КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**В. А. Стоян**

# МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Навчальний посібник**

***Рекомендовано***
***Міністерством освіти і науки України***
***як навчальний посібник***
***для студентів вищих навчальних закладів,***
***які навчаються за спеціальностями***
***"Математика", "Прикладна математика", "Механіка"***

КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ 2003

УДК 517.95:519.86
ББК 26.31 4Укр я73
П 31

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук Я.Г.Савула,
д-р фіз.-мат. наук Ю.Ю.Червак

*Затверджено вченою радою факультету кібернетики*
*(протокол № 1 від 11 вересня 2002 року)*

**Стоян В.А.**

П31 моделювання та ідентифікаціядинаміки систем із розподіленими параметрами навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2003. – 187с.

ISBN 966-594-360-X

Викладено основні положення математичного моделювання динамічних процесів для систем із розподіленими параметрами. Побудовано та досліджено на точність і однозначність розв'язки початково-крайових задач, задач керування та спостереження для довільних просторово-часових областей, запропоновано розв'язки задач оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів розглядуваних систем. Велику увагу приділено висвітленню нових ідентифікаційних підходів до побудови моделей алгебраїчного, інтегрального та функціонального типів, до побудови математичних моделей динаміки розподілених просторово-часових процесів.

Посібник адресовано студентам, аспірантам, інженерам та науковим співробітникам спеціальностей "Математика", "Прикладна математика", "Механіка", "Соціальна інформатика" та близьких до них.

Відповідальний редактор, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Скопецький В.В.

**УДК 517.95:519.86**
**ББК 26.31 4Укр я73**

ISBN 966-594-360-X

# Вступ

Ідея написання цього посібника виникла в автора в процесі викладання нормативного курсу „Математичне моделювання” для фахівців спеціальності „Прикладна математика” на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, де цей курс читається об’ємом 70 год. лекційних і 35 год. лабораторних.

Крім традиційних методів розв’язання задач математичного моделювання, що читаються з використанням класичних результатів із теорії оптимізації, обчислювальної математики та чисельних методів математичної фізики, у курсі висвітлюються нові підходи до моделювання динаміки систем, які ґрунтуються на узагальненнях псевдоінверсних методів побудови та дослідження загальних розв’язків лінійних алгебраїчних систем. Цей досить універсальний та практично направлений підхід є новим і мало висвітленим у літературі. Запропонований посібник і має допомогти опанувати ідеї псевдоінверсних методів моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами.

Матеріал у даному навчальному посібнику подається не сухо академічно, а від постановки глобальної проблеми до математичної постановки задачі, якій вона еквівалентна; далі – до методів розв’язання задачі й постановки нових математичних проблем, але вже вужчого плану. На думку автора, це допоможе студентам краще зрозуміти, що треба розв’язувати на практиці, які труднощі виникають при розв’язанні практично важливих питань і як ці труднощі реально здолати. У посібнику висвітлюються не тільки задачі побудови моделей, але й методика їх розв’язання за досить загальних початково-крайових та зовнішньо-динамічних умов функціонування досліджуваних систем. Детально розглядаються нові ідентифікаційні підходи до побудови моделей алгебраїчного, інтегрального та функціонального типів із застосуванням їх до динамічних систем із розподіленими параметрами. Велика увага також приділяється методам побудови та дослідження загальних розв’язків обернених та оптимізаційних задач.

Зауважимо, що викладені в посібнику підходи до моделювання та ідентифікації динамічних систем із розподіленими параметрами успішно реалізуються студентами на лабораторних заняттях, що приносить їм задоволення та ініціює бажання глибше вивчати суть описаних проблем.

Автор був би не щирим, коли б не висловив вдячність провідному науковому співробітнику Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України професору Кириченку М.Ф. – ідейному генератору описаних тут методів та підходів до моделювання, та завідувачу відділу цього ж інституту члену-кореспонденту НАН України, професору Скопецькому В.В. – рецензенту та науковому куратору цього посібника. Автор вдячний за підтримку та доброзичливість декану факультету кібернетики Київського національного універ-

ситету імені Тараса Шевченка професору Закусилу О.К., завідувачу кафедри моделювання складних систем цього ж факультету професору Гаращенку Ф.Г., співробітникам кафедри та особливо студентам факультету кібернетики й своєму синові Віталію за виконану ними технічну роботу з підготовки посібника до друку.

# РОЗДІЛ 1

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Сформульовано проблеми дослідження динамічних систем із розподіленими параметрами в необмежених, частково обмежених та обмежених просторово-часових областях. Запропоновано методику моделювання початково-крайового та поточного стану таких систем системою фіктивних зовнішньодинамічних збурень, які діють за межами розглядуваних просторово-часових областей. Побудовано та досліджено на точність і однозначність множини моделюючих функцій (їх дискретних значень), якими за середньоквадратичним критерієм моделюється ефект впливу на стан системи дискретизованих (неперервно заданих) початково-крайових умов. Поставлено задачі моделювання динаміки досліджуваних систем при неповноті інформації про те середовище (спостереження за системою, за початковими та крайовими умовами), в якому такі системи функціонують.

## §1. Проблеми моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами

### *1.1. Диференціальна модель динаміки.*

Розглянемо систему (процес), стан якої (якого) у просторово-часовій області $S_0^T \overset{\Delta}{=} \{(x,t) \overset{\Delta}{=} s : x \overset{\Delta}{=} (x_1,..,x_\nu) \in S_0,\ t \in [0,T]\}$, обмеженій контуром $\Gamma$, визначається вектор-функцією $y(s) = col(y_1(s),...,y_n(s))$. Для більшості фізико-технічних систем (процесів) після вивчення й формалізації їх суті вдається побудувати залежність вектор-функції y(s) від вектор-функції $u(s) = col(u_1(s),...,u_m(s))$ зовнішньодинамічних факторів, які в області $S_0^T$ діють на систему. У більшості випадків ця залежність записується системою диференціальних рівнянь, яку в подальшому будемо записувати у вигляді:

$$L_1(\partial_x, \partial_t) y(x,t) = L_2(\partial_x, \partial_t) u(x,t)\,, \tag{1.1}$$

де $\partial_x = (\partial_{x_1},..,\partial_{x_\nu})$, $\partial_t$ — вектор частинних похідних за просторовими координатами $x_i (i = \overline{1,\nu})$ та похідна за часом t,

$$\begin{aligned} L_1(\partial_x, \partial_t) &= \left[ L_{1ij}(\partial_x, \partial_t) \right]_{i,j=1}^{i=N;\, j=n}, \\ L_2(\partial_x, \partial_t) &= \left[ L_{2ij}(\partial_x, \partial_t) \right]_{i,j=1}^{i=N;\, j=m} \end{aligned} \tag{1.2}$$

– задані матричні диференціальні оператори.

Опис динаміки системи співвідношенням (1.1) буде не повним, якщо не врахувати початковий стан системи та вплив оточуючого її середовища (довкілля), який проявляється через граничний стан контуру $\Gamma$ області $S_0$. Вплив початково-крайових збурень на стан системи в подальшому будемо описувати наступними співвідношеннями:

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} = Y_r^0(x)\,,\ x \in S_0 \ \ (r = \overline{1, R_0}); \tag{1.3}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma; t\in[0,T]} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)\,,\ x^\Gamma \in \Gamma \ \ (\rho = \overline{1, R_\Gamma}), \tag{1.4}$$

де $L_r^0(\partial_t), L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ – задані матричні оператори, а $Y_r^0(x)$ та $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$ – задані вектори та векторні функції, розмірність яких, як правило, узгоджується з розмірністю та порядком матричних диференціальних операторів $L_1(\partial_x, \partial_t)$ та $L_2(\partial_x, \partial_t)$.

Якщо модель системи визначена співвідношеннями (1.1) – (1.4) і адекватно описує динаміку фізико-технічного об'єкта (процесу), то можна ставити і розв'язувати:

1. Прямі задачі динаміки – визначення вектор-функції стану y(s) при заданих зовнішньодинамічних факторах $u(s)$, $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$;

2. Обернені задачі динаміки – визначення вектор-функцій $u(s)$, $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$, які б згідно з певним критерієм дозволяли отримувати задану картину змін вектор-функції y(s) (або наближатися до неї).

Для більшості класичних систем моделі вигляду (1.1) – (1.4) побудовані та апробовані практикою, а відповідні математичні теорії дозволяють розв'язувати як прямі, так і обернені задачі динаміки таких систем.

Проблеми виникають там, де через складність системи (процесу), модель (1.1) – (1.4) не повна (немає узгодженості між розмірністю й порядком системи (1.1) та розмірністю й кількістю співвідношень (1.3), (1.4)), неадекватно описує динаміку розглядуваної системи, або середовище, в якому функціонує система (протікає процес), не зовсім вивчене й формалізоване у вигляді (1.3), (1.4). Розв'язок проблеми – у настройці моделі (1.1) та умов (1.3), (1.4) на реальну динамічну картину, яка спостерігається для системи. Це виконується:

1. Шляхом ідентифікації параметрів співвідношень (1.1), (1.3), (1.4) на експериментальних даних, якщо система (процес) формалізована моделлю (1.1) – (1.4);

2. Моделюванням зовнішньодинамічної обстановки, якщо співвідношення (1.3), (1.4) важко формалізуються, або характеристики $u(s)$, $Y_r^0(x)$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$ зовнішньодинамічного оточення системи не доступні (частково доступні) для вимірювання.

Практика роботи з моделями (1.1) – (1.4) вимагає вміння ставити та розв'язувати такі задачі:

$$\int_{S_0^T} \|y(s)-Y(s)\|^2 ds \to \min_{\vec{a}} ; \tag{1.5}$$

$$\int_{S_0^T} \|y(s)-Y(s)\|^2 ds \to \min_{u_0(s),u_\Gamma(s),u(s)} , \tag{1.6}$$

де $Y(s)$ –спостережуваний стан системи, $\vec{a}$ – вектор параметрів моделі, від яких залежать матричні оператори $L_1(\partial_x,\partial_t)$, $L_2(\partial_x,\partial_t)$, $L_r^0(\partial_t)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$, а $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ – фіктивні зовнішньодинамічні фактори, якими моделюється ефект впливу на вектор-стан y(s) системи початково-крайових умов (1.3), (1.4).

Методи постановки та розв'язання задач (1.5), (1.6) для різних режимів і умов функціонування системи (1.1) – (1.4) розглянуто далі.

*1.2. Інтегральна модель динаміки.*

Практика роботи із системами, що функціонують у певній просторово-часовій області, показала доцільність вибору моделі динаміки у формі (1.1) – (1.4) і довела дієвість математичних методів розв'язання прямих та обернених задач динаміки таких систем. Розв'язки ж задач (1.5), (1.6) для систем, динаміка яких описується моделлю (1.1) – (1.4), є складними. Тому для розв'язання задач (1.5), (1.6) оберемо інтегральну модель, яку запишемо у вигляді:

$$y(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds' , \tag{1.7}$$

де $G(s-s')$ – відома матрична функція. Явна аналітична залежність y(s) від u(s) спрощує роботу з моделлю та алгоритми розв'язання задач (1.5), (1.6).

Співвідношення (1.7), на відміну від співвідношень (1.1) – (1.4), з фізико-технічних міркувань є складним для побудови. Щоб отримати його з моделі (1.1) – (1.4), до вигляду (1.7) необхідно призвести аналітичний розв'язок початково-крайової задачі (1.1) – (1.4). Це можливо тільки для деяких нескладних моделей і досить простих умов їх функціонування. Методи, що розглядаються далі, спрощують розв'язок цієї проблеми. Для початку запропонуємо методи побудови моделі (1.7) для систем, які функціонують у необмеженій просторово-часовій області:

$$S_\infty^\infty = (s : x \in R^\nu ; -\infty < t < \infty) . \tag{1.8}$$

Побудована для цього випадку залежність

$$y_\infty(s) = \int_{S_\infty^\infty} G(s-s')u(s')ds' \tag{1.9}$$

вектор-функції стану системи від зовнішньодинамічних збурень u(s) буде розв'язком рівняння (1.1) без урахування початково-крайових умов (1.3), (1.4). Матрична функція $G(s-s')$ у цьому розв'язку буде функцією Гріна такою, що

$$L_1(\partial_x,\partial_t)\,G(s-s')=L_2(\partial_x,\partial_t)\Delta(s-s'), \tag{1.10}$$

де $\Delta\left(s-s'\right)=diag(\delta(s-s'),\ i=\overline{1,m})$, а δ(s-s') – так звана $\delta$ –функція, або функція одиничного джерела.

Ураховуючи, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(s-s')ds'=1;\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}u(s')\delta(s-s')ds'=u(s),$$

отримуємо, що дійсно $y_\infty(s)$ у формі (1.9) задовольнятиме рівнянню (1.1) в області $S_\infty^\infty$.

Функцію стану y(s) системи (1.1) – (1.4), що функціонує в замкненій просторово-часовій області $S_0^T$, або так звану інтегральну модель динаміки системи, побудуємо у вигляді

$$y(s)=y_\infty(s)+y_0(s)+y_\Gamma(s), \tag{1.11}$$

де $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ – складові вектор-функції y(s) системи, якими визначається внесок початково-крайових умов (1.3), (1.4) у загальну картину динаміки системи. При цьому вектор-функції $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ оберемо у вигляді

$$y_0(s)=\int\limits_{-\infty}^{0}dt'\int\limits_{S_0}G(s-s')u_0(s')dx'; \tag{1.12}$$

$$y_\Gamma(s)=\int\limits_{S_\infty\backslash S_0}dx'\int\limits_{0}^{T}G(s-s')u_\Gamma(s')dt', \tag{1.13}$$

де $S_\infty\equiv R^\nu$, а $u_0(s')$ та $u_\Gamma(s')$ – фіктивні зовнішньодинамічні збурення, які (див. (1.12), (1.13)) "діють" за межами часової та просторової областей відповідно і визначаються з умови, щоб з урахуванням (1.11) виконувалися співвідношення (1.3), (1.4) при заданих $Y_r^0(x),\ Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)$. Співвідношення ж (1.1) із зображенням вектор-функції стану y(s) у вигляді (1.11) будуть виконуватися. Це легко перевіряється з урахуванням властивостей (1.10) функції $G(s-s')$, δ-функції $\delta(s-s')$ та особливостей визначення функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ в (1.12) та (1.13).

### *1.3. Проблеми переходу від диференціальної форми моделі динаміки системи до інтегральної.*

Заміна класичної диференціальної форми (1.1) моделі динаміки систем із розподіленими параметрами інтегральною формою (1.9), (1.11) – (1.13), яка може бути зручнішою при розв'язанні задач (1.5), (1.6), викликає чималі труднощі, які полягають у:

1) побудові матричної функції Гріна $G(s-s')$ рівняння (1.1) для необмеженої просторово-часової області $S_\infty^\infty$;

2) побудові вектор-функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, якими б моделювалися початково-крайові умови (1.3), (1.4).

