

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий

институт

Кафедра информатики

кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

А. С. Кузнецов

подпись

инициалы, фамилия

«__» _____ 2022 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

09.03.04 – Программная инженерия

код – наименование направления

Система физического моделирования на основе априорного подхода
обнаружения столкновений

тема

Руководитель

подпись, дата

зав. каф., канд. техн. наук

должность, ученая степень

Ю. Ю. Якунин

инициалы, фамилия

Выпускник

подпись, дата

В. А. Прекель

инициалы, фамилия

Нормоконтролер

подпись, дата

Н. Б. Позолотина

инициалы, фамилия

Красноярск 2022

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий

институт

Кафедра информатики

кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

А. С. Кузнецов

подпись

инициалы, фамилия

«__» _____ 2022 г.

**ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме бакалаврской работы**

Красноярск 2022

Студенту

Прекель Владиславу Артемовичу

фамилия, имя, отчество

Группа КИ18-166
номер

Направление (специальность)

09.03.04

код

«Программная инженерия»

полное наименование

Тема выпускной квалификационной работы

«Система физического моделирования на основе априорного подхода
обнаружения столкновений»

Утверждена приказом по университету № 6060/с от 21.04.22

Руководитель ВКР Ю. Ю. Якунин, заведующий Базовой кафедрой
интеллектуальных систем управления, кандидат технических наук

Института космических и информационных технологий

инициалы, фамилия, должность, ученое звание и место работы

Исходные данные для ВКР описание предметной области,

Интернет ресурсы

Перечень разделов ВКР Теоретические сведения, Проектирование,
Программная реализация, Примеры использования и перспективы

Перечень графического материала ВКР презентация

Руководитель ВКР

Задание принял к исполнению

подпись

Ю. Ю. Якунин

инициалы и фамилия

В. А. Прекель

подпись, инициалы и фамилия студента

«__» _____ 2022 г.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Система физического моделирования на основе априорного подхода обнаружения столкновений» содержит 64 страницы текстового документа, 19 иллюстраций, 5 таблиц, 36 формул, 71 использованный источник.

ФИЗИЧЕСКИЙ ДВИЖОК, ОБНАРУЖЕНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ, АПРИОРНЫЙ ПОДХОД, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, OSAML.

Цель работы: разработка физического движка, использующего априорный подход для обнаружения столкновений.

Задачи:

- определить модель и систематизировать математическую базу, требующуюся для реализации движка;
- провести обзор используемых технологий при разработке;
- программно реализовать физический движок и интерактивную демонстрацию его работы;
- продемонстрировать работу движка на примерах и обозначить возможности развития.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Теоретические сведения	6
1.1 Определения	6
1.2 Апостериорный и априорный подход	6
1.3 Описание модели	8
1.4 Определение формул скорости и траектории тела	11
1.5 Определение уравнений для обнаружения столкновений	13
1.6 Решение алгебраических уравнений четвёртой степени	15
1.6.1 Метод бисекции	15
1.6.2 Описание реализованного метода	16
1.7 Обработка ударов	17
2 Проектирование	19
2.1 Язык программирования OCaml	20
2.2 Обзор экосистемы языка OCaml	21
2.2.1 Компиляторы OCaml в JavaScript	22
2.2.2 Стандартные библиотеки	23
2.2.3 Библиотеки конкурентного программирования	23
2.2.4 Библиотеки для построения пользовательского интерфейса	24
2.2.5 Веб-фреймворки	25
2.2.6 Библиотеки для тестирования	25
2.2.7 Библиотеки сериализации и десериализации	25
2.2.8 Среда разработки и система сборки	26
2.3 CSS-фреймворк	27
2.4 Выбор библиотек и подходов	27
3 Программная реализация	28
3.1 Реализация метода решения алгебраических уравнений	30
3.2 Символьные вычисления	32
3.3 Движок	37
3.4 Клиентская часть	44
3.5 Серверная часть	48
4 Примеры использования и перспективы	49

4.1	Получение числа π методом Гальперина	49
4.2	Визуализация броуновского движения	52
4.3	Перспективы и дальнейшее возможное развитие	53
4.3.1	Расширение возможностей многопользовательского режима	53
4.3.2	Аналог игры «Чапаев»	54
4.3.3	Оптимизация производительности	54
4.3.4	Обобщение	55
	Заключение	56
	Список использованных источников	57

ВВЕДЕНИЕ

Современные физические движки позволяют решать широкий круг задач, от применения в компьютерных играх, до научного моделирования реальных физических процессов. Однако, для симуляции простых ситуаций, например столкновение монет (или бильярдных шаров), можно использовать не общее решение, пытающееся смоделировать как можно больше законов физики, а разработать элегантное, формализованное и точное более частное решение. В таком случае, следуя априорному подходу обнаружения столкновений, можно свести такую частную задачу к решению алгебраических уравнений высокой степени, для чего придётся применить численные методы.

Целью выпускной квалификационной работы является разработка физического движка, использующего априорный подход для обнаружения столкновений.

Для достижения поставленной цели, были решены следующие задачи:

- определить модель и систематизировать математическую базу, требующуюся для реализации движка;
- провести обзор используемых технологий при разработке;
- программно реализовать физический движок и интерактивную демонстрацию его работы;
- продемонстрировать работу движка на примерах и обозначить возможности развития.

1 Теоретические сведения

1.1 Определения

Физический движок – программное обеспечение, предназначенное для приближённой симуляции физических систем реального мира в виртуальном, например динамику твёрдого тела (включая обнаружение столкновений и обработку ударов).

Иными словами, система физического моделирования (т.е. моделирующая физику – в данном контексте симуляция синонимична моделированию) и есть физический движок.

Традиционно, физические движки делятся на 2 типа: игровые и научные. Отличительная черта первых – возможность работы в режиме реального времени, то есть воспроизводить физические процессы в игре с той же самой скоростью, в которой они происходят в реальном мире. Отличительная черта вторых – важна точность вычислений, скорость вычислений не играет существенной роли.

Кроме того, в игровых движках зачастую достаточно симулировать только текущее состояние виртуального мира без сохранения результата, а в научных движках необходимо сохранять все смоделированные в виртуальном мире взаимодействия для последующего анализа.

Одна из задач данной работы – создать движок, имеющий свойства и научного, и игрового – чтобы присутствовала возможность и моделирования в реальном времени, и эффективной «перемотки».

1.2 Апостериорный и априорный подход

В философском смысле, апостериори означает знание, полученное из опыта; а априори означает знание, полученное до опыта и независимо от него [1, с. 105-106].

В аналогичном порядке и делят подходы к реализации физических моделей: определение столкновения апостериори и априорный подход (обнаружение до происхождения столкновения).

В апостериорном случае физическое моделирование продвигается на небольшой шаг, а затем проверяется, пересекаются ли какие-либо объекты или,

по видимости, считаются пересекающимися. На каждом шаге моделирования создается список всех пересекающихся тел, а положения и траектории этих объектов «фиксируются» для учета столкновения. Этот метод называется апостериорным, поскольку он, как правило, не учитывает фактический момент столкновения, а фиксирует столкновение только после того, как оно произошло.

В априорных методах существует алгоритм обнаружения столкновений, который сможет очень точно предсказать траектории физических тел. Моменты столкновения рассчитываются с высокой точностью, при этом физические тела никогда фактически не пересекаются. Это называется априорным, потому что алгоритм обнаружения столкновений вычисляет моменты столкновения до того, как он обновит конфигурацию физических тел.

Основные преимущества апостериорных методов заключаются в том, алгоритму обнаружения столкновений не нужно знать о множестве физических переменных; алгоритму подается простой список физических тел, и программа возвращает список пересекающихся тел. Алгоритму обнаружения столкновений не нужно понимать трение, упругие столкновения или, что еще хуже, неупругие столкновения и деформируемые тела. Кроме того, апостериорные алгоритмы в действительности на одно измерение проще, чем априорные алгоритмы. Априорный алгоритм должен иметь дело с переменной времени, которая отсутствует в апостериорной задаче.

С другой стороны, у апостериорных алгоритмов существует шаг «исправления», где пересечения (которые физически не являются правильными) должны быть исправлены и это может создать проблему. Более того, если дискретный шаг слишком велик, столкновение может остаться незамеченным, в результате чего объект пройдет сквозь другой, если он достаточно быстрый или маленький.

Преимуществами априорных алгоритмов являются повышенная точность и стабильность. Физическое моделирование трудно отделить от алгоритма обнаружения столкновений. Однако во всех случаях, кроме самых простых, проблема определения времени когда два тела столкнутся заранее (учитывая некоторые начальные данные), не имеет аналитического решения – обычно требуется численный поиск корней (что и описано в 1.6).

Обычно для игровых физических движков используется апостериорный подход потому что не важна точность, а дискретное моделирование хорошо ложиться на расчёты в реальном времени. Однако данная работа призвана исследовать априорный подход и при этом создать движок, способный на симуляцию в реальном времени.

Как указано ранее, априорный подход должен учитывать моделируемые законы физики. Но при этом много что трудно учесть, поэтому симулируемая модель будет упрощённая, без учёта деформации, вращения, формы. Подвижные объекты – только тела идеально круглой формы, движение равноускоренное (равнозамедленное, но в дальнейшем везде называется равноускоренным), и т.д. Подробнее модель описана под пунктом 1.3.

1.3 Описание модели

Тело. Абсолютно твёрдое тело в форме круга равномерной плотности (центр масс в центре круга) обладающее массой (m), коэффициентом трения (μ), радиусом (r), начальной скоростью (\vec{v}_0), положением (координаты x и y или радиус-вектор \vec{r}). На тело действует сила трения ($F_{\text{тр}}$).

Точка. Неподвижная точка в пространстве, определена через координаты.

Линия. Неподвижная прямая линия в пространстве, может быть ограничена точкой с двух или одной сторон образуя отрезок или луч соответственно. Определена через общее уравнение прямой (1).

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

где A, B, C – коэффициенты общего уравнения прямой.

Сцена. Множество тел, линий, точек и постоянных (например, ускорение свободного падения).

Обновлённая сцена – сцена, в которой обновлены параметры тел, линий, точек или постоянных.

Сцена через время Δt – обновлённая сцена, в которой все тела обновлены так, что новая начальная скорость равна скорости в этот момент времени (2).

$$v_{0_{\text{new}}}^{\rightarrow} = \vec{v}(\Delta t) \quad (2)$$

где $v_{0_{\text{new}}}^{\rightarrow}$ – новая начальная скорость;

$\vec{v}(\Delta t)$ – старая скорость в момент времени Δt .

Модель. Множество пар (t, S) , где t – момент времени, а S – сцена. Иными словами, модель представляет собой цепочку сцен, для каждой из которой указан момент времени.

Сцена в момент времени t_1 – такая сцена S_0 через время $t_1 - t_0$, где пара (t_0, S_0) является членом модели, при этом соблюдается (3).

$$\forall (t, S) \in M \quad (t \leq t_0 \vee t > t_1) \quad (3)$$

где M – модель;

t_0 – время, выбранное для получения модели в момент времени t_1 ;

Иными словами, для того чтобы получить сцену в момент времени, надо из цепочки сцен найти такую, у которой время будет максимально, но при этом меньше требуемого момента времени и получить сцену через разность требуемого и найденного времени по формуле (2).

Столкновение. Так как тела не могут пересекаться, и при этом передвигаются, могут происходить столкновения. Так же тела не могут пересекаться с точками и линиями. Т.е. тела могут сталкиваться с телами, или линиями, или точками. Уравнение столкновения тела с телом (4)-через радиус-вектор, (5)-через координаты.

$$|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = r_1 + r_2 \quad (4)$$

где $\vec{r}_1(t)$ – радиус-вектор положения первого тела;

$\vec{r}_2(t)$ – радиус-вектор положения второго тела;

r_1 – радиус первого тела;

r_2 – радиус второго тела.

$$\sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = r_1 + r_2 \quad (5)$$

где $x_1(t)$ – координата положения первого тела по оси X ;
 $y_1(t)$ – координата положения первого тела по оси Y ;
 $x_2(t)$ – координата положения второго тела по оси X ;
 $y_2(t)$ – координата положения второго тела по оси Y .

Эти уравнения получены исходя из того что разность векторов является вектором из центра одного тела в центр другого [2, с. 39]. И тогда, если его длина равна сумме радиусов этих тел, значит тела столкнулись.

Подобным образом можно определить уравнение столкновения тела с точкой: (6)-через радиус-вектор, (7)-через координаты.

$$|\vec{r}(t) - \vec{p}| = r \quad (6)$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор положения тела;
 \vec{p} – радиус-вектор точки;
 r – радиус тела.

$$\sqrt{(x(t) - p_x)^2 + (y(t) - p_y)^2} = r \quad (7)$$

где $x(t)$ – координата положения тела по оси X ;
 $y(t)$ – координата положения тела по оси Y ;
 p_x – координата точки по оси X ;
 p_y – координата точки по оси Y .

С обнаружение столкновением тела и линии ситуация несколько иная, надо воспользоваться формулой расстояний от точки до прямой (8) [3, с. 452] и тогда получится (9).

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

где x, y – координаты точки.

$$\frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r \quad (9)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – координаты тела в момент времени t .

В дальнейшем будут определены формулы для нахождения положения тела, а именно: (19), (20).

1.4 Определение формул скорости и траектории тела

Далее, под моментом времени t будет подразумеваться время относительно сцены, а не модели.

Как указано выше, у тела есть начальная скорость и на него действует сила трения. По второму закону Ньютона [4, с. 114], у тела есть ускорение так как на него действует сила. Такое движение называется равноускоренным.

Скорость при равноускоренном движении определяется формулой (10) [4, с. 96].

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (10)$$

где $\vec{v}(t)$ – вектор скорости тела в момент времени t ;

\vec{v}_0 – вектор начальной скорости тела;

\vec{a} – вектор ускорения тела;

t – момент времени.

При этом вектор ускорения сонаправлен вектору силы (по второму закону Ньютона, (11)).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (11)$$

где \vec{a} – вектор ускорения тела;

\vec{F} – вектор силы действующей на тело;

m – масса тела.

Но вектор силы трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$ противоположен вектору скорости тела [4, с. 21]. Поэтому, и вектор ускорения тела будет противоположен вектору скорости тела (12).

$$\vec{a} = -\frac{\vec{v}_0}{|\vec{v}_0|}\mu g \quad (12)$$

где \vec{a} – вектор ускорения тела;

$-\frac{\vec{v}_0}{|\vec{v}_0|}$ – единичный вектор, противоположенный вектору скорости тела;

μ – коэффициент трения;

g – ускорение свободного падения.

При этом вектор скорости тела $\vec{v}(t)$ должен быть сонаправлен вектору \vec{v}_0 потому что тело не может поменять направление движения при воздействии силы трения. Для того чтобы выяснить, при каких t сонаправленность векторов $\vec{v}(t)$ и \vec{v}_0 в уравнении (10) соблюдается, достаточно увидеть, что длина вектора \vec{v}_0 должна быть больше длине вектора $\vec{a}t$ и получить неравенство для t (13).

$$t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|} \quad (13)$$

А для остальных t , $\vec{v}(t)$ следует принять нулю. Тогда скорость выражается через (14):

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \vec{v}_0 + \vec{a}t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ \vec{0}, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (14)$$

Проекции на ось абсцисс (15) и ординат (16):

$$v_x(t) = \begin{cases} v_{0x} + a_x t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (15)$$

где $v_x(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось X ;

v_{0x} – проекция вектора начальной скорости тела \vec{v}_0 на ось X ;

a_x – проекция вектора ускорения тела \vec{a} на ось X .

$$v_y(t) = \begin{cases} v_{0y} + a_y t, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ 0, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (16)$$

где $v_y(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось Y ;

v_{0y} – проекция вектора начальной скорости тела \vec{v}_0 на ось Y ;

a_y – проекция вектора ускорения тела \vec{a} на ось Y .

