

# Глава 1

## Графы и их инварианты

### 1.1 Определения

**Определение 1** *Граф, или неориентированный граф  $G$  — это упорядоченная пара  $G = (V, E)$ , где  $V$  — это непустое множество вершин или узлов, а  $E$  — множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых рёбрами.*

**Определение 2** *Ориентированный граф (сокращённо орграф)  $G$  — это упорядоченная пара  $G = (V, A)$ , где  $V$  — непустое множество вершин или узлов, и  $A$  — множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами.*

Определения пути, цикла, цепи и связанные с ними:

**Определение 3** *Пусть  $G$  — неориентированный граф. Путём в  $G$  называется такая конечная или бесконечная последовательность рёбер и вершин*

$$S = (\dots, a_0, E_0, a_1, E_1, \dots, E_{n-1}, a_n, \dots),$$

*что каждые два соседних ребра  $E_{i-1}$  и  $E_i$  имеют общую вершину  $a_i$ . Таким образом, можно написать*

$$\dots, E_0 = (a_0, a_1), E_1 = (a_1, a_2), \dots, E_n = (a_n, a_{n+1}), \dots$$

*Отметим, что одно и то же ребро может встречаться в пути несколько раз. Если нет рёбер, предшествующих  $E_0$ , то  $a_0$  называется начальной вершиной, а если нет рёбер, следующих за  $E_{(n-1)}$ , то  $a_n$  называется конечной*

вершиной. Любая вершина, принадлежащая двум соседним рёбрам, называется внутренней. Так как рёбра и вершины в пути могут повторяться, внутренняя вершина может оказаться начальной или конечной вершиной. Если начальная и конечная вершины совпадают, путь называется циклическим. Путь называется цепью, а циклический путь — циклом, если каждое его ребро встречается не более одного раза (вершины могут повторяться). Нециклическая цепь называется простой цепью, если в ней никакая вершина не повторяется. Цикл с концом  $a_0$  называется простым циклом, если  $a_0$  не является в нём промежуточной вершиной и никакие другие вершины не повторяются.

**Определение 4** *Связанный граф — граф, между любой парой вершин которого существует как минимум один путь.*

**Определение 5** *Компонента связности графа  $G$  — максимальный связный подграф графа  $G$ .*

Матрица смежности — это один из способов представления графа:

**Определение 6** *Матрицей смежности  $A = \|\alpha_{i,j}\|$  графа  $G = (V, E)$  называется матрица  $A_{[V \times V]}$ , в которой  $\alpha_{i,j}$  — количество рёбер, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ , причём при  $i = j$  каждую петлю учитываем дважды, если граф не является ориентированным, и один раз, если граф ориентирован.*

**Определение 7** *Кликкой неориентированного графа называется подмножество его вершин, любые две из которых соединены ребром.*

Максимальная клика — это клика, которая не может быть расширена путём включения дополнительных смежных вершин, то есть нет клики большего размера, включающей все вершины данной клики.

**Определение 8** *Если  $v_1, v_2$  — вершины, а  $e = (v_1, v_2)$  — соединяющее их ребро, то говорят, что вершины  $v_1, v_2$  инцидентны ребру  $e$ .*

**Определение 9** *Степень вершины в теории графов — количество рёбер графа  $G$ , инцидентных вершине  $x$ . Обозначается  $\deg(x)$ .*

**Определение 10** *Граф называется однородным (регулярным), если степени всех его вершин равны. Если степени вершин однородного графа равны  $k$ , то граф называют  $k$ -однородным.*

**Определение 11** *Изоморфизмом графов  $G = (V_G, E_G)$  и  $H = (V_H, E_H)$  называется биекция между множествами вершин графов  $f: V_G \rightarrow V_H$  такая, что любые две вершины  $u$  и  $v$  графа  $G$  смежны тогда и только тогда, когда вершины  $f(u)$  и  $f(v)$  смежны в графе  $H$ .*

**Определение 12** *Дерево — связный граф, не содержащий циклов.*

**Определение 13** *Корень дерева — выбранная вершина дерева; в орграфе — вершина с нулевой степенью захода.*

## 1.2 Примеры инвариантов

**Определение 14** *Инвариант графа — некоторое обычно числовое значение или упорядоченный набор значений, одинаковый для изоморфных графов.*