Математично перша проблема зводиться до розв'язання рівняння (1.10). Розв'язок другої визначатиметься системою інтегральних рівнянь:

$$\int_{-\infty}^{0} dt' \int_{S_0} L_r^0(\partial_t) G(s-s')\big|_{t=0} u_0(s')ds' + \int_{S_\infty \backslash S_0} dx' \int_0^T L_r^0(\partial_t) G(s-s')\big|_{t=0} u_r(s')ds' = Y_r^0(x) - \int_{S_0^T} L_r^0(\partial_t) G(s-s')\Big|_{t=0} u(s')ds' \overset{\Delta}{=} \overline{Y}_r^0(x) \quad (r=\overline{1,R_0}) \tag{1.14}$$

$$\int_{-\infty}^{0} dt' \int_{S_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x) G(s-s')\big|_{x=x^\Gamma} u_0(s')ds' + \int_{S_\infty \backslash S_0} dx' \int_0^T L_\rho^\Gamma(\partial_x) G(s-s')\big|_{x=x^\Gamma} u_\Gamma(s')ds' = Y_\rho^\Gamma(x_\Gamma, t) - \int_{S_0^T} L_\rho^\Gamma(\partial_x) G(s-s')\Big|_{x=x^\Gamma} u(s')ds' \overset{\Delta}{=} \overline{Y}_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}). \tag{1.15}$$

При цьому мається на увазі, що функція зовнішньодинамічних збурень $u(s)$ відома.

Варіанти розв'язання цих двох проблем ми розглянемо далі, однак зауважимо, що в деяких випадках функціонування системи (1.1) інтегральні співвідношення (1.14), (1.15) спрощуються. Це випадки, коли при розгляді динаміки системи (1.1) можна знехтувати початковим або крайовим збуренням. Для цих двох випадків співвідношення (1.14), (1.15) спрощуються до таких:

1) для динаміки системи без урахування крайових умов (у необмеженій просторовій області):

$$\int_{-\infty}^{0} dt' \int_{S_0} L_r^0(\partial_t) G(s-s')\big|_{t=0} u_0(s')ds' = \overline{Y}_r^0(x) \quad (r=\overline{1,R_0}); \tag{1.16}$$

2) для динаміки системи без урахування початкового стану (у необмеженій часовій області):

$$\int_{S_\infty \backslash S_0} dx' \int_0^T L_\rho^\Gamma(\partial_x) G(s-s')\Big|_{x=x^\Gamma} u_\Gamma(s')ds' = \overline{Y}_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}) . \tag{1.17}$$

Розглянемо три варіанти обернення співвідношень (1.14) – (1.17):

дискретизованих по s та $s'$;

дискретизованих по s;

дискретизованих по $s'$.

Ці варіанти зводяться до побудови розв'язку алгебраїчних, інтегральних та функціональних рівнянь відповідно:

$$C\bar{u} = \bar{y}; \tag{1.18}$$

$$\int A(s')\bar{u}(s')ds' = \bar{y}; \tag{1.19}$$

$$B(s)\bar{u} = \bar{y}(s)\ . \tag{1.20}$$

Випишемо вирази матриці C, векторів $\bar{u}$ та $\bar{y}$, а також матричних функцій $A(s')$ та $B(s)$ для задачі (1.14), (1.15).

1). У рівнянні (1.18):

$$C = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix};\ \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_\Gamma \end{pmatrix};\ \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

а

$$G_{11} = col((str(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{t=0,x=x_l^0}, m=\overline{1,M_0}), l=\overline{1,L_0}), r=\overline{1,R_0});$$

$$G_{12} = col((str(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{t=0,x=x_l^0}, m=\overline{1,M_\Gamma}), l=\overline{1,L_0}), r=\overline{1,R_0});$$

$$G_{21} = col(((str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{t=t_k,x=x_l^\Gamma}, m=\overline{1,M_0}), l=\overline{1,L_\Gamma}), k=\overline{1,K})\ , \rho=\overline{1,R_\Gamma});$$

$$G_{22} = col(((str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{t=t_k,x=x_l^\Gamma}, m=\overline{1,M_\Gamma}), l=\overline{1,L_\Gamma}), k=\overline{1,K}), \rho=\overline{1,R_\Gamma});$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= col((u_0(s_m^0), m=\overline{1,M_0}), l=\overline{1,L_\Gamma}) \\ \bar{u}_\Gamma &= col(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m=\overline{1,M_\Gamma}); \\ \bar{y}_0 &= col((Y_r^0(x_l^0,0), l=\overline{1,L_0}),\ \ r=\overline{1,R_0}); \\ \bar{y}_\Gamma &= col(((Y_\rho^\Gamma(x_l^\Gamma,t_k),\ l=\overline{1,L_\Gamma}), k=\overline{1,K}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Тут $K, L_0, L_\Gamma, M_0, M_\Gamma$ – задані значення кількості точок дискретизації $t_k \in [0,T]$, $x_l^0 \in S_0$, $x_l^\Gamma \in \Gamma$, $s_m^0 \in S_0^{\infty 0} = S_0 \times (-\infty, 0]$; $s_m^\Gamma \in S_{\infty 0}^T \triangleq (S_\infty \setminus S_0) \times [0,T]$.

2). У рівнянні (1.19):

$$A(s') = \begin{pmatrix} G_{11}^A(s') & G_{12}^A(s') \\ G_{21}^A(s') & G_{22}^A(s') \end{pmatrix};$$
$$\bar{u}(s') = \begin{pmatrix} u_0(s') \\ u_\Gamma(s') \end{pmatrix};\quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

де $u_0(s')$ $\left(s'\in S_0^{\infty 0}\right)$ та $u_\Gamma(s')$ $\left(s'\in S_{\infty 0}^T\right)$ – моделюючі вектор-функції, уведені в (1.12), (1.13), $\bar{y}_0$ та $\bar{y}_\Gamma$ визначені в (1.22), а

$$G_{1i}^A(s')=col\left(\left(\left(L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},l=\overline{1,L_0}\right),r=\overline{1,R_0}\right)\right); \qquad (1.24)$$

$$G_{2i}^A(s')=col\left(\left(\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{\substack{t=t_k\\x=x_l^\Gamma}},l=\overline{1,L_\Gamma}\right),k=\overline{1,K}\right),\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right)\right).$$

Тут $s'\in S_0^{\infty 0}$ при i=1 та $s\in S_{\infty 0}^T$ при i=2.

3). У рівнянні (1.20):

$$B(s)=\begin{pmatrix}G_{11}^B(s) & G_{12}^B(s)\\ G_{21}^B(s) & G_{22}^B(s)\end{pmatrix};$$

$$\bar{u}=\begin{pmatrix}\bar{u}_0\\ \bar{u}_\Gamma\end{pmatrix};\ \bar{y}(s)=\begin{pmatrix}Y^0(x)\\ Y^\Gamma(x,t)\end{pmatrix}, \qquad (1.25)$$

де

$$Y^0(x)=col(Y_r^0(x),r=\overline{1,R_0}) \quad (x\in S_0)\cdot$$

$$Y^\Gamma(x,t)=col(Y_\rho^\Gamma(x,t),\rho=\overline{1,R_\Gamma}) \quad (x\in\Gamma,\ t\in[0,\ T]),$$

$\bar{u}_0$ та $\bar{u}_\Gamma$ визначені в (1.22), а

$$G_{11}^B(s)=col\left(str\left(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{t=0},m=\overline{1,M_0}\right),r=\overline{1,R_0}\right);$$

$$G_{12}^B(s)=col\left(str\left(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{t=0},m=\overline{1,M_\Gamma}\right),r=\overline{1,R_0}\right); \qquad (1.26)$$

$$G_{21}^B(s)=col\left(str\left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{x=x^\Gamma},m=\overline{1,M_0}\right),\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right);$$

$$G_{22}^B(s)=col\left(str\left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{x=x^\Gamma},m=\overline{1,M_\Gamma}\right),\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right).$$

Вирази (1.21), (1.23) та (1.25) для матриці C векторів $\bar{u},\bar{y}$, матричних функцій $A(s'),B(s)$ спрощуються для задач (1.16) та (1.17) і, з урахуванням позначень (1.22), (1.24), (1.26), записуються у вигляді:

1). Для задачі (1.16):

$$C=G_{11};\ \bar{u}=\bar{u}_0;\ \bar{y}=\bar{y}_0; \qquad (1.27)$$

$$A(s')=G_{11}^A(s');\ \bar{u}(s')=u_0(s');\ \bar{y}=\bar{y}_0;$$

$$B(s)=G_{11}^B(s);\ \bar{u}=\bar{u}_0;\ \bar{y}(s)=Y^0(x);$$

2). Для задачі (1.17):

$$C = G_{22};\ \overline{u} = \overline{u}_{\Gamma};\ \overline{y} = \overline{y}_{\Gamma}; \tag{1.28}$$
$$A(s') = G_{22}^{A}(s');\ \overline{u}(s') = u_{\Gamma}(s');\ \overline{y} = \overline{y}_{\Gamma};$$
$$B(s) = G_{22}^{B}(s);\ \overline{u} = \overline{u}_{\Gamma};\ \overline{y}(s) = Y^{\Gamma}(x,t)\ .$$

Отже, проблема переходу від диференціального запису моделі динаміки у формі (1.1) – (1.4) до інтегрального зображення у формі (1.9), (1.11) – (1.13) буде розв'язана, якщо:

1) буде побудована матрична функція Гріна $G(s-s')$ для необмеженої просторово-часової області $S_{\infty}^{\infty}$;

2) будуть запропоновані методи побудови розв'язків (або наближень до них) рівнянь (1.18) – (1.20).

Ці два питання детально обговорюватимуться далі.

### *1.4. Проблеми ідентифікації параметрів моделі динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Як відзначалося вище, не завжди вдається адекватно описати динаміку системи; особливо це стосується складних для формалізації процесів. У таких випадках диференціальні оператори рівняння (1.1), а інколи й співвідношень (1.3) та (1.4), можуть залежати від невідомих параметрів. З цього випливає, що в загальному випадку вигляд цих операторів може бути таким:

$$L_1(a_1,\partial_x,\partial_t)\quad L_2(a_2,\partial_x,\partial_t)\quad L_r^0(a_0,\partial_t)\quad L_{\rho}^{\Gamma}(a_{\Gamma},\partial_x).$$

Тут $a_1, a_2, a_0, a_{\Gamma}$ – вектори параметрів моделі, які знаходяться з експерименту.

Ураховуючи, що від $\vec{a} \overset{\Delta}{=} (a_1, a_2, a_0, a_{\Gamma})$ залежатиме функція Гріна $G(s-s')$, за умови, що вдалося обернути співвідношення (1.18)-(1.20) так, що

$$\begin{aligned} \overline{u} &= A^{+}\overline{y}; \\ u(s) &= A^{(+)}(s)\overline{y}; \\ \overline{u} &= \int B^{(+)}(s)y(s)ds, \end{aligned} \tag{1.29}$$

та позначаючи через $((s_i^*, y_i^* \overset{\Delta}{=} y(s_i^*)), i=\overline{1,P})$ набір експериментальних даних, проблему ідентифікації параметрів $\vec{a}$ зведемо до розв'язання задачі:

$$\sum_{i=1}^{P} \left\| y(s_i,\vec{a}) - y_i^* \right\|^2 \to \min_{\vec{a}}, \tag{1.30}$$

де

$$y(s,\vec{a}) = B(s)\overline{u} \tag{1.31}$$

або

$$y(s,\vec{a}) = \int G(s-s')u(s')ds'. \qquad (1.32)$$

Співвідношення (1.29) є дуже спрощеними зображеннями розв'язку рівнянь (1.18) – (1.20). Однак алгоритм розв'язання задачі після побудови обернень типу (1.29) ми запропонуємо.

### *1.5. Проблеми моделювання зовнішньодинамічного оточення динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Часто виникає необхідність, знаючи структуру моделі, відновити значення $u(s)$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ зовнішньодинамічного збурення, початкових та крайових збурюючих факторів – усіх разом, чи деяких із них. Виходячи з наведених вище експериментальних даних $((s_i^*, y_i^*),\ i=\overline{1,P})$ та враховуючи, що вплив початково-крайових збурень на стан системи згідно з (1.12), (1.13) моделюється функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, зведемо проблему до розв'язання задачі

$$\sum_{i=1}^{P}\left\|y(s_i^*)-y_i^*\right\|^2 \to \min_{u(s),u_0(s),u_\Gamma(s)}. \qquad (1.33)$$

Тут y(s) – вектор-функція стану системи, яка співвідношеннями (1.11) – (1.13) пов'язана з $u(s),\ u_0(s),\ u_\Gamma(s)$.

З використанням методики обернення співвідношень (1.18) – (1.20) ця задача буде розв'язана нижче.

### 1.6. Задача оптимального розміщення спостерігачів та керувачів.

У процесі переходу від систем (1.14) – (1.17) до рівнянь (1.18) – (1.20) виконувалася дискретизація початково-крайових умов і керуючої вектор-функції u(s) точками $(x_l^0, 0),\ (x_l^\Gamma, t_k)$ та $s_m^0, s_m^\Gamma$ відповідно. Точками $(s_i^*, y_i^*)$ дискретизувався й експеримент.

Вибір цих точок через розв'язки (1.29) рівнянь (1.18) – (1.20) впливає на величину

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{P}\left\|y(s_i^*)-y_i^*\right\|^2,$$

тому має сенс постановка задачі оптимізації процедури вибору точок дискретизації шляхом мінімізації величини $\varepsilon^2$. Цю задачу буде розв'язано після побудови алгоритму розв'язання задач (1.30) та (1.33).

Ми окреслили коло тих проблем і задач, розв’язання яких розглядатимемо далі.

# §2. Побудова матричної функції Гріна та інтегральної моделі динаміки систем із розподіленими параметрами в необмеженій просторово-часовій області

### *2.1. Функція Гріна динаміки систем із розподіленими параметрами в необмеженій просторово-часовій області.*

Розглянемо методику побудови функції Гріна $G(s-s')$ системи (1.1) у необмеженій просторово-часовій області $S_\infty^\infty$. При цьому будемо виходити із зображення вектор-функції стану $y(s)$ у вигляді (1.9), (1.10), а також із того, що шукана матрична функція $G(s\text{-}s')$ є розв'язком рівняння (1.1), який відповідає зосередженим просторово-часовим збуренням одиничної інтенсивності, тобто випадку, коли

$$u(s)=col(\delta(s\text{-}s'),\ i=\overline{1,m}).$$

Якщо позначити через

$$U(s)=(u^{(l)}(s),\ l=\overline{1,m});$$

$$Y(s)=(\ y^{(l)}(s)\ ,\ l=\overline{1,m}),$$

де

$$\sum_{l=1}^{m} u^{(l)}(s)=u(s);$$

$$\sum_{l=1}^{m} y^{(l)}(s)=y(s);$$

$$L_1(\partial_x,\partial_t)y^{(l)}(s)=L_2(\partial_x,\partial_t)u^{(l)}(s)\quad (l=\overline{1,m}),$$

то матимемо, що

$$L_1(\partial_x,\partial_t)Y(s)=L_2(\partial_x,\partial_t)U(s)\ ,$$

а

$$L_1(\partial_x,\partial_t)G(s-s')=L_2(\partial_x,\partial_t)\Delta(s-s'), \tag{2.1}$$

де $L_1(\cdot),\ L_2(\cdot),\ \Delta(\cdot)$ – визначені вище матричні диференціальні оператори та матрична функція одиничного джерела.