Теперь найдём формулу для траектории движения тела. Формуле, соответствующей (10), только для траектории, соответствует (17):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \quad (17)$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор положения тела в момент времени t ;

\vec{r}_0 – радиус-вектор начального положения тела.

Исходя из (14), требуется определить положение тела после его остановки. Для этого надо подставить время остановки $t = \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}$ в формулу (17) и получится (18).

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0 |\vec{v}_0|}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} |\vec{v}_0|^2}{2|\vec{a}|^2}, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (18)$$

Соответствующие проекции на ось абсцисс (19) и ординат (20):

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ x_0 + \frac{v_{0x} |\vec{v}_0|}{|\vec{a}|} + \frac{a_x |\vec{v}_0|^2}{2|\vec{a}|^2}, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (19)$$

где $x(t)$ – координата тела в момент времени t по оси X ;

x_0 – координата начального положения тела по оси X .

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}, & 0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}, \\ y_0 + \frac{v_{0y} |\vec{v}_0|}{|\vec{a}|} + \frac{a_y |\vec{v}_0|^2}{2|\vec{a}|^2}, & t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}. \end{cases} \quad (20)$$

где $y(t)$ – координата тела в момент времени t по оси Y ;

y_0 – координата начального положения тела по оси Y .

1.5 Определение уравнений для обнаружения столкновений

Подставив формулы (19) и (20) в уравнения (5), (7), (9) можно получить алгебраические уравнения от t четвёртой степени.

Например, для случая, когда $0 \leq t < \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}$ вывод уравнения времени столкновения тела с телом будет таким (21):

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = r_1 + r_2 \\
& (x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 = (r_1 + r_2)^2 \\
& (x_{01} + v_{0x_1}t + \frac{a_{x_1}t^2}{2})^2 - (x_{02} + v_{0x_2}t + \frac{a_{x_2}t^2}{2})^2 + \\
& + (y_{01} + v_{0y_1}t + \frac{a_{y_1}t^2}{2})^2 - (y_{02} + v_{0y_2}t + \frac{a_{y_2}t^2}{2})^2 = (r_1 + r_2)^2 \\
& \frac{a_{x_1}^2 - a_{x_2}^2 + a_{y_1}^2 - a_{y_2}^2}{4}t^4 + \\
& + (v_{0x_1}a_{x_1} - v_{0x_2}a_{x_2} + v_{0y_1}a_{y_1} - v_{0y_2}a_{y_2})t^3 + \\
& + (x_{01}a_{x_1} - x_{02}a_{x_2} + y_{01}a_{y_1} - y_{02}a_{y_2})t^2 + \\
& + 2(x_{01}v_{0x_1} - x_{02}v_{0x_2} + y_{01}v_{0y_1} - y_{02}v_{0y_2})t + \\
& + v_{0x_1}^2 + x_{01}^2 - v_{0x_2}^2 - x_{02}^2 + v_{0y_1}^2 + y_{01}^2 - v_{0y_2}^2 - y_{02}^2 - r_1^2 - 2r_1r_2 - r_2^2 = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

где $x_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси X ;
 $x_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси X ;
 $y_1(t)$ – координата первого тела в момент времени t по оси Y ;
 $y_2(t)$ – координата второго тела в момент времени t по оси Y ;
 x_{01} – начальная координата первого тела по оси X ;
 x_{02} – начальная координата второго тела по оси X ;
 y_{01} – начальная координата первого тела по оси Y ;
 y_{02} – начальная координата второго тела по оси Y ;
 v_{0x_1} – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось X ;
 v_{0y_1} – проекция вектора начальной скорости первого тела на ось Y ;
 v_{0x_2} – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось X ;
 v_{0y_2} – проекция вектора начальной скорости второго тела на ось Y ;
 a_{x_1} – проекция вектора ускорения первого тела на ось X ;
 a_{y_1} – проекция вектора ускорения первого тела на ось Y ;
 a_{x_2} – проекция вектора ускорения второго тела на ось X ;
 a_{y_2} – проекция вектора ускорения второго тела на ось Y ;
 r_1 – радиус первого тела;
 r_2 – радиус второго тела.

Видно, что уравнение приняло вид (22).

$$P(t) = 0 \tag{22}$$

где $P(t)$ – многочлен от t .

Значит, уравнение алгебраическое одной переменной. Его степень равна четырём. При этом, для каждого случая подстановки формул (19) и (20) в уравнения (5), (7), (9) придётся производить 8 таких выводов (для каждого из 2 случаев из (19) следует рассмотреть 2 случая из (20) при подстановке в (5) и по 2 случая при подстановке в (7) и (9)), проще составить программный алгоритм (который описан позднее в 3.2), который применяя методы компьютерной алгебры, сможет строить выражения и вычислять их значения, подставляя переменные.

1.6 Решение алгебраических уравнений четвёртой степени

Так как для работы создаваемого физического движка не требуется обнаруживать время столкновения без погрешности и корни могут быть только действительными, можно воспользоваться численными методами. К тому же, аналитические методы решения алгебраических уравнений четвёртой степени обладают громоздкостью. И при этом, предложенный далее метод численного решения алгебраических уравнений позволяет решать уравнения любой степени, что позволит теоретически внести в модель и реализацию, без существенного переписывания кода, например разноускоренное движение (т.е. величину рывок, от которой зависит ускорение) и тогда уравнение, подобное (21), получится степени выше четвёртой, что не имеет решений в радикалах вовсе по теореме Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах [5, с. 112].

1.6.1 Метод бисекции

Метод бисекции или метод деления отрезка пополам – простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$, является частным случаем бинарного поиска [6].

Метод бисекции позволяет найти корень функции на отрезке $[x_l, x_r]$, если $\text{sign}(f(x_l)) \neq \text{sign}(f(x_r))$. При этом, если функция $f(x)$ не монотонна, она имеет несколько корней и метод найдёт лишь один корень [6]. Поэтому, метод бисекции не подходит для общего случая поиска решений алгебраических уравнений без предварительной подготовки, которая описана в пункте 1.6.2.

При этом можно обобщить этот метод для поиска корней на промежутках вида $(-\infty, x_r]$, $[x_l, +\infty)$. Недостающую границу поиска можно подобрать кратным (например, с каждой итерацией увеличивать изменение в 2 раза) увеличением (в случае бесконечности справа) или уменьшением (в случае бесконечности слева) относительно известной границы до того момента, пока знак функции на левой и правой границе не станет разным. Но при этом надо учесть, что корня на промежутке может не быть в случае когда при изменении (увеличении или уменьшении, как указано ранее) неизвестной границы, значение функции не становится ближе к нулю.

Описание метода: на каждой итерации берётся середина отрезка (23).

$$x_m = \frac{x_l + x_r}{2} \quad (23)$$

где x_m – середина отрезка $[x_l, x_r]$.

Теперь следует вычислить значение функции в середине отрезка и если (24), то корень (равный x_m) найден; иначе следует разбить отрезок $[x_l, x_r]$ на два отрезка $[x_l, x_m]$ и $[x_m, x_r]$.

$$|f(x_m)| \leq \varepsilon \quad (24)$$

где ε – заданная точность по оси Y .

Далее, если x_l и x_m имеют разный знак, провести итерацию с отрезком $[x_l, x_m]$. Иначе, разный знак должен быть у x_m и x_r , значит провести итерацию с отрезком $[x_m, x_r]$.

1.6.2 Описание реализованного метода

Допустим, нам известны точки экстремума (т.е. локальные минимумы и максимумы) функции $P(x)$. Тогда, можно получить промежутки возрастания

и убывания функции. Если на концах этих промежутках функция принимает разный знак, значит она имеет один корень и его можно найти методом бисекции, описанном в 1.6.1.

Но как получить экстремумы функции? Т.к. возрастание меняется на убывание (или наоборот), значит производная функции меняет знак и в точки экстремума имеет значение 0. Значит, надо найти корни производной. Так как мы работаем с многочленом, производная многочлена имеет степень на единицу меньше. Поэтому можно применять рекурсивно применять этот же метод, пока степень не уменьшится до того как уравнение можно решить аналитическим методом, например линейное или квадратное.

1.7 Обработка ударов

Формула расчёта скорости удара двух движущихся объектов на двухмерной плоскости в безугловом виде выглядит следующим образом (25), согласно [7]:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \rangle}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (25)$$

где \langle, \rangle – скалярное произведение;

\vec{v}_1' – вектор скорости первого тела после удара;

\vec{v}_1 – вектор скорости первого тела до удара;

\vec{v}_2 – вектор скорости второго тела до удара;

\vec{r}_1 – радиус-вектор положения первого тела;

\vec{r}_2 – радиус-вектор положения второго тела;

m_1 – масса первого тела;

m_2 – масса второго тела.

Для вычисления скорости второго тела, надо поменять местами нижние индексы, обозначающие первое и второе тело.

Эту же формулу можно и применить для обработки ударов с точками и линиями. Достаточно принять бесконечность в качестве массы второго тела,

нулевой вектор в качестве скорости и точку соприкосновения в качестве радиус-вектора положения второго тела, тогда формула примет вид (26).

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \frac{2\infty}{m_1 + \infty} \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{r}_1 - \vec{r} \rangle}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}) \quad (26)$$

где \vec{r} – радиус-вектор точки столкновения.

Однако, видно, что возникла неопределённость ($\frac{\infty}{\infty}$). Её можно раскрыть через предел (27), тогда формула примет вид (28).

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = 2 \quad (27)$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - 2 \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{r}_1 - \vec{r} \rangle}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}) \quad (28)$$

Для того чтобы найти точку соприкосновения тела и линии, надо опустить перпендикуляр из центра круга на прямую. Для этого достаточно заметить, что коэффициенты при переменных в общем уравнении прямой, образуют вектор, направленный перпендикулярно этой прямой. Тогда, вычислив вектор, направленный, как этот вектор, но длиной, равной радиусу круга, можно получить вектор направленный из центра круга в искомую точку соприкосновения. Искомую точку соприкосновения можно получить суммой найденного вектора и радиуса-вектора положения тела. Итоговая формула (29).

$$\vec{p} = \vec{r} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} r \quad (29)$$

где \vec{p} – радиус-вектор точки соприкосновения тела и линии;

\vec{r} – радиус-вектор положения тела;

r – радиус тела;

\vec{AB} – вектор, направленный перпендикулярно линии (равный (A, B)).

2 Проектирование

Кроме создания физического движка, важно продемонстрировать его работу. Желательно в интерактивном режиме. В XXI веке сложилась ситуация, что веб-приложения обладают преимуществом, таким что для того чтобы им воспользовался пользователь, достаточно браузера и просто перейти по ссылке. Поэтому, решено сделать Single Page Application (т.е. веб-приложение, которое загружает только один веб-документ, а затем обновляет содержимое тела этого документа с помощью JavaScript API, когда необходимо показать другое содержимое [8]), которое в интерактивном режиме отображает состояние модели (описанной в пункте 1.3), меняющееся с течением времени.

Так как создаваемый движок будет способен работать в реальном времени, существует возможность создать многопользовательский режим, для которого потребуется серверная часть, на которую перенесётся работа движка, а клиенты будут получать лишь изменения в модели (подробнее в 3.5). Соответственно, браузерное интерактивное SPA приложение с графическим интерфейсом назовём клиентской частью.

Так как мы хотим, чтобы движок работал и на клиентской части, и на серверной, следует выбрать язык программирования, который позволяет создавать и браузерные приложения, и нативные.

При этом для того чтобы сделать веб-приложение интерактивным, браузеры могут работать лишь с JavaScript с возможностью подключения WebAssembly-модулей. WebAssembly – относительно новый способ создавать приложения на языке, отличным от JavaScript; он представляет из себя байткод стековой машины, который может быть получен из множества языков [9], например C/C++ [10], Rust [11], C# [12], F# [13] и т.д. [14].

Однако существует и другой способ писать на языке отличном от JavaScript – это использования компилятора, который исходный код на нужном языке компилирует в код на языке JavaScript, пригодный для исполнения в браузере. Поэтому существуют языки программирования, пригодные для исполнения и в браузере, и на сервере, что приводит к переиспользованию кода и уменьшению времени разработки. Примеры таких языков: OCaml (подробнее в пункте 2.2.1), F# [15, с. 48], TypeScript и т.д. [16].

При выборе языка программирования важно руководствоваться не только его кроссплатформенностью (в данном случае кроссплатформенностью можно назвать возможность работать и в браузере, и на сервере), но ещё и опытом работы с ним; стоит обратить внимание на выразительность, способность к обнаружению ошибок, производительность, экосистему. В качестве такого языка программирования выбран OCaml. OCaml является функциональным языком программирования, что можно рассматривать как преимущество при использовании как инструмента для решения задач численного моделирования [17].

2.1 Язык программирования OCaml

OCaml (до 2011 – Objective Caml [18]) – промышленный язык программирования общего назначения, в котором особое внимание уделяется выразительности и надёжности [19]. Обладает мультипарадигменностью, но в первую очередь преподносится как функциональный язык программирования.

Ключевые достоинства и черты OCaml, согласно [20, с. 3] и [21]:

- **выразительность.** на OCaml можно создавать более компактные, простые и понятные системы, чем на таких языках, как Java или C#;
- **обнаружение ошибок.** Существует удивительно широкий круг ошибок, против которых система типов эффективна, включая многие ошибки, которые довольно трудно обнаружить с помощью тестирования;
- **производительность.** Производительность OCaml находится на одном уровне или лучше, чем у Java, и на расстоянии вытянутой руки от таких языков, как C или C++. В добавок к высококачественной генерации нативного кода, OCaml имеет инкрементальный сборщик мусора, который может быть настроен на выполнение небольших фрагментов работы за раз, что делает его более подходящим для приложений мягкого реального времени, таких как трейдинг;
- сборка мусора для автоматического управления памятью, которая сейчас является общей чертой современных языков высокого уровня;
- функции первого порядка, которые можно передавать как обычные значения, как в JavaScript, Common Lisp и C#;

- статическая типизация увеличивает производительность и уменьшает число ошибок во время исполнения, как в Java или C#;
- параметрический полиморфизм, позволяющий создавать абстракции, работающие с различными типами данных, подобно дженерикам из Java, Rust, C# или шаблонам из C++;
- хорошая поддержка иммутабельного программирования, т.е. программирования без деструктивных обновлений в структурах данных. Такой подход представлен в традиционных функциональных языках программирования, таких как Scheme, а так же часто встречается во всём от распределенных фреймворков для работы с большими данными до UI-тулкитов;
- вывод типов, который позволяет не указывать тип каждой переменной в программе; Вместо этого, типы выводятся из того, как используется значение. В мейнстримных языках такое есть на уровне локальных переменных, например ключевое слово «var» в C# или ключевое слово «auto» в C++.
- алгебраические типы данных и паттерн-матчинг позволяют определять и манипулировать сложными структурами данных; Так же доступны в Scala, Rust, F#.

