

Здесь будет титульный лист. **TODO**

## РЕФЕРАТ

Здесь будет реферат. **TODO**

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	4
1 Теоретические сведения . . . . .	5
1.1 Физический движок <b>TODO</b> . . . . .	5
1.2 Описание модели . . . . .	5
1.3 Определение формул скорости и траектории тела . . . . .	8
1.4 Определение уравнений для обнаружения столкновений . . . . .	11
1.5 Решение алгебраических уравнений четвёртой степени . . . . .	12
1.5.1 Метод бисекции . . . . .	13
1.5.2 Описание реализованного метода . . . . .	14
2 Вторая глава <b>TODO</b> . . . . .	15
3 Третья глава <b>TODO</b> . . . . .	16
Список использованных источников . . . . .	17

## ВВЕДЕНИЕ

Здесь будет введение. **TODO** [1]

## 1 Теоретические сведения

### 1.1 Физический движок **TODO**

Физический движок – программное обеспечение, предназначенное для приближённой симуляции физических систем реального мира в виртуальном, например динамику твёрдого тела (включая обнаружение столкновений и обработку ударов).

Иными словами, система физического моделирования (т.е. моделирующая физику – в данном контексте симуляция синонимична моделированию) и есть физический движок.

Традиционно, физические движки делятся на 2 типа: игровые и научные. Отличительная черта первых – возможность работы в режиме реального времени, то есть воспроизводить физические процессы в игре с той же самой скоростью, в которой они происходят в реальном мире. Отличительная черта вторых – важна точность вычислений, скорость вычислений не играет существенной роли.

Кроме того, в игровых движках зачастую достаточно симулировать только текущее состояние виртуального мира без сохранения результата, а в научных движках необходимо сохранять все смоделированные в виртуальном мире взаимодействия для последующего анализа.

Одна из задач данной работы – создать движок, имеющий свойства и научного, и игрового – чтобы присутствовала возможность и моделирования в реальном времени, и эффективной «перемотки».

### 1.2 Описание модели

**Тело.** Абсолютно твёрдое тело в форме круга равномерной плотности (центр масс в центре круга) обладающее массой ( $m$ ), коэффициентом трения ( $\mu$ ), радиусом ( $r$ ), начальной скоростью ( $\vec{v}_0$ ), положением (координаты  $x$  и  $y$  или радиус-вектор  $\vec{r}$ ). На тело действует сила трения ( $F_{\text{тр.}}$ ). **TODO**

**Точка.** Неподвижная точка в пространстве, определена через координаты.

**Линия.** Неподвижная прямая линия в пространстве, может быть ограничена точкой с двух или одной сторон образуя отрезок или луч соответственно. Определена через общее уравнение прямой.

**Сцена.** Множество тел, линий, точек и постоянных (например, ускорение свободного падения).

Обновлённая сцена – сцена, в которой обновлены параметры тел, линий, точек или постоянных.

Сцена через время  $\Delta t$  – обновлённая сцена, в которой все тела обновлены так, что новая начальная скорость равна скорости в этот момент времени (1).

$$v_{0_{\text{new}}}^{\rightarrow} = \vec{v}(\Delta t) \quad (1)$$

где  $v_{0_{\text{new}}}^{\rightarrow}$  – новая начальная скорость;

$\vec{v}(\Delta t)$  – старая скорость в момент времени  $\Delta t$ .

**Модель.** Множество пар  $(t, S)$ , где  $t$  – момент времени, а  $S$  – сцена. Иными словами, модель представляет собой цепочку сцен, для каждой из которой указан момент времени.

Сцена в момент времени  $t_1$  – такая сцена  $S_0$  через время  $t_1 - t_0$ , где пара  $(t_0, S_0)$  является членом модели, при этом соблюдается (2).

$$\forall (t, S) \in M \quad (t \leq t_0 \vee t > t_1) \quad (2)$$

где  $M$  – модель;

$t_0$  – время, выбранное для получения модели в момент времени  $t_1$ ;

Иными словами, для того чтобы получить сцену в момент времени, надо из цепочки сцен найти такую, у которой время будет максимально, но при этом меньше требуемого момента времени и получить сцену через разность требуемого и найденного времени по формуле (1).

