Lista 11

Thursday, 11 May 2023 14:36

lista11

Lista 11

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ będzie bazą ortonormalną V a $P : V \to V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $W \leq V$.
Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z B na W wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^{n} \|P\vec{b}_i\|^2 = 1 .$$

źródło: materiały własne

Zadanie 2. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako:

$$\langle p, h\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)h(x)dx .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.
Zrzutuj prostopadle na tę przestrzeń wielomianów x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

źródło: materiały własne

Zadanie 3. Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 4. Pokaż, że „rzut prostopadły nie zwiększa długości”: niech P będzie rzutem prostopadłym na $W \leq V$. Wtedy dla każdego $\vec{v} \in V$ zachodzi:

$$\|\vec{v}\| \geq \|P\vec{v}\|$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \in W$.

Zadanie 5. Niech V będzie przestrzenią Euklidesową, oraz A jej bazą. Pokaż, że jeśli baza B powstaje z bazy A przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to $M_{BA} \in M_{AB}$ są macierzami przejścia/przejrzenia.

Zadanie 6. Pokaż, że następujące przekształcenia są izometriami.
- obrót o kąt α na płaszczyźnie;
- zamiana jednej ze współrzędnych (w bazie ortonormalnej) na przeciwną.
- symetria względem podprzestrzeni

źródło: materiały własne

Zadanie 7. Udowodnij, że złożenie izometrii jest izometrią.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli P jest izometrią, to $\det P \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 9. Pokaż, że macierze ortogonalne są zamknięte na mnożenie, transpozycję i bazie macierzy odwrotnej. Tj. jeśli A, B są ortogonalne (i tego samego rozmiaru), to również AB, B^{-1}, A^T są ortogonalne.

Zadanie 10 (**Nierówność Hadamarda**, * nie liczy się do podstawy). Niech $M = [\vec{v}_1^T | \cdots | \vec{v}_n^T]$ będzie macierzą kwadratową o kolumnach $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{v}_i\|$$

(gdzie $|\cdot|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym) i że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n$ są układem ortogonalnym.

źródło: materiały własne

Zadanie 11. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy dodatnio określonej M, to $\lambda > 0$.

źródło: materiały własne

OMT dowód zasady Gram-Schmidta, po drodze
— we potrzebie wektorów z bazy przestrzeni V
rozkład ortonormalizacji $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ (to chcemy ortogonalizować — bo są same prostości ze wektory $V_1, \ldots, V_n$)

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ — baza V ortonormalna

— podział rzutu prost. $\vec{v}_2 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1\rangle}$ $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1\rangle$
— wektor ortonormalny $\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$ — prawa prostopadła do $\vec{u}_1$

— podział rzutu prost. $\vec{v}_3 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1\rangle} + \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2\rangle} = \langle \vec{v}_3, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2$
$\vec{w}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$

(Czas, mamy wektor prostopadły do $\vec{v}_3$ ($\vec{v}_3$)
— dorzucamy z nich, żeby po zmianie:
$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3 - \vec{u}_1}{\|\vec{v}_3 - \vec{u}_1\|}$ $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0$, bo są prostopadłe
— punkt rzutujący długość $\vec{v}_3$
— aby policzyć rzut $\vec{v}_3$ na płaszczyznę, mamy $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ (bo tworzą $\vec{v}_3$ ze sobą)
$\vec{v}_3 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1\rangle} + \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle}$
$\vec{v}_3 - \vec{u}_1 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle}$
$\vec{v}_3 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1\rangle} + \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle}$
$\vec{v}_3 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1\rangle} + \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle} + \vec{u}_1$
$\vec{v}_3 = \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1\rangle} + \overrightarrow{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2\rangle} + \vec{u}_1 -