- ◇ Диаметр графа  $diam(G)$  — длина кратчайшего пути (расстояние) между парой наиболее удаленных вершин.
- ◇ Индекс Винера — величина  $w = \sum_{\forall i,j} d(v_i, v_j)$ , где  $d(v_i, v_j)$  — минимальное расстояние между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ .
- ◇ Индекс Рандича — величина  $r = \sum_{\forall i,j} \frac{1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}$ .
- ◇ Минимальное число вершин, которое необходимо удалить для получения несвязного графа.
- ◇ Минимальное число ребер, которое необходимо удалить для получения несвязного графа.
- ◇ Обхват графа — число ребер в составе минимального цикла.
- ◇ Определитель матрицы смежности.

- ◇ Плотность графа  $\varphi(G)$  — число вершин максимальной по включению клики.
- ◇ Упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор степеней вершин  $s(G) = (d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$  — при использовании переборных алгоритмов определения изоморфизма графов в качестве предположительно-изоморфных пар вершин выбираются вершины с совпадающими степенями, что способствует снижению трудоемкость перебора. Использование данного инварианта для  $k$ -однородных графов не приводит к снижению вычислительной сложности перебора, так как степени всех вершин подобного графа совпадают:  $s(G) = (k, k, \dots, k)$ .
- ◇ Упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор собственных чисел матрицы смежности графа (спектр графа). Сама по себе матрица смежности не является инвариантом, так как при смене нумерации вершин она претерпевает перестановку строк и столбцов.
- ◇ Число вершин  $n(G) = |A|$  и число дуг/ребер  $m(G) = |V|$ .
- ◇ Число компонент связности графа  $\kappa(G)$ .
- ◇ Характеристический многочлен матрицы смежности.
- ◇ Хроматическое число  $\chi(G)$  — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа  $G$  так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

## Глава 2

# Полугруппы и полурешетки

**Определение 15** *Бинарная операция  $*$  на множестве  $S$  — это функция*

$$f : S^2 \rightarrow S.$$

*Значение бинарной операции для  $x, y \in S$  обозначают  $x * y$ .*

**Определение 16** *Пусть  $*$  — бинарная операция определённая на множестве  $S$ , а  $x, y, z \in S$  — произвольные элементы множества  $S$ . Тогда если выполняется равенство*

$$x * y = y * x,$$

*то операция  $*$  называется коммутативной. Если выполняется*

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

*то операция  $*$  называется ассоциативной. Если выполняется*

$$x * x = x,$$

*то операция  $*$  называется идемпотентной.*

**Определение 17** *Полугруппа — множество с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией  $(S, *)$ .*

**Определение 18** *Полурешетка — это полугруппа, бинарная операция которой коммутативна и идемпотентна.*

Для полурешетки можно определить частичный порядок

$$x \leq y \Leftrightarrow x * y = x.$$

## 2.1 Таблица Кэли

Таблица Кэли — таблица, которая описывает структуру конечных алгебраических систем путём расположения результатов операции в таблице, напоминающей таблицу умножения. Названа в честь английского математика Артура Кэли. Таблица имеет важное значение в дискретной математике, в частности, в теории групп. Таблица позволяет выяснить некоторые свойства группы, например, является ли группа абелевой, найти центр группы и обратные элементы элементов группы.

В высшей алгебре таблицы Кэли могут также использоваться для определения бинарных операций в полях, кольцах и других алгебраических структурах.

Простой пример таблицы Кэли для группы  $1, -1$  с обычным умножением:

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

## 2.2 Граф полурешетки

Каждой полурешетке можно сопоставить ориентированный граф. Этот граф можно построить следующим образом.

Пусть полурешетка состоит из элементов  $0, 1, \dots, n-1$  и задана таблицей Кэли.

