Запитання для самоперевірки

1. Які функції називаються функціями зі скінченними носіями? 2. Яка матриця називається розрядженою? 3. Як розбивається на трикутники многокутна область? 4. Як будуються кусково-лінійні координатні функції на нерегулярній сітці? 5. Як формулюється теорема про оцінку швидкості збіжності схеми МСЕ, побудованої на основі кусково-лінійних координатних функцій, стосовно задачі Діріхле для рівняння Пуассона в опуклому многокутнику? 6. Як будується глобальна матриця жорсткості з матриці жорсткості скінченних елементів? 7. Як будується глобальний вектор навантаження з векторів навантаження скінченних елементів?

Контрольні завдання

1. За допомогою МСЕ знайти розв'язок задачі (1), (2), якщо $f(x, y) = \alpha x + \beta \gamma$, $\alpha, \beta = \overline{1, 5}$, а областю $\bar{\Omega}$ є одиничний квадрат, причому

$$\bar{\Omega} = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad f(x, y) = 2[y(1-y) + x(1-x)].$$

Параметри α, β і кількість трикутників задаються викладачем.

2. Розв'язати попередню задачу, якщо областю $\bar{\Omega}$ є прямокутник, причому

$$\bar{\Omega} = \{0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad f(x, y) = 2.$$

3. Розв'язати задачу 1, якщо областю $\bar{\Omega}$ є трикутник, причому

$$\bar{\Omega}\,\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}.$$

§ 16. Розв'язування одновимірного рівняння теплопровідності

Постановка задачі. В області $\bar{Q}_T = \{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ знайти розв'язок одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad x \in (a, b),\ t > 0, \tag{1}$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \tag{2}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 k(a, t)\frac{\partial u(a, t)}{\partial x} &= \beta_1 u(a, t) - \mu_1(t); \\ -\alpha_2 k(b, t)\frac{\partial u(b, t)}{\partial x} &= \beta_2 u(b, t) - \mu_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

де $k(x, t), q(x, t), f(x, t), u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ задані функції; α_k, β_k ($k = 1, 2$) — задані невід'ємні сталі, причому виконуються нерівності $0 < k_0 \leqslant k(x, t) \leqslant k_1$, $q(x, t) \geqslant 0$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$, $k = 1, 2$ (k_0, k_1 — деякі сталі).

Методичні вказівки. Розглянемо різницеві методи розв'язування задачі (1) — (3). В області $\overline{Q}_T$ введемо сітку $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, де $\overline{\omega}_h = \{x_i = a + ih,\ h = (b - a)/N,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$; $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ \tau = T/M,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M\}$. Позначимо $y_{ij} = y\,(x_i,\ t_j)$.

За допомогою інтегро-інтерполяційного методу апроксимуємо задачу (1) — (3) різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами [22, с. 378—381, с. 398—405]:

$$\tilde{x}_i^m y_{t,i}^j = \sigma\,(\tilde{p} y_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i} - \sigma \tilde{x}_i^m \bar{q}_i y_i^{j+1} + (1-\sigma)\,(\tilde{\rho} y_{\bar{x}}^j)_{x,i} -$$
$$- (1-\sigma)\,\tilde{x}_i^m \bar{q}_i y_i^j + \tilde{x}_i^m \bar{f}_i, \tag{4}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ M,\ y_i^0 = u_0(x_i),$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N;$$

$$\sigma\alpha_1 \tilde{p}_1 y_{\bar{x},1}^{j+1} + (1-\sigma)\,\alpha_1 \tilde{p}_1 y_{\bar{x},i}^j = \tilde{x}_0^m \beta_1 \sigma y_0^{j+1} + (1-\sigma)\,\beta_1 \tilde{x}_0^m y_0^j - \tilde{x}_0^m \bar{\mu}_1 +$$
$$+ \frac{h}{2}\alpha_1 \tilde{x}_0^m y_{t,0}^j - \frac{h}{2}\alpha_1 \tilde{x}_0^m (\bar{\tilde{f}}_0 - \sigma \bar{q}_0 y_0^{j+1} + (1-\sigma)\,\bar{q}_0 y_0^j); \tag{5}$$

$$-\sigma\alpha_2 \tilde{p}_N y_{\bar{x},N}^{j+1} - (1-\sigma)\,\alpha_2 \tilde{p}_N y_{\bar{x},N}^j = \sigma \tilde{x}_N^m \beta_2 y_N^{j+1} + (1-\sigma)\,\beta_2 \tilde{x}_N^m y_N^j -$$
$$- \tilde{x}_N^m \bar{\mu}_2 + \frac{h}{2}\alpha_2 \tilde{x}_N^m y_{t,N}^j - \frac{h}{2}\alpha_2 \tilde{x}_N^m (\tilde{f}_N - \sigma \bar{q}_N y_N^{j+1} - (1-\sigma)\,\bar{q}_N y_N^j), \tag{6}$$