2.2 Обзор экосистемы языка OCaml

Под экосистемой можно подразумевать совокупность пакетного менеджера, системы сборки, компилятора/интерпретатора, библиотек, фреймворков и т.д. В XXI веке экосистемы языков программирования развиваются под действием opensource-сообщества. Качество и размер экосистемы могут зависеть от размеров сообщества. Банально, чем больше разработчиков – тем больше библиотек. OCaml не является мейнстримным языком, т.е. его сообщество относительно мало. Соответственно, и размер экосистемы мал. Для сравнения: количество пакетов (на момент мая 2022), доступных через пакетный менеджер `opam` для OCaml: 3860 единиц [22]; через `npm` для JavaScript: 1,97 млн [23]. Несмотря на такой разброс, в экосистеме OCaml достаточно нужного для выполнения проекта. Все рассмотренные далее библиотеки распространяются с открытым исходным кодом.

2.2.1 Компиляторы OCaml в JavaScript

Существует мнение, что JavaScript это Lisp в одежде Си: несмотря на си-подобный синтаксис, делающий его похожим на обычный процедурный язык, он больше имеет общего с функциональными языками, такими как Lisp или Scheme, а не с Си или Java [24]. Благодаря такой семантической схожести и потребности разработчиков, которые пишут на функциональных языках писать для браузера, и появляются компиляторы в JavaScript. Примеры таких компиляторов или диалектов для функциональных языков помимо OCaml: Fable (F#), ClojureScript (Clojure), RacketScript (Racket), ghcjs (Haskell). Рассмотрим такие компиляторы для OCaml в порядке появления.

Ocamljs. Ранее существовал компилятор, который для генерации JavaScript использовал внутреннее «lambda-представление» компилятора OCaml [25]. Так как такое представление является нестабильным (т.е. меняется от релиза к релизу языка OCaml) [26], такой подход серьезно усложняет поддержку последних версий языка. В отличие от подхода `js_of_ocaml`, который кроме того, помогает добиться большей производительности [27, с. 13].

Js_of_ocaml. Использует иной подход, основанный на том, что компилятор OCaml может генерировать кроме нативного кода, ещё и байткод (генерацию и интерпретацию байткода можно сравнить с тем как работают платформы Java И .NET – главное различие, что там используется ещё и JIT-компиляция), что позволяет интегрироваться с текущей экосистемой [27, с. 1].

ReScript (ранее – BuckleScript). Использует подобный подход, что и `ocamljs` [28], но с прицелом на читаемый получаемый код и интеграцией в существующую JavaScript-экосистему [29]. При этом у ReScript своя система сборки, а так же устаревшая версия OCaml, что не даёт полноценно разрабатывать фуллстек приложения на OCaml. Решить эту проблему может форк под название Melange [30], но он находится в состоянии разработки.

Ещё один подход – использовать WebAssembly при работе с OCaml, однако инструментарий для такого подхода сейчас находиться в зачаточном состоянии [31].

2.2.2 Стандартные библиотеки

Встроенная стандартная библиотека OCaml отличается тем, что её фундаментальная роль служить для самогенерации (bootstrapping) компилятора, поэтому она небольшая и портативная, что делает её не совсем инструментом общего назначения [21]. Поэтому для её замены есть библиотеки Base, Core, Batteries, Containers [32].

Base – разработанная внутри Jane Street и протестированная в деле реализация стандартной библиотеки [32]. Core – это надстройка для Base, которая значительно расширяет её функциональность [33]. Библиотека для построения пользовательского интерфейса, выбранная в 2.2.4, уже имеет в своих зависимостях Core, поэтому желательно не использовать другую стандартную библиотеку чтобы не создавать лишних зависимостей.

2.2.3 Библиотеки конкурентного программирования

Так как логика работы программ, взаимодействующих с внешним миром, часто предполагает ожидание: ожидание щелчка мышью, ожидание завершения операции чтения данных с диска или ожидание освобождения места в выходном сетевом буфере, требуется использовать приёмы конкурентного программирования [34]. Один из подходов к организации конкурентного выполнения заключается в использовании системных потоков выполнения. Другой подход применяется в однопоточных программах и заключается в использовании цикла событий, в рамках которого реализуется реакция на внешние события, такие как тайм-ауты или щелчки мышью, путем вызова функций, специально зарегистрированных для этого. Этот подход часто используется в языках программирования, подобных языку JavaScript, имеющему однопоточную среду выполнения. OCaml так же использует однопоточную среду выполнения, тоже роднит семантику OCaml с семантикой JavaScript, как указано в пункте 2.2.1.

Основные библиотеки – Lwt и Async. Lwt («lightweight threads» – легковесные потоки) позволяет писать программы с участием потоков в монадическом стиле, что позволяет писать асинхронный код как обычный OCaml-код [35, с. 1]. Async создавалась с оглядкой на Lwt, но компании

Jane Street, которая создала Async, требовалась другая обработка ошибок, более лучший контроль над параллелизмом [36]. Но при этом, эти две библиотеки не совместимы между собой, т.е. один проект не может полноценно использовать обе библиотеки вместе полноценно [37]. Из-за этого в экосистеме существует деление среди библиотек, использующих асинхронность – часть библиотек используют Lwt, часть Async. Получается, следует учитывать что одни библиотеки и фреймворки могут быть не совместимы с другими.

2.2.4 Библиотеки для построения пользовательского интерфейса

Рассмотрим библиотеки для построения пользовательского интерфейса, совместимые с `js_of_ocaml`.

jsoo-react. Предоставляет биндинги для JavaScript-библиотеки React, что позволяет использовать React в коде на OCaml [38].

ocaml-vdom. Реализует Elm-архитектуру – функциональный путь для описания пользовательского интерфейса [39]. Отличается тем, что алгоритм обнаружения изменений в виртуальном DOM, не создаёт структуры данных, представляющие изменения, а применяет их к реальному DOM «на лету» [40].

virtual_dom. Предоставляет биндинги для JavaScript-библиотеки virtual-dom, позволяющей производить полноценные операции обнаружения изменений на виртуальном DOM и т.д. [41]. Часто не используется непосредственно, а используется через нижеописанные библиотеки.

incr_dom. Используя библиотеку Incremental для построения самокорректирующихся вычислений, или вычислений, которые могут быть эффективно обновлены при изменении их входных данных, и вышеописанную virtual_dom, позволяет создавать отзывчивые веб-интерфейсы [33].

bonsai. Расширяет библиотеку incr_dom, вводя концепцию компонента [42], представляющих из себя чисто функциональные стейт-машины, из которых можно составлять композицию [43].

Вообще, использование виртуального DOM нужно так как при взаимодействии с SPA, JavaScript разбирает и выстраивает новый UI с помощью DOM API, при этом обновлять или изменять новые элементы относительно легко, но процесс вставки новых элементов идёт крайне медленно [44, с. 72]. Используя виртуальный DOM можно не взаимодействовать с DOM напрямую.

Преимущество `incr_dom` и `bonsai` в том, что благодаря инкрементальным вычислениям, процесс обнаружения изменений в виртуальном DOM может иметь быстрее [45]; а концепция композиции стейт-машин библиотеки `bonsai` хорошо ложится на разрабатываемый проект потому что и создаваемый движок является стейт-машиной (согласно пункту 3.3).

2.2.5 Веб-фреймворки

Для взаимодействия сервера и клиента требуется обмен сообщений в реальном времени, что лучше всего реализовать с помощью `WebSocket` [46]. Можно рассмотреть библиотеку `async_rpc_websocket`, которая позволяет описывать протоков удалённого вызова процедур, однако для своей работы она использует библиотеку `Async`, что нежелательно.

Поэтому можно использовать веб-фреймворк, поддерживающий технологию `WebSocket` и реализовать обмен сообщений вручную. Самым современным таким фреймворком является `dream`, который отличается идеоматичным для функциональных языков API: HTTP-обработчики представлены функциями, которые можно композировать в последовательном стиле (умножение), или в альтернативном (сложение), что можно интерпретировать как алгебраическое кольцо [47].

2.2.6 Библиотеки для тестирования

`ppx_inline_test`. Позволяет специальным синтаксисом создавать тесты для проверки конкретных свойств прямо в коде создаваемых библиотек [48].

`ppx_expect`. В предыдущем абзаце упомянут подход, в основном проверяются некоторые конкретные свойства в определенном сценарии. Иногда, однако, хочется не проверить то или иное свойство, а зафиксировать и сделать видимым поведение кода. Expect-тесты позволяют сделать именно это. [48]

2.2.7 Библиотеки сериализации и десериализации

Во многих языках программирования (де)сериализация построена на том, что информация о типе значения доступна во время выполнения программы

и с помощью рефлексии можно получить например информацию о, например названии поля объекта и его значение и записать их в сериализуемый результат. В OCaml, напротив, во время исполнения отсутствует всякое представление о типе, т.е. например значение «0» типа «int» будет иметь то же самое представление в памяти что и значение «None» типа «option» или значение «false» типа «bool» [49].

Поэтому (де)сериализация в OCaml построена на другом принципе – должна быть определена функция которая принимает сериализуемый объект и возвращает сериализованное представление (в случае сериализации), или принимает сериализованное представление и возвращает десериализованный объект (в случае десериализации). Такие функции программист может определить вручную, но это утомительно и при каждом структуре типа данных, требуется изменять код функций. Решить эту проблему помогают препроцессорные расширения для OCaml, позволяющие на этапе компиляции из определения типа данных сгенерировать функции для десериализации и сериализации. Основные такие библиотеки, предоставляющие сериализованное представление и препроцессорные расширения, являются Yojson (для JSON [50]) и Sexplib (для S-выражений [51]).

Использование S-выражений является более традиционным в функциональных языках программирования и их уже используют выбранные библиотеки Core и Bonsai, поэтому для консистентности принято решение не использовать JSON в проекте.

2.2.8 Среда разработки и система сборки

После многолетней запутанности в системах сборки OCaml, стала стандартом де-факто система сборки Dune; подобное можно сказать про пакетный менеджер Opam [52].

Поддерживается интегрированная среда разработки Visual Studio Code через плагин OCaml Platform [53].

2.3 CSS-фреймворк

Для оформления пользовательского интерфейса требуется CSS-фреймворк, обеспечивающий отзывчивую вёрстку (responsive layout) – колонки, контейнеры и т.д.; готовые компоненты – кнопки, таблицы, формы и т.д. Самым известным таким фреймворком является Bootstrap, однако выбор сделан в пользу Bulma, который отличается оригинальностью и простотой [54].

2.4 Выбор библиотек и подходов

Окончательный перечень используемых средств разработки представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Используемые средства разработки

Название	Описание
OCaml	язык программирования
Js_of_ocaml	компилятор OCaml в JavaScript
Lwt	библиотека для конкурентного программирования
Core	стандартная библиотека
Dream	web-фреймворк
ppx_inline_test, ppx_expect	библиотеки юнит-тестирования
Sexplib	библиотека для сериализации и десериализации S-выражений
Bulma	CSS-фреймворк
Dune, opam	система сборки и пакетный менеджер
VS Code, OCaml Platform	среда разработки и плагин для работы с OCaml

3 Программная реализация

При разработке широко использовалось модульное программирование. При чём в некоторых частях программы использовались продвинутые возможности языка модулей ML (реализован в используемом OCaml), которые позволяют отделять интерфейс модуля от его реализации, параметризовать модули другими модулями (образуя функторы), включать один модуль в другой, [55] производить инъекцию зависимостей и т.д [56].

Например, функторы были использованы для того чтобы в реализации численного метода решения алгебраических уравнений от конкретной реализации вещественных чисел. Это позволяет абстрагироваться от конкретной реализации вещественных, что позволит на деле использовать разные реализации, например модуль для работы с числами двойной точности из стандартной библиотеки, или самописную реализацию с использованием дробей на основе чисел двойной точности, или реализацию на основе длинной арифметики.

Была попытка использовать функторы и при реализации движка, но при чрезмерном их использовании код усложняется и для разработчика, и для компилятора: слишком долгая компиляция, анализатор кода для интегрированной среды разработки потребляет слишком много памяти. Поэтому сам движок разработан без использования функторов: для представления вещественных чисел используются числа с плавающей запятой двойной точности (в OCaml он называется «float», когда в других языках может быть известен как «double»).

Проект состоит из нескольких подпроектов. На рисунке 1 представлена диаграмма зависимостей между ними. В таблице 2 указано их место в исходном коде и соответствующий пункт ВКР.

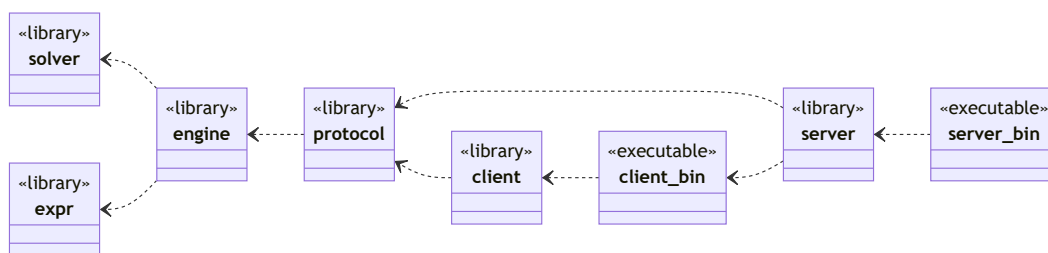


Рисунок 1 – Диаграмма зависимостей подпроектов

Таблица 2 – Подпроекты

Название подпроекта	Каталог	Пункт ВКР
solver	lib/solver	3.1
expr	lib/expr	3.2
engine	lib/engine	3.3
client	lib/client	3.4
client_bin	bin/client	
protocol	lib/protocol	3.5
server	lib/server	
server_bin	bin/server	

При использовании функторов, был использован «трюк `_intf`», который позволил вывести сигнатуру выходного модуля в отдельный файл, что позволяет не дублировать её и в файле, где функтор реализован [57]. Т.е. в таблицах 3 и 4 сигнатуры выведены в файл заканчивающийся на «`_intf.ml`». Там, где функторы не используются (таблица 5), файл сигнатур имеет суффикс «`.mli`».

На рисунках 2 и 5 представлены диаграммы с функторами, ромбовидная стрелка из F в S означает, что функтор F параметризуется модулем, имеющим сигнатуру S ; треугольная стрелка из F в S означает, что функтор F возвращает модуль с сигнатурой S . Так как функторы можно назвать параметризованными модулями, далее функторы будут называться модулями.

3.1 Реализация метода решения алгебраических уравнений

Диаграмма модулей приведена на рисунке 2. В таблице 3 показано их место в реализации и расшифровка.

