МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет информационных технологий

Кафедра параллельных вычислений

ОТЧЕТ

О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

«Параллельная реализация решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью MPI»

Студента 2 курса, 21211 группы

Петрова Сергея Евгеньевича

Направление 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника»

Преподаватель:

Антон Юрьевич Кудинов

Новосибирск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ

Ознакомиться с написанием параллельных программ при помощи MPI;

ЗАДАНИЕ

1. *Написать программу на языке C или C++, которая реализует итерационный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений вида* $Ax = b$ *в соответствии с выбранным вариантом. Здесь A – матрица размером N×N, x и b – векторы длины N. Тип элементов – double.*

2. *Программу распараллелить с помощью MPI с разрезанием матрицы A по строкам на близкие по размеру, возможно не одинаковые, части. Соседние строки матрицы должны располагаться в одном или в соседних MPI-процессах. Реализовать два варианта программы:*

    a. *Векторы x и b дублируются в каждом MPI-процессе,*

    b. *Векторы x и b разрезаются между MPI-процессами аналогично матрице A.*

    Уделить внимание тому, чтобы при запуске программы на различном числе MPI-процессов решалась одна и та же задача (исходные данные заполнялись одинаковым образом).

3. *Замерить время работы двух вариантов программы при использовании различного числа процессорных ядер: 1, 2, 4, 8, 16. Построить графики зависимости времени работы программы, ускорения и эффективности распараллеливания от числа используемых ядер. Исходные данные, параметры N и ε подобрать таким образом, чтобы решение задачи на одном ядре занимало не менее 30 секунд.*

4. *Выполнить профилирование двух вариантов программы с помощью MPE при использовании 16 ядер.*

5. *На основании полученных результатов сделать вывод о целесообразности использования первого или второго варианта программы.*

ВАРИАНТ ЗАДАНИЯ

Пусть есть система из N линейных алгебраических уравнений в виде $Ax = b$*, где A – матрица коэффициентов уравнений размером N×N, b – вектор правых частей размером N, x – вектор решений размером N.*

Решение системы уравнений итерационным методом состоит в выполнении следующих шагов:

1. *Задается* x^0 *– произвольное начальное приближение решения (вектор с произвольными начальными значениями);*
2. *Приближение многократно улучшается с использованием формулы вида* $x^{n+1} = f(x^n)$*, где функция f определяется используемым итерационным методом;*
3. *Процесс продолжается, пока не выполнится условие* $g(x^n) < \varepsilon$*, где функция g определяется используемым методом, а величина ε – требуемая точность;*

Метод простой итерации

В методе простой итерации преобразование решения на каждом шаге задается формулой: $x^{n+1} = x^n - \tau(Ax^n - b)$*, где τ – константа, параметр метода. Знак параметра* τ *зависит от задачи. Если с некоторым знаком решение начинает расходиться, то следует сменить его на противоположный.*

Критерий завершения счета $\frac{||Ax^n - b||_2}{||b||_2} < \varepsilon$*, где* $||u||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

Исходные данные

Элементы главной диагонали матрицы A равны 2, остальные равны 1;

Все элементы вектора b равны N+1. В этом случае решением системы будет вектор, элементы которого равны 1.0;

Начальные значения элементов вектора x можно взять равными 0;

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

Описание выполненной работы

1. *Написал 2 версии параллельной программы, которая реализует метод простой итерации;*
2. *Запустил 2 версии параллельной программы с одинаковыми параметрами ($N = 5000$, $\varepsilon = 10^{-7}$, $\tau = 10^{-5}$) на кластере НГУ при использовании 1, 2, 4, 8, 16 ядер;*
3. *Построил графики зависимости времени работы программы, ускорения и эффективности распараллеливания от числа ядер;*
4. *Выполнил профилирование двух вариантов программы с помощью MPE при использовании 16 ядер;*

Команды для компиляции и запуска

Команда для компиляции MPI программы

```
hpcuser265@clu:~> mpicc
--std=c99
-o mpi_slae_<version>
mpi_slae_<version>.c
-lm
```