Це означає, що матрична функція $G(s-s')$ відповідає фізичному змісту задачі, а розв'язок її дійсно зображується співвідношенням (1.9).

Для розв'язання (2.1) будемо виходити з того, що

$$\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-t')}d\lambda, \tag{2.2}$$

а

$$\partial_t^n\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)^n e^{i\lambda(t-t')}d\lambda\quad n\in Z. \tag{2.3}$$

Звідси для всякої аналітичної функції $L(x,t)$ отримуємо:

$$L(\partial_x,\partial_t)\delta(s-s')=L(i\lambda,i\mu)\delta(s-s'); \qquad (2.4)$$
$$L(\partial_x^2,\partial_t^2)\delta(s-s')=L(-\lambda^2,-\mu^2)\delta(s-s'),$$

де $\lambda=\lambda_1,...,\lambda_\nu$.

З урахуванням (2.4) для рівняння (1.10) у необмеженій просторово-часовій області $S_\infty^\infty$ маємо:

$$G(s-s')=\frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L_2(i\lambda,i\mu)}{L_1(i\lambda,i\mu)}\prod_{k=1}^{\nu}e^{i\lambda_k(x_k-x_k')}e^{i\mu(t-t')}d\lambda d\mu, \qquad (2.5)$$

де $d\lambda=d\lambda_1,...,d\lambda_\nu$.

Позначивши через $\overline{L}_1(i\lambda,i\mu)$ функцію, спряжену до $L_1(i\lambda,i\mu)$, з (2.5) знаходимо:

$$G(s-s')=\frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L(\lambda,\mu)}\times \qquad (2.6)$$
$$\times\mathrm{Re}\left(L_2(i\lambda,i\mu)\overline{L}_1(i\lambda,i\mu)\prod_{k=1}^{\nu}e^{i\lambda_k(x_k-x_k')}e^{i\mu(t-t')}\right)d\lambda d\mu,$$

де $L(\lambda,\mu)=L_1(i\lambda,i\mu)\overline{L}_1(i\lambda,i\mu)$.

Поширюючи співвідношення (2.4), (2.5) на систему (1.1), знаходимо, що функція Гріна цієї системи в необмеженій просторово-часовій області $S_\infty^\infty$ може бути подана у вигляді:

$$G(s-s')=\frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{L(\lambda,\mu)}\mathrm{Re}(\overline{L}_1(i\lambda,i\mu)L_2(i\lambda,i\mu)\times \qquad (2.7)$$
$$\times\prod_{k=1}^{\nu}e^{i\lambda_k(x_k-x_k')}e^{i\mu(t-t')})d\lambda d\mu.$$

Запис (2.7) для функції Гріна $G(s-s')$ спрощується, якщо модель (1.1) динаміки системи записується співвідношенням

$$L_1(\partial_x^2,\partial_t^2)y(x,t)=L_2(\partial_x^2,\partial_t^2)u(x,t), \qquad (2.8)$$

де $\partial_x^2=(\partial_{x_1}^2,...,\partial_{x_\nu}^2)$.

Покладаючи на заміну (2.2)

$$\delta(t-t')=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\lambda(t-t')d\lambda$$

та враховуючи, що

$$\partial_t^{2n}\delta(t-t')=(-\lambda^2)^n\delta(t-t') \qquad (n\in Z),$$

функцію Гріна системи (2.8) запишемо у вигляді:

$$G(s-s')=\frac{1}{\pi^{\nu+1}}\int_0^\infty...\int_0^\infty\frac{L_2(-\lambda^2,-\mu^2)}{L_1(-\lambda^2,-\mu^2)}\times\prod_{k=1}^{\nu}\cos\lambda_k(x_k-x_k)\cos\mu(t-t)d\lambda d\mu. \qquad (2.9)$$

### *2.2. Інтегральна модель динаміки систем із розподіленими параметрами в необмеженій просторово-часовій області.*

Будемо виходити з того, що

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int u(x',t')\delta(x-x',t-t')dx'dt'. \qquad (2.10)$$

З урахуванням (2.10) та співвідношень (2.1), (2.3) робимо висновок, що диференціальну модель (1.1) у необмеженій просторово-часовій області $S_{\infty}^{\infty}$ можна замінити інтегральною:

$$y(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int G(x-x',t-t')u(x',t')dx'dt',$$

де $G(x-x',t-t')$ – функція Гріна, визначена нами в (2.7).

### *2.3. Приклади.*

Проілюструємо використання запропонованої вище методики побудови функції Гріна та розв'язання задач динаміки систем із розподіленими параметрами для побудови розв'язків деяких класичних рівнянь.

*Приклад 1*. Гармонічне рівняння:

$$x''(t)+\alpha^2x(t)=u(t) \quad t\ge 0; \qquad x(0)=0. \qquad (2.11)$$

Виходячи з (2.8) та враховуючи обмеження на $x,t$, розв'язок рівняння (2.11) знаходимо у вигляді:

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}u(t')\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda(t-t')}{\alpha^2-\lambda^2}d\lambda dt'=\frac{1}{\alpha}\int_0^{t}u(t')\sin\alpha(t-t')dt',$$

що повністю узгоджується з розв'язком задачі, отриманим класичними методами.

*Приклад 2.* Розглянемо задачу знаходження прогину $y(x)$ нескінченного за довжиною пружного стержня на пружній основі, який завантажено розподіленими навантаженнями $q(x)$. Функція прогину такого стержня задовольняє рівняння

$$y^{(IV)}(x)+4a^2y(x)=q(x), \qquad (2.12)$$

де $4a^2=\dfrac{k}{EI}$ ($k$ – коефіцієнт постелі основи, $E$ – модуль пружності, $I$ – момент інерції поперечного перерізу стержня).

Згідно з викладеним вище, отримуємо:

$$y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}q(x')G(x-x')dx', \qquad (2.13)$$

$$G(x-x')=\frac{1}{\pi EI}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda(x-x')}{\lambda^4+4a^2}d\lambda=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{kEI}}e^{-a(x-x')}[\sin a(x-x')+\cos a(x-x')].$$

*Приклад 3*. Розглянемо задачу про коливання струни, зміщення $y_\infty(x,t)$ точок якої визначається рівнянням:

$$\frac{\partial^2 y_\infty(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 y_\infty(x,t)}{\partial x^2}=u(x,t), \tag{2.14}$$

де $-\infty<x<+\infty,\ \ t>0,\ \ a^2$ – задана константа.

Отримуємо:

$$y_\infty(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_0^t u(x',t')G(x-x',t-t')dt',$$

де

$$G(x-x',t-t')=\frac{1}{4a}[sign((x-x')+a(t-t'))-$$
$$-sign((x-x')-a(t-t'))].$$

Звідси

$$y_\infty(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'\int_{-\infty}^{t}dt'u(x',t')\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\cos\lambda(t-t')\cos\mu(x-x')}{a^2\mu^2-\lambda^2}d\lambda d\mu=$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^t dt'\int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')}u(x',t')dx'. \tag{2.15}$$

Розв’язок (2.15) задовольняє рівняння (2.14) та нульові початкові умови.

Розглянемо ілюстрацію розв’язку (2.15) для деяких найпростіших випадків функції $u(x,t)$.

*Випадок 1.* Якщо

$$u(x,t)=\delta(x)\delta(t), \tag{2.16}$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака, то

$$y_\infty(x,t)=\frac{1}{4a}[sign(x+at)-sign((x-at)]=$$
$$=\frac{1+sign(|x|-at)}{4a}. \tag{2.17}$$

Розв'язок (2.17) добре ілюструє процес поширення (із швидкістю $a$) зосередженого силового імпульсу (2.16) в обидва боки від точки $x=0$ його прикладання.

*Випадок 2*. Якщо

$$u(x,t)=\begin{cases} U(x)\delta(t) & \text{при } x\in\Omega_x; \\ 0 & \text{при } x\notin\Omega_x; \end{cases} \tag{2.18}$$

де $U(x)$ – задана функція, то

$$y_\infty(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}U(x')dx'. \tag{2.19}$$

Аналізуючи (2.19), бачимо, що на динаміку точки $x\in(-\infty,+\infty)$ у момент часу $t>0$ впливають тільки збурення $U(x')$ $x'\in\Omega_x$, координата $x'$ прикладання яких задовольняє умову $|x-x'|<at$, що узгоджується з хвильовим принципом поширення збурення (2.18) розглядуваної струни.

*Випадок 3*. Якщо для $t>0$

$$u(x,t)=\begin{cases} U(t)\delta(x) & \text{при } t\in\Omega_t; \\ 0 & \text{при } t\notin\Omega_t; \end{cases} \tag{2.20}$$

де $U(t)$ – задана функція, то

$$y_\infty(x,t)=\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{t-x/a}U(t')dt'. \tag{2.21}$$

Аналіз (2.21) свідчить, що на динаміку точки $x\in(-\infty,+\infty)$ у момент часу $t>0$ зосереджене збурення (2.20) інтенсивності $U(t)$ впливає тільки за умови, коли хвильовий процес, викликаний ним, дійде до точки $x$, що добре узгоджується з фізикою розглядуваного процесу.

*Приклад 4*. Якщо замість струни взяти пружний стержень, то поперечні коливання його будуть описуватися рівнянням:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}=u(x,t), \tag{2.22}$$

де $y(x^*,t^*),(|x^*|<\infty,t^*>0)$ – відхилення осьової лінії стержня в точці $x=x^*$ для $t=t^*$, $a^2$ – задана константа, а $u(x,t)$ – зовнішня збурююча сила.

Для цього випадку, згідно з (1.7), (2.7),

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^x\int\limits_0^t u(x',t')\int\limits_0^\infty\frac{\cos\xi^2 a(t-t')}{\xi^2}f(\xi,x-x')d\xi dx'dt',$$

де

$$f(\xi,x-x')=sign\xi(x-x')-e^{-\xi(x-x')}. \tag{2.23}$$

Зауважимо, що побудова розв'язку рівняння (1.1) справа не проста і в літературі такі розвя'зки знаходимо, як правило, тільки для частинних випадків зовнішніх сил $u(x,t)$.

Наведені приклади ілюструють ефективність викладеного вище підходу до побудови розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних для необмежених часово-просторових областей.

# § 3. Дискретний варіант побудови та дослідження загального розв'язку задачі моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами

*3.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Повернемося до питання побудови моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ в інтегральних співвідношеннях (1.14), (1.15), якими замикалася проблема переходу від диференціальної моделі динаміки системи у формі (1.1) – (1.4) до її інтегрального зображення у вигляді (1.9) – (1.13). При цьому обмежимося самим простим випадком, коли і початково-крайові умови (1.3) – (1.4), і моделюючі функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ дискретизовані. Як і в (1.22), дискретизацію виконаємо точками:

$s_m^0$ $(m=\overline{1,M}_0)$ – для функцій $u_0(s)$ $(s, s_m^0 \in S_0^{\infty 0})$;

$s_m^\Gamma$ $(m=\overline{1,M}_\Gamma)$ – для функцій $u_\Gamma(s)$ $(s, s_m^\Gamma \in S_{\infty 0}^\Gamma)$;

$x_l^0$ $(l=\overline{1,L_0})$ – для функцій $Y_r^0(x)$ $(x_l^0 \in S_0)$;

$(x_l^\Gamma, t_k)$ $(l=\overline{1,L}_\Gamma; k=\overline{1,K})$ для функцій $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t)$

$(x_l^\Gamma, x^\Gamma \in \Gamma; t_k, t \in [0,T])$.

Як показано в п. 1.3, проблема знаходження векторів

$$\bar{u}_0 = col(u_0(s_m^0), m=\overline{1,M}_0) \tag{3.1}$$

та

$$\bar{u}_\Gamma = col(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m=\overline{1,M}_\Gamma) \tag{3.2}$$

моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ при відомих значеннях

$$\bar{y}_0 = col((Y_r^0(x_l^0), l=\overline{1,L_0}), r=\overline{1,R_0}) \tag{3.3}$$

та

$$\bar{y}_\Gamma = col(((Y_\rho^\Gamma(x_l^\Gamma, t_k), l=\overline{1,L_\Gamma}), k=\overline{1,K}), r=\overline{1,R_\Gamma}) \tag{3.4}$$

функцій $Y_r^0(x)$ і $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ зводиться (див. п. 1.3.) до побудови та дослідження загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Cu = y\,, \tag{3.5}$$

де

$u = \bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma$, або $col(\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma)$;

$y = \bar{y}_0, \bar{y}_\Gamma$, або $col(\bar{y}_0, \bar{y}_\Gamma)$

для початкової (задачі Коші), крайової та початково-крайової задач відповідно, а матриця $C$ для кожної із задач визначена вище (формули (1.21), (1.27), (1.28)). Під загальним розв'язком тут розуміється класичний розв'язок, якщо він є (єдиний, або певний із множини розв'язків), або найкраще середньоквадратичне наближення до нього (однозначне, або певне з множини можливих наближень), якщо точного розв'язку не існує.

### *3.2. Псевдообернені матриці та проблеми побудови загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

Зупинимося на проблемах обернення лінійної алгебраїчної системи (3.5), в якій для зручності будемо вважати, що $C-\left(L\times M\right)$-вимірна матриця, а $y$ та $u$ – заданий та шуканий $L$- та $M$-вимірні вектори відповідно.

Відомо багато підходів до розв'язання задачі (3.5), яка може мати єдиний розв'язок, множину розв'язків, або зовсім їх не мати. Ми будемо виходити з методики, запропонованої та розвиненої в роботах М.Ф.Кириченка.

Уведемо до розгляду матрицю $C^{+}$, псевдообернену до $C$ таку, щоб

$$C^{+}y=\arg\min_{u\in\Omega_u}\|u\|^2, \tag{3.6}$$

де

$$\Omega_u=\arg\min_{u\in R^M}\|Cu-y\|^2. \tag{3.7}$$

Дослідимо властивості вектора $\hat{u}=C^{+}y$, який надалі будемо називати псевдорозв'язком системи (3.5).

Для початку покажемо, що матриця $C^{+}$ існує й може бути однозначно побудована.

З цією метою виділимо в матриці $C$ $r$ лінійно незалежних стовпців. Позначимо через $C_1=(c_1,\ldots,c_r)$ матрицю, утворену цими стовпцями. Ураховуючи те, що кожен стовпець матриці $C$ може бути розкладений за системою векторів $c_1,\ldots,c_r$ як за базисом, матрицю $C$ подамо у вигляді:

$$C=(C_1\alpha_1\vdots\ \ldots\ \vdots C_1\alpha_M),$$

де $\alpha_m\in R^r$ $(m=\overline{1,M})$ – вектор коефіцієнтів розкладу $m$ стовпця матриці $C$ за базисом $c_1,\ldots,c_r$. Звідси $C=C_1C_2$, де

$$C_2=(\alpha_1\vdots\ \ldots\ \vdots\alpha_M). \tag{3.8}$$

З урахуванням цього розв'язок задачі (3.5) – (3.6) побудуємо у два етапи:

1) розв'яжемо задачу знаходження вектора $\hat{u}\in R^r$ такого, щоб

$$\hat{u}=\arg\min_{z\in R^r}\|C_1z-y\|^2; \tag{3.9}$$

2) знайдемо мінімальний за нормою вектор $u$ такий, щоб

$$C_2u=\hat{u}. \tag{3.10}$$

Ці задачі мають однозначний розв'язок: перша – як задача розкладу вектора $y\in R^L$ за системою векторів $c_1,\ldots,c_r$ $(i=\overline{1,r})$; друга – тому, що для системи (3.10) ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної.

