W.Ogryczak
**Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka**
**Wykład 11/12: Techniki generacji rozwiązań wyrównująco efektywnych**

Rozważamy problem decyzji w warunkach ryzyka wyrażony w postaci problemu optymalizacji wielokryterialnej:

$$\max \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{1}$$

gdzie wektor ocen $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ w problemie wielokryterialnym (1) reprezentuje wynik decyzji w postaci loterii o $m$ jednakowo prawdopodobnych ($p = \frac{1}{m}$) losach $y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Rozwiązania efektywne zadania wielokryterialnego można wyznaczać rozwiązując skalaryzacje zadania wielokryterialnego

$$\max \{s(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{2}$$

z funkcją skalaryzującą $s : R^m \rightarrow R$ definiującą relację preferencji $\succeq_s$

$$\mathbf{y}' \succeq_s \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad s(\mathbf{y}') \geq s(\mathbf{y}'') \tag{3}$$

spełniającą warunek ścisłej monotoniczności. Jeżeli relacja $\succeq_s$ spełnia ponadto warunek anonimowości, to generowane przez tę skalaryzację rozwiązanie efektywne jest również symetrycznie efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego. Dla anonimowości relacji $\succeq_s$ potrzeba i wystarcza, że funkcja skalaryzująca $s$ jest symetryczna, tzn.

$$s(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \ldots, y_{\tau(m)}) = s(y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{4}$$

dla dowolnej permutacji $\tau$ zbioru $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Warunek ten spełnia w szczególności skalaryzacja polegająca na maksymalizacji sumy wszystkich funkcji oceny $f_i(\mathbf{x})$.

Jeżeli relacja $\succeq_s$ spełnia ponadto aksjomat przesunięć wyrównujących, to generowane przez skalaryzację rozwiązanie efektywne jest również wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego. Do tego wystarcza aby symetryczna funkcja skalaryzująca była również ściśle wklęsła.

**Twierdzenie 1** *Dowolna ściśle wklęsła symetryczna funkcja $s : R^m \rightarrow R$ spełnia warunek*

$$y_{i'} > y_{i''} \quad \Rightarrow \quad s(\mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}) > s(\mathbf{y}) \quad \textit{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''} \tag{5}$$

**Dowód.** Niech $y_{i'} > y_{i''}$. Zdefiniujmy wektory $\mathbf{y}^\varepsilon = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$ i $\mathbf{y}^s = \mathbf{y} - (y_{i'} - y_{i''})\mathbf{e}_{i'} + (y_{i'} - y_{i''})\mathbf{e}_{i''}$. Zauważmy, że $\mathbf{y}^\varepsilon = \lambda \mathbf{y}^s + (1 - \lambda)\mathbf{y}$, gdzie $\lambda = \varepsilon/(y_{i'} - y_{i''})$, czyli $0 < \lambda < 1$ dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$. Funkcja $s(\mathbf{y})$ jest ściśle wklęsła i symetryczna. Stąd

$$s(\mathbf{y}^\varepsilon) > \lambda s(\mathbf{y}^s) + (1 - \lambda)s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{y}) \quad \text{dla } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$$

co kończy dowód. ■

Aksjomatu przesunięć wyrównujących nie spełnia skalaryzacja, polegająca na minimalizacji sumy wszystkich ocen $f_i(\mathbf{x})$, ani skalaryzacje minimaksowe. Istnieje jednak możliwość spełnienia aksjomatu przesunięć wyrównujących przez relacje preferencji tych zadań z ocenami odpowiednio skalowanymi za pomocą funkcji wklęsłych. Prawdziwe są następujące stwierdzenia.

**Wniosek 1** *Dla dowolnej ściśle wklęsłej, rosnącej funkcji $s : R \to R$, relacja preferencji definiowana przez zadanie*

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} s(f_i(\mathbf{x})) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{6}$$

*jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących.*

Oznacza to, że wprawdzie spełnienia aksjomatu przesunięć wyrównujących nie gwarantuje maksymalizacja wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$, ale spełnia ten aksjomat maksymalizacja oczekiwanej użyteczności $\mathbb{E}[u(Y)] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u(y_i)$ o ile funkcja użyteczności $u$ jest ściśle rosnąca i wklęsła.

**Wniosek 2** *Jeżeli $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{a}$ dla każdego $\mathbf{x} \in Q$, to rozwiązanie optymalne zadania najmniejszych kwadratów*

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} (a - f_i(\mathbf{x}))^2 \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{7}$$

*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

**Twierdzenie 2** *Dla dowolnej ściśle wklęsłej, rosnącej funkcji $s : R \to R$ relacja preferencji definiowana przez zadanie*

$$\operatorname{lexmax} \{(\min_{i=1,\dots,m} s(f_i(\mathbf{x})), \sum_{i=1}^{m} s(f_i(\mathbf{x}))) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{8}$$

*jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących.*

**Dowód.** Zwrotność, przechodniość, ścisła monotoniczność i anonimowość relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację (8) wynika bezpośrednio z odpowiednich własności relacji preferencji definiowanej przez skalaryzację maksiminową i faktu, że funkcja $s$ jest ściśle rosnąca. Pozostaje zatem udowodnić spełnienie aksjomatu przesunięć wyrównujących. Niech $y_{i'} > y_{i''}$. Zdefiniujmy wektor $\mathbf{y}^\varepsilon = \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''}$ Zauważmy, że dla $0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''}$

$$\min_{i=1,\dots,m} s(y_i^\varepsilon) \geq \min_{i=1,\dots,m} s(y_i) \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} s(y_i^\varepsilon) > \sum_{i=1}^{m} s(y_i)$$