Команда для компиляции MPI программы с использованием MPE

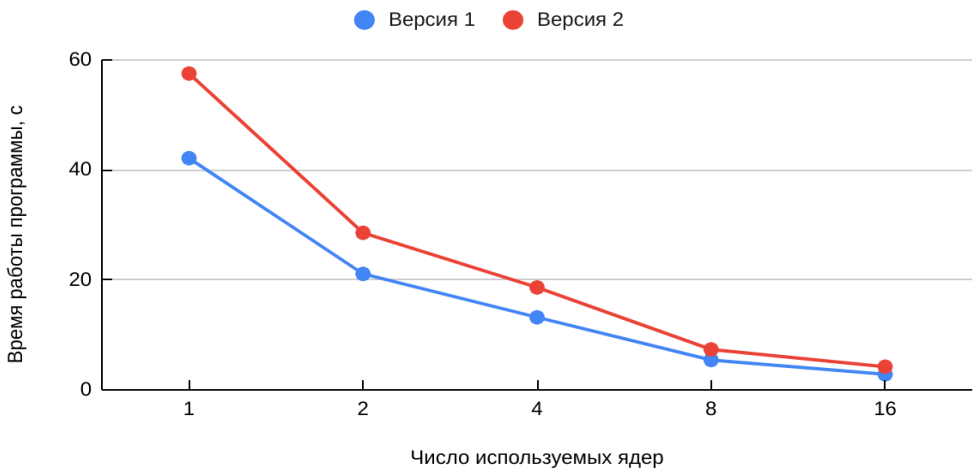
```
hpcuser265@clu:~> mpecc
-mpilog
--std=c99
-o mpe_slae_<version>
mpi_slae_<version>.c
-lm
```

Команда для постановки задачи, описанной в скрипте run.sh, в очередь на кластере

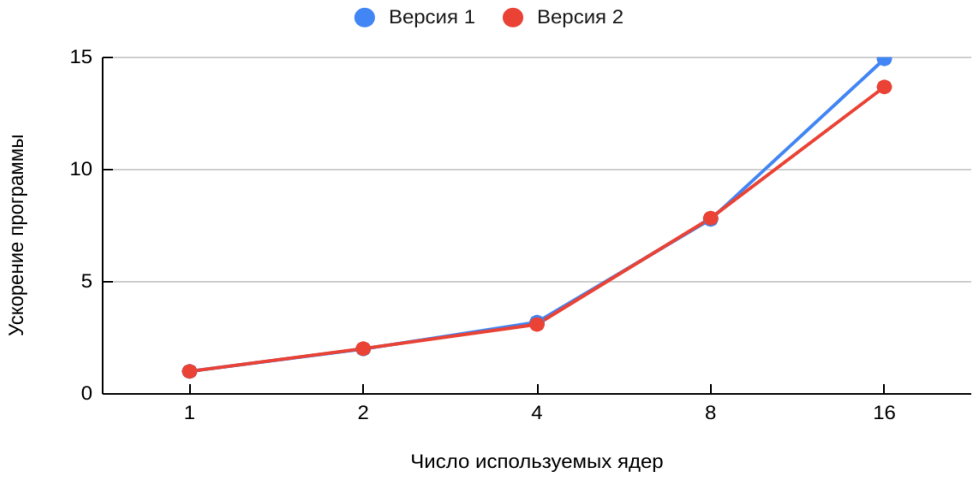
```
hpcuser265@clu:~> qsub run.sh
```

Результаты измерения

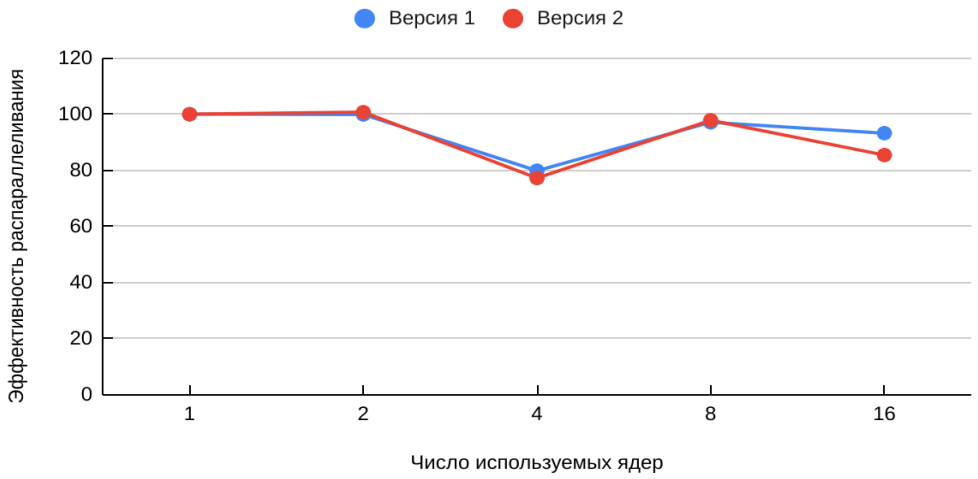
Зависимость времени работы программы от числа ядер