При розв'язанні задачі (3.9) будемо виходити з того, що

$$\|C_1 z - y\|^2 = (C_1 z - y)^T (C_1 z - y) = z^T C_1^T C_1 z - 2z^T C_1^T y + y^T y .$$

Звідси

$$\mathrm{grad}_z \|C_1 z - y\|^2 = 2C_1^T C_1 z - 2C_1^T y = 0 ;$$

$$\hat{z} = (C_1^T C_1)^{-1} C_1^T y . \qquad (3.11)$$

Розв'язок другої задачі знайдемо шляхом мінімізації функції Лагранжа:

$$\Phi = \|u\|^2 + \lambda^T (C_2 u - \hat{z}) .$$

Ураховуючи, що для

$$\Phi = u^T u + u^T C_2^T \lambda - \lambda^T \hat{z} ,$$

$$grad_u \Phi = 2u + C_2^T \lambda = 0$$

при $u = -\frac{1}{2} C_2^T \lambda$ з (3.10) знаходимо:

$$C_2 C_2^T \lambda - 2\hat{z} = 0 .$$

Звідси

$$\lambda = -2(C_2 C_2^T)^{-1} \hat{z} ,$$

а шукане

$$u = C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} \hat{z} .$$

Ураховуючи (3.11), отримуємо:

$$u = C^+ y , \qquad (3.12)$$

де

$$C^+ = C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} (C_1^T C_1)^{-1} C_1^T . \qquad (3.13)$$

Звідси випливає, що має місце така теорема.

*Теорема 3.1.* Визначена згідно з (3.6), (3.7) матриця $C^+$, псевдообернена до ($L \times M$)-вимірної матриці $C$, визначається співвідношенням (3.13), в якому $C_1$ – матриця, утворена $r$ лінійно незалежними стовпцями матриці $C$, а $C_2$ – матриця коефіцієнтів розкладу за ними всіх вектор-стовпчиків матриці $C$.

Як було зазначено вище, система (3.10) має розв'язок при кожному $\hat{z}$. $\hat{z}$ – це вектор коефіцієнтів розкладу вектора $y$ за вектор-стовпцями матриці $C_1$. Звідси робимо висновок, що вектор *y* теж може бути довільним.

Питань не виникає, якщо розмірність $L$ вектора $y$ дорівнює кількості $r$ векторів $c_1, \ldots, c_r$ (базису матриці $C_1$). Якщо ж $L > r$, то однозначність та точність розв'язку системи

$$C_1 z = y$$

буде досягатися, якщо за вектор-стовпцями матриці $C_1$ буде розкладатися $\mathrm{Pr}_{L(C_1)} y$ – проекція вектора $y$ на лінійну оболонку, натягнену на вектор-стовпці матриці $C_1$. Ураховуючи (3.11), робимо висновок, що матриця $C^+$, а отже й розв'язок системи (3.5), буде однозначним, якщо

$$\mathrm{Pr}_{L(C_1)}\, y = C_1(C_1^T C_1)^{-1} C_1^T y .$$

Оскільки $r$ лінійно незалежних вектор-стовпчиків матриці $C_1$ є одночасно й лінійно незалежними вектор-стовпцями матриці $C$, то можемо сформулювати такий наслідок.

*Наслідок 3.1.* Проекція вектора $y \in R^L$ на лінійну оболонку, натягнену на вектор-стовпці матриці $C$, визначається співвідношенням

$$\mathrm{Pr}_{L(C)}\, y = \mathrm{Pr}_{L(C_1)}\, y = C_1(C_1^T C_1)^{-1} C_1^T y .$$

З використанням сформульованої в наслідку 3.1 особливості псевдообернення системи (3.5) можемо побудувати ще один зручний для практичної реалізації алгоритм побудови $C^+$, а, отже, і розв'язання задач (3.9), (3.10). Алгоритм запропоновано М.Ф.Кириченком та названо "методом решетування".

Суть алгоритму:

1). Виділимо із $C$ $r$ лінійно незалежних стовпчиків. Одержимо матрицю $C_1$. Згідно з розглянутим вище,

$$\mathrm{Pr}_{L(C)}\, y = C_1 z \,;$$

2). Виділимо із $C_1$ $r$ лінійно незалежних рядків. З матриці $C_1$ залишиться матриця $C_{12}$, елементи якої належать одночасно виділеним $r$ рядкам і $r$ стовпцям. При цьому

$$\mathrm{Pr}_{L(C)}\, y = C_{12} z$$

і замість рівняння (3.10) на другому етапі розв'язання задачі побудови матриці $C^+$ будемо розглядати рівняння:

$$C_2 u = C_{12} z \,, \tag{3.14}$$

де

$$z = (C_1^T C_1)^{-1} C_1^T y \,;$$

3). Розв'язок рівняння (3.14) такий, що

$$\| C_2 u - C_{12} z \| \to \min_u ,$$

$$\| u \|^2 \to \min ,$$

запишемо у вигляді:

$$u = C^+ y ,$$

де

$$C^+ = C_2^T (C_2 C_2^T)^{-1} C_{12} (C_1^T C_1)^{-1} C_1^T . \tag{3.15}$$

Крім наведеного вище зображення (3.13) та (3.15) псевдооберненої матриці $C^+$, відомі й інші, не менш важливі, зображення. Ми зупинимося ще на одному з них, яке носить більш теоретичний характер і буде нам потрібне при подальшому викладі матеріалу.

### 3.3. Сингулярне зображення прямокутних матриць.

Кожну прямокутну матрицю $C$ розмірності $L\times M$ можна зобразити у вигляді добутку двох матриць $C_1$ та $C_2$ розмірності $L*r$ та $r*M$ відповідно, де $r$ – ранг матриці $C$. Тобто

$$C = C_1C_2 = (c_{1(1)} \vdots \ldots \vdots c_{r(1)}) \begin{pmatrix} c^T_{(1)(2)} \\ \cdots \\ c^T_{(r)(2)} \end{pmatrix},$$

де $c_{i(1)}$ $(i=\overline{1,r})$ – лінійно незалежні стовпці матриці $C$, а $c^T_{(i)(2)}$ $(i=\overline{1,r})$ – рядки матриці $C_2$, визначеної в (3.8). Це означає, що

$$C = \sum_{i=1}^{r} c_{i(1)} c^T_{(i)(2)} . \qquad (3.16)$$

Якщо ж вектори $c_{i(1)}$ та $c^T_{(i)(2)}$ розкласти за системою ортонормованих векторів $y_i \in R^L$ $(i=\overline{1,r})$ та $x_i^T \in R^M$ $(i=\overline{1,r})$ відповідно, то зображення (3.16) матиме вигляд:

$$C = \sum_{i=1}^{r} y_i x_i^T \lambda_i . \qquad (3.17)$$

Виникає природне запитання: ”Як система ортонормованих векторів $y_i$, $x_i^T$ та чисел $\lambda_i$ пов’язана з матрицею $C$ ?”

Розглянемо $CC^Ty_s$ $\forall s \in \{1,\ldots,r\}$. Ураховуючи ортогональність векторів $x_i^T$ та $y_i$, маємо:

$$CC^T y_s = \sum_{i=1}^{r} y_i x_i^T \lambda_i \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j y_s = \sum_{i=1}^{r} y_i y_i^T \lambda_i^2 y_s = y_s \lambda_s^2 . \qquad (3.18)$$

Аналогічно знаходимо, що

$$C^T C x_s = \lambda_s^2 x_s \quad \forall s \in \{1,\ldots,r\} . \qquad (3.19)$$

Це означає, що система векторів $x_i$, $y_i$ та чисел $\lambda_i$ $(i=\overline{1,r})$ існує: вектори $x_i$ та $y_i$ є власними векторами для матриць $C^TC$ та $CC^T$ із власними значеннями, що дорівнюють $\lambda_i$. Тобто зображення матриці $C$ у вигляді (3.17) можливе, хоч практично його важко побудувати.

Виходячи із зображення (3.17) матриці $C$, побудуємо аналогічне зображення й для матриці $C^+$.

Згідно з (3.13), де

$$C = (y_1\lambda_1 \vdots \dots \vdots y_r\lambda_r)\begin{pmatrix} x_1^T \\ \dots \\ x_r^T \end{pmatrix},$$

знаходимо:

$$C^+ = (x_1 \ \vdots \ \dots \ \vdots \ x_r)\left(\begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_r^T \end{pmatrix}(x_1 \ \vdots \ \dots \ \vdots \ x_r)\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(\begin{pmatrix} y_1^T\lambda_1 \\ \vdots \\ y_r^T\lambda_r \end{pmatrix}(\lambda_1 y_1 \vdots \ \dots \ \vdots \ \lambda_y y_r)\right)^{-1}\begin{pmatrix} y_1^T\lambda_1 \\ \vdots \\ y_r^T\lambda_r \end{pmatrix} = \qquad (3.20)$$

$$= (x_1 \ \vdots \ \dots \ \vdots \ x_r)\begin{pmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^T\lambda_1 \\ \vdots \\ y_r^T\lambda_r \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j^{-1}.$$

### *3.4. Проекційні властивості псевдообернених матриць.*

Зображення (3.17), (3.20) матриць $C$ та $C^+$ дозволяють у межах уведених вище позначень записати та проілюструвати досить цікаві й потрібні для практики властивості псевдообернених матриць. Сформулюємо їх у вигляді теореми.

*Теорема 3.2*. Для вектора $y \in R^L$ та ( $L \times M$ )-вимірної матриці $C$ такої, що для ортонормованих векторів $y_1, \dots, y_r$, які є базисними для вектор-стовпчиків матриці $C$, виконуються співвідношення (3.18), матриці $CC^+$ та $Z(C^T) = I_L - CC^+$ є проекціями на лінійну оболонку $Z(C)$, натягнену на вектор-стовпці матриці $C$ та ортогональне доповнення $\overline{L(C)}$ до цієї оболонки відповідно.

*Доведення.* Для доведення теореми систему векторів $y_1, \dots, y_r$ доповнимо системою ортонормованих векторів $y_{r+1}, \dots, y_M$, ортогональних до $y_1, \dots, y_r$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{M} y_j y_j^T = I_L,$$

а досліджувані в теоремі матриці

$$CC^+ = \sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T; \qquad (3.21)$$

$$Z(C^T) = I_L - CC^+ = \sum_{j=r+1}^{L} y_j y_j^T \,. \tag{3.22}$$

Якщо розглянути

$$CC^+ y = \sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T y \,; \tag{3.23}$$

$$(I_L - CC^+) y = \sum_{j=r+1}^{L} y_j y_j^T y \,, \tag{3.24}$$

то $y_j^T y$ є не що інше, як проекція вектора $y$ на $y_j$, а $\sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T y$ є розклад вектора $y$ за системою векторів $y_1, \ldots, y_r$. Якщо $y \in R^r$, то цей розклад зрозумілий. Якщо ж розмірність вектора $y$ більша $r$, то зображення (3.23) буде давати розклад по $y_1, \ldots, y_r$ проекції вектора $y$ на лінійну оболонку, натягнуту на вектори $y_1, \ldots, y_r$, а, отже, і на вектор-стовпці матриці $C$.

Тобто

$$CC^+ y = \mathrm{Pr}_{L(C)}\, y \,.$$

Аналогічними міркуваннями, виходячи з (3.22), доводиться й друге твердження теореми, згідно з яким

$$(I_L - CC^+) y = \mathrm{Pr}_{\overline{L(C)}}\, y \,.$$

Аналогічно доводиться наступна теорема.

*Теорема 3.3.* Для вектора $y \in R^M$ та ($L \times M$)-вимірної матриці $C$ такої, що для ортонормованих векторів $x_1, \ldots, x_r$, які є базисними для вектор-рядків $x_1^T, \ldots, x_r^T$ матриці $C$ і для яких виконуються співвідношення (3.18), (3.19), матриці $C^+C$ і $Z(C) = \mathrm{I_M} - C^+C$ є проекційними на лінійну оболонку, натягнуту на вектор-рядки матриці $C$ та ортогональне доповнення до цієї оболонки відповідно.

### *3.5. Загальні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

Проекційні властивості матриць $CC^+$, $C^+C$, $Z(C)$ та $Z(C^T)$ (див. теореми 3.2 та 3.3) дозволяють дослідити загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Сформулюємо це у вигляді теореми.

*Теорема 3.4.* Загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Cu = y \,, \tag{3.25}$$

де $C$ – $(L \times M)$-вимірна матриця, $u \in R^M$, $y \in R^L$, визначається формулою:

$$u = C^{+} y + Z(C)v \, , \qquad (3.26)$$

де $v$ – довільний вектор розмірності $M$ , $C^{+}$ – матриця, псевдообернена до $C$ , а $Z(C) = I_M - C^{+}C$ . Розв'язок буде:

1) єдиним і точним при

$$y^T Z(C^T)y = 0 \, ; \qquad (3.27)$$

$$\det(C^T C) > 0 \, ;$$

2) даватиме множину розв'язків при

$$y^T Z(C^T)y = 0 \, ; \qquad (3.28)$$

$$\det(C^T C) = 0 \, ;$$

3) єдиним псевдороз'язком таким, що

$$\varepsilon^2 = \min_u \|Cu - y\|^2 = y^T Z(C^T)y \qquad (3.29)$$

при

$$y^T Z(C^T)y > 0 \, ; \qquad (3.30)$$

$$\det(C^T C) > 0 \, ;$$

4) даватиме множину

$$\Omega_u = Arg \min_{u \in R^M} \|Cu - y\|^2$$

псевдорозв'язків з нев'язкою $\varepsilon^2$ , визначеною співвідношенням (3.29), при

$$y^T Z(C^T)y > 0 \qquad (3.31)$$

$$\det(C^T C) = 0 \, .$$

*Доведення.* Будемо виходити з того, що, згідно з розглянутим вище, розв'язок рівняння (3.25), якщо він існує, записується через псевдообернену матрицю $C^{+}$ співвідношенням (3.12).

У загальному ж випадку

$$u = C^{+} y + w \, , \qquad (3.32)$$

де $w$ – довільний вектор розмірності $M$ такий, що

$$Cw = 0 \, .$$

Це означає, що вектор $w$ мусить бути ортогональним до вектор-рядків матриці $C$ , тобто $w$ мусить належати ортогональному доповненню до лінійної оболонки натягненої на вектор-рядки матриці $C$ , а, отже

$$w = Z(C)v \qquad \forall v \in R^L \, ,$$

що й доводить співвідношення (3.26).

Співвідношення (3.27), (3.28), (3.30), (3.31) стануть зрозумілими, якщо враховувати, що $\det(C^T C) > 0$ є умовою невиродженості матриці $C$, а $y^T Z(C^T) y = 0$ випливає з умови:

$$\left\| Z(C^T) y \right\|^2 = 0 ,$$

що є умовою рівності нулю проекції вектора $y$ на ортогональне доповнення до лінійної оболонки, натягненої на вектор-стовпці матриці $C$. Це ж описує умову, за якою вектор $y$ може бути розкладений за вектор-стовпцями матриці $C$, тобто умову, коли точно задовольняється рівняння (3.25).