Шаг 1. Находим корень дерева *root*:

$$root = 0 \cdot 1 \dots \cdot (n-1).$$

Шаг 2. Находим смежные с *root* вершины. Для этого перебираем все элементы  $x$  полурешётки и отбираем те из них, которые удовлетворяют условиям:  $x \neq root$ ,  $x \cdot root = root$ , не существует элемента  $z$ , такого, что  $z \neq x$ ,  $z \neq root$ ,  $z \cdot root = root$ ,  $z \cdot x = z$ . Это и будут смежные с *root* вершины.

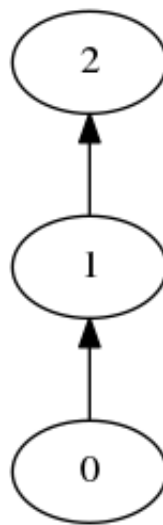
Шаг 3. Аналогично находим смежные вершины с найденными и т.д. пока не исчерпаются все вершины.

## 2.3 Примеры

Рассмотрим примеры полурешеток с такой таблицей Кэли:

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

Граф, который ей будет соответствовать:



## Глава 3

# Полный исходный код

### 3.1 digraph.h

```
1 #ifndef GRAPH_H
2 #define GRAPH_H
3
4 #include <bits/stdc++.h>
5 using namespace std;
6
7 class digraph {
8     int n = 0;
9     vector<vector<int>> adj_list;
10     void resize(int new_n);
11     void load(string file_name);
12 public:
13     digraph(string fn);
14     digraph(int an);
15     int count_vertices();
16     bool is_edge(int a, int b);
17     void add_edge(int a, int b);
18     vector<pair<int, int>> edges();
19     void print();
20     int degree(int v);
```



```

21     vector<int> output_vertices(int k);
22 };
23
24 #endif /* end of include guard: GRAPH_H */

```

## 3.2 digraph.cpp

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  #include "digraph.h"
3  using namespace std;
4
5  void digraph::resize(int new_n) {
6      n = new_n;
7      adj_list.resize(n);
8      for (auto v : adj_list) {
9          v.clear();
10     }
11 }
12
13 void digraph::load(string file_name) {
14     ifstream fin(file_name);
15     string line;
16     getline(fin, line);
17     istringstream iss(line);
18     iss >> n;
19     resize(n);
20     while (!fin.eof()) {
21         getline(fin, line);
22         if (line.empty()) continue;
23         istringstream iss(line);
24         char c;
25         iss >> c;
26         int v, u;

```

```

27     if (c == 'l') {
28         iss >> v;
29         while (iss >> u) add_edge(v, u);
30     } else if (c == 'p') {
31         iss >> v;
32         while (iss >> u) {
33             add_edge(v, u);
34             v = u;
35         }
36     }
37 }
38 }
39
40 digraph::digraph(string fn) {
41     load(fn);
42 }
43
44 digraph::digraph(int an) : n(an) {
45     adj_list.resize(n);
46 }
47
48 int digraph::count_vertices() {
49     return n;
50 }
51
52 bool digraph::is_edge(int a, int b) {
53     assert(a < n);
54     for (auto v : adj_list[a]) {
55         if (v == b) return true;
56     }
57     return false;
58 }
59

```

```

60 void digraph::add_edge(int a, int b) {
61     assert(a < n && b < n);
62     if (is_edge(a, b)) return;
63     adj_list[a].push_back(b);
64 }
65
66 vector<pair<int, int>> digraph::edges() {
67     vector<pair<int, int>> es;
68     for (int v = 0; v < n; v++) {
69         for (int u : adj_list[v]) {
70             es.push_back(make_pair(v, u));
71         }
72     }
73     return es;
74 }
75
76 void digraph::print() {
77     cout << "Count of vertices: " << n << '\n';
78     cout << "Degree of vertices:\n";
79     for (int v = 0; v < n; v++) {
80         cout << "\tdeg(" << v << ") = " << degree(v) << endl;
81     }
82     cout << "Edges:\n";
83     for (int v = 0; v < n; v++) {
84         for (int u : adj_list[v]) {
85             cout << '\t' << v << " -> " << u << '\n';
86         }
87     }
88 }
89
90 int digraph::degree(int v) {
91     return adj_list[v].size();
92 }

```