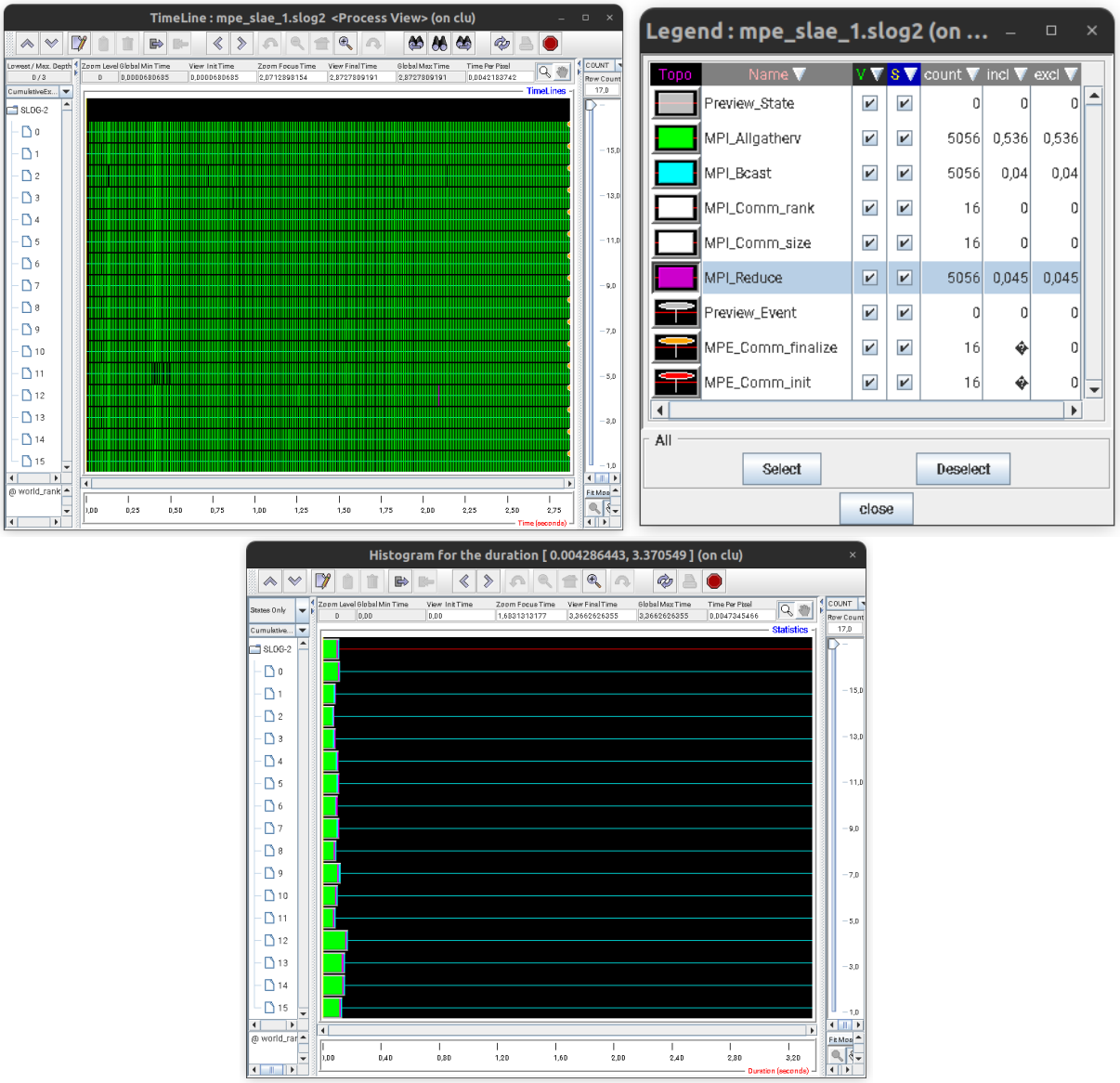
Зависимость ускорения программы от числа ядер