### *3.6. Ще деякі зображення та залежності псевдообернених матриць.*

Сингулярне зображення матриць $C$, $C^+$ у вигляді (3.17), (3.20) дозволяє довести ще дві корисні для практичного використання формули:

$$C^+ = C^T (CC^T)^+ = (C^T C)^+ C^T . \tag{3.33}$$

Достовірність формули (3.33) перевіримо, виходячи з (3.17), (3.20). При цьому

$$CC^T = \sum_{j=1}^{r} y_j x_j^T \lambda_j \sum_{k=1}^{r} x_k y_k^T \lambda_k = \sum_{j=1}^{r} y_j y_j^T \lambda_j^2 ;$$

$$C^T C = \sum_{j=1}^{r} x_j x_j^T \lambda_j \sum_{k=1}^{r} y_k y_k^T \lambda_k = \sum_{j=1}^{r} x_j x_j^T \lambda_j^2 . \tag{3.34}$$

Звідси

$$C^T (CC^T)^+ = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j (\sum_{k=1}^{r} y_k y_k^T \lambda_k^2)^+ = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j^{-1} = C^+ ;$$

$$(C^T C)^+ C^T = (\sum_{j=1}^{r} x_j x_j^T \lambda_j^2)^+ (\sum_{k=1}^{r} x_k y_k^T \lambda_k) = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j^T \lambda_j^{-1} = C^+ .$$

*Зауваження.* Зображення (3.34) матриці $C^T C$ з урахуванням (3.17), (3.20) дозволяє зробити висновок, що

$$(C^T C)^+ = x_j x_j^T \lambda_j^{-2} .$$

Це означає, що

$$C^+ C = (C^T C)^+ C^T C = \sum_{j=1}^{r} x_j x_j^T .$$

Звідси з урахуванням властивостей векторів $x_j$ $(j = \overline{1, r})$ робимо висновок, що $\det(C^+ C)$ може мати значення «один» або «нуль»: «один» – коли розв’язок (псевдорозв’язок) системи (3.25) однозначний; «нуль» – коли цих розв’язків (псевдорозв’язків) множина.

Це дозволяє умову однозначності загального розв'язку (3.26) системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.25) у співвідношеннях (3.27), (3.28), (3.30), (3.31) замінити умовою:

$$\det(C^{+}C) = 0\,,$$

або

$$\det(C^{+}C) = 1\,.$$

# §4. Моделювання дискретизованих початково-крайових умов

### *4.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Розглянутий вище варіант моделювання початково-крайових умов (1.3), (1.4), дискретизованих точками $x_l^0 \in S_0 \ \ (l = \overline{1, L_0}),$ $(x_l^{\Gamma}, t_k)$ $(x_l^{\Gamma} \in \Gamma; \ t_k \geq 0; \ l = \overline{1, L_{\Gamma}}; \ k = \overline{1, K}),$ системою векторів

$$\bar{u}_0 = col(u_0(s_m^0), \ \ m = \overline{1, M_0}), \tag{4.1}$$

$$\bar{u}_{\Gamma} = col(u_{\Gamma}(s_m^{\Gamma}), \ \ m = \overline{1, M_{\Gamma}}) \tag{4.2}$$

значень моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_{\Gamma}(s)$ суттєво залежить від вибору точок дискретизації як початково-крайових умов, так і моделюючих функцій. Більш точними й універсальними були б аналітичні залежності моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_{\Gamma}(s)$, які відповідають дискретизованим точками $x_l^0$ і $(x_l^{\Gamma}, \ t_k)$ початково-крайовим умовам (1.3), (1.4):

$$L_r^0(\partial_t) y(x, \ t)\Big|_{t=0, \ x=x_l^0} = Y_r^0(x_l^0), \qquad r = \overline{1, R_0}; \tag{4.3}$$

$$L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) y(x, \ t)\Big|_{t=t_k, \ x=x_l^{\Gamma} \in \Gamma} = Y_{\rho}^{\Gamma}(x_l^{\Gamma}, t_k), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}. \tag{4.4}$$

Згідно з викладеним у п.1.3 значення $\hat{u}_0(s)$ та $\hat{u}_{\Gamma}(s)$ функцій $u_0(s)$, $u_{\Gamma}(s)$, якими моделюються початково-крайові умови (4.3), (4.4) у розв'язку (1.11) задачі динаміки системи (1.1), визначаються співвідношеннями:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} u_0(s) \\ u_{\Gamma}(s) \end{pmatrix} = \arg \min_{u_0(s), \ u_{\Gamma}(s)} [\sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left\| L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{t=0, \ x=x_l^0} - Y_{rol} \right\|^2 + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} \left\| L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x) y(s)\Big|_{t=t_k, \ x=x_l^{\Gamma}} - Y_{\rho\Gamma kl} \right\|^2 ],\end{gathered} \tag{4.5}$$

де $Y_{rol} = Y_r^0(x_l^0), \quad Y_{\rho\Gamma kl} = Y_{\rho}^{\Gamma}(x_l^{\Gamma}, t_k).$

Залишаючись у межах визначених у (1.23) вектора $\bar{y}$, вектор-функції $\bar{u}(s)$ та матричної функції $A(s')$, проблему розв'язання задачі (4.5) замінимо такою:

$$\left\| \int A(s')\bar{u}(s')ds' \ - \ \bar{y} \right\|^2 \to \min_{u_0(s), u_{\Gamma}(s)}. \tag{4.6}$$

Тут

$$\bar{y} = col(col((Y_{r0l}, \ l = (\overline{1, L}), \ r = \overline{1, R_0}),$$

$$col(((Y_{\rho\Gamma kl}, \ l = \overline{1, L_{\Gamma}}), \ k = \overline{1, K}), \ \ \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}));$$

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s) \quad s \in S_0^{\infty 0}, \; u_\Gamma(s) \quad s \in S_{\infty 0}^T);$$

$$A(s') = \left[ G_{ij}(s') \right]_{i,j=1}^{i,j=2}; \tag{4.7}$$

$$G_{1j}(s') = col((L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0, x=x_l^0}, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0});$$

$$G_{2j}(s') = col(((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{t=t_k, x=x_l^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), k = \overline{1, K}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

причому $s' \in S_0^{\infty 0}$ при $i$=1 та $s' \in S_{\infty 0}^T$ при $i$=2. Відповідно до області зміни аргументу $s'$ у визначенні матричних та векторних функцій $G_{ij}(s')$, $u_0(s')$ та $u_\Gamma(s')$ розуміється інтегрування в (4.6).

Як і системи лінійних алгебраїчних рівнянь, досліджені нами в попередньому параграфі, задача (4.6), залежно від співвідношень між $A(s)$ та $\bar{y}$, може мати точний розв'язок, або визначене згідно з (4.6) наближення до нього. Як розв'язок, так і наближення до нього можуть бути однозначними, або визначатися множиною значень.

Для побудови та дослідження загального розв'язку задачі (4.6), (4.7) будемо виходити із співвідношень (3.26) – (3.31), отриманих при оберненні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.25). Спрямуємо до нескінченності значення *N* у задачі:

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} A(s_i)\bar{u}(s_i)\Delta s_N - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{\bar{u}(s_i), i=\overline{1,N}}, \tag{4.8}$$

де $\Delta s_N = \Delta x_1^{(N)}, ..., \Delta x_\nu^{(N)}$, $\Delta t_N$ – дискретизаційна сітка для просторово-часових координат $(x,t)$ ($\Delta x_\nu^{(N)}$ – крок дискретизації координати $x_\nu$).

### *4.2. Методи лінійної алгебри в побудові та дослідженні загального розв'язку дискретизованої системи лінійних інтегральних рівнянь.*

Виконаємо цілеспрямоване (згідно з (4.8)) обернення системи:

$$\sum_{i=1}^{N} A(s_i)\bar{u}(s_i)\Delta s_N = \bar{y}. \tag{4.9}$$

Розглянемо матричні та векторні функції дискретного аргументу:

$$A_1(\cdot) = (A(s_1)\sqrt{\Delta s_N}, ..., A(s_N)\sqrt{\Delta s_N});$$

$$u_1(\cdot) = col(\bar{u}(s_1)\sqrt{\Delta s_N}, ..., \bar{u}(s_N)\sqrt{\Delta s_N}) \tag{4.10}$$

такі, що

$$A_1(i) = A(s_i)\sqrt{\Delta s_N}; \;\; u_1(i) = \bar{u}(s_i)\sqrt{\Delta s_N}.$$

Систему (4.9) запишемо у вигляді:

$$A_1(\cdot)u_1(\cdot) = \bar{y}, \tag{4.11}$$

звідси

$$\Omega_u = \left\{ \hat{u}_1(\cdot): \;\; \hat{u}_1 = \arg \min_{u_1(\cdot)\in R^{Nn}} \left\| A_1(\cdot)u_1(\cdot) - \bar{y} \right\|^2 \right\} \;\; .$$

Згідно з (3.26)

$$\Omega_u = \left\{ u_1(\cdot): \;\; u_1(\cdot) = A_1^T(\cdot)P^+(\bar{y} - p_v) + v_1(\cdot) \right\}, \tag{4.12}$$

де

$$P_1 = A_1(\cdot)A_1^T(\cdot); \;\; p_v = A_1(\cdot)v_1(\cdot),$$

$$v_1(\cdot) = col(v(1),...,v(N)) \qquad \forall v(i) \in R^m (i = \overline{1,N}).$$

Ураховуючи визначення (4.10) матричних та векторних векторів $A_1(\cdot)$, $u_1(\cdot)$, робимо висновок, що розв'язком (псевдорозв'язком) рівняння (4.9), який задовольняє умову (4.8), буде

$$\bar{u}(s_i) \in \Omega_{ui} = \{u(s_i): \;\; u(s_i) = A^T(s_i)P^+(\bar{y} - p_v) + v(s_i)\}, \tag{4.13}$$

де

$$P = \sum_{i=1}^{N} A(s_i)A^T(s_i)\Delta s_N;$$

$$p_v = \sum_{i=1}^{N} A(s_i)v(s_i)\Delta s_N$$

$$\forall v(s_i) \in R^m \text{ при } i = \overline{1,N}.$$

Виконаємо дослідження точності та однозначності множин $\Omega_u$, $\Omega_{ui}$ векторної функції $u_1(\cdot)$ та вектора $u(s_i)$. Використовуючи співвідношення (3.26) – (3.31) (див. п.3.5) для систем лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходимо, що множина $\Omega_u$ буде множиною точних розв'язків задачі (4.9), якщо

$$\varepsilon_1^2 = \bar{y}^T\bar{y} - \bar{y}^T PP^+\bar{y} = 0. \tag{4.14}$$

Якщо ж $\varepsilon_1^2 > 0$, то $\Omega_u$ буде множиною псевдорозв'язків такою, що

$$\min_{u_1(\cdot)\in\Omega_u} \left\| \sum_{i=1}^{N} A(\cdot)\bar{u}_1(\cdot) - \bar{y} \right\|^2 = \varepsilon_1^2. \tag{4.15}$$

Множина буде однозначною при

$$\det(A_1^T(\cdot)A_1(\cdot)) > 0. \tag{4.16}$$

Спрямовуючи $N \to \infty$ у співвідношеннях (4.14) – (4.16), запишемо умови точності та однозначності для множин $\Omega_{ui} \quad (i = \overline{1, N})$. При цьому матимемо:

а) умова точності:

$$\varepsilon^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P P^+ \bar{y} = 0; \tag{4.17}$$

б) умова однозначності:

$$\lim_{N \to \infty} \det \left( \left[ A^T(s_i) A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} \right) > 0; \tag{4.18}$$

в) похибка розв'язання задачі (4.8):

$$\min_{\bar{u}(s_i) \in \Omega_{ui}} \left\| \sum_{i=1}^{N} A(s_i) \bar{u}(s_i) \Delta s_N - \bar{y} \right\|^2 = \varepsilon^2. \tag{4.19}$$

### *4.3. Загальний розв'язок проблемиобернення системи інтегральних рівнянь.*

Враховуючи, що задача (4.8) є допоміжною для задачі (4.6), (4.7), виконаємо побудову та дослідження загального розв'язку останньої. При цьому будемо виходити із співвідношень (4.12), (4.14) – (4.16) та (4.13), (4.17) – (4.19), якими описується розв'язок задач (4.9) та (4.11). Спрямовуючи $N \to \infty$ та враховуючи, що

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_1(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N \to \infty} (A(s_1), ..., A(s_N)) = A(s); \tag{4.20}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_1^T(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N}} \lim_{N \to \infty} \begin{pmatrix} A^T(s_1) \\ ... \\ A^T(s_N) \end{pmatrix} = A^T(s); \tag{4.21}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{u_1(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N \to \infty} \begin{pmatrix} u(s_1) \\ ... \\ u(s_N) \end{pmatrix} = u(s), \tag{4.22}$$

знаходимо, що визначена в (4.6) вектор-функція

$$\bar{u}(s) \in \Omega_u = \{\bar{u}(s): \quad \bar{u}(s) = A^T(s) P^+ (\bar{y} - p_v) + v(s)\}, \tag{4.23}$$

де $v(s)$ – довільна інтегрована в області зміни аргументу $s$ функція, а

$$P = \int A(s) A^T(s) ds; \qquad p_v = \int A(s) v(s) ds. \tag{4.24}$$

Визначені співвідношенням (4.23) моделюючі функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ розв'язуватимуть задачу (4.6) точно, якщо при $P$, обрахованому згідно з (4.24),

$$\varepsilon^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P P^+ \bar{y} = 0. \tag{4.25}$$

При $\varepsilon^2 > 0$ вектор $\bar{u}(s)$ моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ буде таким, що

$$\min_{\bar{u}(s)\in\Omega_u} \left\| \int A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{y} \right\|^2 = \varepsilon^2. \qquad (4.26)$$

Множина (4.23) вектор-функцій $\bar{u}(s)$ буде однозначною при

$$\lim_{N\to\infty} \det\left[ A^T(s_i)A(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0. \qquad (4.27)$$

### *4.4. Псевдообернення матричних стовпців-функцій та розв'язок задачі моделювання дискретизованих початково-крайових умов.*

Методика побудови множини (4.23) вектор-функцій

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s), u_\Gamma(s)),$$

якими через

$$y_0(s) = \int_{S_0^{\infty\ 0}} G(s-s')u_0(s')ds'$$

та

$$y_\Gamma(s) = \int_{S_\infty^{T}\ 0} G(s-s')u_\Gamma(s')ds'$$

згідно з критерієм (4.5) визначається внесок початково-крайових умов (4.3), (4.4) у значення вектор-функції стану

$$y(s) = y_0(s) + y_\Gamma(s) + y_\infty(s), \qquad (4.28)$$

будувалася з використанням матричної функції $A(s)$ та вектор-функції $\bar{u}(s)$, визначених у (4.7).