де

$$\tilde{x}_0^m = h^{-1}\int_0^{x_1} x^m dx; \quad \tilde{x}_N^m = h^{-1}\int_{x_{N-1}}^{x_N} x^m dx;$$
$$\tilde{x}_i^m = (2h)^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^m dx, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1;$$
$$\tilde{p}_i = x_{i-1/2}^m \bar{k}_{i-1/2}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N; \quad \bar{S}_i = s_j^{j+\sigma} = s\,(x_i,\ t_j + \sigma\tau),$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N; \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1.$$

Покладаючи в (4) — (6) $\sigma = 0$, дістаємо явну схему; при $\sigma = 1$ — схему з випередженням (повністю неявну схему); при $\sigma = 0{,}5$ — симетричну схему Кранка — Ніколсона, яка записується на шаблоні з шести вузлів.

У разі досить гладких вихідних даних різницева схема (4) — (6) стійка при $\sigma \geqslant 0{,}5$ і має місце рівномірна збіжність її зі швидкістю $O\,(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, де

$$m_\sigma = \begin{cases} 2 & \text{при } \sigma = 0{,}5; \\ 1 & \text{при } \sigma \neq 0{,}5. \end{cases}$$

Різницева схема (4) — (6) при $\sigma \neq 0$ буде неявною, тому y_i^{j+1} знаходиться як розв'язок СЛАР з тридіагональною матрицею, а саме:

$$c_1 v_1 + b_1 v_2 = \varphi_1;$$
$$d_i v_{i-1} + c_i v_i + b_i v_{i+1} = \varphi_i, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N; \tag{7}$$
$$d_{N+1} v_N + c_{N+1} v_{N+1} = \varphi_{N+1},$$

де

$$b_1 = \sigma \frac{\tau}{h^2} \alpha_1 \tilde{p}_1; \quad c_1 = -\sigma \frac{\tau}{h} \beta_1 x_0^m - \frac{\alpha_1}{2} \tilde{x}_0^m -$$
$$- \sigma \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^{\bar{m}} q_0 - b_1;$$

$$\varphi_1 = (1 - \sigma) \frac{\tau}{h} \beta_1 x_0^m y_0^j - \frac{\tau}{h} x_0^{\bar{m}} \mu_2 - \frac{\alpha_1}{2} \tilde{x}_0^m y_0^j -$$
$$- \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^{\bar{m}} \bar{f}_0 + (1 - \sigma) \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^{\bar{m}} q_0 y_0^j - (1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} \alpha_1 \tilde{p}_1 (y_1^j - y_0^j);$$

$$d_i = \frac{\sigma\tau}{h^2} \tilde{p}_i; \quad b_i = \frac{\sigma\tau}{h^2} \tilde{p}_{i+1}; \quad c_i = -\tilde{x}_i^m - \tau\sigma \tilde{x}_i^{\bar{m}} q_i - (d_i + b_i);$$

$$\varphi_i = -\tilde{x}_i^m y_i^j - \frac{\tau(1 - \sigma)}{h^2} (\tilde{p}_{i+1} (y_{i+1}^j - y_i^j) - \tilde{p}_i (y_i^j - y_{i-1}^j)) + \tag{8}$$
$$+ \tau (1 - \sigma) \tilde{x}_i^{\bar{m}} q_i y_i^j - \tau \bar{f}_i \tilde{x}_i^m, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N; \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$d_{N+1} = \sigma \frac{\tau}{h^2} \alpha_2 \tilde{p}_N; \quad c_{N+1} = -\sigma \frac{\tau}{h} \beta_2 x_N^m - \frac{\alpha_2}{2} x_N^m - \sigma \frac{\tau}{2} \alpha_2 \tilde{x}_N^{\bar{m}} q_N - d_{N+1};$$

$$\varphi_{N+1} = (1 - \sigma) \frac{\tau}{h} \beta_2 x_N y_N^j - \frac{\tau}{h} x_N^{\bar{m}} \mu_2 - \frac{\alpha_2}{2} \tilde{x}_N^m y_N^j - \frac{\tau}{2} \tilde{x}_N^{\bar{m}} \bar{f}_N +$$
$$+ (1 - \sigma) \frac{\tau}{2} \alpha_2 \tilde{x}_N^{\bar{m}} q_N y_N^j + (1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} \alpha_2 \tilde{p}_N (y_N^j - y_{N-1}^j).$$