**Столкновение.** Так как тела не могут пересекаться, и при этом передвигаются, могут происходить столкновения. Так же тела не могут пересекаться с точками и линиями. Т.е. тела могут сталкиваться с телами, или

линиями, или точками. Уравнение столкновения тела с телом (3)-через радиус-вектор, (4)-через координаты.

$$|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = r_1 + r_2 \quad (3)$$

где  $\vec{r}_1(t)$  – радиус-вектор положения первого тела;  
 $\vec{r}_2(t)$  – радиус-вектор положения второго тела;  
 $r_1$  – радиус первого тела;  
 $r_2$  – радиус второго тела.

$$\sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = r_1 + r_2 \quad (4)$$

где  $x_1(t)$  – координата положения первого тела по оси  $X$ ;  
 $y_1(t)$  – координата положения первого тела по оси  $Y$ ;  
 $x_2(t)$  – координата положения второго тела по оси  $X$ ;  
 $y_2(t)$  – координата положения второго тела по оси  $Y$ .

Эти уравнения получены исходя из того что разность векторов является вектором из центра одного тела в центр другого [3, с. 39]. И тогда, если его длина равна сумме радиусов этих тел, значит тела столкнулись.

Подобным образом можно определить уравнение столкновения тела с точкой: (5)-через радиус-вектор, (6)-через координаты.

$$|\vec{r}(t) - \vec{p}| = r \quad (5)$$

где  $\vec{r}(t)$  – радиус-вектор положения тела;  
 $\vec{p}$  – радиус-вектор точки;  
 $r$  – радиус тела.

$$\sqrt{(x(t) - p_x)^2 + (y(t) - p_y)^2} = r \quad (6)$$

где  $x(t)$  – координата положения тела по оси  $X$ ;  
 $y(t)$  – координата положения тела по оси  $Y$ ;  
 $p_x$  – координата точки по оси  $X$ ;  
 $p_y$  – координата точки по оси  $Y$ .

С обнаружение столкновением тела и линии ситуация несколько иная, надо воспользоваться формулой расстояний от точки до прямой (7) [4, с. 452] и тогда получится (8).

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7)$$

где  $A, B, C$  – коэффициенты общего уравнения прямой;  
 $x, y$  – координаты точки.

$$\frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r \quad (8)$$

где  $x(t), y(t)$  – координаты тела в момент времени  $t$ .

В дальнейшем будут определены формулы для нахождения положения тела, а именно: (17), (18).

### 1.3 Определение формул скорости и траектории тела

Далее, под моментом времени  $t$  будет подразумеваться время относительно сцены, а не модели.

Как указано выше, у тела есть начальная скорость и на него действует сила трения. По второму закону Ньютона [2, с. 114], у тела есть ускорение так как на него действует сила. Такое движение называется равноускоренным.

Скорость при равноускоренном движении определяется формулой (9)[2, с. 96].

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (9)$$

где  $\vec{v}(t)$  – вектор скорости тела в момент времени  $t$ ;

$\vec{v}_0$  – вектор начальной скорости тела;

$\vec{a}$  – вектор ускорения тела;

$t$  – момент времени.



При этом вектор ускорения сонаправлен вектору силы (по второму закону Ньютона, (10)).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (10)$$

где  $\vec{a}$  – вектор ускорения тела;

$\vec{F}$  – вектор силы действующей на тело;

$m$  – масса тела.

Но вектор силы трения  $F_{\text{тр.}}^{\rightarrow}$  противоположен вектору скорости тела [2, с. 21]. Поэтому, и вектор ускорения тела будет противоположен вектору скорости тела.

При этом вектор скорости тела  $\vec{v}(t)$  должен быть сонаправлен вектору  $\vec{v}_0$  потому что тело не может поменять направление движения при воздействии силы трения. Для того чтобы выяснить, при каких  $t$  сонаправленность векторов  $\vec{v}(t)$  и  $\vec{v}_0$  в уравнении (9) соблюдается, достаточно увидеть, что длина вектора  $\vec{v}_0$  должна быть больше длине вектора  $\vec{a}t$  и получить неравенство для  $t$  (11).

$$t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|} \quad (11)$$

А для остальных  $t$ ,  $\vec{v}(t)$  следует принять нулю. Тогда скорость выражается через (12):

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \vec{v}_0 + \vec{a}t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (12)$$

Проекции на ось абсцисс (13) и ординат (14):

$$v_x(t) = \begin{cases} v_{0x} + a_x t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (13)$$

где  $v_x(t)$  – проекция вектора скорости тела  $\vec{v}(t)$  в момент времени  $t$  на ось  $X$ ;

$v_{0x}$  – проекция вектора начальной скорости тела  $\vec{v}_0$  на ось  $X$ ;

$a_x$  – проекция вектора ускорения тела  $\vec{a}$  на ось  $X$ .

$$v_y(t) = \begin{cases} v_{0y} + a_y t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (14)$$

где  $v_y(t)$  – проекция вектора скорости тела  $\vec{v}(t)$  в момент времени  $t$  на ось  $Y$ ;  
 $v_{0y}$  – проекция вектора начальной скорости тела  $\vec{v}_0$  на ось  $Y$ ;  
 $a_y$  – проекция вектора ускорения тела  $\vec{a}$  на ось  $Y$ .