```

93
94 vector<int> digraph::output_vertices(int v) {
95     return adj_list[v];
96 }

```

### 3.3 graph\_iso.cpp

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "digraph.h"
3 using namespace std;
4
5 class DigraphIso {
6     digraph g1, g2;
7     set<int> vertices;
8     int n = -1; // количество вершин в графах g1, g2
9     int g1_k = -1; // подмножество вершин g1 {0, 1, ..., g1_k}
10    set<int> g2_s; // Подмножество вершин графа g2, которое
11    // соответствует множеству вершин графа g1 {0, 1, ..., g1_k}
12    vector<int> f; // биекция: i (вершина g1) -> f[i] (вершина g2)
13    int ans = -1;
14    bool match(int v);
15    void go();
16 public:
17    DigraphIso(digraph ag1, digraph ag2);
18    bool is_iso();
19    vector<int> biexion();
20 };
21
22 DigraphIso::DigraphIso(digraph ag1, digraph ag2)
23     : g1(ag1), g2(ag2) {}
24
25 bool DigraphIso::match(int v) {
26     // Подмножество g1 {0, 1, ..., g1_k - 1} изоморфно

```

```

27 // подмножеству графа g2 g2_s,
28 // которое равно {f[0], f[1], ..., f[g1_k - 1]}
29 // На данном шаге нужно проверить может ли подмножество g1
30 // {0, 1, ..., g1_k - 1, g1_k} быть изоморфно
31 // подмножеству g2 {f[0], f[1], ..., f[g1_k - 1], v}
32 for (int u = 0; u < g1_k; u++) {
33     if (g1.is_edge(u, g1_k) && !g2.is_edge(f[u], v)) {
34         // cout << 1 << ": " << u << " " << g1_k << " "
35         //      << f[u] << " " << v << endl;
36         return false;
37     }
38     if (g1.is_edge(g1_k, u) && !g2.is_edge(v, f[u])) {
39         // cout << 2 << endl;
40         return false;
41     }
42 }
43 return true;
44 }
45
46 void DigraphIso::go() {
47     // cout << "go begin\n";
48     // cout << "g2_s: ";
49     // for (int i : g2_s) cout << i << " ";
50     // cout << endl;
51     if (g2_s.size() == n) {
52         ans = 1;
53         return;
54     }
55     g1_k += 1;
56     set<int> t;
57     set_difference(
58         vertices.begin(), vertices.end(),
59         g2_s.begin(), g2_s.end(),

```

```

60     inserter(t, t.end())
61 );
62 // cout << "t: ";
63 // for (int i : t) cout << i << " ";
64 // cout << endl;
65 for (int v : t) {
66     if (ans > 0) return;
67     if (match(v)) {
68         // cout << g1_k << " match " << v << endl;
69         f[g1_k] = v;
70         g2_s.insert(v);
71         go();
72         g2_s.erase(v);
73     } else {
74         // cout << g1_k << " don't match " << v << endl;
75     }
76 }
77 g1_k -= 1;
78 }
79
80 bool DigraphIso::is_iso() {
81     if (ans >= 0) return ans;
82     if (g1.count_vertices() != g2.count_vertices()) {
83         return false;
84     }
85     n = g1.count_vertices();
86     f.resize(n);
87     for (int i=0; i<n; i++) vertices.insert(i);
88     go();
89     cout << "ans " << ans << endl;
90     if (ans < 0) ans = 0;
91     return ans;
92 }

```

```

93
94 vector<int> DigraphIso::birection() {
95     return f;
96 }
97
98 int main(int argc, char **argv) {
99     if (argc < 3) {
100         cout << "few arguments" << endl;
101         return 1;
102     }
103     digraph g1(argv[1]), g2(argv[2]);
104     cout << "# 1.digraph:\n";
105     g1.print();
106     cout << "# 2.digraph:\n";
107     g2.print();
108     DigraphIso iso(g1, g2);
109     cout << "Is isomorph?: " << iso.is_iso() << endl;
110     if (iso.is_iso()) {
111         vector<int> f = iso.birection();
112         cout << "birection:\n";
113         for (int i=0; i<g1.count_vertices(); i++) {
114             cout << '\t' << i << " -> " << f[i] << '\n';
115         }
116     }
117 }

```