Таким чином, розв'язавши СЛАР (7), знайдемо значення $y_i^{j+1} = v_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, якщо відомо розв'язок y_i^j на j-му ярусі (на нульовому ярусі розв'язок задається виразом (5)).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (7) розв'язується методом прогонки. Обчислювальна схема цього методу зводиться до виконання таких дій:

а) визначення коефіцієнтів m_i, ω_i за формулами

$$m_2 = -b_1/c_1, \quad \omega_2 = \varphi_1/c_1, \quad c_1 \neq 0;$$
$$m_{i+1} = -b_i/(c_i + d_i m_i), \quad \omega_{i+1} = (\varphi_i - d_i \omega_i)/(c_i + d_i \omega_i),$$
$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N;$$

б) обчислення v_{N+1} за формулою

$$v_{N+1} = (\varphi_{N+1} - d_{N+1}w_{N+1})/(c_{N+1} + d_{N+1}m_{N+1});$$

в) визначення v_i за формулою

$$v_{i-1} = m_i v_i + w_i, \quad i = N+1,\ N,\ \ldots,\ 2.$$

З (8) випливає, що умова стійкості методу прогонки $|c_i| \geqslant |b_i| + |d_i|$ виконується.

Задача (1) – (3) є математичною моделлю різних нестаціонарних процесів, наприклад теплопровідності, дифузії та ін. Так, процес поширення тепла в тілі може бути описаний диференціальним рівнянням

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) - d(u - u_{\text{ср}}) + F, \quad x \in (a, b),\ t > 0, \tag{9}$$

яке задовольняє такі початкові та крайові умови:

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b]; \\ &\alpha_1 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_1 (u - u_{\text{ср}}) \text{ при } x = a; \end{aligned} \tag{10}$$

$$-\alpha_2 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_2 (u - u_{\text{ср}}) \text{ при } x = b. \tag{11}$$

Тут c — питома теплоємність; ρ — щільність; λ — коефіцієнт теплопровідності; d — коефіцієнт теплообміну на поверхні тіла; F — щільність джерел тепла; $u_{\text{ср}}$ — температура навколишнього середовища; u_0 — початковий розподіл температури; γ_k $(k = 1,\ 2)$ — коефіцієнт тепловіддачі на границі; α_k $(k = 1,\ 2)$ — деякі сталі величини, які дорівнюють нулю чи одиниці.

Показник m може дорівнювати 0, 1 або 2, що відповідає запису рівняння в декартових, циліндричних або сферичних координатах. Якщо величини c та ρ сталі, то задачу (9) — (11) можна записати у вигляді (1) — (3), де $k = \lambda/(c\rho)$, $q = d/(c\rho)$, $f = qu_{\text{ср}} + F/(c\rho)$, $\beta_k = \gamma_k/(c\rho)$, $\mu_k = \gamma_k u_{\text{ср}}/(c\rho)$.

Співвідношення (3) залежно від значень параметрів α_k, β_k $(k = 1,\ 2)$ визначають різні фізичні умови на границі: а) випадок $\alpha_k = 0$, $\beta_k > 0$ означає, що на границі задано температуру тіла (*крайові умови першого роду*); б) випадок $\alpha_k > 0$, $\beta_k = 0$ свідчить про те, що на границі задано тепловий потік (*крайові умови другого роду*); в) випадок $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$ означає, що на границі задано теплообмін з навколишнім середовищем (*крайові умови третього роду*).

Зауважимо, що коли рівняння (1) розглядається в циліндричних або сферичних координатах ($m = 1$ або $m = 2$) і $a = 0$, то в точці $x = 0$ має виконуватись умова обмеженості розв'язку, тобто $\lim\limits_{x \to 0} x^m k \dfrac{\partial x}{\partial u} = 0$, $m = 1,\ 2$ [22, с. 403].

Приклади використання підпрограм. У наведених нижче прикладах використовується підпрограма STEP1, що реалізує один крок (по змінній часу) різницевої схеми (4) — (6). Зазначимо, що фактично цю реалізацію виконує підпрограма STEP, яка викликається з підпрограми STEP1. Головне ж призначення підпрограми STEP1 полягає в розподілі робочого масиву WORK, завдяки чому значно скорочується список її параметрів і вона стає більш зручною для користування.

