5\cdot10^4 & 6\cdot10^5 \\ 0 & 1 & 30 & 600 & 1\cdot10^4 & 15\cdot10^4 \\ 0 & 0 & 1 & 40 & 1000 & 2\cdot10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 50 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 & 10^5 \\ 0 & 1 & 2\cdot10 & 3\cdot10^2 & 4\cdot10^3 & 5\cdot10^4 \\ 0 & 0 & 1 & 3\cdot10^2 & 6\cdot10^2 & 10\cdot10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\cdot10 & 10\cdot10^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\cdot10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

I $W_2 - W_1$

II $W_2 \cdot \frac{1}{10}$

III $W_3 - W_2$

IV $W_3 \cdot \frac{1}{10}$

V $W_4 - W_3$

VI $W_4 \cdot \frac{1}{10}$

VII $W_5 - W_4$

VIII $W_5 \cdot \frac{1}{10}$

IX $W_6 - W_5$

$\det(M) = 10$

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} \xrightarrow{W_3 - W_1,\ W_5 - W_4} \ldots \xrightarrow{W_3 - W_5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad \det(A) = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xrightarrow{W_2 - W_1,\ W_3 - W_1,\ \ldots,\ W_n - W_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$ $\qquad \det(A) = 1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n$

odpowiadający do macierzy schodkowej

Zadanie 9. Oblicz wyznacznik (nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

— zastosuję rozwinięcie LAPLACE'A

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{matrix} = [(-28) + 0 + 48] - [48 + 0 + 126]$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

Zadanie 2. Na wykładzie podany był dowód rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny. Uogólnij ten dowód na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ oraz dla dowolnego i zachodzi $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$, gdzie $A_{i,j}$ jest minorem powstałym przez wykreślenie z macierzy A jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wskazówka: Wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vdots \\ a_2 & b_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_n & b_n & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & a_n \end{vmatrix} = -\sum_i (-1)^{i+1} b_i \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = -\sum_i (-1)^{i+k+1} b_i \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$

$k+1$ — zmiana ol znaku — przestawiamy kolumny — nr kolumny możliwej którą rozwijamy — przesuwamy na początek macierzy, k — przestawień

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — j-kolumna, i-ty wiersz, bierzemy elementy z kolumny

a) $= a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot |A_{1j}| + a_{2j} \cdot (-1)^{2+j} |A_{2j}| + \ldots + a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} |A_{ij}| + \ldots + a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot |A_{nj}| =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+j} |A_{kj}|$

b) i-ty wiersz

$|\ldots| = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} |A_{i1}| + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot |A_{i2}| + \ldots + a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}| + \ldots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot |A_{in}| =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |A_{ik}|$

Zadanie 9. Oblicz wyznacznik (nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \ldots = \ldots =$$

dodaję do każdego dwa poprzednie; dodając wiersze w $\mathbb{Z}_2$

$n = 2 \bmod 3$

$= (-1)^{n-1} \, |\mathrm{I}| = (-1)^{n-1} = 1$ — $\det(\mathrm{I})$

$\det(M) = 0$

skoro dojdę do gdy odpowiedniej macierzy 0 w pozostałym, wtedy $\det(M) = 0$ w przypadku niezerowości, wiem identyczność

Zadanie 8 (Wyznacznik macierzy klatkowej). Dla macierzy kwadratowych $M_1, \dots, M_k$ rozważamy macierz M postaci (*macierz klatkowa*): $\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ & & & M_k \end{bmatrix}$, tzn. przekątna M pokrywa się z przekątnymi macierzy $M_1, \dots, M_k$, a poza tymi macierzami M ma same zera. Pokaż, że $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i)$.

dla M_{k+1}: $\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots M_k & \\ & & & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & & & \\ & \mathrm{Id} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{k+1} \end{bmatrix} = \det(M) \cdot \det(M_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) \cdot \det(M_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} \det(M_i)$

dowód przeprowadzę za pomocą indukcji

Wtedy $A = \{ n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \mid \det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i) \}$

P: Niech M_1 i M_2 będą macierzami kwadratowymi t.ż.

$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$, M mogę rozpisać do $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & b_{21} \cdots & b_{m1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{1m} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$ (A | B)

przeprowadzam eliminację Gaussa na części A, odpowiada to eliminacji na samej M_1, pozostałe liczby z macierzy (części B) nam nie pomogą, same 0

$\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & b_{21} \cdots & b_{m1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{1m} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$ teraz eliminacja Gaussa na M_2, nie ruszamy części A, bo nie dostaniemy 0 na górze, zatem odpowiada to eliminacji tylko na macierzy M_2

$\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{1m} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$, obliczając wyznacznik tej macierzy otrzymam

$\det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{mm} = \det(M_1) \cdot \det(M_2)$

K: założmy, że $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(M_i)$, pokażemy że

$\det(M_{+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} \det(M_i)$

z zał. indukcyjnego wynika, że

$\begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ 0 & & \ddots M_k \end{bmatrix}$ możemy bez problemu doprowadzić do postaci schodkowej; pokażmy to dla kolejnej macierzy:

$M_{+1} = \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots M_i & \\ 0 & & \ddots M_k M_{k+1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ \cdots & M_k & \\ 0 & a_{11} \, a_{12} \cdots a_{1m} \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{m1} \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Gaussem}]{M_{k+1} \text{ przekształcam}} \begin{bmatrix} M_1 & & 0 \\ \cdots M_k & & \\ & a_1 & 0 \\ 0 & \vdots \ddots & \\ & a_{m1} \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$

Wtedy to dotyczy tak samo jak dla Gaussa dla M_{k+1}, bo w M nie ma liczb na odpowiednich pozycjach

Wiemy $\det(M)$ $\longrightarrow$ z zał. indukcyjnego wiemy, że

$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} M_k$

$\det(M_{+1}) = \det(M) \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{mm} = \det(M_{+1})$,

zatem $\det(M_{+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} \det(M_i)$, $A = \mathbb{N}_{\geq 2}$

zatem ta zależność dla dowolnej macierzy klatkowej jest spełniona