Теперь найдём формулу для траектории движения тела. Формуле, соответствующей (9), только для траектории, соответствует (15):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \quad (15)$$

где  $\vec{r}(t)$  – радиус-вектор положения тела в момент времени  $t$ ;  
 $\vec{r}_0$  – радиус-вектор начального положения тела.

Исходя из (12), уравнение для траектории с учётом того, что вектор скорости должен быть противоположен вектору ускорения, будет (16):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ \vec{r}_0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (16)$$

Соответствующие проекции на ось абсцисс (17) и ординат (18):

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ x_0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (17)$$

где  $x(t)$  – координата положения тела  $\vec{r}(t)$  в момент времени  $t$  на ось  $X$ ;  
 $x_0$  – координата начального положения тела  $\vec{v}_0$  на ось  $X$ .

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ y_0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (18)$$

где  $y(t)$  – координата положения тела  $\vec{r}(t)$  в момент времени  $t$  на ось  $Y$ ;  
 $y_0$  – координата начального положения тела  $\vec{v}_0$  на ось  $Y$ .

Формулы (17) и (18) являются ключевыми в этой работе. **TODO**

## 1.4 Определение уравнений для обнаружения столкновений

Подставив формулы (17) и (18) в уравнения (4), (6), (8) можно получить алгебраические уравнения от  $t$  четвёртой степени.

Например, для случая, когда  $0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}$  частичный вывод уравнения времени столкновения тела с телом будет таким (19):

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} &= r_1 + r_2 \\ (x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ (x_{01} + v_{0x1}t + \frac{a_{x1}t^2}{2})^2 - (x_{02} + v_{0x2}t + \frac{a_{x2}t^2}{2})^2 + \\ + (y_{01} + v_{0y1}t + \frac{a_{y1}t^2}{2})^2 - (y_{02} + v_{0y2}t + \frac{a_{y2}t^2}{2})^2 &= (r_1 + r_2)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

где  $x_1(t)$  – координата первого тела в момент времени  $t$  по оси  $X$ ;  
 $x_2(t)$  – координата второго тела в момент времени  $t$  по оси  $X$ ;  
 $y_1(t)$  – координата первого тела в момент времени  $t$  по оси  $Y$ ;  
 $y_2(t)$  – координата второго тела в момент времени  $t$  по оси  $Y$ ;  
 $x_{01}$  – начальная координата первого тела по оси  $X$ ;  
 $x_{02}$  – начальная координата второго тела по оси  $X$ ;  
 $y_{01}$  – начальная координата первого тела по оси  $Y$ ;  
 $y_{02}$  – начальная координата второго тела по оси  $Y$ ;  
 $v_{0x1}$  – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось  $X$ ;  
 $v_{0y1}$  – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось  $Y$ ;  
 $v_{0x2}$  – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось  $X$ ;  
 $v_{0y2}$  – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось  $Y$ ;  
 $a_{x1}$  – проекция вектора ускорения первого тела на ось  $X$ ;  
 $a_{y1}$  – проекция вектора ускорения первого тела на ось  $Y$ ;  
 $a_{x2}$  – проекция вектора ускорения второго тела на ось  $X$ ;  
 $a_{y2}$  – проекция вектора ускорения второго тела на ось  $Y$ ;  
 $r_1$  – радиус первого тела;  
 $r_2$  – радиус второго тела.

Из (19) видно, что дальнейшее раскрытие квадратов, сокращение, вынос  $t$  за скобки, перенос из правой части в левую приведёт к тому, что уравнение примет вид (20).

$$P(t) = 0 \quad (20)$$

где  $P(t)$  – многочлен от  $t$ .

Значит, уравнение алгебраическое одной переменной. Теперь найдём степень уравнения (т.е. максимальную степень одночлена). Возьмём одночлен  $\frac{a_{x1}t^2}{2}$ , который является частью многочлена, который возведён в квадрат. Следовательно, в результирующем многочлене будет присутствовать одночлен (21).

$$\left(\frac{a_{x1}t^2}{2}\right)^2 = \frac{a_{x1}^2t^4}{4} \quad (21)$$

Как видно, в результирующем многочлене  $t$  возведён в 4 степень. При этом в результирующем уравнении этот одночлен не сократится потому что у других подобных одночленов другие коэффициенты. Значит, в результирующем уравнении будет присутствовать одночлен степени 4.