Приклад 1. Знайдемо розв'язок в декартових, циліндричних і сферичних координатах ($m = 0;\ 1;\ 2$) рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\left(e^{-0,5t}(2-x)+1\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - e^{-0,5t}(x-1)\,u +$$

$$+ e^{-0,5t}\left(-2{,}5x^{m+1}(2-x) - 5\left(2x^m\left(e^{-0,5t}(2-x)+1\right)\left((m+1)(2-x)-x\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-0,5t}\left((m+1)x^m(2-x) - x^{m+1}\right) - \left(e^{-0,5t}(2-x)+1\right)x^m(m+2)\right)\right) +$$

$$+ (x-1)\left(5e^{-0,5t}x^{m+1}(2-x)+2\right), \quad x \in (1,\ 2), \quad 0 < t \leqslant 1,$$

якщо початковими та крайовими умовами є такі:

$$u(x,\ 0) = 5x^{m+1}(2-x) + 2, \quad x \in (1,\ 2);$$

$$\left(e^{-0,5t}+1\right)\frac{\partial u(1,\ t)}{\partial x} = 2u(1,\ t) - 2\left(5e^{-0,5t}+2\right) + \left(e^{-0,5t}+1\right)\cdot 5me^{-0,5t};$$

$$-\frac{\partial u(2,\ t)}{\partial x} = 2{,}5u\ (2,\ t) - 5 + 5e^{-0,5t}\cdot 2^{m+1},$$

$$t > 0.$$

Головна програма з використанням підпрограм STEP1, а також допоміжних підпрограм-функцій для обчислення вихідних даних задачі має вигляд:

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  ГОЛОВНА ПРОГРАМА, ЩО ІЛЮСТРУЄ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ                    C
C  ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В                       C
C  ДЕКАРТОВИХ, ЦІЛІНДРИЧНИХ І СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ                C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      REAL Y(11),WORK(54)
      EXTERNAL FUNP,Q,PK,PMU1
      COMMON /TEST/M
      DATA A,B/1.,2./,N/11/,TFINAL/1./
      TYPE 102
      ACCEPT *,NW
      TYPE 103
      ACCEPT *,TAU
      TYPE 104
      ACCEPT *,SIGMA
      TYPE 105
      ACCEPT *,M
      WRITE(NW,*)'NW=',NW,'M=',M
      WRITE(NW,*)'TAU=',TAU,'SIGMA=',SIGMA
C
      T=0.
      WORK(1)=A
      WORK(2)=B
      WORK(3)=SIGMA
      WORK(4)=1.
      WORK(5)=1.
      WORK(6)=2.
      WORK(7)=2.5
      WORK(8)=M
```

```
C  ОБЧИСЛЕННЯ ПОЧАТКОВОГО РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ
      H=(B—A)/FLOAT(N—1)
      X=A
      DO 10 I=1,N
         Y(I)=5.*X**(M+1)*(2.—X)+2.
 10      X=X+H
C
 20   CALL STEP1(T,TAU,Y,N,FUNP,Q,PK,PMU1,IERR,WORK)
      IF(IERR,NE.0) GO TO 30
      IF(T+0.5*TAU.LT.TFINAL) GO TO 20
C  ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕНЬ
   WRITE(NW,100)T,Y
      STOP
C
 30  WRITE(NW,101)IERR
      STOP
100   FORMAT(' НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРИ T=',
  *          1PE11.4/5(X,1PE9.2))
101   FORMAT(' IERR=',I5)
102   FORMAT('$ВВЕДІТЬ НОМЕР КАНАЛУ ВИВЕД. NW=')
103   FORMAT('$ВВЕДІТЬ РОЗМІР КРОКУ ПО ЗМІННІЙ',
  *          'ЧАСУ TAU=')
104   PORMAT('$ВВЕДІТЬ ЗНАЧЕННЯ ВАГОВОГО КОЕФІЦІ',
  *          'ЄНТА РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ SIGMA=')
105   ФORMAT('$ВВЕДІТЬ НОМЕР СИСТЕМИ КООРДИНАТ M=',)
      END

      FUNCTION FUNP(X,T)
C  ОБЧИСЛЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ
      COMMON/TEST/M
      M1=M+1
      BX=2.—X
      ET=EXP(—0.5*T)
      XM=X**M
      XM1=X**M1
      IF(M.EQ.0) XMM=0.
      IF(M.GT.0) XMM=M*X**(M—1)
      FUNP=ET*(—2.5*XM1*BX—5.*(—(ET*BX+1.)*(M+2)*XM—
  *          ET*(M1*XM*BX—XM1)+2*XMM*(ET*BX+1)*
  *          (M1*BX—X))+(X—1.)*(5.*ET*BX*XM1+2.))
      RETURN
      END

      FUNCTION Q(X,T)
C ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОВІДДАЧІ
      Q=EXP(—0.5*T)*(X—1.)
      RETURN
      END

