

Выпускная квалификационная работа

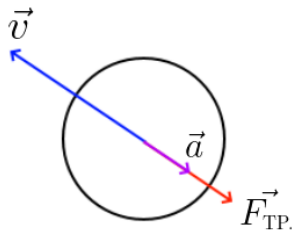
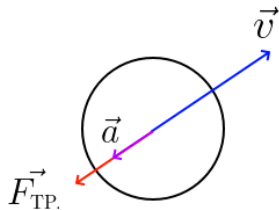
Система физического моделирования на основе априорного подхода обнаружения столкновений

Владислав Прекель

ИКИТ СФУ
КИ18-166

Красноярск
20 июня 2022 г.

Модель



Формулы равноускоренного движения

Формулы для скорости (1) и положения тела (2):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (1)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \quad (2)$$

где $\vec{v}(t)$ – вектор скорости тела в момент времени t ;

\vec{v}_0 – вектор начальной скорости тела;

\vec{a} – вектор ускорения тела;

$x(t)$ – координата тела в момент времени t по оси X ;

x_0 – координата начального положения тела по оси X ;

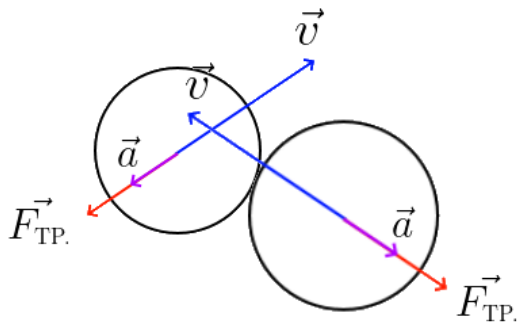
$y(t)$ – координата тела в момент времени t по оси Y ;

y_0 – координата начального положения тела по оси Y ;

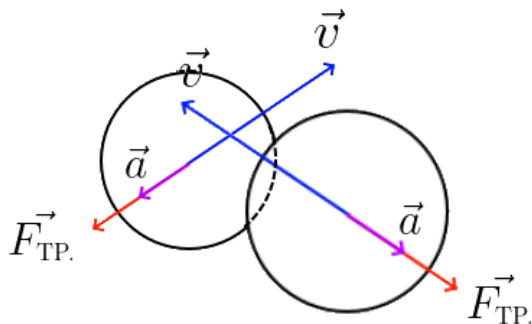
a_x – проекция вектора ускорения тела \vec{a} на ось X ;

a_y – проекция вектора ускорения тела \vec{a} на ось Y .

Тела столкнулись



Апостериорный подход



Априорный подход

Основан на том, что можно найти время столкновения через уравнение (3):

$$distance(t) = r_1 + r_2 \quad (3)$$

где $distance(t)$ – расстояние между центрами двух тел в момент времени t ;

r_1 – радиус первого тела;

r_2 – радиус второго тела.

Цель работы

Целью выпускной квалификационной работы является разработка физического движка, использующего априорный подход для обнаружения столкновений.

Уравнение обнаружения столкновения двух тел

$$\sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = r_1 + r_2 \quad (4)$$

где $x_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси X ;
 $x_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси X ;
 $y_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси Y ;
 $y_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси Y ;
 r_1 – радиус первого тела;
 r_2 – радиус второго тела.

$$\begin{aligned}
& \frac{a_{x1}^2 - a_{x2}^2 + a_{y1}^2 - a_{y2}^2}{4} t^4 + \\
& + (v_{0x1} a_{x1} - v_{0x2} a_{x2} + v_{0y1} a_{y1} - v_{0y2} a_{y2}) t^3 + \\
& + (x_{01} a_{x1} - x_{02} a_{x2} + y_{01} a_{y1} - y_{02} a_{y2}) t^2 + \\
& + 2(x_{01} v_{0x1} - x_{02} v_{0x2} + y_{01} v_{0y1} - y_{02} v_{0y2}) t + \quad (5) \\
& + v_{0x1}^2 + x_{01}^2 - v_{0x2}^2 - x_{02}^2 + v_{0y1}^2 + y_{01}^2 - v_{0y2}^2 - y_{02}^2 - r_1^2 - 2r_1 r_2 - r_2^2 = 0
\end{aligned}$$