Stąd

$$\left(\max_{i=1,\dots,m} s(y_i^\varepsilon), \sum_{i=1}^{m} s(y_i^\varepsilon)\right) >_{lex} \left(\max_{i=1,\dots,m} s(y_i), \sum_{i=1}^{m} s(y_i)\right)$$

Zatem relacja preferencji definiowana przez zadanie (8) spełnia warunek przesunięć wyrównujących, co kończy dowód. ∎

Aksjomat przesunięć wyrównujących spełnia relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną maksyminimalizację:

$$\operatorname{lexmax} \{(\theta_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \theta_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \dots, \theta_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \; : \; \mathbf{x} \in Q\} \tag{9}$$

**Twierdzenie 3** *Relacja preferencji definiowana przez leksykograficzną maksyminimalizację (9) jest zwrotna, przechodnia, ściśle monotoniczna, anonimowa i spełnia aksjomat przesunięć wyrównujących.*

**Dowód.** Relacja preferencji odpowiadająca leksykograficznej maksyminimalizacji (9)

$$\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(\mathbf{y}') \geq_{lex} \Theta(\mathbf{y}'')$$

spełnia warunki zwrotności, przechodniości i ścisłej monotoniczności. Z własności operatora porządkującego $\Theta$ wynika też natychmiast anonimowość tej relacji.

Ponadto

$$\Theta(\mathbf{y}') \geq_{lex} \Theta(\mathbf{y}'') \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \geq_{lex} \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$$

Zatem, z własności operatora $\bar{\Theta}$ wynika też spełnienie aksjomatu przesunięć wyrównujących. ■

**Wniosek 3** *Rozwiązanie optymalne leksykograficznego zadania maksiminowego (9) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

Zauważmy, że zależność

$$\mathbf{y}' \succeq_w \mathbf{y}'' \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \geqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$$

może być wyrażona w terminach zadania z wektorową funkcją skumulowanych uporządkowanych ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$

$$\max \{\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \;:\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{10}$$

**Wniosek 4** *Rozwiązanie dopuszczalne $\mathbf{x} \in Q$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1) wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem efektywnym problemu wielokryterialnego (10).*

Zauważmy, że poszczególne współrzędne skumulowanego uporządkowanego wektora ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ mogą być zapisane w postaci wklęsłych, kawałkami liniowych funkcji wektora $\mathbf{y}$

$$\bar{\theta}_k(\mathbf{y}) = \min_{\tau \in \Pi} \left( \sum_{i=1}^{k} y_{\tau(i)} \right)$$

gdzie $\Pi$ jest zbiorem wszystkich permutacji $\tau$ zbioru indeksów $I$. Tym samym, w przypadku zadań WPL odpowiedni problem (10) może być wyrażony w postaci wielokryterialnego zadania programowania liniowego (z dużą liczbą dodatkowych nierówności liniowych)

$$\max\ (z_1, z_2, \ldots, z_m) \tag{11}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{12}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{13}$$

$$z_k \leq \sum_{i=1}^{k} y_{\tau(i)} \quad \text{dla } \tau \in \Pi;\ k = 1, 2, \ldots, m \tag{14}$$

Wynika z tego, że w przypadku zadań WPL zbiór rozwiązań wyrównująco efektywnych jest spójnym podzbiorem zbioru wszystkich rozwiązań efektywnych.

Dla celów obliczeniowych istnieje możliwość wyrażenia zadania (10) w postaci zadania programowania liniowego o liczbie ograniczeń rzędu $m^2$.

Przypomnijmy, że poszczególne uporządkowane oceny mogą być wyrażone z użyciem zmiennych binarnych. Mianowicie:

$$\begin{aligned} \theta_k(\mathbf{y}) \quad &= \quad \max v_k \\ \text{p.w.} \quad & v_k - y_i \le M z_{ki},\ z_{ki} \in \{0,1\} \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,m, \\ & \sum_{i=1}^{m} z_{ki} \le k-1 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie $M$ jest dostatecznie dużą stałą.

Optymalizacyjny wzór (15) na $\theta_k(\mathbf{y})$ może być łatwo uogólniony dla $\bar{\theta}_k(\mathbf{y})$. Mianowicie, dla dowolnego $k = 1,2,\ldots,m$ prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_k(\mathbf{y}) \quad &= \quad \max\ k v_k - \sum_{i=1}^{m} d_{ki} \\ \text{p.w.} \quad & v_k - y_i \le d_{ki},\ d_{ki} \ge 0 \qquad \text{dla } i = 1,2,\ldots,m \\ & d_{ki} \le M z_{ki},\ z_{ki} \in \{0,1\} \qquad \text{dla } i = 1,2,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} z_{ki} \le k-1 \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie $M$ jest dostatecznie dużą stałą. Co więcej, w tym przypadku optymalizacyjny wzór może być drastycznie uproszczony przez pominięcie zmiennych binarnych. Precyzuje to następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4** *Poszczególne współrzędne skumulowanego uporządkowanego wektora ocen $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ mogą być wyrażone jako wartości optymalne skalarnych zadań optymalizacji*

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_k(\mathbf{y}) \quad &= \quad \max\ k v_k - \sum_{i=1}^{m} d_{ki} \\ \textit{p.w.} \quad & v_k - y_i \le d_{ki},\ d_{ki} \ge 0 \quad \textit{dla } i = 1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{17}$$

