Здесь будет титульный лист. TODO

РЕФЕРАТ

Здесь будет реферат. TODO

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Здесь будет введение. TODO [1]

1 Теоретические сведения

1.1 Описание модели

Тело. Абсолютно твёрдое тело в форме круга равномерной плотности (центр масс в центре круга) обладающее массой (m), коэффициентом трения (μ), радиусом (r), начальной скоростью ($\vec{v_0}$), положением (координаты x и y или радиус-вектор $\vec{r}$). На тело действует сила трения ($F_{\text{тр.}}$). TODO

Точка. Неподвижная точка в пространстве, определена через координаты.

Линия. Неподвижная прямая линия в пространстве, может быть ограничена точкой с двух или одной сторон образуя отрезок или луч соответсвенно. Определена через общее уравнение прямой.

Сцена. Множество тел, линий, точек и постоянных (например, ускорение свободного падения).

Обновлённая сцена – сцена, в которой обновлены параметры тел, линий, точек или постоянных.

Сцена через время Δt – обновлённая сцена, в которой все тела обновлены так, что новая начальная скорость равна скорости в этот момент времени (1).

$$\vec{v_0}_{\text{new}} = \vec{v}(\Delta t) \tag{1}$$

где $\vec{v_0}_{\text{new}}$ – новая начальная скорость;
$\vec{v}(\Delta t)$ – старая скорость в момент времени Δt.

Модель. Множество пар (t, S), где t – момент времени, а S – сцена. Иными словами, модель представляет собой цепочку сцен, для каждой из которой указан момент времени.

Сцена в момент времени t_1 – такая сцена S_0 через время $t_1 - t_0$, где пара (t_0, S_0) является членом модели, при этом соблюдается (2).

$$\forall (t, S) \in M \ \ (t \leqslant t_0 \vee t > t_1) \tag{2}$$

где M – модель;
t_0 – время, выбранное для получения модели в момент времени t_1;

Иными словами, для того чтобы получить сцену в момент времени, надо из цепочки сцен найти такую, у которой время будет максимально, но при этом меньше требуемого момента времени и получить сцену через разность требуемого и найденого времени по формуле (1).

Столкновение. Так как тела не могут пересекаться, и при этом передвигаются, могут происходить столкновения. Так же тела не могут пересекаться с точками и линиями. Т.е. тела могут сталкиваться с телами, или линиями, или точками. Уравнение столкновения тела с телом (3)-через радиус-вектор, (4)-через координаты.

$$|\vec{r_1}(t) - \vec{r_2}(t)| = r_1 + r_2 \tag{3}$$

где $\vec{r_1}(t)$ – радиус-вектор положения первого тела;

$\vec{r_2}(t)$ – радиус-вектор положения второго тела;

r_1 – радиус первого тела;

r_2 – радиус второго тела.

$$\sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = r_1 + r_2 \tag{4}$$

где $x_1(t)$ – координата положения первого тела по оси X;

$y_1(t)$ – координата положения первого тела по оси Y;

$x_2(t)$ – координата положения второго тела по оси X;

$y_2(t)$ – координата положения второго тела по оси Y.

Эти уравнения получены исходя из того что разность векторов является вектором из центра одного тела в центр другого [3, с. 39]. И тогда, если его длина равна сумме радиусов этих тел, значит тела столкнулись.

Подобным образом можно определить уравнение столкновения тела с точкой: (5)-через радиус-вектор, (6)-через координаты.

$$|\vec{r}(t) - \vec{p}| = r \tag{5}$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор положения тела;

$\vec{p}$ – радиус-вектор точки;

r – радиус тела.

$$\sqrt{(x(t)-p_x)^2+(y(t)-p_y)^2}=r \tag{6}$$

где $x(t)$ – координата положения тела по оси X;

$y(t)$ – координата положения тела по оси Y;

p_x – координата точки по оси X;

p_y – координата точки по оси Y.

С обнаружение столкновением тела и линии ситуация несколько иная, надо воспользоваться формулой расстояний от точки до прямой (7) [4, с. 452] и тогда получится (8).

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{7}$$

где A, B, C – коэффициенты общего уравнения прямой;

x, y – координаты точки.

$$\frac{|Ax(t)+By(t)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r \tag{8}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – координаты тела в момент времени t.

В дальнейшем будут определены формулы для нахождения положения тела, а именно: (17), (18).

1.2 Определение формул скорости и траектории тела

Далее, под моментом времени t будет подразумеваться время относительно сцены, а не модели.

Как указано выше, у тела есть начальная скорость и на него действует сила трения. По второму закону Ньютона [2, с. 114], у тела есть ускорение так как на него действует сила. Такое движение называется равноускоренным.

Скорость при равноускоренном движении определяется формулой (9)[2, с. 96].

$$\vec{v}(t)=\vec{v_0}+\vec{a}t \tag{9}$$

где $\vec{v}(t)$ – вектор скорости тела в момент времени t;

$\vec{v_0}$ – вектор начальной скорости тела;

$\vec{a}$ – вектор ускорения тела;

t – момент времени.

