Bài 1.3

Xét chuỗi tg dừng chặt $\{X_t\}_{t\geq 0}$ với $\forall h \in \mathbb{R}$ và $\forall t_k \geq 0$, ta có: ~~P(X_{t_k} ≤ x_{t_k}) = P(X_{t_k}~~

$P(X_{t_k} \leq x_{t_k}) = P(X_{t_k+h} \leq x_{t_k})$

$\Rightarrow$ X_{t_k} và X_{t_k+h} có cùng phân phối. $\forall h \in \mathbb{R}$ $\forall t_k \geq 0$.

gluử chúng có cùng pp với Biến X.

Đặt $\mu_X = EX$ khi đó $EX_{t_k} = EX = \mu_X$ không phụ $\in$ vào t.

Hơn nữa: $\gamma_X(t+h, t) = cov(X_{t+h}, X_t) = Var(X)$.

Do đó $\{X_t\}_{t\geq 0}$ là chuỗi t/gian dừng yếu.

Bài 1.4. $Z_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$

(a) $E(X_t) = E(a + bZ_t + cZ_{t-2}) = a.$

$\gamma_X(t+h, t) = Cov(X_{t+h}, X_t) = cov(a + bZ_{t+h} + cZ_{t+h-2}; a + bZ_t + cZ_{t-2})$

$= b^2.Cov(Z_{t+h}; Z_t) + bc.Cov(Z_{t+h}; Z_{t-2}) + bc.Cov(Z_{t+h-2}; Z_t)$
$+ c^2.Cov(Z_{t+h-2}; Z_{t-2})$

$= \sigma^2.b^2.X_{\{0\}}(h) + \sigma^2.bc.X_{\{-2\}}.(h) + \sigma^2.bc.X_{\{2\}}(h)$
$+ \sigma^2.c^2 X_{\{0\}}(h) = \begin{cases} \sigma^2(b^2+c^2) & \text{nếu } h = 0 \\ \sigma^2 bc; & \text{nếu } h = \pm 2 \\ 0; & \text{trái lại} \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma_X(t+h; t)$ $\underline{o}$ phụ $\in$ vào t $\Rightarrow$ chuỗi dừng.

(b) $EX_t = E(Z_t \cos(ct) + Z_{t-1}\sin(ct)) = 0$

$\gamma_X(t+h, t) = Cov(X_{t+h}, X_t) = Cov(Z_{t+h}.\cos(c(t+h)) + Z_{t+h-1}\sin(c(t+h)),$
$Z_t\cos(ct) + Z_{t-1}.\sin(ct))$

$= \cos(c(t+h))\cos(ct).Cov(Z_{t+h}, Z_t) + \cos(c(t+h))\sin(ct).Cov(Z_{t+h}; Z_{t-1})$
$+ \sin(c(t+h))\cos(ct)\ Cov(Z_{t+h-1}; Z_t) + \sin(c(t+h))\sin(ct).Cov(Z_{t+h-1}; Z_{t-1})$

$= \sigma^2\cos^2(ct)X_{\{0\}}(h) + \sigma^2\cos(c(t-1)).\sin(ct).X_{\{-1\}}(h)$
$+ \sigma^2\sin(c(t+1))\cos(ct)X_{\{1\}}(h) + \sigma^2\sin^2(ct)X_{\{0\}}(h)$

$$= \begin{cases} \sigma^2; & \text{nếu } h = 0 \\ \sigma^2 \cos(c(t-1)) \sin(ct) & \text{nếu } h = -1 \\ \sigma^2 \cos(ct) \cdot \sin(c(t+1)) & \text{nếu } h = 1 \\ 0 \quad ; & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

- Nếu $c = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ thì $\gamma_x(t+h; t)$ o phụ $\in t \to$ chuỗi dừng
- Ngược lại thì o là chuỗi dừng.