Так как для каждого случая подстановки формул (17) и (18) в уравнения (4), (6), (8) придётся производить 8 таких выводов (для каждого из 2 случаев из (17) следует рассмотреть 2 случая из (18) при подстановке в (4) и по 2 случая при подстановке в (6) и (8)), проще составить программный алгоритм (который описан позднее в **TODO** ), который применяя методы компьютерной алгебры, сможет строить выражения и вычислять их значения, подставляя переменные.

### 1.5 Решение алгебраических уравнений четвёртой степени

Так как для работы создаваемого физического движка не требуется обнаруживать время столкновения без погрешности и корни могут быть только действительными, можно воспользоваться численными методами. К тому же, аналитические методы решения алгебраических уравнений четвёртой степени обладают громоздкостью. И при этом, предложенный далее метод численного решения алгебраических уравнений позволяет решать уравнения любой степени, что позволит теоретически внести в модель и реализацию, без

существенного переписывания кода, например разноускоренное движение (т.е. величину рывок, от которой зависит ускорение) и тогда уравнение, подобное (19), получится уже пятой степени, что не имеет решений в радикалах вовсе по теореме Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах [5, с. 112].

### 1.5.1 Метод бисекции

Метод бисекции или метод деления отрезка пополам – простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида  $f(x) = 0$ , является частным случаем бинарного поиска [6].

Метод бисекции позволяет найти корень функции на отрезке  $[x_l, x_r]$ , если  $\text{sign}(f(x_l)) \neq \text{sign}(f(x_r))$ . При этом, если функция  $f(x)$  не монотонна, она имеет несколько корней и метод найдёт лишь один корень [6]. Поэтому, метод бисекции не подходит для общего случая поиска решений алгебраических уравнений без предварительной подготовки, которая описана в пункте 1.5.2.

При этом можно обобщить этот метод для поиска корней на промежутках вида  $(-\infty, x_r]$ ,  $[x_l, +\infty)$ . Недостающую границу поиска можно подобрать кратным (например, с каждой итерацией увеличивать изменение в 2 раза) увеличением (в случае бесконечности справа) или уменьшением (в случае бесконечности слева) относительно известной границы до того момента, пока знак функции на левой и правой границе не станет разным. Но при этом надо учесть, что корня на промежутке может не быть в случае когда при изменении (увеличении или уменьшении, как указано ранее) неизвестной границы, значение функции не становится ближе к нулю.

Описание метода: на каждой итерации берётся середина отрезка (22).

$$x_m = \frac{x_l + x_r}{2} \quad (22)$$

где  $x_m$  – середина отрезка  $[x_l, x_r]$ .

Теперь следует вычислить значение функции в середине отрезка и если (23), то корень (равный  $x_m$ ) найден; иначе следует разбить отрезок  $[x_l, x_r]$  на два отрезка  $[x_l, x_m]$  и  $[x_m, x_r]$ .

$$|f(x_m)| \leq \varepsilon \quad (23)$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность по оси  $Y$ .

Далее, если  $x_l$  и  $x_m$  имеют разный знак, провести итерацию с отрезком  $[x_l, x_m]$ . Иначе, разный знак должен быть у  $x_m$  и  $x_r$ , значит провести итерацию с отрезком  $[x_m, x_r]$ .

### 1.5.2 Описание реализованного метода

TODO

## 2 Вторая глава **TODO**

Здесь будет вторая глава. **TODO**

### **3 Третья глава TODO**

Здесь будет третья глава. TODO



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Здесь будет список использованных источников.
2. Роуэлл, Г. Физика : учебное издание / Г. Роуэлл, С. Герберт. – Москва : Просвещение, 1994. – 576 с. – ISBN 5-09-002920-2.
3. Math for Progammers **TODO** <https://www.manning.com/books/math-for-programmers>
4. Larson R., Hostetler R. . Precalculus: A Concise Course. — Boston: Houghton Mifflin, 2007. — xvii + 526 + 102 p. — ISBN 0-618-62719-7. **TODO**
5. Алексеев, В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001. — 192 с. — ISBN 5-900916-86-3. **TODO**
6. **TODO** Autar K Kaw Numerical Methods with Applications Chapter 03.03 Bisection Method