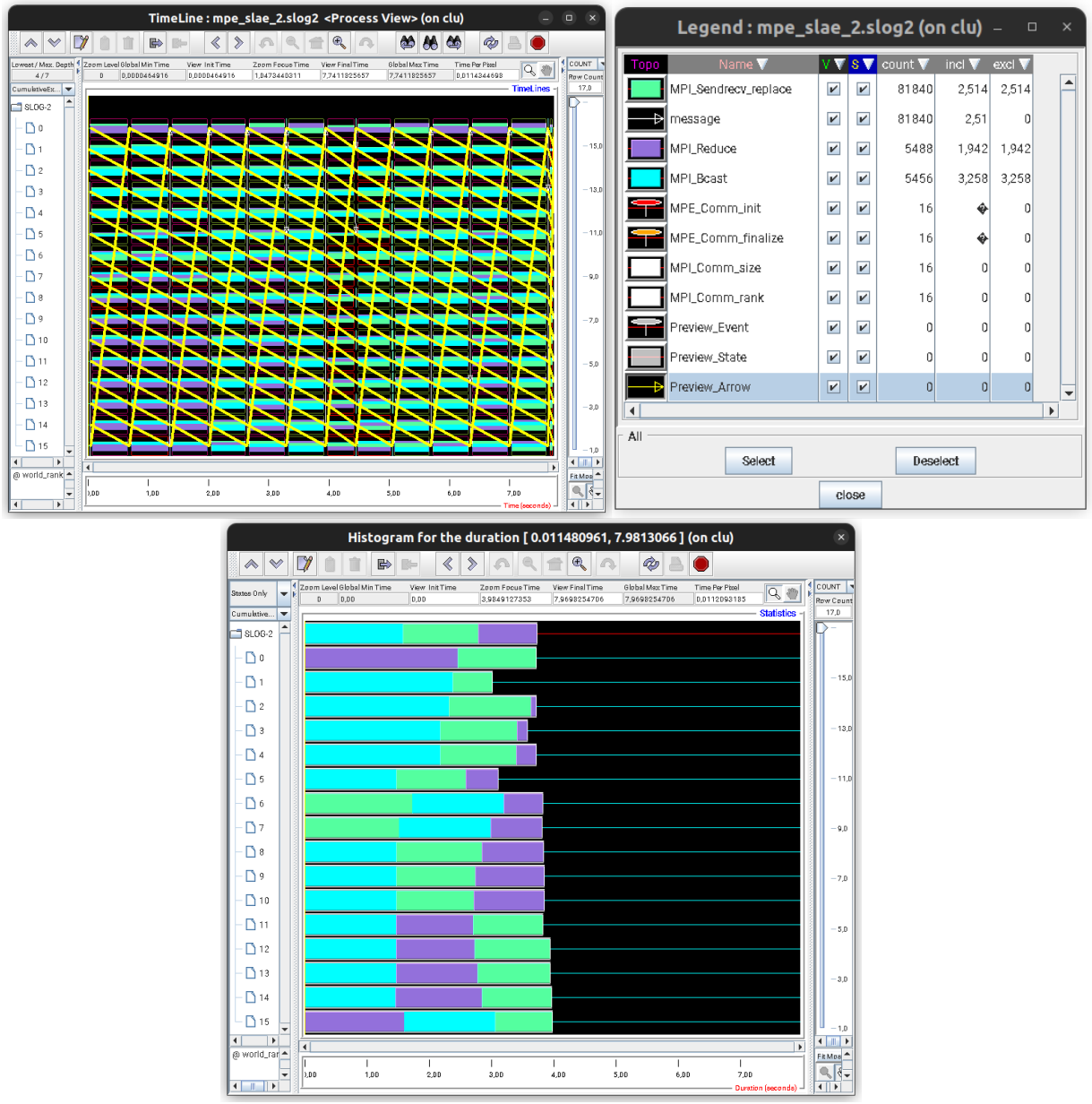
Зависимость эффективности распараллеливания программы от числа ядер



Визуализация трассировочного файла первой версии программы



Визуализация трассировочного файла второй версии программы



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы:

- *ознакомился с написанием параллельных программ при помощи MPI;*
- *написал две версии 2 версии параллельной программы, которая реализует итерационный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений вида* $Ax = b$ *в соответствии с методом простой итерации;*
- *построил графики зависимости времени работы программы, ускорения и эффективности распараллеливания от числа используемых ядер;*
- *выполнил профилирование программ с помощью MPE при использовании 16 ядер;*

Анализируя результаты измерений, можно сделать вывод, что первая версия программы быстрее второй при одних и тех же параметрах, т.к. достаточно времени тратится на пересылку данных между процессами. С другой стороны вторая версия расходует меньше памяти, т.к. в каждом процессе, в отличие от первой версии, находятся уникальных части матрицы A, векторов x и b.