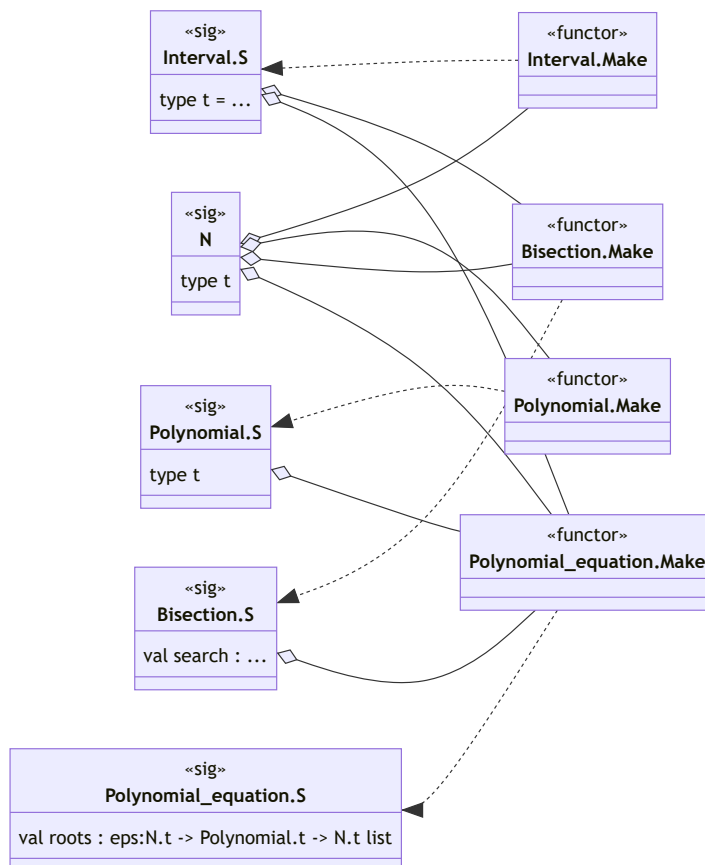


Рисунок 2 – Диаграмма модулей решателя алгебраических уравнений

Таблица 3 – Модули решателя алгебраических уравнений

Название модуля	Файлы	Расшифровка
Interval	lib/solver/interval.ml lib/solver/interval_intf.ml	Промежуток
Polynomial	lib/solver/polynomial.ml lib/solver/polynomial_intf.ml	Многочлен
Bisection	lib/solver/bisection.ml lib/solver/bisection_intf.ml	Метод бисекции
Polynomial_equation	lib/solver/polynomial_equation.ml lib/solver/polynomial_equation_intf.ml	Алгебраическое уравнение

Промежуток. Промежуток представлен алгебраическим типом данных (алгебраический тип данных в функциональном программировании – размеченное объединение других типов [58]), у которого есть несколько конструкторов:

- от одного вещественного числа до другого;
- от $-\infty$ до заданного вещественного числа;
- от заданного вещественного числа до $+\infty$;
- от $-\infty$ до $+\infty$ (вся числовая прямая);
- пустой промежуток.

Так же в этом модуле представлены функции для конвертации в кортеж, создания промежутка, разбиения списка значений на промежутки, вычисления разности между правым и левым значением.

Многочлен. Многочлен представлен иммутабельным словарём, ключом которого является целое число (представляющее степень одночлена), значением является вещественное число (представляющее коэффициент одночлена). Предоставляет функции для создания многочлена из списка кортежей, для вычисления производной многочлена, для вычисления степени многочлена. На рисунке 3 представлена для примера реализация функции вычисления производной многочлена. Её можно прочесть так: «Пары ключ-значения из словаря, которым представлен многочлен, фильтруются так, чтобы остались только с ненулевой степенью, и заодно коэффициент преобразовывается в коэффициент производной, умножаясь на степень; далее все ключи отображаются так, чтобы стали на единицу меньше (при этом степень не может стать отрицательной, потому что многочлен нельзя создать с отрицательной степенью у одночлена, а на предыдущем шаге мы исключили одночлен с нулевой степенью)».

```
let derivative p =  
  Map.filter_mapi p ~f:(fun ~key:degree ~data:coefficient ->  
    match degree with  
    | 0 -> None  
    | _ -> Some N.(coefficient * of_int degree))  
|> Map.map_keys_exn (module Int) ~f:(fun a -> a - 1)  
;;
```

Рисунок 3 – Реализация функции нахождения производной многочлена

Метод бисекции. Этот модуль представляет функцию, принимающую другую функцию $f(x)$, точность ε и промежуток, на котором надо искать такой x , что $|f(x)| < \varepsilon$. Предполагается, что функция монотонно возрастает или убывает на требуемом промежутке. Кроме самого метода бисекции, в ней реализован алгоритм, позволяющий находить значения на бесконечном и полубесконечном промежутке, который описан в пункте 1.6.1.

Алгебраическое уравнение. Этот модуль, используя все 3 вышеописанных, предоставляет главную функцию – принимающую точность вычислений ε и многочлен $P(x)$, и возвращающую список таких x , что $|P(x)| < \varepsilon$. Иными словами, решает алгебраическое уравнение заданное многочленом с заданной точностью. На рисунке 4 представлена её реализация, её можно прочитать следующим образом: «Вычисляется степень многочлена. Если она нулевая или отрицательная, то вернуть пустой список. Если равна единице, решить как линейное уравнение и преобразовать в список. Если равна двум, решить как квадратное уравнение, учитывая точность. Иначе, вычислить производную многочлена и найти её корни; разбить список корней на промежутки и методом бисекции найти корни на промежутках».

```
let rec roots ~eps poly =
  match Polynomial.degree poly with
  | non_nat when non_nat <= 0 -> []
  | 1 -> poly |> linear_root |> Option.to_list
  | 2 -> poly |> quadratic_roots ~eps
  | _ ->
    poly
    |> Polynomial.derivative
    |> roots ~eps
    |> I.intervals_of_list
    |> List.filter_map ~f:(BS.search ~f:(fun x -> Polynomial.calc poly ~x) ~eps)
;;
```

Рисунок 4 – Реализация функции нахождения корней алгебраического уравнения

Таким образом, реализован метод численного решения алгебраических уравнений, описанный в пункте 1.6.

3.2 Символьные вычисления

Это часть проекта призвана обобщить вычисление коэффициентов одночленов, когда требуется перемножать или складывать многочлены.

Выражения можно строить из других выражений, вычислять значения подставляя значения на место переменных в подвыражениях. Выражения-многочлены можно складывать и перемножать, а так же вычисляя значения коэффициентов, приводить в вид многочлена, на основе которого решается алгебраическое уравнение. Диаграмма модулей приведена на рисунке 5. В таблице 4 показано их место в реализации и расшифровка.

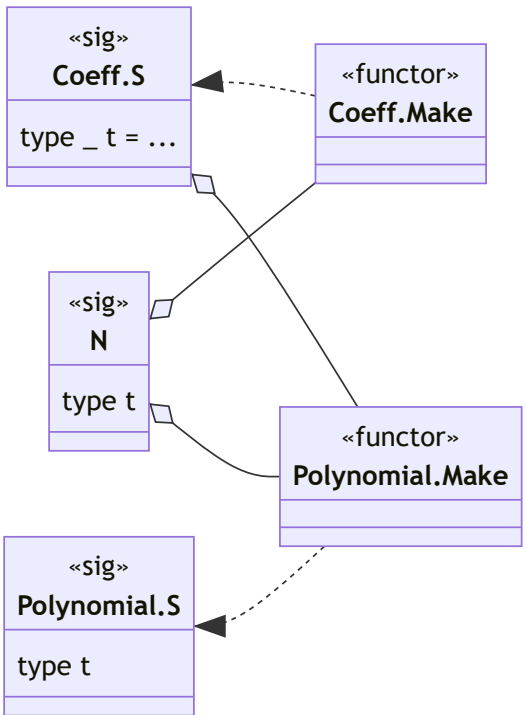


Рисунок 5 – Диаграмма модулей библиотеки символьных вычислений

Таблица 4 – Модули библиотеки символьных вычислений

Название модуля	Файлы	Расшифровка
Coeff	lib/expr/coeff.ml lib/expr/coeff_intf.ml	Выражение
Polynomial	lib/expr/polynomial.ml lib/expr/polynomial_intf.ml	Выражение-многочлен

Выражение. Представлено обобщённым алгебраическим типом данным (GADT), так как для вычисления уравнений требуется оперировать и скалярными, и векторными величинами. GADT позволяют построить тип так, чтобы статически разграничить выражения, результатом вычисления которых

являются скалярные или векторные величины [59]. При этом, для построения выражений, скалярные выражения могут использовать векторные, и наоборот, в зависимости от операции. Например, операция, получающая проекцию вектора на ось X («XOfVector»), принимает векторное выражение и возвращает скалярное; а операция для получения вектора из его проекций, получает обе его проекции в виде скалярных выражений и возвращает векторное выражение (рисунок 6). Такая структура является деревом, а его листья это либо константы, либо переменные, идентифицируемые отдельным типом. При этом если и полиморфные операции, такие как сумма или унарный минус, возвращающие выражение такого же типа, что и принимают. Кроме того, есть операция «Scope», позволяющая как-бы «навесить» нижний индекс на все переменные, и при вычислении значения переменной, потребуется так же указать этот индекс, помимо имени переменной и её значения.

```
type 'result t =  
  | ScalarConst : scalar -> scalar t  
  | VectorConst : vector -> vector t  
  | ScalarVar : key -> scalar t  
  | VectorVar : key * key -> vector t  
  | Sum : 'a t * 'a t -> 'a t  
  | SumList : 'a t list -> 'a t  
  | Sub : 'a t * 'a t -> 'a t  
  | Sqr : 'a t -> 'a t  
  | Mult : 'a t * 'a t -> 'a t  
  | Div : 'a t * 'a t -> 'a t  
  | Neg : 'a t -> 'a t  
  | XOfVector : vector t -> scalar t  
  | YOfVector : vector t -> scalar t  
  | LengthOfVector : vector t -> scalar t  
  | UnitVector : vector t -> vector t  
  | VectorOfXY : scalar t * scalar t -> vector t  
  | Scope : scope * 'a t -> 'a t
```

Рисунок 6 – Определение типа выражения

Чтобы не строить выражения напрямую из конструкторов, были определены отдельные функции, в том числе инфиксные операторы для операций сложения, вычитания и т.д., что позволило записывать выражения

в привычном виде. На рисунке 7 представлен юнит-тест, в котором строится выражение (30) и вычисляется его значение при $x = 24$ и $y = 4$.

$$\frac{xy - x + 8}{y^2} \quad (30)$$

```
let%expect_test "((24 * 4) - 24 + 8) / 16 = 5" =
  let open Expr.Syntax in
  let x = scalar_var `X in
  let y = scalar_var `Y in
  let expr = ((x * y) - x + scalar_const 8.) / sqr y in
  let result =
    Expr.calc
      ~values:(function
        | `X -> 24.
        | `Y -> 4.)
      ~scoped_values:never_returns
      (module Float)
      expr
  in
  print_s [%sexp (result : float)];
  [%expect {| 5 |}]
;;
```

Рисунок 7 – Реализация юнит-теста для выражения

Выражение-многочлен. Этот модуль представляет одноместный многочлен, коэффициентами которого являются выражения, описанные ранее. Для представления используется иммутабельный словарь, ключами которого являются целые числа – степень одночлена, значения – выражения, описывающие коэффициенты этого одночлена. Пример использования: на рисунке 8 представлен юнит-тест, в котором строится многочлен (31) и подставляются $x = 24$ и $y = 4$.

$$\begin{aligned} P_1(t) &= (-x + y)t^2 + (x \cdot (-y))t \\ P_2(t) &= (x - y)t^2 + (x \cdot (-y))t + (-x + y) \\ P_1(t)P_2(t) - P_1(t) + P_2(t) \end{aligned} \quad (31)$$

```

let%expect_test "P_1(t) P_2(t) - P_1(t) + P_2(t)" =
  let open Expr.Syntax in
  let x = scalar_var `X in
  let y = scalar_var `Y in
  let coeff1 = -x + y in
  let coeff2 = x * -y in
  let coeff3 = x - y in
  let poly1 = Poly.of_alist_exn [ 2, coeff1; 1, coeff2 ] in
  let poly2 = Poly.of_alist_exn [ 2, coeff3; 1, coeff2; 0, coeff1 ] in
  let poly = Poly.Syntax.((poly1 * poly2) - poly1 + poly2) in
  let poly_numbers =
    Poly.to_map
      poly
      ~values:(function
        | `X -> 24.
        | `Y -> 4.)
      ~scoped_values:never_returns
  |> Polynomial.of_map ~eps:1e-7
in
print_s [%sexp (Polynomial.to_string_hum ~var:"t" poly_numbers : string)];
[%expect {| -400t^4+9_656t^2+1_920t^1-20t^0 |}];
let roots = Equation.roots poly_numbers ~eps:1e-7 in
print_s [%sexp (roots : float list)];
[%expect
{|
(-4.8104056368759291 -0.20912339659875756 0.009921606232339078
5.0096074272772046) |}]
;;

```

Рисунок 8 – Реализация юнит-теста в котором строится многочлен (31)

Из рисунка 8 видно, что получен многочлен (32) и его корни это $x \approx -4.8104, x \approx -0.2091, x \approx 0.0099, x \approx 5.0096$.

$$-400t^4 + 9656t^2 + 1920t - 20 \quad (32)$$

На рисунке 9 представлен график соответствующего уравнения, где видно примерное расположение корней.

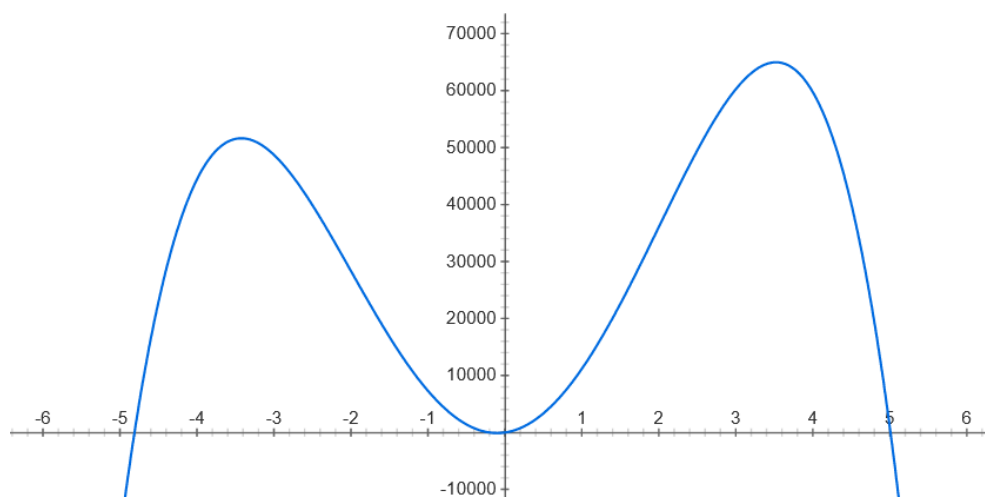


Рисунок 9 – График многочлена (32)

3.3 Движок

Архитектура движка имеет более плоскую и последовательную структуру, поэтому нет смысла приводить диаграмму. В таблице 5 представлены названия модулей и файлы модулей, далее описана их работа.