Розглядаючи $A(s)$ та $u(s)$ згідно з (4.20) – (4.22), ураховуючи, що критерієм розв'язання задачі є (див.(4.6))

$$\left\| \int A(s)\bar{u}(s)ds - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{\bar{u}(s)}$$

та позначивши через

$$A^{(+)}(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{A^T(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N}} (A_1(\cdot)A_1^T(\cdot))^+$$

граничне значення матриці, псевдооберненої до $A_1(\cdot)$, знаходимо, що

$$A^{(+)}(s) = A^T(s)\left( \int A(s)A^T(s)ds \right)^+ = A^T(s)P^+. \qquad (4.29)$$

Це дозволяє матричну функцію $A^{(+)}(s)$ назвати псевдооберненою до матричної функції $A(s)$.

Із співвідношень (4.23) знаходимо, що вектор-функція $\bar{u}(s)$, якою, згідно з (4.5), моделюються початково-крайові умови (4.3), (4.4), визначається співвідношеннями

$$\bar{u}(s) \in \Omega_u = \{\bar{u}(s): \ \bar{u}(s) = A^{(+)}(s)(\bar{y} - p_v) + \bar{v}(s) \ \}. \tag{4.30}$$

При цьому за аналогією з (3.6)

$$A^{(+)}(s)\bar{y} = \arg \min_{\bar{u}(s) \in \Omega_u} \| \bar{u}(s) \|^2 . \tag{4.31}$$

Наприкінці нагадаємо, що вирази (4.30), (4.31) та умови їх точності й однозначності у формі (4.25) – (4.27) мають місце для всіх постановок початково-крайових задач, сформульованих у п. 1.3. Це і початково-крайова задача загальної постановки, і задачі динаміки розглядуваних систем, розв'язувані без урахування крайових умов (у необмеженій просторовій області) чи початкових умов (у необмеженій часовій області).

Варіант задачі визначається вибором означень для вектор-функції $\bar{u}(s)$, матричної функції $A(s)$ та вектора $\bar{y}$.

Так, при

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s), u_\Gamma(s)); \quad \bar{y} = col(\bar{y}_0, \bar{y}_\Gamma);$$

$$A(s) = [G_{ij}(s)]_{i,j=1}^{i,j=2},$$

де $G_{ij}(s)$ визначені співвідношеннями (4.7), це буде початково-крайова задача загальної постановки.

При $\bar{u}(s) = u_0(s); \quad \bar{y} = \bar{y}_0; \quad A(s) = G_{11}(s)$ це буде задача Коші.

При $\bar{u}(s) = u_\Gamma(s); \quad \bar{y} = \bar{y}_\Gamma; \quad A(s) = G_{22}(s)$ це буде крайова задача.

# §5. Моделювання неперервної початково-крайової задачідинаміки систем із розподіленими параметрами

*5.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Розглянутий вище варіант постановки та розв'язання проблеми моделювання початково-крайової задачі динаміки системи (1.1) – (1.4) будувався з припущення, що початково-крайові умови (1.3), (1.4) мусять справджуватися точно (або наближено) у певних, наперед визначених, просторово-часових точках. Це дозволило побудувати та дослідити множини неперервних моделюючих функцій, які однозначно, або неоднозначно, точно, або з певними похибками моделюють дискретно задані початково-крайові умови (4.3), (4.4).

Можна, однак, навести ряд прикладів, коли специфіка процесу, що описується співвідношеннями (1.1) – (1.4), вимагає виконання початкових умов у всіх точках області, а крайових – по всьому контуру, тобто, щоб вектор-функція стану $y(s)$ визначалася умовами (1.3), (1.4):

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\big|_{t=0} = Y_r^0(x) \;\; (x \in S_0, \;\; r=\overline{1,R_0}); \tag{5.1}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{x=x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t) \;\; (x^\Gamma \in \Gamma, t\in[0,T], \rho=\overline{1,R_\Gamma}) \,. \tag{5.2}$$

Ураховуючи складність проблеми побудови неперервних функцій $u_0(s)$ $(s \in S_0 \times (-\infty,0])$ та $u_\Gamma(s)$ $(s \in (R^\nu \setminus S_0)\times(0,T])$, якими б через складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ моделювався вплив на вектор-функцію $y(s)$ початково-крайових умов (5.1), (5.2), розглянемо задачу побудови значень

$$\bar{u}_0 = u_0((s_m^0), \;\; m=\overline{1,M_0}, \;\; s_m^0 \in S_0 \times (-\infty,0]) \tag{5.3}$$

та

$$\bar{u}_\Gamma = u_\Gamma((s_m^\Gamma), \;\; m=\overline{1,M_\Gamma}, \;\; s_m^\Gamma \in (R^\nu \setminus S_0)\times(-0,T]) \tag{5.4}$$

моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ таких, щоб

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}\left\|L_r^0(\partial_t)y(s)\big|_{t=0} - Y_r^0(x)\right\|^2 dx + \\ &+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_\Gamma dx\int_0^T\left\|L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(x,t)\right\|^2 dt \to \min_{\bar{u}_0,\bar{u}_\Gamma}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Для того, щоб методику розв'язання дискретизованої задачі моделювання динаміки розглядуваної системи, розвинуту в §3 та узагальнену (§4) для задач моделювання дискретизованих початково-крайових умов неперервними функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, поширити на задачу (5.5), уведемо до розгляду такі векторні та матричні функції:

$$Y^0(x) = col(Y_r^0(x), \;\; r=\overline{1,R_0}) \;\; x \in S_0; \tag{5.6}$$

$$Y^\Gamma(x,t) = col(Y_\rho^\Gamma(x,t), \;\; \rho=\overline{1,R_\Gamma}) \;\; x\in\Gamma, \;\; t\in[0,T];$$

$$G_{11}(x) = col(str(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0)\big|_{t=0}, \ m = \overline{1, M_0}), \ r = \overline{1, R_0}) \quad x \in S_0;$$

$$G_{12}(x) = col(str(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma)\big|_{t=0}, \ m = \overline{1, M_\Gamma}), \ r = \overline{1, R_0}) \quad x \in S_0; \quad (5.7)$$

$$G_{21}(x,t) = col(str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0), \ m = \overline{1, M_0}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}) \quad x \in \Gamma, \ t \in [0,T];$$

$$G_{22}(x,t) = col(str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma), \ m = \overline{1, M_\Gamma}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}) \quad x \in \Gamma, \ t \in [0,T].$$

Це дозволяє співвідношення (5.5) переписати у вигляді:

$$\int\limits_{S_0} \left[ (G_{11}(x), G_{12}(x))\bar{u} - Y^0(x) \right]^2 dx \to \min_{\bar{u}}; \quad (5.8)$$

$$\int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_0^T [(G_{21}(x,t), G_{22}(x,t))\bar{u} - Y^\Gamma(x,t)]^2 dt \to \min_{\bar{u}},$$

де $\bar{u} = col(\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma)$.

Це еквівалентно задачі обернення системи функціональних рівнянь:

$$B(s)\bar{u} = Y(s), \quad (5.9)$$

де з урахуванням (5.7)

$$B(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x,t) & G_{22}(x,t) \end{pmatrix}; \ Y(s) = \begin{pmatrix} Y^0(s) \\ Y^\Gamma(x,t) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Зауважимо, що задача обернення рівнянь (5.9) згідно з критерієм (5.8) є складною. За деяких співвідношень між матричною та векторною функціями $B(s)$ та $Y(s)$ ця задача може мати розв'язок (однозначний, або множину). У загальному випадку можна розраховувати на наближене згідно з (5.8) обернення.

Для побудови та дослідження множини можливих обернень рівнянь (5.9), а, отже, і побудови множини значень $\bar{u}_0$ та $\bar{u}_\Gamma$ моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, будемо виходити знову із співвідношень (3.26) – (3.31), отриманих нами при побудові та дослідженні розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.25). Для цього розглянемо (при $N_0 \to \infty$ та $N_\Gamma \to \infty$) систему:

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{pmatrix} \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{Y}^0 \\ \bar{Y}^\Gamma \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

де при $x_l^0 \in S_0, \ s_l^\Gamma = (x_l^\Gamma, t_l), \ x_l^\Gamma \in \Gamma, \ t \in [0,T]$

$$\bar{Y}^0 = col(Y^0(x_l^0), \ l = \overline{1, N_0});$$

$$\bar{Y}^\Gamma = col(Y^\Gamma(s_l^\Gamma, \ t_l), \ l = \overline{1, N_\Gamma});$$

$$\bar{G}_{1i} = col(G_{1i}(x_l^0), \ l = \overline{1, N_0});$$

$$\bar{G}_{2i} = col(G_{2i}(x_l^\Gamma, t_l), \ l = \overline{1, N_\Gamma}).$$

Бачимо, що проблем з оберненням системи (5.11) немає. Розв'язок її, а також умови точності та однозначності розв'язку, випливають із співвідношень (3.26) – (3.31). Проблемою є перехід від цього розв'язку до неперервного випадку, який відповідає рівнянням (5.9).

### *5.2. Блочнолінійні системи алгебраїчних рівнянь та їх загальний розв'язок.*

Для того, щоб перейти від дискретної системи (5.11) до її неперервного аналогу (5.9), урахуємо пов'язану з $N_0$ та $N_\Gamma$ дискретизаційну сітку для області $S_0$, контуру $\Gamma$ та часу $t$. При цьому замість (5.11) будемо розглядати систему:

$$B^0(x_i^0)\sqrt{\Delta x_N^0}\bar{u} = Y^0(x_i^0)\sqrt{\Delta x_N^0},\ \ (i=\overline{1,N_0});$$

$$B^\Gamma(x_i^\Gamma,t_i)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}\bar{u} = Y^\Gamma(x_i^\Gamma,t_i)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma},\ \ (i=\overline{1,N_\Gamma}),\tag{5.12}$$

де $\Delta s_N^\Gamma = \Delta x_N^\Gamma \Delta t_N$, $\Delta x_N^\Gamma = \Delta x_1^\Gamma,...,\Delta x_\nu^\Gamma$, $\Delta x_N^0 = \Delta x_1^0,...,\Delta x_\nu^0$, ($\Delta x_i^\Gamma$, $\Delta x_i^0$ $(i=\overline{1,\nu})$ – крок дискретизації координат $x_i$ $(i=\overline{1,\nu})$ в області $S_0$ та на контурі *Г* відповідно),

а

$$B^0(x_i^0) = (G_{11}(x_i^0), G_{12}(x_i^0)),$$

$$B^\Gamma(x_i^\Gamma,t_i) = (G_{21}(x_i^\Gamma,t_i), G_{22}(x_i^\Gamma,t_i)).\tag{5.13}$$

Для обернення системи (5.12) з використанням викладених у п. 3.5 методів лінійної алгебри запишемо її у вигляді:

$$B_1(\cdot)\bar{u} = Y_1(\cdot),\tag{5.14}$$

де

$$B_1(\cdot) = col(B_1^0(\cdot) = col(B^0(x_1^0)\sqrt{\Delta x_N^0},...,B^0(x_{N_0}^0)\sqrt{\Delta x_N^0}),$$

$$B_1^\Gamma(\cdot) = col(B^\Gamma(s_1^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma},...,B^\Gamma(s_{N_\Gamma}^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}));\tag{5.15}$$

$$Y_1(\cdot) = col(Y_1^0(\cdot) = col(Y^0(x_1^0)\sqrt{\Delta x_N^0},...,Y^0(x_{N_0}^0)\sqrt{\Delta x_N^0}),$$

$$Y_1^\Gamma(\cdot) = col(Y^\Gamma(s_i^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma},...,Y^\Gamma(s_{N_\Gamma}^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}))$$

– матричні та векторні функції дискретного аргументу такі, що

$$B_1(i) = B^0(x_i^0)\sqrt{\Delta x_N^0},\ \ Y_1(i) = Y^0(x_i^0)\sqrt{\Delta x_N^0}$$

при $i \le N_0$ і

$$B_1(i) = B^\Gamma(s_i^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma},\ \ Y_1(i) = Y^\Gamma(s_i^\Gamma)\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}$$

при $$N_0 < i \le N_0 + N_\Gamma.$$

Звідси згідно з (3.26) знаходимо, що

$$\Omega_u = \{\tilde{\bar{u}} : \tilde{\bar{u}} = \arg \min_{\bar{u} \in R^{M_0 + M_\Gamma}} \| B_1(\cdot)\bar{u} - Y_1(\cdot) \|^2 \} \qquad (5.16)$$

визначатиметься співвідношенням

$$\Omega_u = \{\bar{u} :\ \bar{u} = (B_1^T(\cdot)B_1(\cdot))^+ B_1^T(\cdot)[Y_1(\cdot) - B_1(\cdot)v_1] + v_1\}, \qquad (5.17)$$

де

$$v_1 = col(v^0, v^\Gamma) \quad \forall v^0 \in R^{mM_0}, \forall v^\Gamma \in R^{mM_\Gamma}.$$

Це, з урахуванням (5.15), дозволяє множину $\Omega_u$ значень $\bar{u}$ моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ записати у вигляді:

$$\Omega_u = \{\bar{u} : \bar{u} = P_1^+(b_Y - P_1 v_1) + v_1\}, \qquad (5.18)$$

де

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_0} [B^0(x_i^0)]^T B^0(x_i^0) \Delta x_N^0 + \sum_{i=1}^{N_\Gamma} [B^\Gamma(s_i^\Gamma)]^T B^\Gamma(s_i^\Gamma) \Delta s_N^\Gamma;$$

$$b_Y = \sum_{i=1}^{N_0} [B^0(x_i^0)]^T Y^0(x_i^0) \Delta x_N^0 + \sum_{i=1}^{N_\Gamma} [B^\Gamma(s_i^\Gamma)]^T Y^\Gamma(s_i^\Gamma) \Delta s_N^\Gamma. \qquad (5.19)$$

Перш ніж записати умови точності та однозначності множини (5.18), дослідимо їх для цієї ж множини, виходячи із зображення (5.17). Використовуючи співвідношення (3.26) – (3.31), наведені в п. 3.5 для систем лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходимо, що

$$\varepsilon_1^2 = \min_{\bar{u} \in \Omega_u} \| B_1(\cdot)\bar{u} - Y_1(\cdot) \|^2 = \\ = Y_1^T(\cdot)Y_1(\cdot) - Y_1^T(\cdot)B_1(\cdot)P_1^+ B_1^T(\cdot)Y_1(\cdot). \qquad (5.20)$$

Умовою однозначності множини (5.18) буде

$$\det P_1 > 0, \qquad (5.21)$$

де $P_1$ визначається згідно з (5.19).