ПРИЛОЖЕНИЕ (ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ)

mpi_slae_1.c

```c
#include <math.h>
#include <mpi.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define N 5000
#define EPSILON 1E-7
#define TAU 1E-5
#define MAX_ITERATION_COUNT 100000

void set_matrix_part(int *line_counts, int *line_offsets,
                     int size, int process_count);
void generate_A_chunks(double *A_chunk, int line_count,
                       int line_size, int process_rank);
void generate_x(double *x, int size);
void generate_b(double *b, int size);
double calc_norm_square(const double *vector, int size);
void calc_Axb(const double* A_chunk, const double* x,
              const double* b, double* Axb_chunk,
              int chunk_size, int chunk_offset);
void calc_next_x(const double* Axb_chunk, const double* x,
                 double* x_chunk, double tau,
                 int chunk_size, int chunk_offset);

int main(int argc, char **argv)
{
    int process_rank;
    int process_count;
    int iter_count;
    double b_norm;
    double Axb_chunk_norm_square;
    double accuracy = EPSILON + 1;
    double start_time;
    double finish_time;
    int* line_counts;
    int* line_offsets;
    double* A_chunk;
    double* x;
    double* b;
    double* Axb_chunk;
    double* x_chunk;

    MPI_Init(&argc, &argv);

    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &process_count);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &process_rank);

    line_counts = malloc(sizeof(int) * process_count);
    line_offsets = malloc(sizeof(int) * process_count);
    set_matrix_part(line_counts, line_offsets, N, process_count);
```

```
A_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank] *N);
x = malloc(sizeof(double) * N);
b = malloc(sizeof(double) * N);
generate_A_chunks(A_chunk, line_counts[process_rank],
                  N, line_offsets[process_rank]);
generate_x(x, N);
generate_b(b, N);

if (process_rank == 0)
    b_norm = sqrt(calc_norm_square(b, N));

Axb_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank]);
x_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank]);

start_time = MPI_Wtime();

for (iter_count = 0; accuracy > EPSILON &&
     iter_count < MAX_ITERATION_COUNT; ++iter_count)
{
    calc_Axb(A_chunk, x, b, Axb_chunk,
             line_counts[process_rank],
             line_offsets[process_rank]);

    calc_next_x(Axb_chunk, x, x_chunk, TAU,
                line_counts[process_rank],
                line_offsets[process_rank]);
    MPI_Allgatherv(x_chunk, line_counts[process_rank],
                   MPI_DOUBLE, x, line_counts, line_offsets,
                   MPI_DOUBLE, MPI_COMM_WORLD);

    Axb_chunk_norm_square = calc_norm_square(Axb_chunk,
                                line_counts[process_rank]);
    MPI_Reduce(&Axb_chunk_norm_square, &accuracy, 1,
               MPI_DOUBLE, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);

    if (process_rank == 0)
        accuracy = sqrt(accuracy) / b_norm;
    MPI_Bcast(&accuracy, 1, MPI_DOUBLE, 0, MPI_COMM_WORLD);
}

finish_time = MPI_Wtime();

if (process_rank == 0)
{
    if (iter_count == MAX_ITERATION_COUNT)
        printf("Too many iterations\n");
    else
    {
        printf("Norm: %lf\n", sqrt(calc_norm_square(x, N)));
        printf("Time: %lf sec\n", finish_time - start_time);
    }
}

free(line_counts);
free(line_offsets);
```

```
    free(x);
    free(b);
    free(A_chunk);
    free(Axb_chunk);
    free(x_chunk);

    MPI_Finalize();

    return 0;
}

void generate_A_chunks(double *A_chunk, int line_count,
                       int line_size, int lineIndex)
{
    for (int i = 0; i < line_count; i++)
    {
        for (int j = 0; j < line_size; ++j)
            A_chunk[i * line_size + j] = 1;

        A_chunk[i * line_size + lineIndex + i] = 2;
    }
}

void generate_x(double *x, int size)
{
    for (int i = 0; i < size; i++)
        x[i] = 0;
}

void generate_b(double *b, int size)
{
    for (int i = 0; i < size; i++)
        b[i] = N + 1;
}

void set_matrix_part(int* line_counts, int* line_offsets,
                     int size, int process_count)
{
    int offset = 0;
    for (int i = 0; i < process_count; ++i)
    {
        line_counts[i] = size / process_count;
        if (i < size % process_count)
            ++line_counts[i];

        line_offsets[i] = offset;
        offset += line_counts[i];
    }
}

double calc_norm_square(const double *vector, int size)
{
    double norm_square = 0.0;
    for (int i = 0; i < size; ++i)
        norm_square += vector[i] * vector[i];
```

```
    return norm_square;
}

void calc_Axb(const double* A_chunk, const double* x,
              const double* b, double* Axb_chunk,
              int chunk_size, int chunk_offset)
{
    for (int i = 0; i < chunk_size; ++i)
    {
        Axb_chunk[i] = -b[chunk_offset + i];
        for (int j = 0; j < N; ++j)
            Axb_chunk[i] += A_chunk[i * N + j] * x[j];
    }
}

void calc_next_x(const double* Axb_chunk, const double* x,
                 double* x_chunk, double tau,
                 int chunk_size, int chunk_offset)
{
    for (int i = 0; i < chunk_size; ++i)
        x_chunk[i] = x[chunk_offset + i] - tau * Axb_chunk[i];
}
```