      FUNCTION PK(X,T)
C  ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
      PK=EPX(—0.5*T)*(2.—X)+1.
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION PMU1(T,PMU2)
C   ОБЧИСЛЕННЯ ПРАВИХ ЧАСТИН У КРАЙОВИХ УМОВАХ
      COMMON /TEST/M
      ET=EXP(—0.5*T)
      PMU1=2.*(5.*ET+2.)—(5.*ET*M*(ET+1.))
      PMU2=5.—5.*ET*2.**(M+1)
      RETURN
      END
```

У цій програмі крок по змінній x дорівнює 0,1. Значення цього кроку та вагового коефіцієнта вона дозволяє ввести в діалоговому режимі з термінала ЕОМ.

Обчислення за головною програмою дають такий результат:

```
NW=        2  M=         0
TAU=  1.9999999E—03   SIGMA=  0.0000000
НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРИ Т=9.9999Е—01
5.03E+00  5.00E+00  4.91E+00  4.76E+00  4.55E+00
4.27E+00  3.94E+00  3.55E+00  3.09E+00  2.57E+00
2.00E+00

NW=        3  M=         1
TAU=  4.9999997E—02   SIGMA=  0.5000000
НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРИ Т=  1.0000Е+00
5.01E+00  5.29E+00  5.48E+00  5.57E+00  5.55E+00
5.40E+00  5.09E+00  4.62E+00  3.96E+00  3.09E+00
1.99E+00

NW=        4  M=         2
TAU=  4.9999997E—02   SIGMA=  1.000000
НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРИ Т=  1.0000Е+00
4.96E+00  5.56E+00  6.13E+00  6.60E+00  6.94E+00
7.07E+00  6.93E+00  6.43E+00  5.51E+00  4.06E+00
1.98E+00
```

Приклад 2. Грудочку вугілля сферичної форми діаметром 20 мм, що має початкову температуру 0 °С, вміщено в піч, температура якої дорівнює 300 °С. Визначити, через який час температура в середині цієї грудочки дорівнюватиме 30 °С. Фізичні характеристики вугілля мають такі значення: $\lambda = 0{,}175$ Вт/(м · К); $c = 1{,}3$ кДж/(кг · К); $\rho = 1400$ кг/м^3; $\gamma = 58{,}2$ Вт/(м^2 · К).

Процес нагрівання грудочки вугілля може бути описаний таким диференціальним рівнянням:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0,\ R), \quad t > 0; \tag{12}$$

$$\begin{gathered} u(x,\ 0) = 0, \quad x \in [0,\ R]; \quad x^2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \\ \left.\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma (u - u_{\text{ср}})\right)\right|_{x=R} = 0, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{13}$$

де $R = 10^{-2}$ м; $u_{\text{ср}} = 300$ °С.

Введемо безрозмірні змінні

$$v(x,\ t) = (u(x,\ t) - u_{\text{кр}})/u_{\text{кр}}; \quad t_1 = a^2 t/R^2; \quad x_1 = x/R, \tag{14}$$

де $a^2 = \lambda/(c\rho)$; $u_{\text{кр}}$ — деяка стала величина, якій відповідає, наприклад, $u_{\text{ср}}$.

Переходячи в задачі (12), (13) до безрозмірних змінних за формулами (14), дістаємо таку задачу для функції $v(x_1, t_1)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = \frac{1}{x_1^2}\frac{x}{\partial x_1}\left(x_1^2\frac{\partial v}{\partial x_1}\right), \quad x_1 \in (0,\ 1), \quad t > 0; \tag{15}$$

$$v(x_1,\ 0) = v_0(x_1). \quad x_1 \in [0,\ 1];$$

$$x_1^2\left.\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \gamma_1 v\right)_{x_1=1} = 0, \tag{16}$$

де $v_0(x_1) = (u_0(x) - u_{\text{ср}})/u_{\text{ср}}$; $\gamma_1 = \gamma R/\lambda$.

Головна програма з використанням підпрограми STEP1 для розв'язування рівнянь (15), (16) має вигляд:

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  ГОЛОВНА ПРОГРАМА, ЩО ІЛЮСТРУЄ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ                      C
C  ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В                        C
C  СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ                                            C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      REAL Y(20),V(220),WORK(99)
      EXTERNAL FUNP,Q,PK,PMU1
      DATA NW,IEND,K,MM/2,0,1,6/,N/20/,
     *     A,B/0.,10.E—3/,T,TAU/0.,0.002/,
     *     PK0,C,P0/0.175,1300.,1400./,
     *     YKP/300./,BT2/58.2/,TPRIN/20./

      NM=N*MM
      H=(B—A)/FLOAT(N—1)
      X=A
      D0 10 I=1,N
         V(I)=X
   10    X=X+H
      AR=B**2*C*R0/PK0
      TPRIN=TPRIN/AR
      TOUT1=TPRIN1
      M1=0
      WORK(1)=0.
      WORK(2)=1.
      WORK(3)=0.5
      WORK(4)=1.
      WORK(5)=1.
      WORK(6)=0.
      WORK(7)=BT2*B/PK0
      WORK(8)=2
C  ОБЧИСЛЕННЯ ПОЧАТКОВОГО РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ
      D0 20 I=1,N
   20    Y(I)=—1.
C

   30 CALL STEP1(T,TAU,Y,N,FUNP,Q,PK,PMU1,IERR,WORK)
      IF(IERR.NE.0) GO TO 80
      IF(YKP*(1.+Y(1)).LT.30.) GO TO 40
      IEND=1
      MM=M1+2
      GO TO 50
```

```
40    IF(T+10.5*TAU.LT.TOUT1) GO TO 30
50    M1=M1+1
      DO 60 I=1,N
60       V(N*M1+I)=YKR*(1.+Y(I))
      TOUT1=TOUT1+TPRIN1
      IF(M1.LT.MM—1) GO TO 30
C   ВИВЕДЕННЯ ГРАФІКА
      CALL GRAPH(NW,K,N,MM,NM,V)
      IF(IEND.EQ.1) GO TO 70
      K=K+1
      M1=0
      GO TO 30
C   ВИВЕДЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕНЬ
70    WRITE(NW,100) T*AR,(Y(1)+1.)*YKR
      STOP
80    WRITE(NW,101)IERR
      STOP
100   FORMAT(' ЧАС ЗАКІНЧЕННЯ НАГРІВУ=',E12.5,
     *        'СЕКУНД'/' ТЕМПЕРАТУРА В СЕРЕДИНІ',
     *        'ТІЛА=',E12.5)
101   FORMAT('IERR=',I5)
      END

      FUNCTION FUNP(X,T)
C   ОБЧИСЛЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ
      FUNP=0.
      RETURN
      END

      FUNCTION Q(X,T)
C   ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОВІДДАЧІ
      Q=0.
      RETURN
      END

      FUNCTION PK(X,T)
C   ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
      PK=1.
      RETURN
      END

      FUNCTION PMU1(T,PMU2)
C   ОБЧИСЛЕННЯ ПРАВИХ ЧАСТИН У КРАЙОВИХ УМОВАХ
      PMU1=0.
      PMU2=0.
      RETURN
      END
```