Таблица 5 – Модули движка

Название модуля	Файлы	Расшифровка
Point	lib/engine/point.ml lib/engine/point.mli	Точка
Line	lib/engine/line.ml lib/engine/line.mli	Линия
Values	lib/engine/values.ml lib/engine/values.mli	Значения
Rule	lib/engine/rule.ml lib/engine/rule.mli	Правило
Body	lib/engine/body.ml lib/engine/body.mli	Тело
Bodies	lib/engine/bodies.ml lib/engine/bodies.mli	Тела
Collision_detection	lib/engine/collision_detection.ml lib/engine/collision_detection.mli	Обнаружение столкновений
Collision_handle	lib/engine/collision_handle.ml lib/engine/collision_handle.mli	Обработка ударов
Action	lib/engine/action.ml lib/engine/action.mli	Действие
Scene	lib/engine/scene.ml lib/engine/scene.mli	Сцена
Scenes	lib/engine/scenes.ml lib/engine/scenes.mli	Сцены
Model	lib/engine/model.ml lib/engine/model.mli	Модель

Окончание таблицы 5

Название модуля	Файлы	Расшифровка
Engine	lib/engine/engine.ml lib/engine/engine.mli	Движок

Точка и Линия. Точка определена как через её координаты по осям X и Y . Прямая линия, несмотря на то, что в модели предложено её определять через общее уравнение прямой, представлена двумя точками, находящимися на ней. Это позволило одновременно определить кроме прямой, ещё и отрезок и луч, но для корректного обнаружения столкновений с отрезком или лучом, в модели должны присутствовать соответствующие точки отрезка или луча. При этом определены функции для получения коэффициентов общего уравнения прямой по формуле (33).

$$\begin{aligned}
 A &= p_{2y} - p_{1y} \\
 B &= p_{1x} - p_{2x} \\
 C &= p_{1y}p_{2x} - p_{1x}p_{2y}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

где A, B, C – коэффициенты общего уравнения прямой;

p_1 – первая точка прямой;

p_2 – вторая точка прямой.

Значения. Служит для хранения значений величин. Определены через иммутабельный словарь, ключами которого являются идентификаторы величин, а значениями являются значения этих величин.

Правило. Определяет выражения-многочлены для положения и скорости тела. При этом учитывается временной промежуток, на которых это правило действует. Правила образуют набор правил, которые в совокупности определяют положение и скорость тела для $t \geq 0$. При этом правила определяют ещё и набор правил, который будет использоваться далее при срабатывания этого правила. Это сделано чтобы определить правила для случаев, когда тело не движется. Т.е. определены 2 набора правил: тот, который отражает формулы (15), (16), (19) (20), (12); и набор из единственного правила для случая, когда тела не движется (по формулам (34)). При этом правило из

первого набора для случая, когда $t \geq \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|}$, указывает на второй набор правил, как тот, который следует использовать далее. Остальные правила указывают на тот же набор правил, в котором определены.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 0 \\ v_y(t) &= 0 \\ x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 \\ t &\geq 0 \end{aligned} \tag{34}$$

где $v_x(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось X ;
 $v_y(t)$ – проекция вектора скорости тела $\vec{v}(t)$ в момент времени t на ось Y ;
 $x(t)$ – координата положения тела по оси X ;
 $y(t)$ – координата положения тела по оси Y ;
 x_0 – координата начального положения тела по оси X ;
 y_0 – координата начального положения тела по оси Y ;
 t – момент времени.

Кроме того, в этом модуле определена функция для вычисления скорости и положения тела в момент времени t , принимающая набор правил и набор значений, возвращающая $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$ и следующий набор правил.

Тело и тела. Тело определено его идентификатором, набором значений величин, и набором правил. Набор тел представлен иммутабельным словарём, ключи которого – идентификаторы тела, значения – тела. Предоставляет функцию для вычисления положения тел, принимающую набор тел и момент времени и возвращающую новый набор тел.

Обнаружение столкновений. Задача функций в этом модуле вычислять время столкновения. Для этого, уравнения, описанные в пункте 1.5, строятся путём, описанным в пункте 3.2. Кроме попарного перебора тел и выбора наименьшего из полученных, требуется отсеять такие найденные корни, которые не ложатся в промежутки времени, заданные правилом. Кроме того, из-за погрешности в вычислениях тела могут чуть-чуть пересекаться и у уравнения нахождения времени столкновения будет корень, не смотря на то, что тела скорее всего направлены в разные стороны. Т.е. следует

учесть погрешность и не пытаться искать время столкновения между телами, расстояние между которыми не превышает выбранную погрешность. В случае обнаружения столкновения с лучом или отрезком, кроме вычисления времени столкновения через уравнение, требуется дополнительно проверить, что точка столкновения находится на этом луче или отрезке, потому что она может находиться на прямой, на которой лежит этот отрезок или луч. Для этого необходимо, чтобы углы, образованные отрезком (лучом) и отрезком от конца отрезка до центра тела, был острым. Например, в обоих случаях уравнение обнаружило столкновение тела с соответствующим отрезком на рисунке 10. Однако правый случай не следует принимать за обнаруженное столкновение. Такой случай отличается тем, что угол в правом случае угол $\angle A_2 B_2 C_2$ тупой, когда в левом соответствующий угол $\angle A_1 B_1 C_1$ острый. Это можно проверить через скалярное произведение векторов $\vec{B_1 A_1}$ и $\vec{B_1 C_1}$: если выполняется условие (35), значит этот угол острый и тело действительно столкнулось с отрезком. Таким же образом надо проверить и угол, образованный второй точкой отрезка (поменяв местами точки A и B в условии) и подобным образом проверяется столкновение с лучом.

$$\langle \vec{B_1 A_1}, \vec{B_1 C_1} \rangle > 0 \quad (35)$$

где $\vec{B_1 A_1}$ – вектор из проверяемой точки отрезка во вторую точку отрезка;
 $\vec{B_1 C_1}$ – вектор из проверяемой точки отрезка в центр тела.

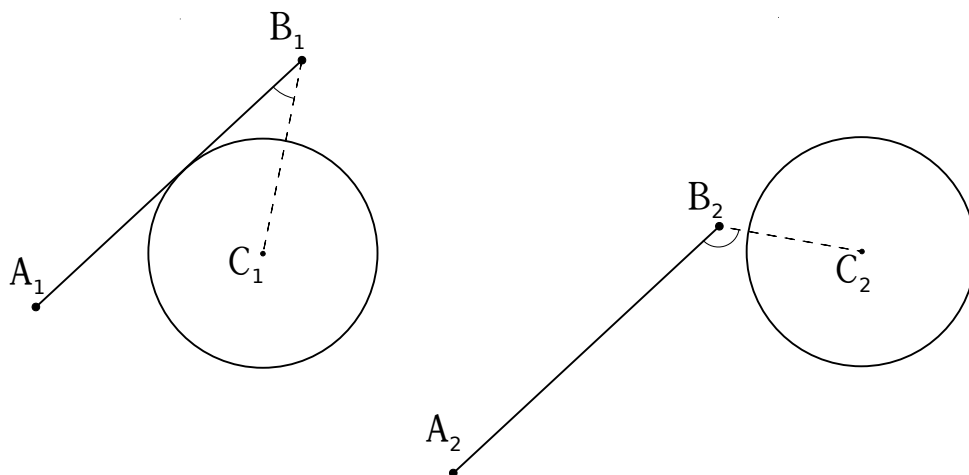


Рисунок 10 – Проверка столкновения тела с отрезком

Обработка ударов. Этот модуль реализует формулы (25) и (28) и предоставляет 3 функции:

- для вычисления новых скоростей при столкновении двух тел;
- для вычисления новой скорости тела при столкновении с точкой;
- для вычисления новой скорости тела при столкновении с прямой (лучом, отрезком).

Действие. Этот модуль описывает тип действия, которое можно применить к модели. Он включает в себя время действия (т.е. время, когда это действие должно быть применено), вид действия, параметры расчёта следующих состояний модели. Вид действия может быть одним из:

- добавить тело со следующими параметрами: идентификатор, координаты положения, радиус, коэффициент трения, масса;
- добавить тело, присвоив ему параметры из переданного ассоциативного списка «идентификатор переменной»-«значение»;
- добавить точку;
- добавить линию (луч, отрезок);
- придать скорость телу, передаётся идентификатор тела и новая скорость;
- удалить тело по его идентификатору;
- удалить точку;
- удалить линию (луч, отрезок);
- обновить параметры тела по его идентификатору и ассоциативному списку значений;
- обновить глобальный параметр.

Параметры расчёта задаются:

- промежутком времени, на которое следует просчитать состояния модели, начиная от времени совершения действия;
- количеством столкновений, которое следует просчитать начиная от времени совершения действия.

Оба параметра являются опциональными. Если заданы оба – расчёт происходит до того, который наступит быстрее. Если не задан никакой – то рассчитываются все столкновения до того момента, пока тела не остановятся. Если у какого-то тела коэффициент равен нулю, или ускорение свободного

падение равно нулю, то ускорения одного или всех тел будет равно нулю. В таком случае, тела могут не остановиться никогда: если эти тела находятся в замкнутом пространстве, то столкновения будут происходить бесконечно и при попытке рассчитать, не указав параметры, произойдёт бесконечное зацикливание. Обработка таких ситуаций не предусмотрена и программу придётся перезапускать, так что подбор оптимальных параметров расчёта ложится на пользователя. Однако, если тела могут продолжить двигаться и между ними не будет происходить столкновений, такая ситуация успешно обрабатывается, что позволит, например, вычислять число π методом Гальперина, что описано в пункте 4.1.

Сцена и сцены. Этот модуль определяет сцену, а именно – её время, наборы тел, точек, линий, глобальные значения, и причину возникновения. Как определён набор тел, описано ранее. Наборы точек и линий представлены иммутабельными множествами: т.е. не имеют отдельного идентификатора и идентифицируются своим значением непосредственно. Причиной может служить пользовательское действие, или столкновение, или инициализация.

Кроме того, в данном модуле представлен подмодуль, отвечающий за вычисление разницы между двумя сценами. Разница вычисляется между старой и новой сценой, поэтому в разнице представлено новое время, разница между наборами тел, разница между наборами точек, разница между наборами линий, разница глобальных значений, новая причина. При этом разница между наборами, которые представлены словарём, представлена в виде ассоциативного списка добавленных и изменённых пар идентификатор-значение и списка удалённых идентификаторов; разница между наборами, которые представлены множеством, представлена в виде списка добавленных и списка удалённых значений. Кроме функции для вычисления разницы, определена функция для применения разницы: она принимает старый набор, разницу, и возвращает новый набор.

Набор сцен представлен как иммутабельный словарь, ключами которого является время сцены, значениями – значение сцены. Хранение в таком виде позволяет эффективно определить функцию, которая делает срез сцен до требуемого времени. Эта функция понадобится далее для работы движка.

Модель. Модель представлена опциональным временем до которого рассчитаны сцены и набором сцен. Это время может быть не предоставлено, когда расчёт произведён до того момента как столкновения прекратятся. Как указано ранее, такой расчёт можно сделать, не указав параметры расчёта. Этот модуль так же предоставляет подмодуль для вычисления разницы между моделями.

Движок. Кроме того, что этот модуль реализует ключевую функциональность, он является основным в библиотеке и указывает на модули, которые должны быть доступны из других библиотек (так работает система сборки: если в библиотеке есть файл с названием идентичным названию библиотеки, то из других библиотек будет доступен только этот модуль, а остальные нужные модули должны быть переобъявлены в нём).

Ключевая функциональность заключена в двух функциях. Одна позволяет: или применить действие, или применить разницу моделей, или продлить используя заданные параметры расчёта, или заменить модель. Кроме этого она принимает старую модель, а возвращает новую. Вторая функция позволяет только применить действие или продлить вычисление, но кроме новой модели возвращает разницу между старой и новой. Вторая функция используется на сервере потому что требуется передавать подключённым клиентам разницу. Эти функции реализованы с помощью следующих, которые не попадают в файл сигнатуры модуля движка и остаются сокрытыми.

Функция получения последовательности сцен. На основе одной сцены строится следующая, и так по цепочке, образуя бесконечную ленивую последовательность. Новое время сцены вычисляется с помощью описанного ранее модуля обнаружения столкновений. Скорости тел перерасчитываются на основе описанного ранее модуля обработки ударов. Эта функция принимает опциональный временной параметр, который принуждает прекратить последовательность на сцене с конкретным временем.

Функция применения действия к сцене. Отвечает за обработку действия. Например если действие – «добавить точку», то возвращается сцена с обновлённым набором точек, содержащим новую точку.

Функция применения действия к модели. Работает по следующему алгоритму:

- вычисляется набор сцен до времени действия;
- на основе последней сцены из этого набора строится последовательность сцен до времени действия;
- к последней сцене из последовательности, полученной на предыдущем шаге, применяется действие;
- на основе полученной сцены, строится последовательность следующих сцен и из них берутся первые сцена на основе параметров расчёта;
- в новую модель назначается время, до которого рассчитаны сцены, и набор сцен из предыдущего шага.

Подобным образом реализована функция продления, а для вычисления разницы используется соответствующая функция из модуля модели. Таким образом, движок можно условно считать стейт-машиной (с тем условием, что число состояний бесконечно), где множество состояний это множество моделей, а функция перехода это вышеописанная функция применения действия к модели.

Подробнее об единицах измерения. Конкретные единицы измерения не используются. При этом, при определении величин соблюдается консистентность: например для определения скорости используются те же самые условные единицы времени и расстояния, что и для самих времени и расстояния. Это позволяет на деле использовать любые единицы измерения: далее, при реализации клиентской части для единицы времени используется 1 секунда, для единицы расстояния 1 пиксель. Для массы выбирать конкретную единицу измерения не имеет смысла, потому что во всех использованных формулах, в которых присутствует масса, единицы измерения сокращаются.

3.4 Клиентская часть

Как указано ранее, клиентская часть реализована в виде браузерного одностраничного приложения. Оно может может работать независимо от серверной части: тогда будет доступен только одиночный режим, когда все вычисления проходят на клиенте. Независимость от сервера позволяет развернуть приложение на любом хостинге статических веб-приложений, например GitHub Pages, что и было сделано: <https://prekel.github.io/chapgame/>.

Клиентская часть разделена на компоненты, каждый из которых в себе инкапсулирует состояние. Визуально приложение поделено на две части: слева располагаются заголовок, вкладки переключения одиночного и многопользовательского режима, панели управления; а справа отрисовывается текущее состояние. Заголовок состоит из иконки вызова справочной информации и иконки-ссылки на репозиторий с исходным кодом. Далее перечислены панели в порядке их расположения сверху вниз как на рисунках 11 и 12.

Панель состояния. Через неё можно экспортировать или импортировать модель. Используется текстовое представление, а именно S-выражения. Здесь же можно полностью очистить модель и получить статистику:

- количество сцен;
- количество причин для возникновения сцен;
- столкновений среди них;
- столкновений между телами, между телом и линией, между телом и точкой среди них;
- пользовательских действий;
- время, до которого рассчитана модель (∞ , если рассчитано до того состояния, при котором не будет новых столкновений);
- время последней сцены.

Панель времени. Позволяет установить текущее время воспроизведения через текстовый ввод или кнопки, которые отматывают на секунду назад, вперёд или в нулевой момент времени.

Панель параметров расчёта. Позволяет установить параметры расчёта, описанные ранее.

Панель скорости. Установка скорости происходит аналогично со временем, только кнопки позволяют уменьшить или увеличить скорость на 0.1, поставить единичную скорость или отрицательную единичную скорость, или поставить воспроизведение на паузу. При поставке воспроизведения на паузу, скорость ставиться на нулевую и меняется иконка этой кнопки; при повторном нажатии, скорость возвращается на то значение, которое было при постановке на паузу.