**Dowód.** Rozpatrzmy $(v_k, d_{k1}, \ldots, d_{km})$ będący takim rozwiązaniem optymalnym (17), że liczba dodatnich współrzędnych $d_i$ jest minimalna. Niech $I_+ = \{i \ :\ d_{ki} > 0\}$. Zdefiniujmy $z_{ki} = 1$ dla $i \in I_+$ i $z_{ki} = 0$ dla $i \notin I_+$. Jeżeli $\sum_{i=1}^{m} z_{ki} < k-1$, to otrzymujemy rozwiązanie problemu (16). W przeciwnym przypadku, wprowadzając $\tilde{v}_k = v_k - \Delta$, $\tilde{d}_{ki} = d_{ki} - \Delta$ dla $i \in I_+$, $\tilde{d}_{ki} = d_{ki}$ dla $i \notin I_+$ i $\Delta = \min_{i \in I_+} d_{ki}$, mamy $k\tilde{v}_k - \sum_{i=1}^{m} \tilde{d}_{ki} \ge k v_k - \sum_{i=1}^{m} d_{ki}$. Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie optymalne (17) z liczbą dodatnich współrzędnych $d_{ki}$ mniejszą niż $|I_+|$, co kończy dowód zależności (17). ■

Z twierdzenia 4 wynika możliwość wyrażenia poszcególnych funkcji kryterialnych w problemie (refoswkpm) w postaci

$$\bar{\theta}_k(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \max \{k v_k - \sum_{i=1}^{m} (v_k - f_i(\mathbf{x}))_+ \ :\ \mathbf{x} \in Q\ \}$$

gdzie $(.)_+$ oznacza część nieujemną liczby, a $v_k$ jest pomocniczą zmienną nieograniczoną co do znaku. Korzystając z (17) cały wielokryterialny problem (10) może być wyrażony w postaci wielokryterialnego zadania programowania liniowego

$$\max\ (v_1 - \sum_{i=1}^{m}\ d_{1i},\ 2v_2 - \sum_{i=1}^{m}\ d_{2i}, \ldots, mv_m - \sum_{i=1}^{m}\ d_{mi}) \tag{18}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{19}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{20}$$

$$v_k - y_i \leq d_{ki},\ d_{ki} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, m \tag{21}$$

Dla lepszego zrozumienia (łatwiejszej interpretacji) problem wielokryterialny (10) można rozpatrywać w równoważnej postaci

$$\max\ \{(\mu_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \mu_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \ldots, \mu_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{22}$$

gdzie poszczególne oceny $\mu_k(\mathbf{y}) = \bar{\theta}_k(\mathbf{y})/k$ wyrażają częściowe średnie początkowych $k$ współrzędnych uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{y})$. W szczególności, $\mu_1(\mathbf{y}) = \theta_1(\mathbf{y})$ reprezentuje najmniejszą współrzędną wektora $\mathbf{y}$, a $\mu_m(\mathbf{y}) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i = \mu(\mathbf{y})$ reprezentuje wartość średnią. Przy takim sformułowaniu ocen odpowiedni problem PL przyjmuje postać

$$\max\ (v_1 - \sum_{i=1}^{m}\ d_{1i},\ v_2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\ d_{2i}, \ldots, v_m - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ d_{mi}) \tag{23}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{24}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{25}$$

$$v_k - y_i \leq d_{ki},\ d_{ki} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, m \tag{26}$$

Jako najprostsze techniki generacji można rozpatrywać zadania jednokryterialne z wybraną pojedynczą funkcją celu w problemie (10) lub odpowiednio (22).

$$\max\ \{\mu_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{27}$$

Zgodnie z (17) dla dowolnego $1 \leq k \leq m$ jest to zadanie postaci

$$\max\ (v_k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\ d_{ki})$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$v_k - y_i \leq d_{ki},\ d_{ki} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m$$

Z własności jednokryterialnej optymalizacji dla zadań wielokryterialnych (słaba monotoniczność relacji preferencji) wynika następujący wniosek.

**Wniosek 5** *Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (27) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, rozwiązanie optymalne zadania (27) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

Szczególnym przypadkiem zadania (27) jest skalaryzacja maksyminowa odpowiadająca $k = 1$

$$\max \{ \min_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{28}$$

Odpowiada ona klasycznemu podejściu pesymistycznemu.

Podobnie dla $k = m$ otrzymujemy skalaryzację polegająca na maksymalizacji średniej wszystkich oryginalnych funkcji oceny

$$\max \{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{29}$$

Odpowiada ona maksymalizacji wartości oczekiwanej i jest najbardziej optymistycznym podejściem w ramach klasy preferencji zakładających awersję do ryzyka. Zgodnie z wnioskiem 5, zbiór rozwiązań optymalnych zadania (29) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, rozwiązanie optymalne zadania (29) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).

**Techniki dwukryterialne — modele typu Markowitza**

W przypadku problemów dwukryterialnych ($m = 2$), zbiór rozwiązań wyrównująco efektywnych pokrywa się ze zbiorem rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania z funkcjami oceny określonymi odpowiednio jako maksimum oryginalnych ocen i suma oryginalnych ocen. W ogólnym przypadkuprawdziwe są następujące wnioski.

**Wniosek 6** *Zbiór rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania*

$$\max \{ ( \min_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) ) \ : \ \mathbf{x} \in Q \} \tag{30}$$

*zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1), a jeżeli rozwiązanie efektywne $\mathbf{x}^0$ zadania (30) spełnia dla wszystkich $\mathbf{x} \in Q$ warunek*

$$\begin{aligned} ( \min_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}) = \min_{i=1,\ldots,m} f_i(\mathbf{x}^0) \quad i \quad \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x}^0)) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) \end{aligned}$$

*to $\mathbf{x}^0$ jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

Dwukryterialny problem (30) może być rozpatrywany jako model typu Markowitza z miarą ryzyka $\varrho(\mathbf{y})$ zdefiniowaną jako maksymalne (dolne) odchylenie od średniej (Young, 1998)

$$\Delta(\mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,m} (\mu(\mathbf{y}) - y_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i - \min_{i=1,\ldots,m} y_i = \frac{1}{m} \bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \bar{\theta}_1(\mathbf{y}). \tag{31}$$

Odpowiedni model typu Markowitza przyjmuje postać

$$\max \{ [\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})), -\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))] \ : \ \mathbf{x} \in Q \}$$

Stosując algorytm linii krytycznej Markowitza mamy do czynienia z parametryczną maksymalizacją $\mu(\mathbf{y}) - \lambda\varrho(\mathbf{y})$, gdzie parametr $\lambda$ reprezentuje współczynnik awersji do ryzyka (wsp. wymiany ryzyka na zysk). Następujące twierdzenie pokazuje skuteczność takiego podejścia w przypadku ryzyka mierzone odchyleniem maksymalnym (31).