mpi_slae_2.c

```
#include <math.h>
#include <mpi.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define N 5000
#define EPSILON 1E-7
#define TAU 1E-5
#define MAX_ITERATION_COUNT 100000

void set_matrix_part(int* line_counts, int* line_offsets,
                     int size, int process_count);
void generate_A_chunk(double* A_chunk, int line_count,
                      int line_size, int process_rank);
void generate_x_chunk(double* x_chunk, int size);
void generate_b_chunk(double* b_chunk, int size);
double calc_norm_square(double* vector, int size);
void calc_Axb(const double* A_chunk, const double* x_chunk,
              const double* b_chunk, double* recv_x_chunk,
              double* Axb_chunk, int* line_counts,
              int* line_offsets, int process_rank,
              int process_count);
void calc_next_x(const double* Axb, double* x_chunk,
                 double tau, int chunk_size);
void copy_vector(double* dest, const double* src, int size);
```

```
int main(int argc, char** argv)
{
    int process_rank;
    int process_count;
    int iter_count;
    double b_chunk_norm;
    double b_norm;
    double x_chunk_norm;
    double x_norm;
    double Axb_chunk_norm_square;
    double accuracy = EPSILON + 1;
    double start_time;
    double finish_time;
    int* line_counts;
    int* line_offsets;
    double* x_chunk;
    double* b_chunk;
    double* A_chunk;
    double* Axb_chunk;
    double* recv_x_chunk;

    MPI_Init(&argc, &argv);

    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &process_count);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &process_rank);

    line_counts = malloc(sizeof(int) * process_count);
    line_offsets = malloc(sizeof(int) * process_count);
    set_matrix_part(line_counts, line_offsets, N, process_count);

    x_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank]);
    b_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank]);
    A_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank] *N);
    generate_x_chunk(x_chunk, line_counts[process_rank]);
    generate_b_chunk(b_chunk, line_counts[process_rank]);
    generate_A_chunk(A_chunk, line_counts[process_rank],
                     N, line_offsets[process_rank]);

    b_chunk_norm = calc_norm_square(b_chunk,
                                    line_counts[process_rank]);
    MPI_Reduce(&b_chunk_norm, &b_norm, 1, MPI_DOUBLE,
               MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);
    if (process_rank == 0)
        b_norm = sqrt(b_norm);

    Axb_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[process_rank]);
    recv_x_chunk = malloc(sizeof(double) * line_counts[0]);

    start_time = MPI_Wtime();

    for (iter_count = 0; accuracy > EPSILON &&
         iter_count < MAX_ITERATION_COUNT; ++iter_count)
    {
        calc_Axb(A_chunk, x_chunk, b_chunk, recv_x_chunk,
                 Axb_chunk, line_counts, line_offsets,
                 process_rank, process_count);
```

```
        calc_next_x(Axb_chunk, x_chunk, TAU,
                    line_counts[process_rank]);

        Axb_chunk_norm_square = calc_norm_square(Axb_chunk,
                                line_counts[process_rank]);
        MPI_Reduce(&Axb_chunk_norm_square, &accuracy, 1,
                   MPI_DOUBLE, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);

        if (process_rank == 0)
            accuracy = sqrt(accuracy) / b_norm;
        MPI_Bcast(&accuracy, 1, MPI_DOUBLE, 0, MPI_COMM_WORLD);
    }

    finish_time = MPI_Wtime();

    x_chunk_norm = calc_norm_square(x_chunk,
                                    line_counts[process_rank]);