Панель тел. На этой панели расположена таблица с текущими параметрами тел (идентификатор, координаты, коэффициент трения, масса, радиус, проекции вектора скорости), вычисляемыми величинами (длина вектора скорости, проекции и длина вектора ускорения), а так же кнопки для изменения параметров и удаления тела. Кроме таблицы, на этой панели расположена кнопка, вызывающая модальное окно, позволяющее создавать новые тела.

Панель линий. На этой панели расположена таблица линий, в ней показано то, что и использовалось при реализации линий, а именно координаты двух точек и вид линии (прямая линия, или луч, или отрезок). В таблице есть кнопка для удаления линии. Добавление линии реализовано в модальном окне. Изменять линии нельзя, можно только удалить её и добавить новую с нужными параметрами.

Панель точек. Аналогично с панелью линий.

Панель глобальных параметров. Здесь можно задать ускорение свободного падения, от которого, по формуле (12), зависит ускорение тел. Допускается использовать отрицательное значение: это не обрабатывается по особому сознательно, но в этом случае ускорение тел станет сонаправлено их скорости.

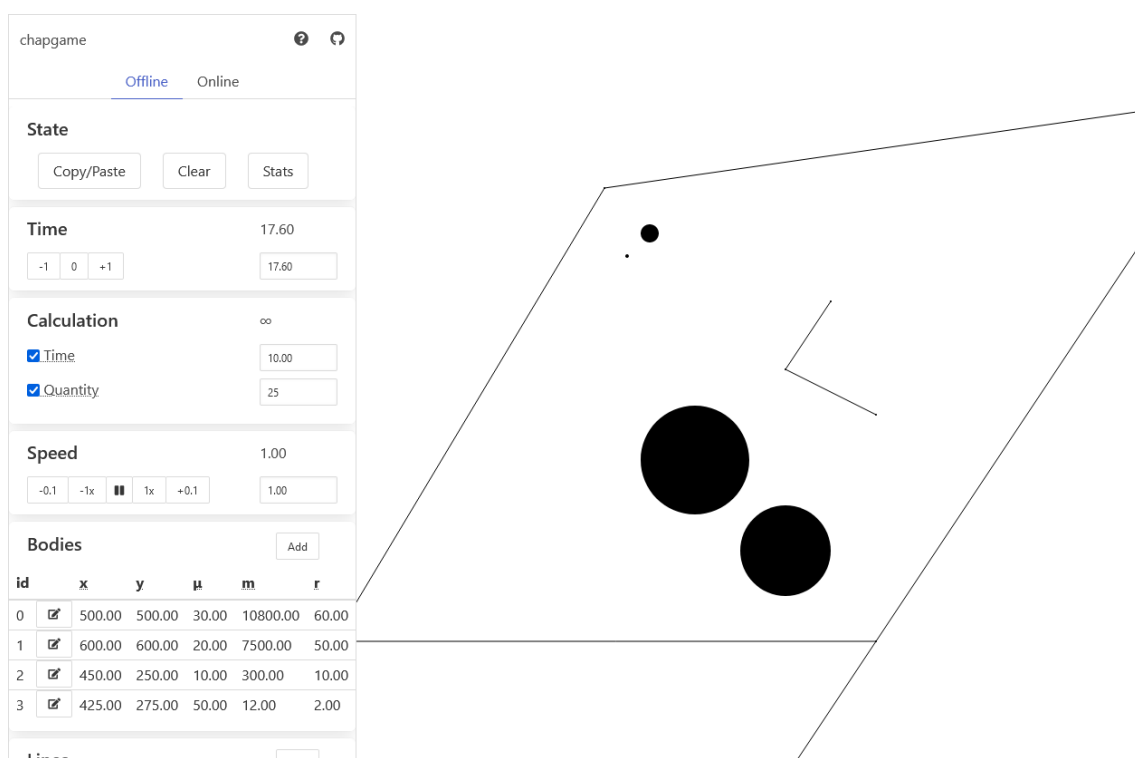


Рисунок 11 – Заголовок, вкладки, панели состояния, времени, скорости, тел

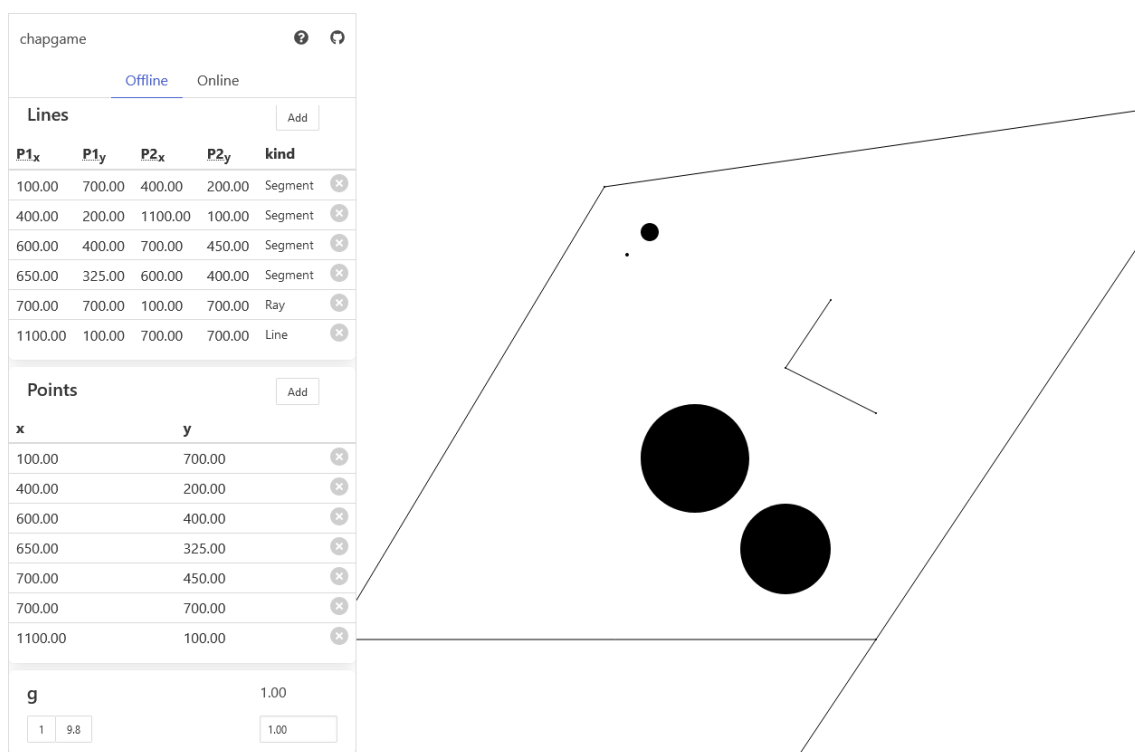


Рисунок 12 – Панели линий, точек, глобальных параметров

Сама сцена отрисовывается с помощью SVG (Scalable Vector Graphics – масштабируемая векторная графика). Так как SVG можно встраивать в HTML [60], им можно манипулировать так же как и остальными элементами с помощью используемой UI-библиотеки Bonsai. Воспроизведение происходит с частотой 60 кадров в секунду: т.е. 60 раз в секунду текущее время увеличивается на $\frac{s}{60}$, где s – скорость воспроизведения. Сцену можно перемещать и менять масштаб. При изменении масштаба, увеличение или уменьшение происходит по направлению положения курсора. Управление осуществляется посредством нажатия на фигуры: чем дальше от центра тела произошло нажатие, тем больше придаваемая скорость.

Так как масштаб изменяется через колесо мыши, потребовалось использовать соответствующий Web API [61]. Однако, используемый компилятор `js_of_ocaml` имел биндинги только к устаревшим API для работы с колесом мыши [62]. Поэтому был сделан пул-реквест в репозиторий `js_of_ocaml` под номером #1273, который предоставляет биндинги для современного API. В последствии он был принят командой разработки и слит в основную ветку.

3.5 Серверная часть

Задачи сервера:

- API многопользовательского режима;
- раздача статики (HTML-файл и скомпилированный JavaScript-файл клиентской части).

API многопользовательского режима представляет REST-подобный интерфейс, с помощью которого можно создать «комнату» (т.е. модель, ассоциированную с подключёнными клиентами), послать действие, которое применится к модели на сервере, и послать запрос, который инициализирует WebSocket-соединение, по которому будут приходить изменения (разница) модели. Кроме модели, в комнате хранятся время и скорость, изменения которых так же синхронизируются с клиентами. Для передачи данных используется формат S-выражений.

Статика встраивается статически в исполняемый файл сервера, поэтому на рисунке 1 библиотека сервера зависит от клиента.

Вместе с ответом на HTTP-запрос корневого HTML-документа, сервер посылает cookie со специальным значением, которое затем программно считывается на клиентской части, что позволяет в ней активировать дополнительную функциональность – многопользовательский режим. В этом режиме используется разбор адресной строки (роутинг; т.е. можно сказать, имитируется многостраничное приложение):

- «/» – одиночный режим;
- «/online» – меню создания комнаты или ввода идентификатора существующей;
- «/online/:id» – многопользовательский режим (комната с идентификатором «:id»).

При создании комнаты автоматически назначается токен, который в адресную строку передаётся как query-параметр, без которого можно только наблюдать за состоянием комнаты без права посылать действия.

4 Примеры использования и перспективы

4.1 Получение числа π методом Гальперина

Реализованную симуляцию можно использовать для вычисления числа π методом Г. Гальперина [63]. Этот метод заключается в том, что в системе из стенки слева, тела массой 1 и телом массой 100^{n-1} эти тела соударяются и число этих столкновений будет равно первым n цифрам числа π [64]. При этом, в системе нет трения, т.е. сталкиваться тела закончат, когда оба улетят вправо, причём у тела с меньшей массой скорость будет меньше. Разработанный движок хоть и рассчитан на движение с трением, но может и без него, если коэффициент трения сделать равным нулю.

Например, рассчитать первые 4 цифры можно следующим образом. Очистить модель, поставить воспроизведение на паузу и отмотать время в ноль (рисунок 13).

The screenshot shows the 'chapgame' interface with the following sections:

- State:** Buttons for 'Copy/Paste', 'Clear', and 'Stats'.
- Time:** A slider from -1 to +1, currently at 0.00.
- Calculation:** Checkboxes for 'Time' (checked) and 'Quantity' (checked). 'Time' is set to 10.00, 'Quantity' to 25.
- Speed:** A slider from -0.1 to +0.1, currently at 0.00.
- Bodies:** A table with columns: id, x, y, m, r, vx, vy, |v|, ax, ay, |a|. An 'Add' button is present.
- Lines:** A table with columns: P1x, P1y, P2x, P2y, kind. An 'Add' button is present.
- Points:** A table with columns: x, y. An 'Add' button is present.
- g:** A slider from 1 to 9.8, currently at 1.00.

Рисунок 13 – Шаг 1

Добавить вертикальную линию, которая будет располагаться слева от тел (рисунок 14).

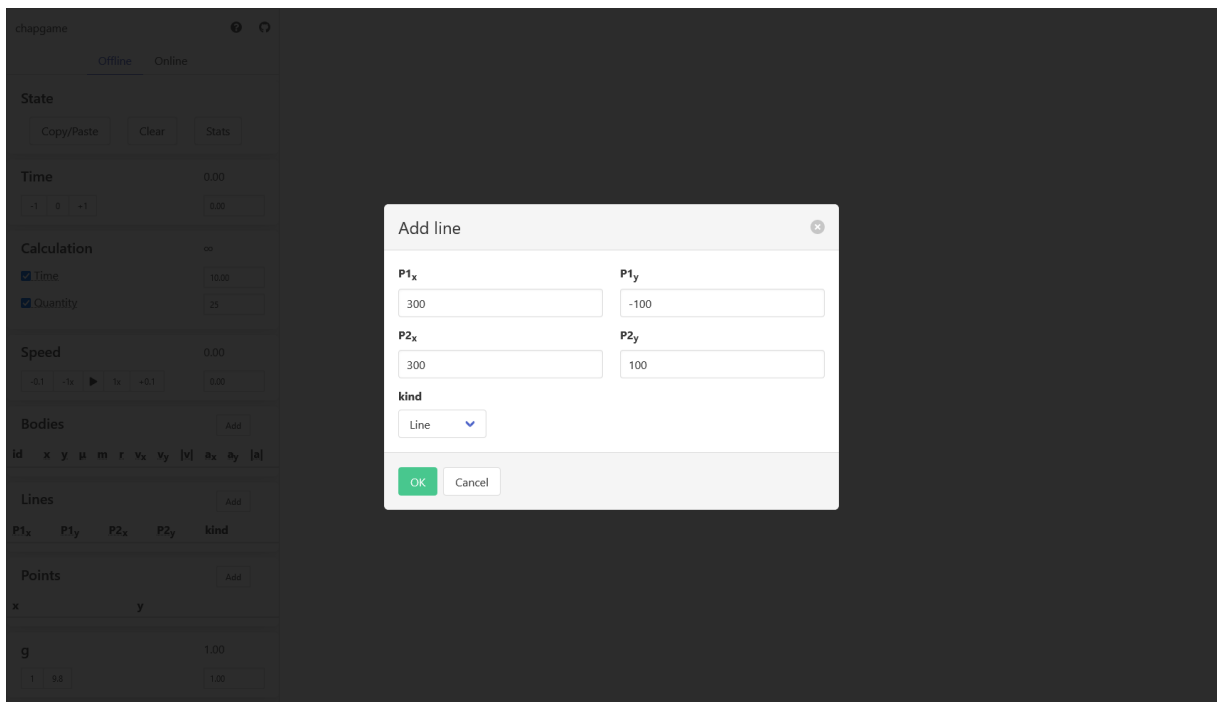


Рисунок 14 – Шаг 2

Добавить тело с меньшей массой (рисунок 15). Так как оно должно быть правее добавленной линии, координата по оси X добавляемого тела должна быть больше.

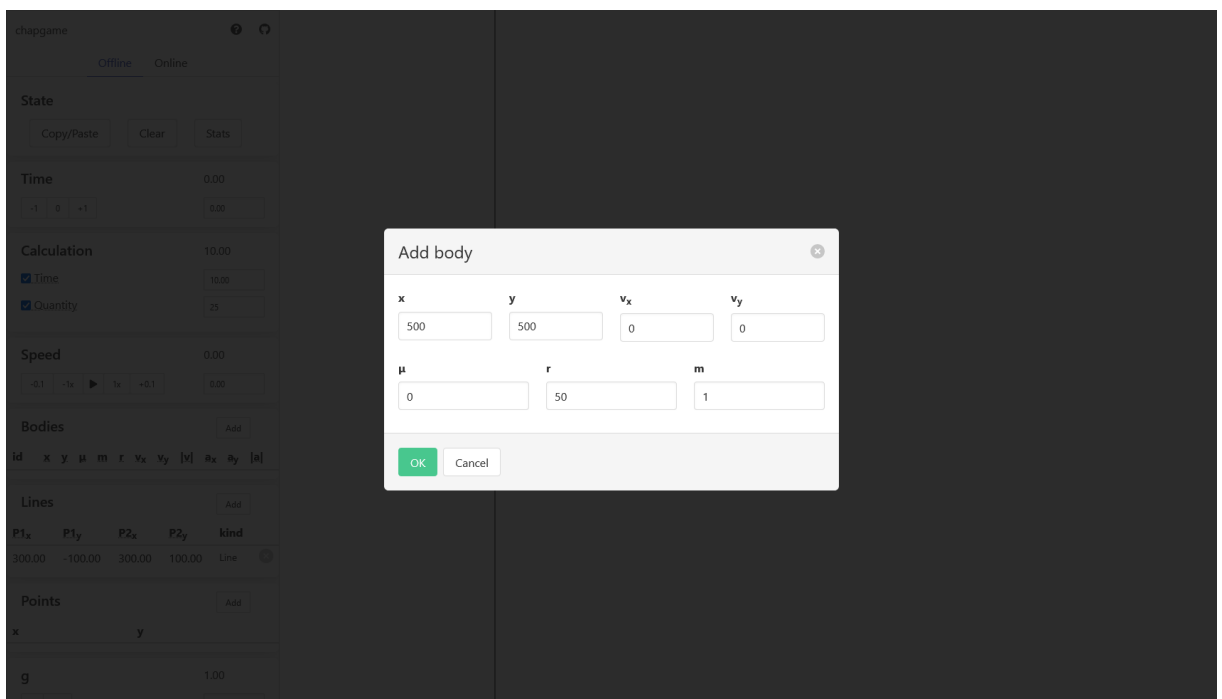


Рисунок 15 – Шаг 3

Добавить тело с большей массой, его координата по оси X должна быть ещё больше; радиус можно оставить таким же, а масса должна быть в 100^3 раз

больше так как требуется вычислить 4 цифры; скорость этого тела должна быть направлена влево (рисунок 16).