При этом вектор ускорения сонаправлен вектору силы (по второму закону Ньютона, (10)).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{10}$$

где $\vec{a}$ – вектор ускорения тела;

$\vec{F}$ – вектор силы действующей на тело;

m – масса тела.

Но вектор силы трения $\vec{F_{\text{тр.}}}$ противонаправлен вектору скорости тела [2, с. 21]. Поэтому, и вектор ускорения тела будет противонаправлен вектору скорости тела.

При этом вектор скорости тела $\vec{v}(t)$ должен быть сонаправлен вектору $\vec{v_0}$ потому что тело не может поменять направление движения при воздействии силы трения. Для того чтобы выяснить, при каких t сонаправленность векторов $\vec{v}(t)$ и $\vec{v_0}$ в уравнении (9) соблюдается, достаточно увидеть, что длина вектора $\vec{v_0}$ должна быть больше длине вектора $\vec{a}t$ и получить неравенство для t (11).

$$t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|} \tag{11}$$

А для остальных t, $\vec{v}(t)$ следует принять нулю. Тогда скорость выражается через (12):

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \vec{v_0} + \vec{a}t, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{12}$$

Проекции на ось абцисс (13) и ординат (14):

$$v_x(t) = \begin{cases} v_{0_x} + a_x t, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{13}$$

где $v_x(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось X;

v_{0_x} – проекция вектора начальной скорости тела $\vec{v_0}$ на ось X;

a_x – проекция вектора ускорения тела $\vec{a}$ на ось X.

$$v_y(t) = \begin{cases} v_{0_y} + a_y t, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{14}$$

где $v_y(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось Y;
v_{0_y} – проекция вектора начальной скорости тела $\vec{v_0}$ на ось Y;
a_y – проекция вектора ускорения тела $\vec{a}$ на ось Y.

Теперь найдём формулу для траектории движения тела. Формуле, соответвующей (9), только для траектории, соответствует (15):

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \tag{15}$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор положения тела в момент времени t;
$\vec{r_0}$ – радиус-вектор начального положения тела.

Исходя из (12), уравнение для траектории с учётом того, что вектор скорости должен быть противонаправлен вектору ускорения, будет (16):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ \vec{r_0}, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{16}$$

Соответствующие проекции на ось абцисс (17) и ординат (18):

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_{0_x}t + \frac{a_x t^2}{2}, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ x_0, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{17}$$

где $x(t)$ – координата положения тела $\vec{r}(t)$ в момент времени t на ось X;
x_0 – координата начального положения тела $\vec{v_0}$ на ось X.

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + v_{0_y}t + \frac{a_y t^2}{2}, & 0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}, \\ y_0, & t \geqslant \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \tag{18}$$

где $y(t)$ – координата положения тела $\vec{r}(t)$ в момент времени t на ось Y;
y_0 – координата начального положения тела $\vec{v_0}$ на ось Y.

Формулы (17) и (18) являются ключевыми в этой работе. TODO

1.3 Определение уравнений для обнаружения столкновений

Подставив формулы (17) и (18) в уравнения (4), (6), (8) можно получить алгебраические уравнения от t четвёртой степени.

Например, для случая, когда $0 \leqslant t < \frac{|\vec{v_0}|}{|\vec{a}|}$ частичный вывод уравнения времени столкновения тела с телом будет таким (19):

$$\sqrt{(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2}=r_1+r_2$$
$$(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2=(r_1+r_2)^2$$
$$(x_{0_1}+v_{0_{x_1}}t+\frac{a_{x_1}t^2}{2})^2-(x_{0_2}+v_{0_{x_2}}t+\frac{a_{x_2}t^2}{2})^2+$$
$$+(y_{0_1}+v_{0_{y_1}}t+\frac{a_{y_1}t^2}{2})^2-(y_{0_2}+v_{0_{y_2}}t+\frac{a_{y_2}t^2}{2})^2=(r_1+r_2)^2 \quad (19)$$

где $x_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси X;
$x_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси X;
$y_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси Y;
$y_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси Y;
x_{0_1} – начальная координата первого тела по оси X;
x_{0_2} – начальная координата второго тела по оси X;
y_{0_1} – начальная координата первого тела по оси Y;
y_{0_2} – начальная координата второго тела по оси Y;
$v_{0_{x_1}}$ – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось X;
$v_{0_{y_1}}$ – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось Y;
$v_{0_{x_2}}$ – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось X;
$v_{0_{y_2}}$ – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось Y;
a_{x_1} – проекция вектора ускорения первого тела на ось X;
a_{y_1} – проекция вектора ускорения первого тела на ось Y;
a_{x_2} – проекция вектора ускорения второго тела на ось X;
a_{y_2} – проекция вектора ускорения второго тела на ось Y;
r_1 – радиус первого тела;
r_2 – радиус второго тела.