    MPI_Reduce(&x_chunk_norm, &x_norm, 1, MPI_DOUBLE,
                MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);

    if (process_rank == 0)
    {
        if (iter_count == MAX_ITERATION_COUNT)
            fprintf(stderr, "Too many iterations\n");
        else
        {
            printf("Norm: %lf\n", sqrt(x_norm));
            printf("Time: %lf sec\n", finish_time - start_time);
        }
    }

    free(line_counts);
    free(line_offsets);
    free(x_chunk);
    free(b_chunk);
    free(A_chunk);
    free(Axb_chunk);

    MPI_Finalize();

    return 0;
}

void generate_A_chunk(double* A_chunk, int line_count,
                      int line_size, int lineIndex)
{
    for (int i = 0; i < line_count; i++)
    {
        for (int j = 0; j < line_size; ++j)
            A_chunk[i * line_size + j] = 1;

        A_chunk[i * line_size + lineIndex + i] = 2;
    }
}
```

```
void generate_x_chunk(double* x_chunk, int size)
{
    for (int i = 0; i < size; i++)
        x_chunk[i] = 0;
}

void generate_b_chunk(double* b_chunk, int size)
{
    for (int i = 0; i < size; i++)
        b_chunk[i] = N + 1;
}

void set_matrix_part(int* line_counts, int* line_offsets,
                     int size, int process_count)
{
    int offset = 0;
    for (int i = 0; i < process_count; ++i)
    {
        line_counts[i] = size / process_count;
        if (i < size % process_count)
            ++line_counts[i];

        line_offsets[i] = offset;
        offset += line_counts[i];
    }
}

double calc_norm_square(double* vector, int size)
{
    double norm_square = 0.0;
    for (int i = 0; i < size; ++i)
        norm_square += vector[i] * vector[i];

    return norm_square;
}

void calc_Axb(const double* A_chunk, const double* x_chunk,
              const double* b_chunk, double* recv_x_chunk,
              double* Axb_chunk, int* line_counts,
              int* line_offsets, int process_rank,
              int process_count)
{
    int src_rank = (process_rank + process_count - 1) %
                   process_count;
    int dest_rank = (process_rank + 1) % process_count;
    int current_rank;

    copy_vector(recv_x_chunk, x_chunk, line_counts[process_rank]);

    for (int i = 0; i < process_count; ++i)
    {
        current_rank = (process_rank + i) % process_count;
        for (int j = 0; j < line_counts[process_rank]; ++j)
        {
            if (i == 0) Axb_chunk[j] = -b_chunk[j];
```

```
            for (int k = 0; k < line_counts[current_rank]; ++k)
                Axb_chunk[j] += recv_x_chunk[k] *
                A_chunk[j * N + k + line_offsets[current_rank]];
        }

        if (i != process_count - 1)
            MPI_Sendrecv_replace(recv_x_chunk, line_counts[0],
                                 MPI_DOUBLE, dest_rank,
                                 process_rank, src_rank, src_rank,
                                 MPI_COMM_WORLD, MPI_STATUS_IGNORE);
    }
}

void calc_next_x(const double* Axb_chunk, double* x_chunk,
                 double tau, int chunk_size)
{
    for (int i = 0; i < chunk_size; ++i)
        x_chunk[i] -= tau * Axb_chunk[i];
}

void copy_vector(double* dest, const double* src, int size)
{
    for (int i = 0; i < size; i++)
        dest[i] = src[i];
}
```

run.sh

```
#!/bin/bash

#PBS -l walltime=00:05:00
#PBS -l select=<nodes>:ncpus=<cpus>:mpiprocs=<processes>
#PBS -m n

cd $PBS_O_WORKDIR

MPI_NP=$(wc -l $PBS_NODEFILE | awk '{ print $1 }')
echo "Number of MPI process: $MPI_NP"

echo 'File $PBS_NODEFILE:'
cat  $PBS_NODEFILE
echo

mpirun -hostfile $PBS_NODEFILE -np $MPI_NP <MPI_program>
```