Глава 1

Графы и их инварианты

1.1 Определения

Определение 1 *Граф, или неориентированный граф G — это упорядоченная пара $G = (V, E)$, где V — это непустое множество вершин или узлов, а E — множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых рёбрами.*

Определение 2 *Ориентированный граф (сокращённо орграф) G — это упорядоченная пара $G = (V, A)$, где V — непустое множество вершин или узлов, и A — множество (упорядоченных) пар различных вершин, называемых дугами или ориентированными рёбрами.*

Определение 3 *Инвариант графа в теории графов — некоторое обычно числовое значение или упорядоченный набор значений, характеризующее структуру графа $G = \langle A, V \rangle$ и не зависящее от способа обозначения вершин или графического изображения графа.*

Определения пути, цикла, цепи и связанные с ними:

Определение 4 *Пусть G — неориентированный граф. Путём в G называется такая конечная или бесконечная последовательность рёбер и вершин*

$$S = (..., a_0, E_0, a_1, E_1, ..., E_{n-1}, a_n, ...),$$

что каждые два соседних ребра E_{i-1} и E_i имеют общую вершину a_i. Таким образом, можно написать

$$..., E_0 = (a_0, a_1), E_1 = (a_1, a_2), ..., E_n = (a_n, a_{n+1}), ...$$

Отметим, что одно и тоже ребро может встречаться в пути несколько раз. Если нет рёбер, предшествующих E_0, то a_0 называется начальной вершиной, а если нет рёбер, следующих за $E_{(n-1)}$, то a_n называется конечной вершиной. Любая вершина, принадлежащая двум соседним рёбрам, называется внутренней. Так как рёбра и вершины в пути могут повторяться, внутренняя вершина может оказаться начальной или конечной вершиной. Если начальная и конечная вершины совпадают, путь называется циклическим. Путь называется цепью, а циклический путь — циклом, если каждое его ребро встречается не более одного раза (вершины могут повторяться). Нециклическая цепь называется простой цепью, если в ней никакая вершина не повторяется. Цикл с концом a_0 называется простым циклом, если a_0 не является в нём промежуточной вершиной и никакие другие вершины не повторяются.

Определение 5 *Связаный граф — граф, между любой парой вершин которого существует как минимум один путь.*

Определение 6 *Компонента связности графа G — максимальный связный подграф графа G.*

Матрица смежности — это один из способов представления графа:

Определение 7 *Матрицей смежности $A = ||\alpha_{i,j}||$ графа $G = (V, E)$ называется матрица $A_{[V \times V]}$, в которой $\alpha_{i,j}$ — количество рёбер, соединяющих вершины v_i и v_j, причём при $i = j$ каждую петлю учитываем дважды, если граф не является ориентированным, и один раз, если граф ориентирован.*

Определение 8 *Кликой неориентированного графа называется подмножество его вершин, любые две из которых соединены ребром.*

Максимальная клика — это клика, которая не может быть расширена путём включения дополнительных смежных вершин, то есть нет клики большего размера, включающей все вершины данной клики.

Определение 9 *Если* v_1, v_2 *— вершины, а* $e = (v_1, v_2)$ *— соединяющее их ребро, то говорят, что вершины* v_1, v_2 *инцидентны ребру* e*.*

Определение 10 *Степень вершины в теории графов — количество рёбер графа* G*, инцидентных вершине* x*. Обозначается* $deg(x)$*.*

1.2 Примеры инвариантов

Простейшие инварианты — это количество вершин и ребёр в графе. К инвариантам графа также относятся:

- Диаметр графа $diam(G)$ — длина кратчайшего пути (расстояние) между парой наиболее удаленных вершин.
- Индекс Винера — величина $w = \sum_{\forall i,j} d(v_i, v_j)$, где $d(v_i, v_j)$ — минимальное расстояние между вершинами v_i и v_j.
- Индекс Рандича — величина $r = \sum_{\forall i,j} \frac{1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}$.
- Минимальное число вершин, которое необходимо удалить для получения несвязного графа.
- Минимальное число ребер, которое необходимо удалить для получения несвязного графа.
- Обхват графа — число ребер в составе минимального цикла.
- Определитель матрицы смежности.
- Плотность графа $\varphi(G)$ — число вершин максимальной по включению клики.
- Упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор степеней вершин $s(G) = (d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ — при использовании переборных алгоритмов определения изоморфизма графов в качестве предположительно-изоморфных пар вершин выбираются вершины с совпадающими степенями, что способствует снижению трудоемкость

перебора. Использование данного инварианта для k-однородных графов не приводит к снижению вычислительной сложность перебора, так как степени всех вершин подобного графа совпадают: $s(G) = (k, k, \ldots, k)$.

◇ Упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор собственных чисел матрицы смежности графа (спектр графа). Сама по себе матрица смежности не является инвариантом, так как при смене нумерации вершин она претерпевает перестановку строк и столбцов.

◇ Число вершин $n(G) = |A|$ и число дуг/ребер $m(G) = |V|$.

◇ Число компонент связности графа $\kappa(G)$.

◇ Число Хардвигера $\eta(G)$.

◇ Характеристический многочлен матрицы смежности.

◇ Хроматическое число $\chi(G)$ — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа G так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Глава 2

Полугруппы и полурешетки

Определение 11 *Бинарная опрация* $*$ *на множестве* S *— это функция*

$$f : S^2 \to S.$$

Значение бинарной операции для $x, y \in S$ *обозначают* $x * y$.

Определение 12 *Пусть* $*$ *— бинарная операция определённая на множестве* S*, а* $x, y, z \in S$ *— произвольные элементы множества* S*. Тогда если выполняется равенсто*

$$x * y = y * x,$$

то операция $*$ *называется коммутативной. Если выполняется*

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

то операция $*$ *называется ассоциативной. Если выполняется*

$$x * x = x,$$

то операция $*$ *называется идемпотентной.*

Определение 13 *Полугруппа — множество с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией* $(S, *)$.

Определение 14 *Полурешетка — это полургуппа, бинарная операция которой коммутативна и идемпотентна.*

Для полрешетки можно определить частичный порядок

$$x \leq y \Leftrightarrow x * y = x$$

.