Якщо умова однозначності у формі (5.21) зручна для використання, то цього не можна сказати про співвідношення (5.20), яким визначається помилка в оберненні рівнянь (5.14). Зауважимо, що вираз (5.20) спрощується з урахуванням визначення (5.15) для матричних та векторних функцій $B_1(\cdot)$ та $Y_1(\cdot)$. Якщо позначити через

$$b_Y = B_1^T(\cdot)Y_1(\cdot) = \sum_{i=1}^{N_0} [B^0(x_i^0)]^T Y^0(x_i^0) \Delta x_N^0 + \sum_{i=1}^{N_\Gamma} [B^\Gamma(s_i^\Gamma)]^T Y^\Gamma(s_i^\Gamma) \Delta s_N^\Gamma, \qquad (5.22)$$

$$b = Y_1^T(\cdot)Y_1(\cdot) = \sum_{i=1}^{N_0} [Y^0(x_i^0)]^T Y^0(x_i^0) \Delta x_N^0 + \sum_{i=1}^{N_\Gamma} [Y^\Gamma(s_i^\Gamma)]^T Y^\Gamma(s_i^\Gamma) \Delta s_N^\Gamma,$$

то

$$\varepsilon_1^2 = b - b_Y^T P_1^+ b_Y. \qquad (5.23)$$

### *5.3. Загальний розв'язок задачі моделювання неперервних початково-крайових умов.*

Ураховуючи, що побудований та досліджений вище розв'язок (5.18) системи (5.14) (а, отже, і системи (5.11)) є допоміжним для побудови та дослідження загального розв'язку системи (5.9) (а, отже, і сформульованої на початку задачі (5.5)), виконаємо перехід до останньої.

Спрямовуючи до нескінченності значення $N_0$ та $N_\Gamma$ у співвідношеннях (5.18), (5.19), (5.22), отримуємо, що загальний розв'язок задачі (5.5) визначатиметься співвідношенням (5.18), в якому

$$P_1 = \int\limits_{S_0} [B^0(x)]^T B^0(x)dx + \int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_{o}^{T} [B^\Gamma(x,t)]^T B^\Gamma(x,t)dt;$$

$$b_Y = \int\limits_{S_0} [B^0(x)]^T Y^0(x)dx + \int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_{0}^{T} [B^\Gamma(x,t)]^T Y^\Gamma(x,t)dt. \qquad (5.24)$$

З (5.23), ураховуючи (5.22), при $N_0 \to \infty$, $N_\Gamma \to \infty$ знаходимо, що помилки в моделюванні початково-крайових умов (5.1), (5.2) вектором $\bar{u}$ значень моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ визначатимуться співвідношенням:

$$\varepsilon^2 = \min_{\bar{u}\in\Omega_u} [\sum_{r=1}^{R_0} \int\limits_{S_0} \| L_r^0(\partial_t) y(s)\big|_{t=0} - Y_r^0(x) \|^2 \, dx +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_{0}^{T} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(s) \|^2 \, dt] = b - b_Y^T P_1^+ b_Y, \qquad (5.25)$$

в якому

$$b = \int\limits_{S_0} [Y^0(x)]^T Y^0(x)dx + \int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_{0}^{T} [Y^\Gamma(s)]^T Y^\Gamma(s)dt, \qquad (5.26)$$

а $b_y$ визначається співвідношенням (5.24).

Умова однозначності множини $\Omega_u$ залишиться незмінною:

$$\det P_1 > 0. \qquad (5.27)$$

### *5.4. Псевдообернення матричних рядків-функцій і розв'язок задачі моделювання початково-крайових умов.*

Методика побудови та дослідження загального розв'язку задачі (5.5) моделювання початково-крайових умов (5.1), (5.2) векторами (5.3), (5.4), значень моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ ґрунтувалася на використанні матричного рядка-функції $B_1(\cdot)$, визначеного співвідношеннями (5.13), (5.15).

Спрямовуючи до нескінченності значення $N_0$ та $N_\Gamma$ у визначенні цієї функції, уведемо до розгляду матричні та векторні функції:

$$B^0(x) = \lim_{N_0\to\infty}(B^0(x_1^0),\ldots,B^0(x_{N_0}^0)) = \lim_{N_0\to\infty}\frac{B_1^0(\cdot)}{\sqrt{\Delta x_N^0}};$$

$$B^\Gamma(s) = \lim_{N_\Gamma\to\infty}(B^\Gamma(s_1^\Gamma),\ldots,B^\Gamma(s_{N_\Gamma}^\Gamma)) = \lim_{N_\Gamma\to\infty}\frac{B_1^\Gamma(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}};$$

$$[B^0(x)]^T = \lim_{N_0\to\infty}([B^0(x_1^0)]^T,\ldots,[B^0(x_{N_0}^0)]^T) = \lim_{N_0\to\infty}\frac{[B_1^0(\cdot)]^T}{\sqrt{\Delta x_N^0}};$$

$$[B^\Gamma(s)]^T = \lim_{N_\Gamma\to\infty}([B^\Gamma(s_1^\Gamma)]^T,\ldots,[B^\Gamma(s_{N_\Gamma}^\Gamma)]^T) = \lim_{N_\Gamma\to\infty}\frac{[B_1^\Gamma(\cdot)]^T}{\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}};$$

$$Y^0(x) = \lim_{N_0\to\infty}(Y^0(x_1^0),\ldots,Y^0(x_{N_0}^0)) = \lim_{N_0\to\infty}\frac{Y_1^0(\cdot)}{\sqrt{\Delta x_N^0}};$$

$$Y^\Gamma(x) = \lim_{N_\Gamma\to\infty}(Y^\Gamma(s_1^\Gamma),\ldots,Y^\Gamma(s_{N_\Gamma}^\Gamma)) = \lim_{N_\Gamma\to\infty}\frac{Y_1^\Gamma(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}}.$$

Позначивши через

$$B^{(+)}(s) = \lim_{\substack{N_0\to\infty\\ N_\Gamma\to\infty}}(B_1^T(\cdot)B_1(\cdot))^+\left(\frac{B_1^0(\cdot)}{\sqrt{\Delta x_N^0}},\frac{B_1^\Gamma(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}}\right)$$

граничне значення матриці, псевдооберненої до $B_1(\cdot)$, знаходимо, що

$$B^{(+)}(s) = P_1^+(B^0(x),B^\Gamma(s)). \qquad (5.28)$$

Це дозволяє матричну функцію $B^{(+)}(s)$ назвати псевдооберненою до матричної функції $B(s)$.

Після чого із співвідношення (5.17), подаючи його у вигляді

$$\Omega_u = \{\bar{u} : \bar{u} = (B_1^T(\cdot)B_1(\cdot))^+ B_1^T(\cdot)E[Y_1(\cdot) - B_1(\cdot)v] + v\},$$

дістаємо, що вектор значень функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, якими через складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції стану

$$y(s) = y_0(s) + y_\Gamma(s) + y_\infty(s)$$

моделюється вплив на неї початково-крайових умов (5.1), (5.2), визначається співвідношенням

$$\bar{u} \in \Omega_u = \{\bar{u} : \bar{u} = \int B^{(+)}(s)Y(s)ds + v - (\int B^{(+)}(s)B(s)ds)v\}, \qquad (5.29)$$

де інтегрування ведеться по області зміни змінних $x$ в $B^0(x)$ та $s$ – в $B^\Gamma(s)$, а

$$Y(s) = \lim_{\substack{N_0\to\infty\\ N_\Gamma\to\infty}} col\left(\frac{Y_1^0(\cdot)}{\sqrt{\Delta x_N^0}},\ \frac{Y_1^\Gamma(\cdot)}{\sqrt{\Delta s_N^\Gamma}}\right) = col(Y^0(x),Y^\Gamma(s)).$$

Невизначеність інтегрування в (5.29) зникає, якщо розглядати частинні випадки розв'язуваної задачі, а саме:

а) моделювання початкових умов у задачі Коші;
б) моделювання крайових умов у задачі усталеної динаміки системи.

У першому випадку $B^{(+)}(s)=(B^0(x))^{(+)}$, у другому – $B^{(+)}(s)=(B^{\Gamma}(x))^{(+)}$. Крім того, для кожного з цих випадків $Y(s)=Y^0(x)$ та $Y(s)=Y^{\Gamma}(s)$ відповідно. Це означає, що:

а) вектор $\bar{u}_0$ значень функції $u_0(s)$ $(s\in S_0\times(-\infty,0])$, яким моделюються початкові умови (5.1), визначається співвідношенням:

$$\bar{u}_0\in\Omega_0=\{\bar{u}_0:\ \bar{u}_0=\int\limits_{S_0}(B^0(x))^{(+)}Y^0(x)dx+v_0-\left(\int\limits_{S_0}(B^0(x))^{(+)}(B^0(x))dx\right)v_0,\ \ \forall v_0\in R^{M_0}\};$$

в) вектор $\bar{u}_{\Gamma}$ значень функцій $u_{\Gamma}(s)$ $(s\in(R^{\nu}\setminus S_0)\times[0,T])$, яким моделюються крайові умови (5.2), визначається співвідношенням:

$$\bar{u}_{\Gamma}\in\Omega_{\Gamma}=\{\bar{u}_{\Gamma}:\bar{u}_{\Gamma}=\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}(B^{\Gamma}(s))^{(+)}Y^{\Gamma}(s)ds+v_{\Gamma}-\left(\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}(B^{\Gamma}(s))^{(+)}(B^{\Gamma}(s))ds\right)v_{\Gamma}\ \ \forall v_{\Gamma}\in R^{M_{\Gamma}}\}.$$

При цьому, з урахуванням визначення псевдооберненої матричної функції, яке випливає з (3.6),

$$\int\limits_{S_0}(B^0(x))^{(+)}Y^0(x)dx=\arg\min_{\bar{u}_0\in\Omega_0}\|\bar{u}_0\|^2;$$

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}(B^{\Gamma}(s))^{(+)}Y^{\Gamma}(s)ds=\arg\min_{\bar{u}_{\Gamma}\in\Omega_{\Gamma}}\|\bar{u}_{\Gamma}\|^2.$$

Зрозуміло, що для розглядуваної окремо задачі Коші та крайової задачі спростяться умови точності та однозначності їх розв'язання. Для кожної з цих задач вони будуть такими:

а) для задачі Коші:

$$\varepsilon_0^2=\min_{\bar{u}_0\in\Omega_0}\sum_{r=1}^{R_0}\int\limits_{S_0}\left\|L_r^0(\partial_t)y(s)\big|_{t=0}-Y_r^0(x)\right\|^2dx=$$

$$=\int\limits_{S_0}[Y^0(x)]^TY^0(x)dx-\left(\int\limits_{S_0}[Y^0(x)]^TB^0(x)dx\right)\times P_0^+\left(\int\limits_{S_0}[B^0(x)]^TY^0(x)dx\right);$$

$$\det\int\limits_{S_0}[B^0(x)]^TB^0(x)dx>0;$$

б) для крайової задачі:

$$\varepsilon_{\Gamma}^2=\min_{\bar{u}_{\Gamma}\in\Omega_{\Gamma}}\sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}\left\|L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)y(s)-Y_{\rho}^{\Gamma}(s)\right\|^2ds=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}[Y^{\Gamma}(s)]^TY^{\Gamma}(s)ds-\left(\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}[Y^{\Gamma}(s)]^TB^{\Gamma}(s)ds\right)P_{\Gamma}^+\times\left(\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{T}[B^{\Gamma}(s)]^TY^{\Gamma}(s)ds\right);$$

$$\det \int_{\Gamma} \int_{0}^{T} [B^{\Gamma}(s)]^T B^{\Gamma}(s) ds > 0;$$

де $P_0^+$, $P_\Gamma^+$ – матриці, псевдообернені до

$$P_0 = \int_{S_0} [B^0(x)]^T B^0(x) dx$$

та

$$P_\Gamma = \int_{\Gamma} \int_{0}^{T} [B^{\Gamma}(s)]^T B^{\Gamma}(s) ds$$

відповідно.

# § 6. Моделювання динамічних систем із розподіленими параметрами при наявності спостережень за ними

## *6.1. Постановка задачі моделювання.*

Розглянуті вище постановки задач моделювання динаміки системи (1.1) дозволяють від диференціальної форми моделі перейти до інтегральної для випадку, коли система функціонує в замкнених просторово-часових областях, у необмежених часових та необмежених просторових областях. При цьому мається на увазі, що для цих задач задані початково-крайові, початкові та крайові умови відповідно. Тобто, задача динаміки описана із завданням усіх потрібних для її розв’язання умов.

Зауважимо, що на практиці постановка задачі не завжди повна – часто деякі умови, незважаючи на їх наявність, не доступні для вимірювання. Тому виникають задачі моделювання дії невідомих зовнішньодинамічних факторів (зовнішніх збурень, початкових та крайових умов). Розглянемо постановку та методи розв’язання таких задач.

Будемо виходити з того, що вектор-функція $y(s)$ стану системи задовольняє співвідношення (1.1) – (1.4), а саме:

$$L_1(\partial_x,\partial_t)y(s)=L_2(\partial_x,\partial_t)u(s); \quad (6.1)$$

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0}=Y_r^0(x)\ \ (r=\overline{1,R_0}); \quad (6.2)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{x=x^\Gamma\in\Gamma}=Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)\qquad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}), \quad (6.3)$$

де всі позначення відповідають прийнятим у (1.1) – (1.4).

Розглянемо задачу динаміки системи (6.1) – (6.3) в обмеженій просторово-часовій області $S_0^T=S_0\times[0,T]$ за умови, що:

1). Відома функція $u(s)$; невідомі - $Y_r^0(x),Y_\rho^\Gamma(x,t)$; (6.4)

2). Відомі функції $Y_r^0(x)$; невідомі - $u(s),Y_\rho^\Gamma(x,t)$; (6.5)

3). Відомі функції $Y_\rho^\Gamma(x,t)$; невідомі - $u(s),Y_r^0(x)$; (6.6)

4). Відомі функції $u(s),Y_r^0(x)$; невідомі - $Y_\rho^\Gamma(x,t)$; (6.7)

5). Відомі функції $u(s),Y_\rho^\Gamma(x,t)$; невідомі - $Y_r^0(x)$; (6.8)

6). Відомі функції $Y_r^0(x),Y_\rho^\Gamma(x,t)$; невідома - $u(s)$. (6.9)

Додатково спостереженню можуть бути доступними вектор-комбінації компонент вектор-функції стану $y(s)$:

$$Y_\sigma^c(s)=L_\sigma^c(\partial_x,\partial_t)y(s)\qquad \sigma=\overline{1,R_c},s\in S_c\subset S_0, \quad (6.10)$$

де $L_\sigma^c(\partial_x,\partial_t)$ – задані матричні диференціальні оператори.