где x_{01} – начальная координата первого тела по оси X ;

x_{02} – начальная координата второго тела по оси X ;

y_{01} – начальная координата первого тела по оси Y ;

y_{02} – начальная координата второго тела по оси Y ;

v_{0x1} – проекция вектора начальной скорости I тела на ось X ;

v_{0y1} – проекция вектора начальной скорости I тела на ось Y ;

v_{0x2} – проекция вектора начальной скорости II тела на ось X ;

v_{0y2} – проекция вектора начальной скорости II тела на ось Y ;

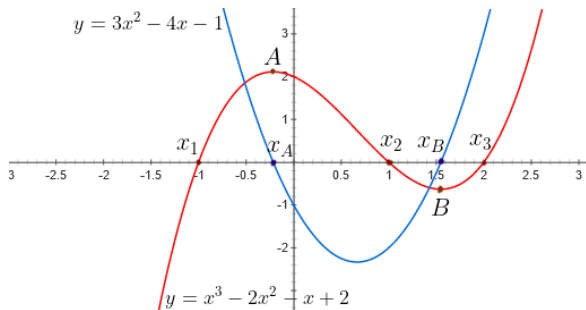
a_{x1} – проекция вектора ускорения I тела на ось X ;

a_{y1} – проекция вектора ускорения I тела на ось Y ;

a_{x2} – проекция вектора ускорения II тела на ось X ;

a_{y2} – проекция вектора ускорения II тела на ось Y .

Метод численного решения алгебраических уравнений



Рассмотрим на примере уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ (красное).
Уравнение производной $3x^2 - 4x - 1 = 0$ (синее).

Его корни: $x_{A,B} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6}$.

Тогда, корни исходного уравнения можно найти методом бисекции:

x_1 на промежутке $(-\infty; \frac{4 - \sqrt{28}}{6}]$, будет равен -1

x_2 на промежутке $[\frac{4 - \sqrt{28}}{6}; \frac{4 + \sqrt{28}}{6}]$, будет равен 1

x_3 на промежутке $[\frac{4 + \sqrt{28}}{6}; +\infty)$, будет равен 2

Уравнение обнаружения столкновения с точкой

$$\sqrt{(x(t) - p_x)^2 + (y(t) - p_y)^2} = r \quad (6)$$

где $x(t)$ – координата положения тела по оси X ;

$y(t)$ – координата положения тела по оси Y ;

r – радиус тела;

p_x – координата точки по оси X ;

p_y – координата точки по оси Y .

Уравнение обнаружения столкновения с прямой

$$\frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r \quad (7)$$

где A, B, C – коэффициенты общего уравнения прямой;

r – радиус тела;

$x(t), y(t)$ – координаты тела в момент времени t .

Обработка ударов

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \rangle}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8)$$

где \langle, \rangle – скалярное произведение векторов;

\vec{v}'_1 – вектор скорости первого тела после удара;

\vec{v}_1 – вектор скорости первого тела до удара;

\vec{v}_2 – вектор скорости второго тела до удара;

\vec{r}_1 – радиус-вектор положения первого тела;

\vec{r}_2 – радиус-вектор положения второго тела;

m_1 – масса первого тела;

m_2 – масса второго тела.


Использованные технологии

- ▶ OCaml – язык программирования;
- ▶ Js_of_ocaml – компилятор OCaml в JavaScript;
- ▶ Lwt – библиотека для конкурентного программирования;
- ▶ Core – стандартная библиотека;
- ▶ Dream – web-фреймворк;
- ▶ ppx_inline_test, ppx_expect – библиотеки юнит-тестирования;
- ▶ Sexplib – библиотека для сериализации и десериализации S-выражений;
- ▶ Bulma – CSS-фреймворк;
- ▶ Dune, opam – система сборки и пакетный менеджер;
- ▶ VS Code, OCaml Platform – среда разработки и плагин для работы с OCaml.