**Twierdzenie 5** *Dla dowolnego* $0 < \lambda < 1$*, rozwiązanie optymalne zadania*

$$\max \{\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{32}$$

*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania (1) lub jest wyrównująco zdominowane przez alternatywne rozwiązanie optymalne (32) o tych samych wartościach* $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ *i* $\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

**Dowód.** Niech $0 < \lambda < 1$ i $\mathbf{x}^0 \in Q$ maksymalizuje $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Zauważmy, że

$$\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \lambda\bar{\theta}_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{1-\lambda}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})). \tag{33}$$

Stąd, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym dwukryterialnego problemu (30). Zatem teza twierdzenia wynika z Wniosku 6. ■

**Wniosek 7** *Dla każdego* $0 < \lambda < 1$*, zbiór rozwiązań optymalnych zadania (32) zawiera wyrównująco efektywne rozwiązanie zadania wielokryterialnego (1), a jednoznaczne, w sensie uporządkowanych wektorów ocen* $\Theta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$*, rozwiązanie optymalne zadania (32) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

Maksymalne odchylenie jest bardzo pesymistyczną miarą ryzyka związanaą z analizą najgorszego przypadku. W analogiczny sposób zamiast najgorszego przypadku można rozpatrywać odpowiednie średnie częściowe, czyli średnie $k$ najgorszych wartości. Prowadzi to do modelu dwukryterialnego

$$\max \{[\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \mu_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))] \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{34}$$

gdzie $\mu_k(\mathbf{y}) = \bar{\theta}_k(\mathbf{y})/k$.

Problem (34), podobnie jak (30), używa dwóch wybranych funkcji oceny spośród $m$ funkcji problemu (10). Modele te mają więc podobne własności w sensie wyrównującej efektywności rozwiązań.

**Twierdzenie 6** *Rozwiązanie efektywne zadania (34) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania (1) lub jest wyrównująco zdominowane przez alternatywne rozwiązanie (34) o tych samych wartościach* $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ *i* $\mu_k(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.

Problem (34) może też być rozpatrywany jako model typu Markowitza z miarą ryzyka

$$\begin{aligned} \Delta_k(\mathbf{y}) &= \mu(\mathbf{y}) - \mu_k(\mathbf{y}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i - \max_{v_k \in \mathbb{R}}[v_k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}(y_i - v_k)_+] \\ &= \min_{v_k \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}[(y_i - v_k)_+ + \frac{m-k}{k}(v_k - y_i)_+] \end{aligned}$$

Powyższe modele dwukryterialne używały tylko dwie wybrane funkcje oceny $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ z zadania wielokryterialnego (10). Istnieją miary ryzyka biorące pod uwagę wszystkie wielkości $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$. Konno i Yamazaki (1991) analizowali model typu Markowitza z miarą ryzyka określoną jako odchylenie przeciętne

$$\delta(\mathbf{y}) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m} |\mu(\mathbf{y}) - y_i| = \frac{1}{m}\sum_{i: y_i < \mu(\mathbf{y})} [\mu(\mathbf{y}) - y_i] \tag{35}$$

Odchylenie przeciętne może być wyrażone w terminach $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ jako:

$$\delta(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i:\theta_i(\mathbf{y})<\mu(\mathbf{y})} [\mu(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{y})] = \frac{1}{m} \max_{i=1,\dots,m-1} [\frac{i}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \bar{\theta}_i(\mathbf{y})]. \qquad (36)$$

**Twierdzenie 7** *Dla dowolnego $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$, rozwiązanie optymalne zadania*

$$\max \{\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\delta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \qquad (37)$$

*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania (1) lub jest wyrównująco zdominowane przez alternatywne rozwiązanie optymalne (37) o tych samych wartościach $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ i $\delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$.*

**Dowód.** Niech $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$ i $\mathbf{x}^0 \in Q$ maksymalizuje $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Zauważmy, że z (36) wynika

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda\delta(\mathbf{f}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{\lambda}{m} \min_{i=1,\dots,m-1} [\bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \frac{i}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}))] \\ &= \min_{i=1,\dots,m-1} [\frac{\lambda}{m}\bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{m-i\lambda}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}))]. \end{aligned}$$

Zatem, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym maksyminowej skalaryzacji zadania wielokryterialnego:

$$\max\{(g_1(\mathbf{f}(\mathbf{x})), g_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \dots, g_{m-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \qquad (38)$$

z $m-1$ funkcjami $g_i$ określonymi jako:

$$g_i(\mathbf{y}) = \frac{\lambda}{m}\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) + \frac{m-i\lambda}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m-1. \qquad (39)$$

Ponadto, oba współczynniki w (39) są dodatnie i dlatego każde rozwiązanie efektywne zadania (38) jest również rozwiązaniem efektywnym problemu (10).