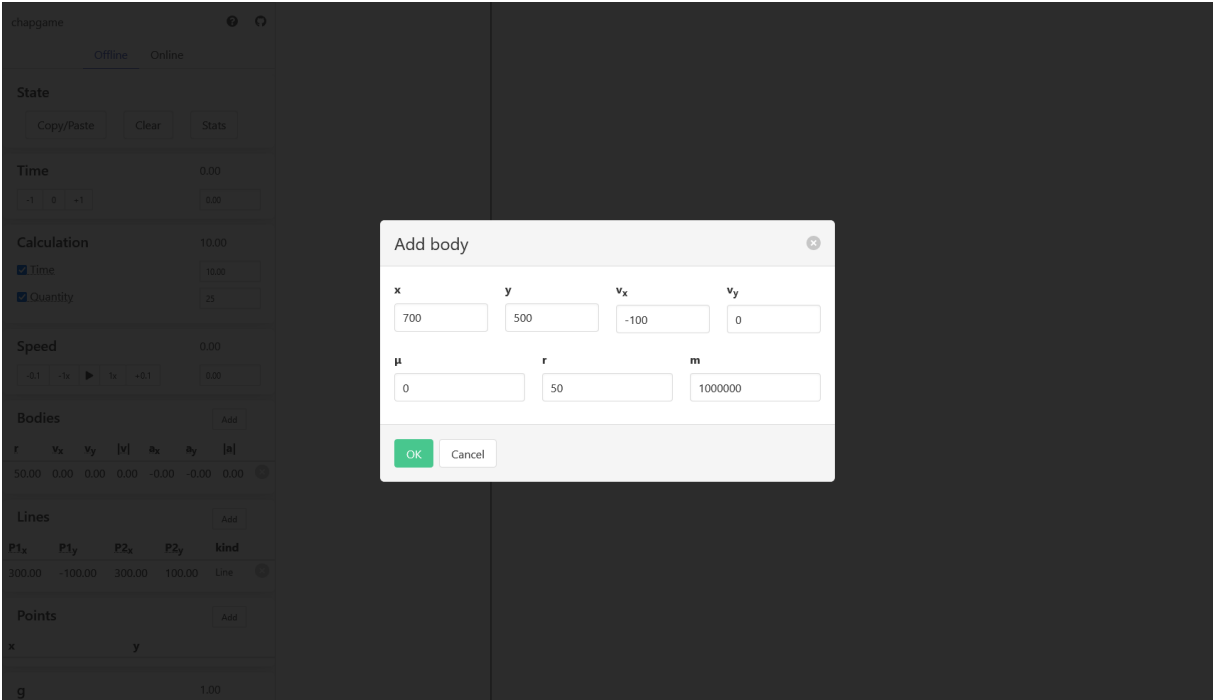


Рисунок 16 – Шаг 4

Убрать галочки, отвечающие за параметры расчёта, чтобы модель рассчиталась до конца (рисунок 17).

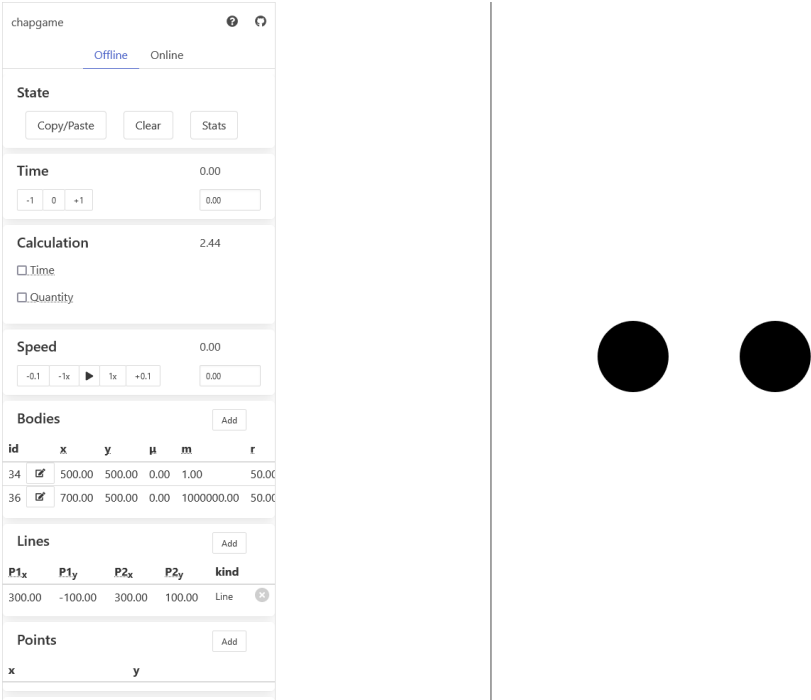


Рисунок 17 – Шаг 5

Снять воспроизведение с паузы и дождаться когда произойдёт расчёт. Можно наблюдать за столкновениями, или сразу открыть статистику и в счётчике столкновений будет искомое число: 3141, что является первыми 4 цифрами числа $\pi \approx 3.14159265359$ (рисунок 18).

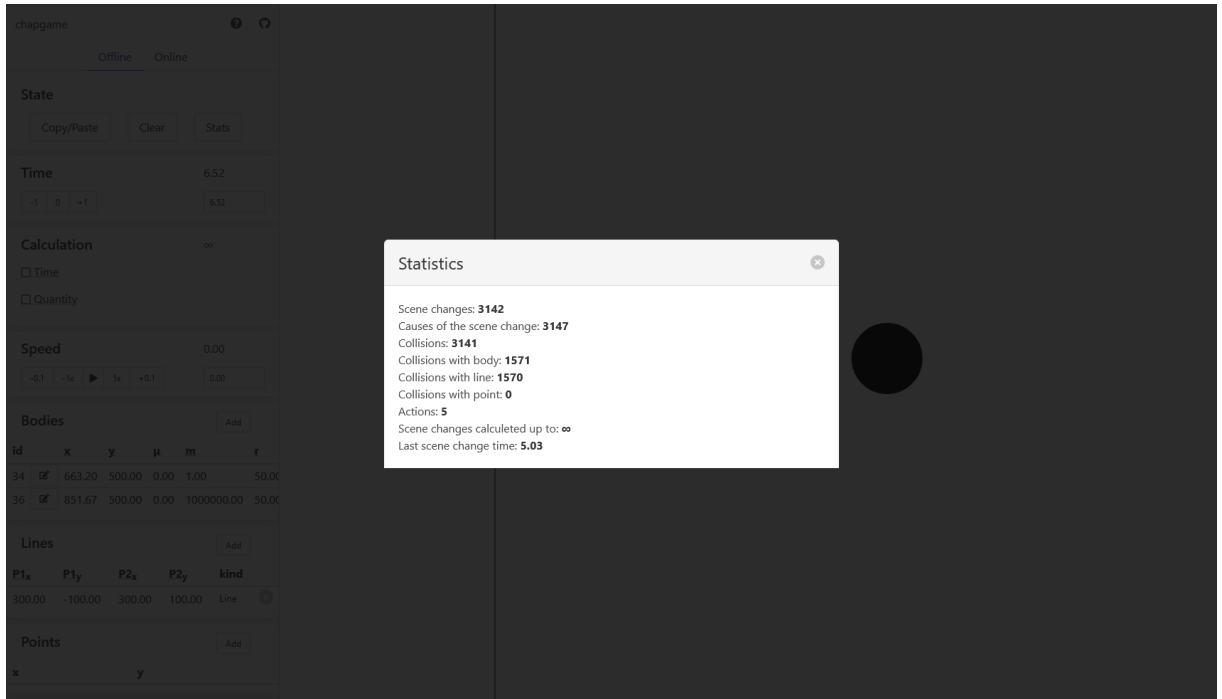


Рисунок 18 – Шаг 6

4.2 Визуализация броуновского движения

Броуновское движение – хаотическое перемещение очень малых частиц вещества под действием ударов молекул [65]. Столкновения молекул можно визуализировать реализованным движком. Однако, асимптотическая сложность реализованного алгоритма равна (36), так как требуется перебирать все пары тело-тело, тело-линия, тело-точка.

$$O(n(n + m + k)) \quad (36)$$

где n – количество тел;

m – количество линий;

k – количество точек.

Поэтому, когда в модели слишком много объектов, вычисления идут намного медленнее, а для визуализации броуновского движения желательно

использовать много тел (частиц). Это можно можно будет смягчить, оптимизировав алгоритм. Возможные оптимизации рассмотрены далее в пункте 4.3.3. Но всё равно на рисунке 19 представлена раскадровка с шагом в 0.1 секунду визуализации условного броуновского движения с 15 частицами.

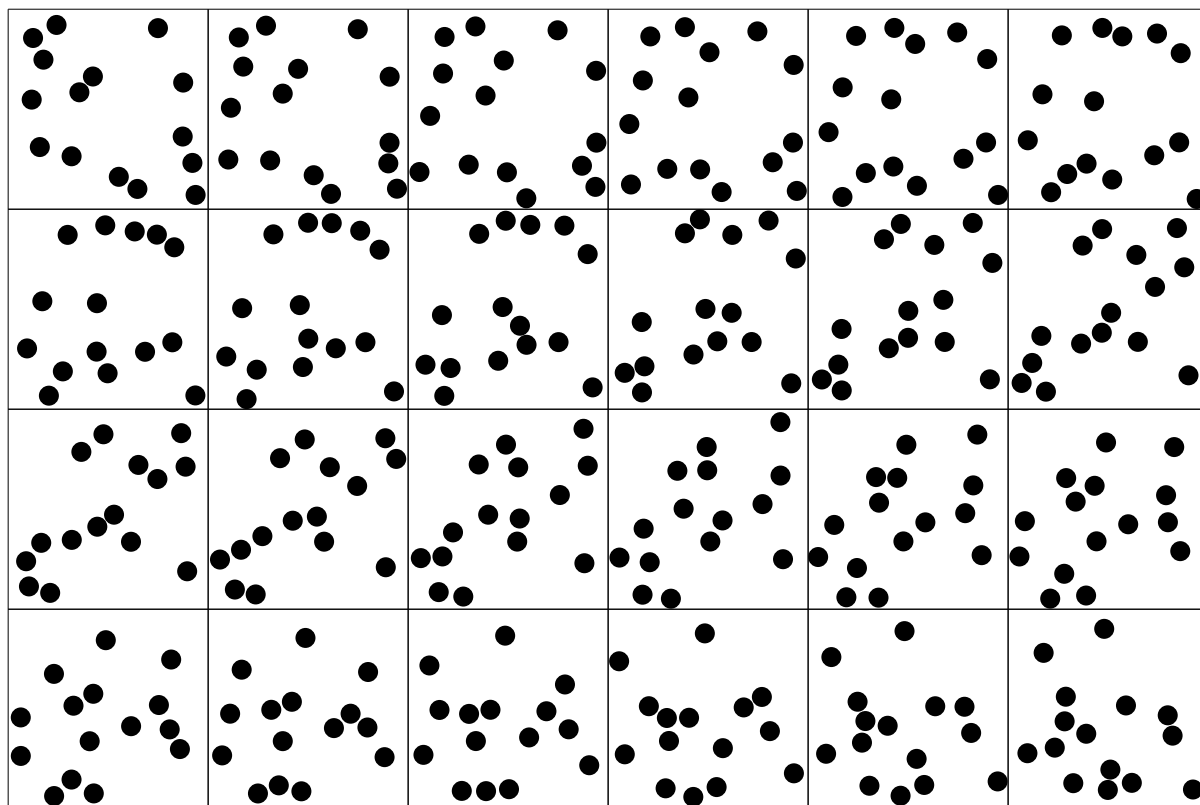


Рисунок 19 – Раскадровка примера визуализации броуновского движения

4.3 Перспективы и дальнейшее возможное развитие

4.3.1 Расширение возможностей многопользовательского режима

Сейчас модели, с которыми происходит взаимодействие в комнатах многопользовательского режима, исчезают вместе с отключением сервера. Можно реализовать сохранение в моделей в базе данных, что позволит их восстановить при последующем запуске программы. Из-за иммутабельной природы модели, можно использовать git-подобное хранилище. Вместо хранения модели целиком, можно хранить в базе данных множество разниц, которые указывают на предыдущую разницу. Т.е. для восстановления конкретной модели требуется знать идентификатор последней разницы, которая восстановиться из цепочки разниц. А для сохранения изменённой

модели из сохранённой достаточно записать новую разницу в базу данных, назначив идентификатор предыдущей, как идентификатор разницы из которой была восстановлена модель.

Кроме этого, можно добавить чат, автоматизировать экспорт и импорт модели из одиночного режима.

4.3.2 Аналог игры «Чапаев»

Реализованную демонстрацию возможностей движка можно расширить онлайн-игрой. Одно из самых простых и очевидных, это пошаговая игра, в которой надо выбивать фигуры противника с игрового поля – в реальном мире такая называется «Чапаев» [66]. В онлайн-мире реализация подобной игры может быть известна под названием «Смешарики» [67]. Кроме подобных правил, можно реализовать интеграцию с социальными сетями, такими как VK (используя игровую платформу [68]) и Telegram (используя Gaming Platworm [69]).

4.3.3 Оптимизация производительности

Из-за ограниченного времени, при реализации алгоритма не было приоритета сделать его оптимальным. Поэтому многие места реализованы тривиально, что могло привести к лишним вычислениям, что плохо отразилось на производительности. Например, во многих местах, где требуется перебирать пары, можно не перебирать пары одинаковых элементов и пары, которые уже были учтены, но с другим порядком элементов. При использовании символьных вычислений, вывод выражения вычисляется каждый раз заново, несмотря на то, что выражения используются каждый раз одни и те же. Это можно оптимизировать, сохраняя результат, т.е. использовать мемоизацию. Далее, для поиска узких мест алгоритма можно использовать профилирование и пытаться оптимизировать их.