Реализация движка

```
S.Model.init ~g:1.  
|> S.Engine.recv ~action:{ time = 0.  
    ; action =  
        AddBody { id = Some id1; x0 = 350.; y0 = 200.  
            ; r = 100.; mu = 1.; m = 10. }  
    ; until = { timespan = Some 0.; quantity = None }}  
|> S.Engine.recv ~action:{ time = 0.  
    ; action =  
        AddBody { id = Some id2; x0 = 700.; y0 = 200.  
            ; r = 100.; mu = 1.; m = 10. }  
    ; until = { timespan = Some 0.; quantity = None }}  
|> S.Engine.recv ~action:{ time = 0.  
    ; action = GiveVelocity { id = id2; v0 = -100., 0. }  
    ; until = { timespan = None; quantity = None }}
```


Интерактивная демонстрация возможностей движка

chapgame 

Offline Online

State

Copy/Paste Clear Stats

Time 30.28

-1 0 +1

 30.27

Calculation ∞

☒ Time 10.00
☒ Quantity 25

Speed 1.00

-0.1 -1x || 1x +0.1

 1.00

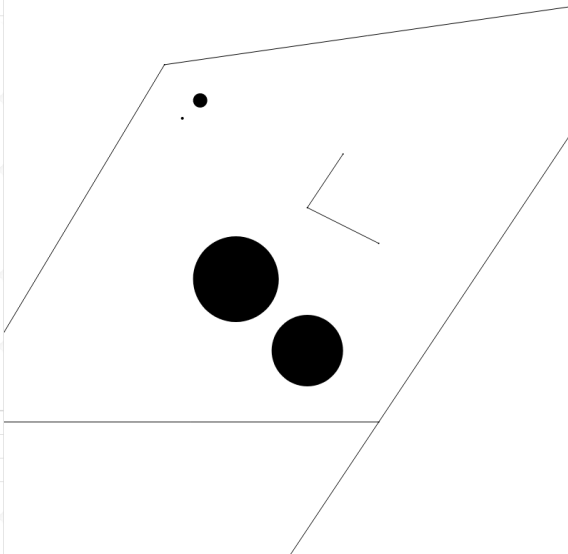
Bodies

Add


id		x	y	μ	m	r
0		500.00	500.00	30.00	10800.00	60.00
1		600.00	600.00	20.00	7500.00	50.00
2		450.00	250.00	10.00	300.00	10.00
3		425.00	275.00	50.00	12.00	2.00

Lines

Add



<https://prekel.github.io/chapgame/>

chapgame 

Offline Online

State

Copy/Paste Clear Stats

Time 38.80


-1 0 +1

 38.78

Calculation 47.87

☒ Time 10.00
☒ Quantity 25

Speed 1.00

-0.1 -1x  1x +0.1

 1.00

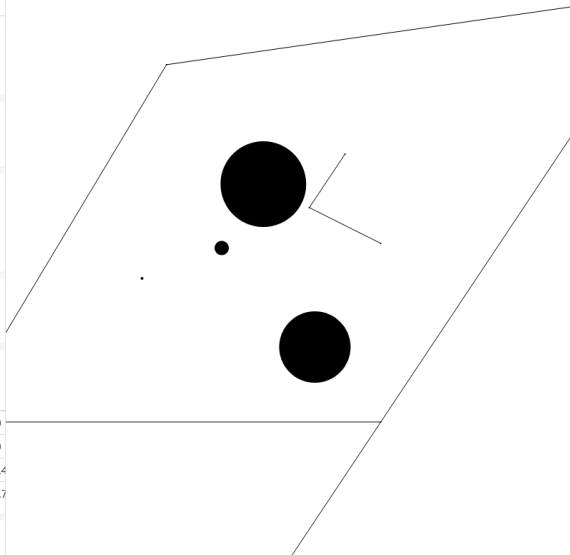
Bodies

Add

	μ	m	r	v_x	v_y	$ v $
06	30.00	10800.00	60.00	0.00	0.00	0.00
08	20.00	7500.00	50.00	0.00	0.00	0.00
01	10.00	300.00	10.00	176.02	-220.92	282.4
04	50.00	12.00	2.00	534.77	-341.99	634.7

Lines

Add



Решённые задачи

- ▶ определена модель и математическая база, требующуюся для моделирования;
- ▶ программно реализован физический движок и интерактивная демонстрация его работы.

Выпускная квалификационная работа

Система физического моделирования на основе априорного подхода обнаружения столкновений

Владислав Прекель

ИКИТ СФУ
КИ18-166

Красноярск
20 июня 2022 г.