У цій програмі значення вагового коефіцієнта σ дорівнює 0,5 (тобто маємо схему Кранка — Ніколсона), причому графік розподілу температури будується через кожні 10 с.

Обчислення на ЕОМ за наведеною програмою дають такий результат:

```
ФУНКЦІЇ:  1 - *  2 - +  3 - $  4 - #  5 - &
 АБСЦИСИ                                       ГРАФІК   1
          +-----------------------------------------------------+
0.0000E+00!+$ #   &                                             !
0.5263E-03!+$  #   &                                            !
0.1053E-02!+$  #   &                                            !
0.1579E-02!+ $  #   &                                           !
0.2105E-02!+ $  #    &                                          !
0.2632E-02!*+ $  #    &                                         !
0.3158E-02!*+ $   #    &                                        !
0.3684E-02!*+  $   #    &                                       !
0.4211E-02!* +   $   #    &                                     !
0.4737E-02!* +    $    #    &                                   !
0.5263E-02! *  +    $    #    &                                 !
0.5789E-02! *   +     $    #     &                              !
0.6316E-02!  *    +      $     #     &                          !
0.6842E-02!   *     +        $    #     &                       !
0.7368E-02!     *       +       $     #    &                    !
0.7895E-02!        *        +       $     #    &                !
0.8421E-02!           *         +       $     #   &             !
0.8947E-02!                 *         +      $    #   &         !
0.9474E-02!                       *        +      $   #   &     !
0.1000E-01!                               *      +     $   #   &!
          +-----------------------------------------------------+
                                         ШКАЛА ОРДИНАТ
           !----!----!----!----!----!----!----!----!----!----!
           1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11
                     STEPY= 0.20700E+02
           VMIN= 0.27001E-02     VMAX= 0.20700E+03

ЧАС ЗАКІНЧЕННЯ НАГРІВУ = 0.99840E+02 СЕКУНД
ТЕМПЕРАТУРА В СЕРЕДИНІ ТІЛА = 0.30748E+02
```

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має різницева схема з ваговими коефіцієнтами для розв'язування одновимірного рівняння теплопровідності в одній з систем координат (декартових, циліндричних або сферичних)? 2. Що таке явні та неявні різницеві схеми розв'язування рівняння теплопровідності? Які переваги та недоліки їх? 3. Які є основні методи побудови різницевих схем для розв'язування одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності?