Przypuśćmy, że istnieje rozwiązanie $\mathbf{x}' \in Q$, które dominuje wyrównująco $\mathbf{x}^0$. Wtedy $\bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) \geq \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$ oraz, dzięki dodatnim współczynnikom w (39), $g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) \geq g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$ dla $i = 1, 2, \dots, m-1$. Z drugiej strony, $\min_{i=1,\dots,m-1} g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) \leq \min_{i=1,\dots,m-1} g_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Stąd, istnieje $i_0$ takie, że $g_{i_0}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = g_{i_0}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$ i dlatego $\bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$. Zatem, $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \mu(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$ i $\delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$, co kończy dowód. ■

Yitzhaki (1982) analizował model typu Markowitza z miarą ryzyka określoną jako średnia (bezwzględna) różnica Giniego

$$G(\mathbf{y}) = \frac{1}{2m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |y_i - y_j| = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{i} (\theta_{i+1}(\mathbf{y}) - \theta_j(\mathbf{y})) \qquad (40)$$

Średnia różnica Giniego może być wyrażona w terminach $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ jako:

$$G(\mathbf{y}) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} [i\bar{\theta}_{i+1}(\mathbf{y}) - (i+1)\bar{\theta}_i(\mathbf{y})] = \frac{m-1}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \frac{2}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\theta}_i(\mathbf{y}). \qquad (41)$$

**Twierdzenie 8** *Dla dowolnego $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$, rozwiązanie optymalne zadania*

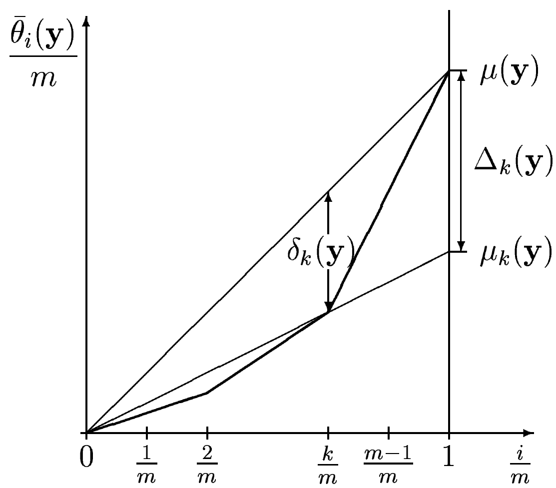
$$\max \{\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda G(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{42}$$

*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania (1).*

**Dowód.** Niech $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$ i $\mathbf{x}^0 \in Q$ maksymalizuje $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda G(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Zauważmy, że z (41) wynika

$$\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda G(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{2\lambda}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{m - \lambda(m-1)}{m^2} \bar{\theta}_m(\mathbf{f}(\mathbf{x})). \tag{43}$$

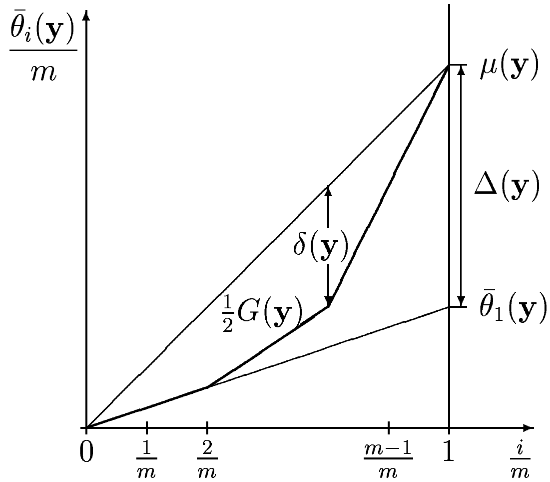
Stąd, w przypadku $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$, funkcja $\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda G(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ jest liniową kombinacją o dodatnich współczynnikach funkcji $\bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zatem, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym problemu (10) i, co za tym idzie, wyrównująco efektywnym rozwiązaniem oryginalnego zadania (1). ∎




Rysunek 1: Bezwzględna krzywa Lorenza i średnie częściowe

Wektor $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ może być być przedstawiany graficznie w postaci (bezwzględnej) krzywej Lorenza, czyli łamanej łączącej punkt (0,0) i punkty $(i/m, \bar{\theta}_i(\mathbf{y})/m)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. W szczególności jako ostatni punkt (dla $i = m$) otrzymujemy $(m/m, \bar{\theta}_m(\mathbf{y})/m) = (1, \mu(\mathbf{y}))$. Zauważmy, że w terminach bezwzględnych krzywych Lorenza wektory jednakowych ocen (loterie bezryzykowne) są reprezentowane przez różne proste ukośne łączące punkt $(0, 0)$ z $(1, \mu(\mathbf{y}))$. Zatem obszar pomiędzy krzywą $(i/m, \bar{\theta}_i(\mathbf{y})/m)$ a jej cięciwą obrazuje rozbieżność współrzędnych (i co za tym idzie ryzyko loterii) $\mathbf{y}$ w porównaniu do pewnego wyniku $\mu(\mathbf{y})$. Będzie on nazywany *obszarem ryzyka*. Zarówno rozmiar jak i kształt obszaru ryzyka jest istotny dla pełnej ilustracji ryzyka. Miary ryzyka w rozpatrywanych tu modelach typu Markowitza stanowią pewne charakterystyki rozmiaru obszaru ryzyka (por. rys. 1 i 2).