Из (19) видно, что дальнейшее раскрытие квадратов, сокращение, вынос t за скобки, перенос из правой части в левую приведёт к тому, что уравнение примет вид (20).

$$P(t) = 0 \tag{20}$$

где $P(t)$ – многочлен от t.

Значит, уравнение алгебраическое одной переменной. Теперь найдём степень уравнения (т.е. максимальную степень одночлена). Возьмём одночлен $\frac{a_{x1} t^2}{2}$, который является частью многочлена, который возведён в квадрат. Следовательно, в результирующем многочлене будет присутствовать одночлен (21).

$$(\frac{a_{x1} t^2}{2})^2 = \frac{{a_{x1}}^2 t^4}{4} \tag{21}$$

Как видно, в результирующем многочлене t возведён в 4 степень. При этом в результирующем уравнении этот одночлен не сократится потому что у других подобных одночленов другие коэффициенты. Значит, в результирующем уравнении будет присутствовать одночлен степени 4.

Так как для каждого случая подстановки формул (17) и (18) в уравнения (4), (6), (8) придётся производить 8 таких выводов (для каждого из 2 случев из (17) следует рассмотреть 2 случая из (18) при подстановке в (4) и по 2 случая при подстановке в (6) и (8)), проще составить программный алгоритм (который описан позднее в TODO), который применяя методы компьютерной алгебры, сможет строить выражения и вычислять их значения, подставляя переменные.

1.4 Решение алгебраических уравнений четвёртой степени

Так как для работы создаваемого физического движка не требуется обнаруживать время столкновения без погрешности и корни могут быть только действительными, можно воспользоваться численными методами. К тому же, аналитические методы решения алгебраических уравнений четвёртой степени обладают громоздкостью. И при этом, предложенный далее метод численного решения алгебраических уравнений позволяет решать уравнения любой степени, что позволит теоретически внести в модель и реализацию, без существенного переписывания кода, например разноускоренное движение (т.е. величину рывок, от которой зависит ускорение) и тогда уравнение, подобное (19), получится уже пятой степени, что не имеет решений в радикалах вовсе по теореме Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах [5, с. 112].

1.4.1 Метод бисекции

Метод бисекции или метод деления отрезка пополам – простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$, является частным случаем бинарного поиска [6].

Метод бисекции позволяет найти корень функции на отрезке $[x_l, x_r]$, если $sign(f(x_l)) \neq sign(f(x_r))$. При этом, если функция $f(x)$ не монотонна, она имеет несколько корней и метод найдёт лишь один корень [6]. Поэтому, метод бисекции не подходит для общего случая поиска решений алгебраических уравнений без предварительной подготовки, которая описана в пункте 1.4.2.

При этом можно обобщить этот метод для поиска корней на промежутках вида $(-\infty, x_r]$, $[x_l, +\infty)$. Недостающую границу поиска можно подобрать кратным (например, с каждой итерацией увеличивать изменение в 2 раза) увеличением (в случае бесконечности справа) или уменьшением (в случае бесконечности слева) относительно известной границы до того момента, пока знак функции на левой и правой границе не станет разным. Но при этом надо учесть, что корня на промежутке может не быть в случае когда при изменении (увеличении или уменьшении, как указано ранее) неизвестной границы, значение функции не становится ближе к нулю.

Описание метода: на каждой итерации берётся середина отрезка (22).

$$x_m = \frac{x_l + x_r}{2} \tag{22}$$

где x_m – середина отрезка $[x_l, x_r]$.

Теперь следует вычислить значение функции в середине отрезка и если (23), то корень (равный x_m) найден; иначе следует разбить отрезок $[x_l, x_r]$ на два отрезка $[x_l, x_m]$ и $[x_m, x_r]$.

$$|f(x_m)| \leqslant \varepsilon \tag{23}$$

где ε – заданная точность по оси Y.

Далее, если x_l и x_m имеют разный знак, провести итерацию с отрезком $[x_l, x_m]$. Иначе, разный знак должен быть у x_m и x_r, значит провести итерацию с отрезком $[x_m, x_r]$.

1.4.2 Описание реализованного метода

TODO

2 Вторая глава TODO

Здесь будет вторая глава. TODO

3 Третья глава TODO

Здесь будет третья глава. TODO

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Здесь будет список использованных источников.
2. Роуэлл, Г. Физика : учебное издание / Г. Роуэлл, С. Герберт. – Москва : Просвещение, 1994. – 576 с. – ISBN 5-09-002920-2.
3. Math for Progammers TODO https://www.manning.com/books/math-for-programmers
4. Larson R., Hostetler R. . Precalculus: A Concise Course. — Boston: Houghton Mifflin, 2007. — xvii + 526 + 102 p. — ISBN 0-618-62719-7. TODO
5. Алексеев, В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001. — 192 с. — ISBN 5-900916-86-3. TODO
6. TODO Autar K Kaw Numerical Methods with Applications Chapter 03.03 Bisection Method