Контрольні завдання

1. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності (1) — (3) при таких вихідних даних:

$$k(x, t) = e^{-0,5t}(b - x) + 1; \quad q(x, t) = e^{-0,5t}(x - a);$$

$$f(x, t) = e^{-0,5t}(-2x^{m+1}(b - x) - 5(2mx^{m-1}(e^{-0,5t}(b - x) + 1)((m + 1) \times$$

$$\times (b - x) - x) - (e^{-0,5t}(b - x) + 1)(m + 2)x^m - e^{-0,5t}((m + 1)x^m(b - x) -$$

$$- x^{m+1})) + (x - a)(5e^{-0,5t}(b - x)x^{m+1} + a + 1));$$

$$\mu_1(t) = \beta_1 (5e^{-0,5t} a^{m+1} (b - a) + a + 1) - \alpha_1 (5e^{-0,5t} ((m+1) a^m (b-a) - a^{m+1})) (e^{-0,5t} (b-a) + 1));$$

$$\mu_2(t) = \beta_2 (a+1) - \alpha_2 \cdot 5e^{-0,5t} b^{m+1},$$

де m, a, b, α_k, β_k ($k = \overline{1, 2}$) — задані величини, причому $m = \overline{0, 2}$, $0 \leqslant a < b$, $\alpha_k = 0, 1$, $\beta_k \geqslant 0$ ($k = \overline{1, 2}$).

Знайдений розв'язок дослідити через однакові проміжки часу, які дорівнюють $0,2T$. Варіанти завдання, що визначаються величинами m, a, b, T, α_k, β_k ($k = 1, 2$), задаються викладачем.

Зауваження. Для контролю знайдених результатів можна скористатися точним розв'язком задачі $u = 5e^{-0,5t} x^{m+1} (b - x) + a + 1$.

2. Довгий стальний вал діаметром 12 см, що має температуру 20 °C, вміщено в піч, температура якої становить 820 °C. Визначити час, необхідний для нагрівання вала, якщо воно вважається закінченим, коли температура в середині вала дорівнюватиме 800 °C. Знайти температуру на поверхні вала в кінці його нагрівання. Фізичні характеристики стального вала мають такі значення: $\lambda = 45,5$ Вт/(м · К); $c = 0,46$ кДж/(кг · К); $\rho = 790$ кг/м³; $\gamma = 140$ Вт/(м² · К).

3. Довгий стальний стержень діаметром 10 см був нагрітий до температури 500 °C. Визначити час, після закінчення якого температура стержня, вміщеного в середовище з температурою 20 °C, зменшиться в п'ять разів. Фізичні характеристики сталі ті самі, що і в попередньому завданні.

4. Визначити температуру в середині і на поверхні бетонної колони діаметром 0,5 м через одну годину, якщо раптово температура навколишнього середовища знизилась з +20 до —20 °C. Фізичні параметри бетону мають такі значення: $\lambda = 0,885$ Вт/(м · К); $c = 0,882$ кДж/(кг · К); $\rho = 2100$ кг/м³; $\gamma = 8,15$ Вт/(м² · К).

5. Однорідний стальний циліндр радіусом $R = 2,5$ см має початкову температуру 5 °C. В середині циліндра існують теплові джерела, щільність розподілу яких описується функцією $F = 2 (x/R - 1) \cos 3t$, а на поверхні відбувається теплообмін з середовищем, яке має нульову температуру. Визначити температуру в середині та на поверхні циліндра через 10 хв. Фізичні характеристики стального циліндра ті самі, що і в завданні 2.

6. Гумову кулю діаметром 10 см, нагріту до температури 140 °C, вміщено в середовище з температурою 15 °C. Визначити температуру в середині і на поверхні кулі через 30 хв. Фізичні характеристики гумової кулі мають такі значення: $\lambda = 0,7$ Вт/(м · К); $c = 0,8$ кДж/(кг · К); $\rho = 1500$ кг/м³; $\gamma = 65$ Вт/(м² · К).

7. Грудочку вугілля сферичної форми, що має температуру 0 °C, вміщено в середовище з температурою 300 °C. Визначити час, який потрібен для підвищення температури в середині цієї грудочки до 100 °C. Фізичні характеристики вугілля ті самі, що і в розглянутому вище прикладі 2.