Zauważmy, że pionowa średnica obszaru ryzyka w punkcie $\frac{k}{m}$ wyraża się wzorem $\delta_k(\mathbf{y}) = \frac{k}{m}\mu(\mathbf{y}) - \frac{1}{m}\bar{\theta}_k(\mathbf{y}) = \frac{k}{m}(\mu(\mathbf{y}) - \mu_k(\mathbf{y})) = \frac{k}{m}\Delta_k(\mathbf{y})$. Zatem, miara $\Delta_k(\mathbf{y})$ stanowi rzut pionowej średnicy $\delta_k(\mathbf{y})$ na pionową prostą w punkcie $i = m$. Dla odchylenia przeciętnego, z zależności (36), otrzymujemy $\delta(\mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,m} \delta_i(\mathbf{y})$. To znaczy, odchylenie przeciętne $\delta(\mathbf{y})$ jest maksymalną pionową średnicą obszaru ryzyka. Z kolei, na podstawie (31), otrzymujemy $\Delta(\mathbf{y}) = m\delta_1(\mathbf{y})$. Zatem, odchylenie maksymalne $\Delta(\mathbf{y})$ jest rzutem $\delta_1(\mathbf{y})$ na pionową prostą w punkcie $i = m$ lub




Rysunek 2: Bezwzględna krzywa Lorenza i miary ryzyka

odpowiednio największą pionową średnicą trójkątnej obwiedni obszaru ryzyka. Dalej, zgodnie z (41),

$$G(\mathbf{y}) = \frac{m(m-1)}{m^3}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i(\mathbf{y})$$

czyli średnia różnica Giniego wyraża podwojone pole obszaru ryzyka. Zauważmy, że odchylenia przeciętne i maksymalne wyrażają podwojone pola trójkątów stanowiących odpowiednio wewnętrzną i zewnętrzną aproksymację obszaru ryzyka. Wynika z tego nierówność

$$\delta(\mathbf{y}) \leq G(\mathbf{y}) \leq \Delta(\mathbf{y})$$

Dzięki temu, że średnia różnica Giniego mierzy pole obszaru ryzyka, dla tej miary ryzyka otrzymujemy najlepsze rezultaty w sensie wyrównującej efektywności rozwiązań odpowiedniego modelu typu Markowitza (dla $0 < \lambda \leq 1$ każde rozwiązanie optymalne jest wyrównująco efektywne). Ta własność średniej różnicy Giniego pozwala wykorzystywać ją do dodatkowej regularyzacji innych miar ryzyka. W szczególności prawdziwy jest następujący wniosek.

**Wniosek 8** *Dla dowolnych $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$, rozwiązanie optymalne zadania*

$$\max\,\{\mu(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda_1 G(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - \lambda_2\Delta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{44}$$

*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania (1).*

**Porządkowa średnia ważona**

Stosując metodę ważenia ocen do zadania (10) otrzymujemy parametryczne zadanie postaci

$$\max\,\{\sum_{i=1}^{m} w_i\bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{45}$$

Zauważmy, że na mocy definicji operatora $\bar{\Theta}$ zadanie to jest równoważne zastosowaniu do wielokryterialnego problemu (1) operatora agregacji OWA z odpowiednio zmodyfikowanymi wagami. Zadanie (45) może być zapisane w postaci

$$\max\,\{\sum_{i=1}^{m} \bar{w}_i\theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\ :\ \mathbf{x} \in Q\} \tag{46}$$

gdzie $\bar{w}_i = \sum_{j=i}^{m} w_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Prawdziwe są następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 9** *Jeżeli wagi $w_i$ spełniają warunek*

$$w_1 > w_2 > \cdots > w_{m-1} > w_m > 0 \tag{47}$$

*to każde rozwiązanie optymalne odpowiedniego problemu OWA*

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\} \tag{48}$$

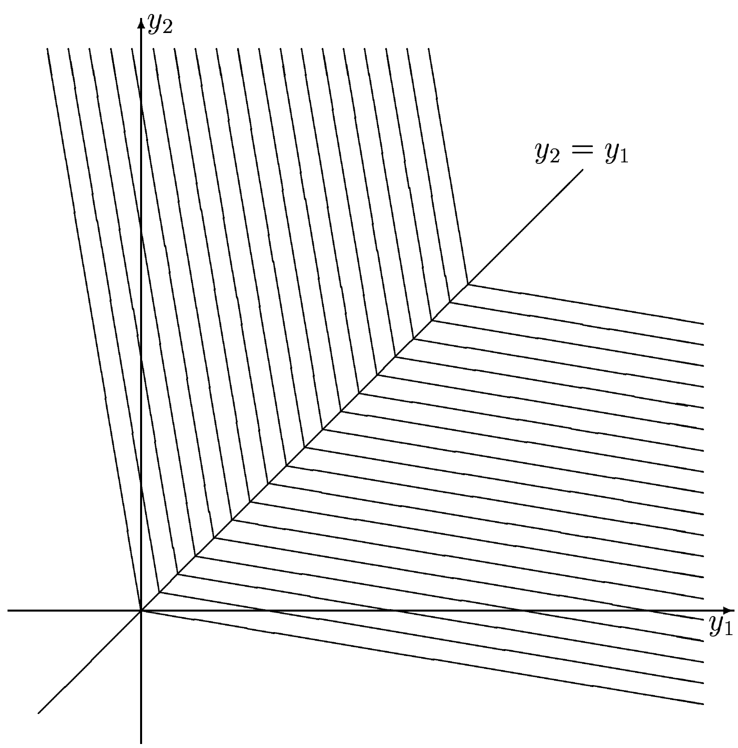
*jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem problemu wielokryterialnego (1).*

**Dowód.** Zadanie (48) z wagami $w_i$ można zapisać w postaci

$$\max \{\sum_{i=1}^{m} w_i' \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in Q\}$$