Другой подход увеличения производительности – использовать не одно процессорное ядро, а несколько, т.е. использовать параллелизм. Хотя и в пункте 2.2.3 указано, что OCaml является языком с однопоточной средой выполнения, готовится релиз OCaml 5.0 (Multicore OCaml), в котором будет

поддержана многопоточная среда выполнения [70]. А это значит, что многие места реализованного алгоритма можно будет распараллелить. Например, используя пул доменов (поток) библиотеки `domainslib` [71], можно вычислять одновременно такие вычисления как обнаружение столкновений, или даже поиск корней уравнения. В JavaScript среде выполнения параллелизм не поддерживается, поэтому придётся написать абстракцию пула доменов, которая для клиентской (браузерной) среды выполнения будет использовать 1 поток, а для серверной несколько потоков.

4.3.4 Обобщение

Потенциал подхода не ограничен системой с одной лишь силой трения. Благодаря механизму задания правил, движок можно модифицировать так, чтобы тела передвигались по другим формулам. Можно модифицировать механизм задания правил, чтобы он использовал множество действующих на тело сил. Модифицируя движок, можно делать модель ближе или дальше к реальности. Так же, реализованный движок не поддерживает связи между телами, которые могут образовываться когда после столкновения они движутся вместе, т.е. одно толкает другое. Кроме этого в движке можно поддерживать неупругие столкновения (т.е. ввести для тел, точек, отрезков коэффициент восстановления). Теоретически можно переписать движок так, чтобы поддерживалось трёхмерное пространство. Тогда, следует вместо формулы (5) использовать подобную, только для сферы и т.д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы бакалавра был разработан физический движок, использующий априорный подход для обнаружения столкновений.

Были выполнены все поставленные задачи, а именно в разделе 1 определена модель и систематизирована математическая база, требующаяся для реализации движка; в разделе 2 проведён обзор используемых технологий при разработке; в разделе 3 описана программная реализация физического движка и интерактивной демонстрацию его работы; в разделе 4 продемонстрирована работа движка на примерах и обозначены возможности развития.

При выполнении работы были применены компетенции, полученные на дисциплинах «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дискретная математика», «Физика», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Основы функционального программирования», «Разработка web-приложений», «Алгоритмы и структуры данных» и др.

Репозиторий с исходным кодом выложен на GitHub по адресу <https://github.com/prekel/chapgame>. Интерактивная демонстрация работы движка развёрнута на GitHub Pages по адресу <https://prekel.github.io/chapgame>.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кант, И. Сочинения в шести томах. Том 3. / И. Кант. [Под общ. ред. В. Ф. Асмуса, А. В. Гулыги, Т. И. Ойзермана.] – Москва : Мысль, 1964. – 799 с.
2. Orland, P. Math for Programmers : 3D graphics, machine learning, and simulations with Python / P. Orland. – Shelter Island, NY : Manning, 2020. – 688 p. – ISBN 978-1617295355.
3. Larson, R. Precalculus : a concise course / R. Larson, R. Hostetler – Boston : Houghton Mifflin, 2007. – 656 p. – ISBN 0-618-62719-7.
4. Роуэлл, Г. Физика : учебное издание / Г. Роуэлл, С. Герберт. – Москва : Просвещение, 1994. – 576 с. – ISBN 5-09-002920-2.
5. Алексеев, В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В. Б. Алексеев. – Москва : МЦНМО, 2001. – 192 с. – ISBN 5-900916-86-3.
6. Autar Kaw. Bisection Method of Solving a Nonlinear Equation : [textbook chapter] / Autar K Kaw // Textbook: Numerical Methods with Applications. – URL: https://nm.mathforcollege.com/mws/gen/03nle/mws_gen_nle_txt_bisection.pdf. – Publication date: 15.01.2012.
7. Elastic collision // Wikipedia : the free encyclopedia. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision (дата обращения: 26.05.2022).
8. SPA (Single-page application) // MDN Web Docs. – URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Glossary/SPA> (дата обращения: 26.05.2022).
9. Haas, A. Bringing the web up to speed with WebAssembly / Andreas Haas, Andreas Rossberg, Derek L. Schuff [et al.]. – DOI 10.1145/3062341.3062363 // In Proceedings of the 38th ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI 2017). – 2017. – P. 185–200. – URL: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/3062341.3062363>. – Publication date: 14.06.2017.
10. About Emscripten // Emscripten documentation. – URL: https://emscripten.org/docs/introducing_emscripten/about_emscripten.html (дата обращения: 26.05.2022).

11. Why Rust and WebAssembly? // Rust and WebAssembly : [документация]. – URL: <https://rustwasm.github.io/docs/book/why-rust-and-webassembly.html> (дата обращения: 27.05.2022).
12. ASP.NET Core Blazor // ASP.NET Core : [документация]. – URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/aspnet/core/blazor> (дата обращения: 27.05.2022).
13. Getting started // Bolero: F# in WebAssembly. – URL: <https://fsbolero.io/docs/> (дата обращения: 27.05.2022).
14. I want to... // WebAssembly. – URL: <https://webassembly.org/getting-started/developers-guide/> (дата обращения: 27.05.2022).
15. Syme, D. The early history of F# / Don Syme. – DOI 10.1145/3386325 // Proceedings of the ACM on Programming Languages. – 2020. – Vol. 4, Iss. HOPL. – P. 1–58. – URL: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/3386325>. – Publication date: 12.06.2020.
16. Майоров, А. TypeScript для PHP-разработчика. Как писать на JavaScript большие приложения и не сойти с ума / А. Майоров // Системный администратор. – 2015. – № 7-8(152-153). – С. 95-99. – EDN UBPAQH.
17. Шутов, В. С. Функциональное программирование для решения математических задач / В. С. Шутов // Фундаментальные исследования основных направлений технических и физико - математических наук : сборник статей Международной научно-практической конференции, Челябинск, 01 июня 2018 года. – Челябинск: Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна", 2018. – С. 120-122. – EDN XPWRYL.
18. A History of Caml // The Caml Language. – URL: <https://caml.inria.fr/about/history.en.html> (дата обращения: 27.05.2022).
19. OCaml : [официальный сайт]. – URL: <https://ocaml.org/> (дата обращения: 27.05.2022).
20. Minsky, Y. OCaml for the Masses: Why the next language you learn should be functional / Yaron Minsky. – DOI 10.1145/2030256.2038036 //

ACM Queue. – 2011. – Vol. 9, Iss. 9. – P. 40–49. – URL: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/2030256.2038036>. – Publication date: 27.09.2011.

21. Minsky, Y. Prologue : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/prologue.html> (дата обращения: 25.05.2022).

22. OCaml Package Manager // OPAM. – URL: <https://opam.ocaml.org/> (дата обращения: 29.05.2022).

23. npm. – URL: <https://www.npmjs.com/> (дата обращения: 29.05.2022). – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей.

24. Crockford, D. JavaScript: The World's Most Misunderstood Programming Language / Douglas Crockford. – 2001. – URL: <https://www.crockford.com/javascript/javascript.html> (дата обращения: 29.05.2022).

25. How ocamljs compiles OCaml to Javascript // [ocamljs : документация]. – URL: <https://jaked.org/ocamljs/Jscomp.html> (дата обращения: 29.05.2022).

26. Minsky, Y. The Compiler Backend: Bytecode and Native code : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/compiler-backend.html> (дата обращения: 25.05.2022).

27. Vouillon J. From bytecode to JavaScript: the Js_of_ocaml compiler / Jérôme Vouillon, Vincent Balat. – DOI 10.1002/spe.2187 // Software: Practice and Experience. – 2014. – Vol. 44, Iss. 8. – P. 951–972. – URL: https://www.irif.fr/~balat/publications/vouillon_balat-js_of_ocaml.pdf (access date: 30.05.2022).

28. Compiling rawlambda output to javascript : discuss // GitHub : js_of_ocaml. – URL: https://github.com/ocsigen/js_of_ocaml/issues/338 (дата обращения: 28.05.2022).

29. Introduction // ReScript Language Manual. – URL: <https://rescript-lang.org/docs/manual/latest/introduction> (дата обращения: 29.05.2022).
30. Monteiro, A. On OCaml and the JS platform / Antonio Nuno Monteiro. – URL: <https://anmonteiro.com/2021/03/on-ocaml-and-the-js-platform/> (дата обращения: 29.05.2022).
31. Chan, V. Run OCaml in the browser by WebAssembly / Vincent Chan. – URL: <https://okcdz.medium.com/run-ocaml-in-the-browser-by-webassembly-31ce464594c6> (дата обращения: 29.05.2022).
32. Standard Libraries // OCamlverse. – URL: https://ocamlverse.github.io/content/standard_libraries.html (дата обращения: 29.05.2022).
33. Jane Street Open Source. – URL: <https://opensource.janestreet.com/> (дата обращения: 29.05.2022).
34. Minsky, Y. Concurrent Programming with Async : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/concurrent-programming.html> (дата обращения: 25.05.2022).
35. Vouillon, J. Lwt: a cooperative thread library / Jérôme Vouillon. – DOI 10.1145/1411304.1411307 // ML '08: Proceedings of the 2008 ACM SIGPLAN workshop on ML. – 2008. – P. 3–12. – URL: <https://www.irif.fr/~vouillon/publi/lwt.pdf> (access date: 28.05.2022).
36. Announcing Async // Jane Street Tech Blog. – URL: <https://blog.janestreet.com/announcing-async/> (дата обращения: 28.05.2022).
37. Grinberg, R. Abandoning Async / Rudi Grinberg. – URL: <http://rgrinberg.com/posts/abandoning-async/> (дата обращения: 27.05.2022).
38. jssoo-react // GitHub. – URL: <https://github.com/ml-in-barcelona/jssoo-react> (дата обращения: 29.05.2022).

39. The Elm Architecture : An Introduction to Elm // Elm : [документация]. – URL: <https://guide.elm-lang.org/architecture/> (дата обращения: 28.05.2022).
40. ocaml-vdom // GitHub. – URL: <https://github.com/LexiFi/ocaml-vdom> (дата обращения: 28.05.2022).
41. virtual_dom // GitHub. – URL: https://github.com/janestreet/virtual_dom (дата обращения: 28.05.2022).
42. The History of Bonsai.t // Github : bonsai. – URL: <https://github.com/janestreet/bonsai/blob/master/docs/blogs/history.md> (дата обращения: 28.05.2022).
43. Bonsai // Jane Street Open Source. – URL: <https://opensource.janestreet.com/bonsai/> (дата обращения: 28.05.2022).
44. Бэнкс, А. React и Redux: функциональная веб-разработка / А. Бэнкс, Е. Порселло. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 336 с. – ISBN 978-5-4461-0668-4.
45. Minsky, Y. Data Driven UIs, Incrementally : [доклад] / Yaron Minsky // Strange Loop Conference. – 2018. – URL: <https://www.youtube.com/watch?v=R3xX37RGJKE> (дата обращения: 27.05.2022).
46. WebSocket : Интерфейсы веб API // MDN Web Docs. – URL: <https://developer.mozilla.org/ru/docs/Web/API/WebSocket> (дата обращения: 28.05.2022).
47. Dream : Tidy, feature-complete web framework. – URL: <https://aantron.github.io/dream/> (дата обращения: 27.05.2022).
48. Minsky, Y. Testing : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/testing.html> (дата обращения: 25.05.2022).
49. Minsky, Y. Memory Representation of Values : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL:

<https://dev.realworldocaml.org/runtime-memory-layout.html> (дата обращения: 25.05.2022).

50. Minsky, Y. Handling JSON Data : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/json.html> (дата обращения: 25.05.2022).

51. Minsky, Y. Data Serialization with S-Expressions : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/data-serialization.html> (дата обращения: 25.05.2022).

52. Madhavapeddy, A. Fast, Flexible and Functional Programming with OCaml / Anil Madhavapeddy, Gemma Gordon // QCon Software Development Conference. – London, 2018. – URL: <https://www.infoq.com/presentations/ocaml-browser-iot/> (access date: 29.05.2022).

53. Minsky, Y. The OCaml Platform : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/platform.html> (дата обращения: 25.05.2022).

54. An alternative to Bootstrap // Bulma : [документация]. – URL: <https://bulma.io/alternative-to-bootstrap/> (дата обращения: 28.05.2022).

55. Язык модулей ML // Википедия : свободная энциклопедия. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Язык_модулей_ML (дата обращения: 28.05.2022).

56. Radanne, G. Programming Unikernels in the Large via Functor Driven Development / Gabriel Radanne, Thomas Gazagnaire, Anil Madhavapeddy [et al.]. – 2019. – arXiv: 1905.02529. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1905.02529.pdf>. – Publication date: 07.05.2019.

57. Ferguson, C. The _intf trick / Craig Ferguson. – URL: <https://www.craigfe.io/posts/the-intf-trick> (дата обращения: 27.05.2022).

58. Душкин, Р. Алгебраические типы данных и их использование в программировании / Р. Душкин // Практика функционального программирования : журнал – 2009. – выпуск 2. – С. 49–60. – URL: <https://www.fprog.ru/2009/issue2/practice-fp-2-compact.pdf> (дата обращения: 29.05.2022).
59. Minsky, Y. GADTs : Real World OCaml / Yaron Minsky, Anil Madhavapeddy // Real World OCaml : Functional programming for the masses (2nd Edition). – URL: <https://dev.realworldocaml.org/gadts.html> (дата обращения: 25.05.2022).
60. <svg> : SVG element reference // MDN Web Docs. – URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/SVG/Element/svg> (дата обращения: 28.05.2022).
61. Element: wheel event : Web APIs // MDN Web Docs. – URL: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Element/wheel_event (дата обращения: 28.05.2022).
62. Wheel event bindings : feature request // GitHub : js_of_ocaml. – URL: https://github.com/ocsigen/js_of_ocaml/issues/1272 (дата обращения: 28.05.2022).
63. Galperin. G. Playing pool with π (the number π from a billiard point of view) / G. Galperin. – DOI 10.1070/RD2003v008n04ABEH000252 // Regular and Chaotic Dynamics. – 2003. – Vol. 8, № 4. – P. 375–394. – URL: https://www.maths.tcd.ie/~lebed/Galperin.Playing_pool_with_pi.pdf (access date: 25.05.2022).
64. Как увидеть π ? Нужно швырнуть π в стену // Habr. – URL: <https://habr.com/ru/post/533454/> (дата обращения: 29.05.2022).
65. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ // Энциклопедия Кругосвет. – URL: https://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/fizika/BROUNOVSKOE_DVIZHENIE.html (дата обращения: 30.05.2022).
66. Чапаев (игра) // Википедия : свободная энциклопедия. – URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Чапаев_\(игра\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Чапаев_(игра)) (дата обращения: 29.05.2022).

67. Смешарики (игра) // Шарарам вики. – URL: [https://shararam.fandom.com/wiki/Смешарики_\(игра\)](https://shararam.fandom.com/wiki/Смешарики_(игра)) (дата обращения: 29.05.2022).

68. Игровая платформа // VK для разработчиков. – URL: <https://dev.vk.com/games/overview> (дата обращения: 29.05.2022).

69. Gaming Platform // Telegram Bots : [документация]. – URL: <https://core.telegram.org/bots/games> (дата обращения: 29.05.2022).

70. OCaml 5 Will Include Multicore Support // InfoQ. – URL: <https://www.infoq.com/news/2021/10/ocaml-5-multicore/> (дата обращения: 29.05.2022).

71. domainslib // GitHub. – URL: <https://github.com/ocaml-multicore/domainslib> (дата обращения: 29.05.2022).