8. Визначити час, після закінчення якого температура в середині мідної кулі діаметром 10 см дорівнюватиме 10 °C, якщо поверхня кулі підтримується при нульовій температурі, а початкова температура кулі дорівнює 50 °C. Фізичні характеристики мідної кулі мають такі значення: $\lambda = 398$ Вт/(м · К); $c = 0,38$ кДж/(кг · К); $\rho = 8900$ кг/м³.

9. Алюмінієву кулю діаметром $D = 30$ см вміщено в середовище з температурою 20 °C. Визначити температуру в середині кулі через 20 хв, якщо початковий розподіл температури в ній задається функцією $u_0(x) = 100 + 20 \sin (x (D/2 - x))$. Фізичні характеристики алюмінієвої кулі мають такі значення: $\lambda = 220$ Вт/(м · К); $c = 0,89$ кДж/(кг · К); $\rho = 2700$ кг/м³; $\gamma = 300$ Вт/(м² · К).

10. Однорідна стальна куля діаметром 10 см знаходиться в середовищі з температурою 0 °C. Починаючи з моменту часу $t = 0$ температура навколишнього середовища змінюється за законом $u_{ср}(t) = 10 \sin (0,01t)$. Визначити температуру в середині кулі через 15 хв. Фізичні характеристики стальної кулі мають такі значення: $\lambda = 42,1$ Вт/(м · К); $c = 0,445$ кДж/(кг · К); $\rho = 7800$ кг/м³; $\gamma = 140$ Вт/(м² · К).

11. Визначити, через який час температура в середині алюмінієвого дроту завдовжки 20 см з нетеплопровідною зовнішньою поверхнею досягає 10 °С, якщо один кінець дроту теплоізольований, а другий підтримується при температурі 0 °С. Початкова температура дроту дорівнює 20 °С. Фізичні характеристики алюмінієвого дроту ті самі, що і в завданні 9.

12. Цегляна плита завдовжки 0,5 м має температуру 18 °С. Визначити, як зміниться температура на поверхні та в середині плити через 1 год, якщо температура навколишнього середовища раптово знизиться до 5 °С. Фізичні характеристики цегляної плити мають такі значення: $\lambda = 0{,}77$ Вт/(м · К); $c = 0{,}83$ кДж/(кг · К); $\rho = 1600$ кг/м^3; $\gamma = 7$ Вт/(м^2 · К).

13. Крізь мідний провідник, який має форму плоскої пластинки завдовжки 2 см, проходить струм, внаслідок чого виділяється тепло зі сталою щільністю 3500 кВт/м. Визначити розподіл температури в пластині через 10 с, якщо на її границі відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Початкова температура дорівнює 0 °С, температура навколишнього середовища становить 20 °С. Фізичні характеристики мідного провідника мають ті самі значення, що і в завданні 8, а $\gamma = 365$ Вт/(м^2 · К).

14. Визначити розподіл температури в мідному стержні завдовжки $l = 10$ см з нетеплопровідною зовнішньою поверхнею через 1 хв, якщо на його кінцях підтримується температура 0 °С, а початкова температура розподілена за законом $u_0(x) = 10 \sin (x(x - l)/l)$. Фізичні характеристики мідного стержня мають ті самі значення, що і в завданні 8.

§ 17. Економічні методи розв'язування двовимірного рівняння теплопровідності

Постановка задачі. Розв'язати мішану задачу для двовимірного рівняння теплопровідності в прямокутнику $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x \in \Omega, \ t \in (0, T]; \tag{1}$$

$$u(0, x_2, t) = g_1(x_2, t), \quad u(l_1, x_2, t) = g_3(x_2, t); \tag{2}$$
$$u(x_1, 0, t) = g_2(x_1, t), \quad u(x_1, l_2, t) = g_4(x_1, t),$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \tag{3}$$

де $Lu = \Delta u = L_1 u + L_2 u; \quad L_\alpha u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$

Функції $f(x_1, x_2, t)$, $g_k(x_\alpha, t)$, $k = \overline{1, 4}$, $\alpha = \overline{1, 2}$, $u_0(x_1, x_2)$ і метод розв'язування задачі (1) — (3) визначаються варіантом завдання.

Методичні вказівки. В прямокутнику $\overline{\Omega}$ побудуємо рівномірну по кожному напрямку x_α сітку $\overline{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2) : x_\alpha \in \omega_{h,\alpha}, \ \alpha = 1, 2\}$; $\overline{\omega}_{h,\alpha} = \{x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}$, а на відрізку $[0, T]$ — сітку $\overline{\omega}_\tau = \{t = t_n = n\tau, \ n = 0, 1 \ldots, M, \ \tau = T/M\}$.

Апроксимуємо рівняння (1) різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами

$$y_t = \sigma \Lambda \hat{y} + (1 - \sigma) \Lambda y + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \tag{4}$$