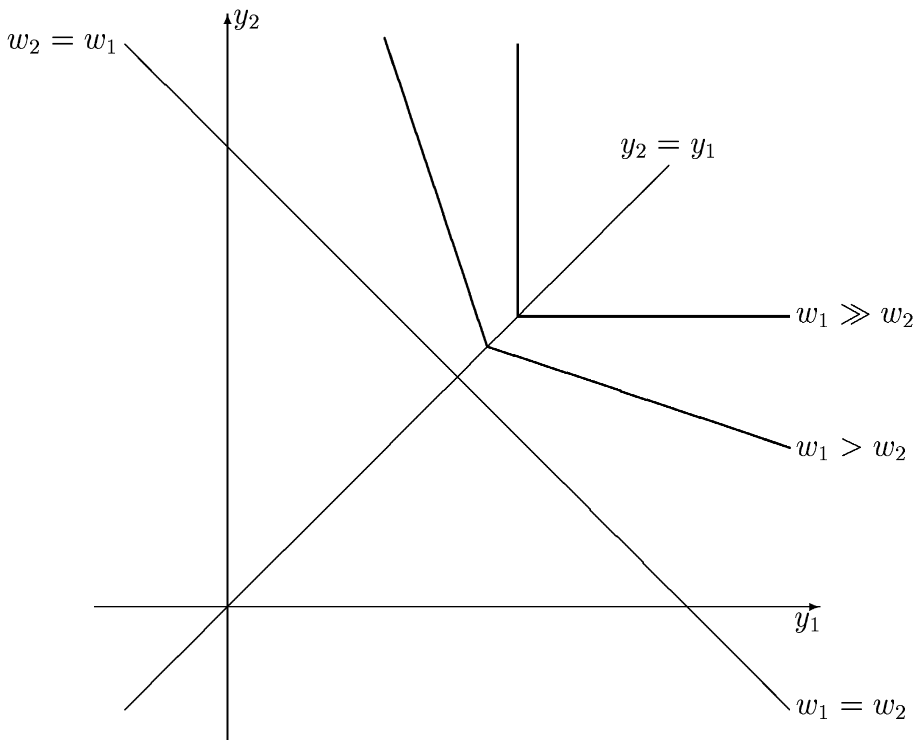
gdzie współczynniki $w_i'$ są określone jako $w_m' = w_m$ i $w_i' = w_i - w_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Jeżeli spełniony jest warunek (47), to $w_i' > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zatem, na mocy wniosku 4, rozwiązanie optymalne zadania (48) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1). ■




Rysunek 3: Przykładowe warstwice wyrównującej agregacji OWA ($w_1 \geq w_2$)

Zauważmy, że agregacja OWA z monotonicznymi wagami (47) jest symetryczną funkcją wklęsła ale nie ściśle wklęsłą (por. rys. 3 i 4). Tym niemniej, jej maksymalizacja definiuje relację spełniającą aksjomat przesunięć wyrównujących.




Rysunek 4: Kształty warstwic wyrównującej agregacji OWA

**Twierdzenie 10** *Dla każdego* $\mathbf{x}^0$ *wyrównująco efektywnego rozwiązania zadania WPL istnieją wagi* $w_1 > w_2 > \cdots > w_{m-1} > w_m > 0$ *takie, że* $\mathbf{x}^0$ *jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania OWA (48).*

**Dowód.** Na mocy wniosku 4, $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem efektywnym wielokryterialnego zadania programowania liniowego (11)–(14). Istnieją wtedy dodatnie wagi $w'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ takie, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (45). Zatem $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania OWA (48) z wagami $w_i = \sum_{j=i}^{m} w'_j$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. ∎

Zauważmy, że w przypadku $w_1 = 1$ i $w_2 = \ldots = w_m = 0$ stanowi podejście pesymistyczne (28). Ogólniej, przypadek $w_i = 1$ dla $i = 1, \ldots, k$ i $w_i = 0$ dla $i = k+1, \ldots, m$ reprezentuje jednokryterialny model maksymalizacji $k$-tej średniej częściowej (27). W przypadku $w_1 = w_2 = \ldots = w_m = 1$ problem maksymalizacji OWA (48) pokrywa się z maksymalizacją sumy ocen (29), czyli maksymalizacją wartości oczekiwanej. W przypadku gdy różnice między wagami dążą do nieskończonoći ($w_1 \gg w_2 \gg \cdots \gg w_m$) otrzymujemy leksykograficzną maksyminimalizację (9).

Rozpatrywane wcześniej parametryczne modele typu Markowitza mogą być również interpretowane w terminach agregacji OWA. W przypadku odchylenia maksymalnego $\Delta(\mathbf{y})$ (31), z równania (33) wynika agregacja OWA z wagami: $w_1 = \frac{1+(m-1)\lambda}{m}$ i $w_i = \frac{1-\lambda}{m}$ dla $i = 2, \ldots, m$. Stąd, dla współczynnika wymiany $0 < \lambda < 1$ wszystkie wagi są dodatnie ale $w_2 = w_3 = \cdots = w_m$, co powoduje, że nie wszystkie rozwiązania optymalne są wyrównująco efektywne. Dla średniej różnicy Giniego $G(\mathbf{y})$ (40), ze wzoru (43) agregację OWA z wagami $w_i = \frac{m+(m-2i+1)\lambda}{m^2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Zatem dla współczynnika wymiany $0 < \lambda < \frac{m}{m-1}$ wagi są dodatnie ściśle malejące (47), co gwarantuje, że każde rozwiązanie optymalne jest wyrównująco efektywne. Jednakże, $w_i - w_{i+1} = \frac{2\lambda}{m^2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$, co oznacza, że w tym modelu jest uwzględniany tylko stały krok przyrostu wag i dlatego nie wszystkie wyrównująco racjonalne preferencje mogą być modelowane.

Zauważmy, że w przypadku wag $w_i$ spełniających warunek (47), dla dowolnej permutacji $\tau$ zbioru $I$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \geq \sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(\mathbf{y})$$

Zatem zadanie wyznaczenia rozwiązania wyrównująco efektywnego za pomocą techniki OWA może być implementowane przez dodanie do ograniczeń zadania $m!$ nierówności liniowych, czyli w postaci zadania

$$\max\ z \tag{49}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{50}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{51}$$

$$z \leq \sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \quad \text{dla } \tau \in \Pi \tag{52}$$

gdzie $\Pi$ jest zbiorem wszystkich permutacji $\tau$ zbioru indeksów $I$. Dla zadań WPL odpowiednie zadania (49)–(52) są zadaniami programowania liniowego i wtedy odpowiedni problem dualny może być rozwiązywany za pomocą techniki generacji kolumn. W praktyce taki zapis zadania (45) jest użyteczny jedynie w przypadku niewielkiej liczby funkcji oceny.

Dla efektywnego modelu obliczeniowego można wykorzystać przedstawienie agregacji OWA (z monotonicznymi wagami (47)) w postaci maksymalizacji liniowej kombinacji skumulowanych uporządkowanych ocen (45) i przedstawienie tych ostatnich w postaci liniowej (17). W wyniku otrzymujemy

$$\max \sum_{k=1}^{m} w'_k (k v_k - \sum_{i=1}^{m} d_{ki}) \tag{53}$$

$$\text{pod warunkiem, że } \mathbf{x} \in Q \tag{54}$$

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{55}$$

$$v_k - y_i \leq d_{ki},\ d_{ki} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{56}$$

gdzie współczynniki $w'_k$ są określone jako $w'_m = w_m$ i $w'_k = w_k - w_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$. To zadanie ma tylko $m^2$ dodatkowych warunków liniowych.

Niestety technika agregacji OWA z malejącymi wagami nie stanowi — w ogólnym przypadku — zupełnej parametryzacji całego zbioru rozwiązań wyrównująco efektywnych. Wynika to ze specyfiki podejścia ważenia ocen do problemów wielokryterialnych. W przypadku wielokryterialnych problemów dyskretnych (jak problem lokalizacji) istnieją rozwiązania wyrównująco efektywne, które nie mogą być wygenerowane jako rozwiązania optymalne problemu (48) dla żadnego zbioru dodatnich wag. Pokażemy to na przykładzie skończonego zbioru trzech wektorów ocen

$$\mathbf{y}^1 = (5, 12), \quad \mathbf{y}^2 = (6, 9), \quad \mathbf{y}^3 = (7, 7)$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie trzy wektory ocen są wyrównująco niezdominowane. Wektor $\mathbf{y}^2$ nie jest jednak OWA optymalny dla żadnych dodatnich monotonicznych wag. Żeby wektor $\mathbf{y}^2$ był rozwiązaniem optymalnym problemu (48), współczynniki wagowe muszą spełniać nierówności: $w_1 \geq 3w_2$ i $2w_2 \geq w_1$, co nie jest możliwe przy $w_1 > w_2 > 0$. Faktycznie, jeżeli $2w_1 < 5w_2$, to wektor $\mathbf{y}^1$ jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (48). Jeżeli $2w_1 > 5w_2$, to wektor $\mathbf{y}^3$ jest jednoznacznym rozwiązaniem optymalnym problemu (48). W końcu, gdy $2w_1 = 5w_2$, wtedy oba wektory $\mathbf{y}^1$ i $\mathbf{y}^3$ są optymalne. Wektor $\mathbf{y}^2$ nigdy nie jest rozwiązaniem optymalnym problemu (48).

**Metoda punktu referencyjnego**

Zupełną parametryzację zbioru rozwiązań wyrównująco efektywnych można otrzymać stosując metody punktu referencyjnego do zadania (10), czyli

$$\text{lexmax}\,\{(\min_{i=1,\ldots,m}\; s_i(a_i, \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \sum_{i=1}^{m}\; s_i(a_i, \bar{\theta}_i(\mathbf{f}(\mathbf{x})))) :\; \mathbf{x} \in Q\} \tag{57}$$

gdzie: $\mathbf{a}$ stanowi wektor aspiracji dla skumulowanych uporządkowanych współrzędnych ocen, a $s_i$ są indywidualnymi funkcjami osiągnięcia ściśle rosnącymi względem drugiego argumentu i spełniającymi warunek

$$s_1(a_1, a_1) = s_2(a_2, a_2) = \cdots = s_m(a_m, a_m) \tag{58}$$

W szczególności mogą to być najprostsze funkcje

$$s_i(a_i, v_i) = \lambda_i(v_i - a_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m \tag{59}$$

lub

$$s_i(a_i, v_i) = \begin{cases} \beta\lambda_i(v_i - a_i), & \text{jeśli} \quad v_i \geq a_i \\ \lambda_i(v_i - a_i), & \text{jeśli} \quad v_i < a_i \end{cases} \tag{60}$$

gdzie $0 < \beta < 1$.

Bezpośrednio z własności metody punktu referencyjnego wynikają następujące wnioski.

**Wniosek 9** *Dla dowolnych funkcji $s_i(a_i, v_i)$ ściśle rosnących względem $y_i$ rozwiązanie optymalne zadania (57) jest wyrównująco efektywnym rozwiązaniem zadania wielokryterialnego (1).*

**Wniosek 10** *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}$ funkcje $s_i(a_i, v_i)$ są ściśle rosnące względem $y_i$ i spełniają warunek (58), to każde wyrównująco efektywne rozwiązanie $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1) jest rozwiązaniem optymalnym zadania (57) dla wektora aspiracji $\mathbf{a}^0 = \bar{\Theta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0))$.*

**Wniosek 11** *Jeżeli dla każdego wektora poziomów aspiracji $\mathbf{a}$ funkcje $s_i(a_i, v_i)$ są ściśle rosnące względem $y_i$ i spełniają warunek (58), to dla dowolnego wyrównująco efektywnego rozwiązania $\mathbf{x}^0$ zadania wielokryterialnego (1) istnieje wektor poziomów aspiracji $\mathbf{a}^0$ taki, że $\mathbf{x}^0$ jest rozwiązaniem optymalnym odpowiedniego zadania (57).*

Wyrażenie skumulowanych uporządkowanych ocen $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ w postaci optymalizacji liniowej (17) umożliwia efektywną implementację odpowiedniej metody punktu referencyjnego.