Виходячи із спостережень (6.10), з урахуванням доступних для вимірювання зовнішньодинамічних факторів (6.4) – (6.9), змоделюємо дію невідомих зовнішньодинамічних факторів (6.4) – (6.9) розглядуваних задач так, щоб:

1). $\Phi_1 \to \min\limits_{Y_r^0(x), Y_\rho^\Gamma(s)} \; (r = \overline{1, R_0}; \;\; \rho = \overline{1, R_\Gamma});$ (6.11)

2). $\Phi_1 + \Phi_2 \to \min\limits_{u(s), Y_\rho^\Gamma(s)} \; (\rho = \overline{1, R_\Gamma});$ (6.12)

3). $\Phi_1 + \Phi_3 \to \min\limits_{u(s), Y_r^0(x)} \; (r = \overline{1, R_0});$ (6.13)

4). $\Phi_1 + \Phi_2 \to \min\limits_{Y_\rho^\Gamma(s)} \; (\rho = \overline{1, R_\Gamma});$ (6.14)

5). $\Phi_1 + \Phi_3 \to \min\limits_{Y_r^0(s)} \; (r = \overline{1, R_0});$ (6.15)

6). $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \to \min\limits_{u(s)},$ (6.16)

де

$$\Phi_1 = \sum_{\sigma=1}^{R_c} \int\limits_{S_c} \| L_\sigma^c(\partial_x, \partial_t) y(s) - Y_\sigma^c(s) \|^2 \, ds;$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \int\limits_{S_0} \| L_r^0(\partial_t) y(s) |_{t=0} - Y_r^0(x) \|^2 \, dx; \tag{6.17}$$

$$\Phi_3 = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int\limits_\Gamma dx \int\limits_0^T \| L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x,t) \|^2 \, dt.$$

Не розписуючи детально математичних постановок задач, укажемо, що можливі випадки, коли відома тільки частина зовнішньодинамічних факторів, таких, як початкові та крайові умови. Інша частина невідома й підлягає моделюванню. Це виглядає так:

1). Відомі $Y_r^0(x)$ для $r = \overline{1, R_{01}}$ $(R_{01} < R_0);$ (6.18)

невідомі $Y_r^0(x)$ для $r = \overline{R_{01} + 1, R_0};$

2). Відомі $Y_\rho^\Gamma(s)$ для $\rho = \overline{1, R_{\Gamma 1}}$ $(R_{\Gamma 1} < R_\Gamma);$ (6.19)

невідомі $Y_\rho^\Gamma(s)$ $\rho = \overline{R_{\Gamma 1} + 1, R_\Gamma}.$

Можливий також випадок, коли спостереження (6.10) відсутнє.

### *6.2. Постановки задач моделювання в термінах матричних функцій та матричних векторів.*

Сформульовані вище задачі (6.11) – (6.16) схожі на задачі, розглядувані в попередніх параграфах, які розв’язувалися з використанням апарату псевдообернених матриць та матричних функцій і зводилися до задач знаходження вектора $u$, або векторної функції $u(s)$ таких, щоб при заданій матриці $C$, матричних функціях $A(s), B(s)$, вектору $y$ та векторній функції $y(s)$

$$u = \arg\min \| Cu - y \|^2; \tag{6.20}$$

$$u(s) = \arg\min \| \int A(s)u(s)ds - y \|^2; \tag{6.21}$$

$$u = \arg\min \int \| B(s)u - y(s) \|^2 \, ds. \tag{6.22}$$

Для приведення задач (6.11) – (6.16) до задач вигляду (6.20) – (6.22) зведемо їх спочатку до вигляду

$$\int \| \int D(s,s')\bar{u}(s')ds' - \bar{y}(s) \|^2 \, ds \to \min_{U(s)}, \tag{6.23}$$

де, залежно від постановки задачі:

1). $U(s) = ((Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}));$

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s), u_\Gamma(s)); \tag{6.24}$$

$\bar{y}(s) = col(Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c});$

2). $U(s) = (u(s), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}));$

$$\bar{u}(s) = col(u(s), u_0(s), u_\Gamma(s)); \tag{6.25}$$

$\bar{y}(s) = col((Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c}), (Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}));$

3). $U(s) = (u(s), (Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}));$

$$\bar{u}(s) = col(u(s), u_0(s), u_\Gamma(s)); \tag{6.26}$$

$\bar{y}(s) = col((Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}));$

4). $U(s) = ((Y_r^0(x), r = \overline{R_{01} + 1, R_0}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}));$

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s), u_\Gamma(s)); \tag{6.27}$$

$\bar{y}(s) = col((Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c}), (Y_r^o(x), r = \overline{1, R_{01}}));$

5). $U(s) = ((Y_r^0(x), r = \overline{R_{01} + 1, R_0}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}));$

$$\bar{u}(s) = col(u_0(s), u_\Gamma(s)); \tag{6.28}$$

$\bar{y}(s) = col((Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_{\Gamma 1}}));$

6). $\bar{u}(s) = col(u(s), u_0(s), u_\Gamma(s));$ (6.29)

$U(s) = (u(s), (Y_r^0(x), r = \overline{R_{01} + 1, R_0}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{R_{\Gamma 1} + 1, R_\Gamma}));$

$\bar{y}(s) = col((Y_\sigma^c(s), \sigma = \overline{1, R_c}), (Y_r^0(x), r = \overline{1, R_{01}}), (Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_{\Gamma 1}}));$

Зрозуміло, що для задач (6.11) – (6.16) матрична функція $D(s,s')$ буде блочною й виражатиметься через матричні блоки-функції

$$d_{1j}(s - s') = col(L_\sigma^c(\partial_x, \partial_t)G(s - s'), \sigma = \overline{1, R_c}), \quad s \in S_0 \times [0, T];$$

$$d_{2j}(s-s') = col(L_r^0(\partial_t)G(s-s'), r=\overline{1,R_0}), \quad x\in S_0, t=0; \quad (6.30)$$

$$d_{3j}(s-s') = col(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s'), \rho=\overline{1,R_\Gamma}), \quad x\in \Gamma, t\in[0,T];$$

$$d_{4j}(s-s') = col(L_r^0(\partial_t)G(s-s'), r=\overline{1,R_{01}});$$

$$d_{5j}(s-s') = col(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s'), \rho=\overline{1,R_{\Gamma 1}});$$

$$d_{6j}(s-s') = col(d_{4j}(s-s'), d_{5j}(s-s')),$$

в яких $G(s-s')$ – матрична функція Гріна, а $s'\in S_0^T = S_0\times[0,T]$ при $j=1,\ s'\in S_0^\infty = S_0\times(-\infty,0]$, при $j=2,\ s'\in S_\infty^T=(R^\upsilon \setminus S_0)\times[0,T]$, при $j=3,$ співвідношеннями:

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1;\, j=1,2};$$

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1,2;\, j=\overline{1,3}};$$

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1,3;\, j=\overline{1,3}}; \quad (6.31)$$

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1,4;\, j=2,3};$$

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1,5;\, j=2,3};$$

$$D(s,s') = [d_{ij}(s-s')]_{i=1,6;\, j=\overline{1,3}}.$$

### *6.3. Дискретний варіант розв'язання задачі моделювання зовнішньодинамічних факторів динаміки лінійних систем із розподіленими параметрами.*

Для зведення постановки задачі (6.23) до задачі (6.20), загальний розв'язок якої побудовано та досліджено в п. 3.5:

1) вектор-функції $u(s), u_0(s), u_T(s)$ дискретизуємо точками $s_m\in S_0^T\ \ (m=\overline{1,M}),\ \ s_m^0\in S_0^\infty\ \ (m=\overline{1,M_0}),\ \ s_m^\Gamma\in S_\infty^T\ \ (m=\overline{1,M_\Gamma})$ відповідно, уводячи до розгляду вектори

$$\bar{u}_c = col(u(s_m),\ \ m=\overline{1,M}), \bar{u}_0 = col(u_0(s_m^0), m=\overline{1,M_0})$$

та

$$\bar{u}_\Gamma = col(u(s_m^\Gamma), m=\overline{1,M_\Gamma});$$

2) вектор-функції $Y_\sigma^c(s)\ \ (\sigma=\overline{1,R_c}),\ \ Y_r^0(x)\ \ (r=\overline{1,R_0})$ та $Y_\rho^\Gamma(s)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ дискретизуємо точками $s_l\in S_0^T\ \ (l=\overline{1,L}),\ \ x_l^0\in S_0\ \ (l=\overline{1,L_0})$ та $s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T]\ \ (l=\overline{1,L_\Gamma})$ відповідно, уводячи до розгляду вектори

$$\bar{y}_c = col((Y_\sigma^c(s_l),\ \ l=\overline{1,L}),\ \ \sigma=\overline{1,R_c}),$$

$$\bar{y}_0 = col((Y_r^0(x_l^0),\ \ l=\overline{1,L_0}),\ \ r=\overline{1,R_0}),$$

$$\bar{y}_{01} = col((Y_r^0(x_l^0),\ \ l=\overline{1,L_{01}}),\ \ r=\overline{1,R_0}),$$

$$\bar{y}_\Gamma = col((Y_\rho^\Gamma(s_l^\Gamma),\quad l=\overline{1,L_\Gamma}),\quad \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\bar{y}_{\Gamma 1} = col((Y_\rho^\Gamma(s_l^\Gamma),\quad l=\overline{1,L_{\Gamma 1}}),\quad \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\bar{y}_{0\Gamma} = col(\bar{y}_{01}, \bar{y}_{\Gamma 1}).$$

Це призводить до заміни елементів-матриць $d_{ij}(s-s')$ матричних функцій $D(s,s')$ матрицями

$$\begin{aligned} D_{1j} &= [d_{1j}(s_l - s_{mj})]_{l,m=1}^{l=L,m=M_j};\\ D_{2j} &= [d_{2j}(s_l^0 - s_{mj})]_{l,m=1}^{l=L_0,m=M_j} \quad (s_l^0 = (x_l^0, 0));\\ D_{3j} &= [d_{3j}(s_l^\Gamma - s_{mj})]_{l,m=1}^{l=L_\Gamma,m=M_j};\\ D_{4j} &= [d_{4j}(s_l^0 - s_{mj})]_{l,m=1}^{l=L_{01},m=M_j};\\ D_{5j} &= [d_{5j}(s_l^\Gamma - s_{mj})]_{l,m=1}^{l=L_{\Gamma 1},m=M_j};\\ D_{6j} &= col(d_{4j}, d_{5j}), \end{aligned} \tag{6.32}$$

в яких $M_1 \equiv M;\ M_2 \equiv M_0;\ M_3 \equiv M_\Gamma;\ s_{m1} \in S_0^T(m=\overline{1,M});\ s_{2m} \in S_0^\infty(m=\overline{1,M_0});\ s_{m3} \in S_\infty^T(m=\overline{1,M_\Gamma}).$

Замість матричної функції $D(s,s')$, векторних функцій $\bar{u}(s'), \bar{y}(s)$ у (6.23) при розгляді задач (6.24) – (6.29) використаємо матриці та вектори:

$$\begin{aligned}
&1)\ C = (D_{11}, D_{12});\ \bar{u} = col(\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \bar{y}_c;\\
&2)\ C = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\end{pmatrix};\ \bar{u} = col(\bar{u}_c, \bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \begin{pmatrix}\bar{y}_c\\ \bar{y}_0\end{pmatrix};\\
&3)\ C = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33}\end{pmatrix};\ \bar{u} = col(\bar{u}_c, \bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \begin{pmatrix}\bar{y}_c\\ \bar{y}_\Gamma\end{pmatrix};\\
&4)\ C = \begin{pmatrix} D_{12} & D_{13}\\ D_{22} & D_{23}\end{pmatrix};\ \bar{u} = col(\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \begin{pmatrix}\bar{y}_c\\ \bar{y}_{01}\end{pmatrix};\\
&5)\ C = \begin{pmatrix} D_{12} & D_{13}\\ D_{32} & D_{33}\end{pmatrix};\ \bar{u} = col(\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \begin{pmatrix}\bar{y}_c\\ \bar{y}_{\Gamma 1}\end{pmatrix};\\
&6)\ C = \begin{pmatrix} D_{11}, D_{12}, D_{13}\\ D_{61}, D_{62}, D_{63}\end{pmatrix};\ \bar{u} = col(\bar{u}_c, \bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma);\ \bar{y} \equiv \begin{pmatrix}\bar{y}_c\\ \hline \bar{y}_{0\Gamma}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

При цьому задача знаходження вектора $\bar{u}$ дискретних значень функції зовнішньодинамічних збурень $u(s)$ та моделюючих вектор-функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ зведеться до задачі (6.20), розв'язок якої побудовано та досліджено в п. 3.5 (формули (3.26) – (3.32)).

### *6.4. Розв'язок задачі моделювання при дискретно-спостережуваних зовнішньодинамічних факторах.*

Розглянемо варіант зведення задачі (6.23) до задачі (6.21), розв'язаної та дослідженої в п. 4.3.

Для цього виконаємо дискретизацію вектор-функції $\bar{y}(s)$ спостережуваних зовнішньодинамічних факторів

$Y_\sigma^c(s)$ $(\sigma=\overline{1,R_c})$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ точками $s_l$ $(l=\overline{1,L})$, $s_l^0$ $(l=\overline{1,L_0})$, $s_l^\Gamma$ $(l=\overline{1,L_\Gamma})$ відповідно. Це еквівалентно заміні цих зовнішньодинамічних факторів векторами $\bar{y}_c, \bar{y}_o, \bar{y}_\Gamma$ відповідно. Елементи $d_{ij}(s-s')$ матричних функцій $D(s,s')$ при цьому перетворяться на матричні вектор-функції вигляду:

$$\begin{aligned} D_{1j}(s') &= col(d_{1j}(s_l-s'), \quad l=\overline{1,L}); \\ D_{2j}(s') &= col(d_{2j}(s_l^0-s'), \quad l=\overline{1,L_0}); \\ D_{3j}(s') &= col(d_{3j}(s_l^\Gamma-s'), \quad l=\overline{1,L_\Gamma}); \\ D_{4j}(s') &= col(d_{4j}(s_l^0-s'), \quad l=\overline{1,L_{01}}); \\ D_{5j}(s') &= col(d_{5j}(s_l^\Gamma-s'), \quad l=\overline{1,L_{\Gamma 1}}); \\ D_{6j}(s') &= col(D_{4j}(s'), D_{5j}(s')), \end{aligned} \tag{6.34}$$

де $s'\in S_0^T$, $s'\in S_0^\infty$ та $s'\in S_\infty^T$ при $j=1,2,3$ відповідно.

Замість матричної функції $D(s,s')$ та векторної функції $\bar{y}(s)$ у (6.23) при розгляді задач (6.24) – (6.29) використаємо матричні функції та вектори:

$$\begin{aligned}
&1)\ A(s')=(D_{12}(s'),D_{13}(s'));\ \bar{y}=\bar{y}_c; \\
&2)\ A(s')=\begin{pmatrix} D_{11}(s') & D_{12}(s') & D_{13}(s') \\ D_{21}(s') & D_{22}(s') & D_{23}(s') \end{pmatrix};\ \bar{y}=\begin{pmatrix} \bar{y}_c \\ \bar{y}_0 \end{pmatrix}; \\
&3)\ A(s')=\begin{pmatrix} D_{11}(s') & D_{12}(s') & D_{13}(s') \\ D_{31}(s') & D_{32}(s') & D_{33}(s') \end{pmatrix};\ \bar{y}=\begin{pmatrix} \bar{y}_c \\ \bar{y}_\Gamma \end{pmatrix}; \\
&4)\ A(s')=\begin{pmatrix} D_{12}(s') & D_{13}(s') \\ D_{22}(s') & D_{23}(s') \end{pmatrix};\ \bar{y}=\begin{pmatrix} \bar{y}_c \\ \bar{y}_{01} \end{pmatrix}; \\
&5)\ A(s')=\begin{pmatrix} D_{12}(s') & D_{13}(s') \\ D_{32}(s') & D_{33}(s') \end{pmatrix};\ \bar{y}=\begin{pmatrix} \bar{y}_c \\ \bar{y}_{\Gamma 1} \end{pmatrix}; \\
&6)\ A(s')=\begin{pmatrix} D_{11}(s') & D_{12}(s') & D_{13}(s') \\ D_{61}(s') & D_{62}(s') & D_{63}(s') \end{pmatrix};\ \bar{y}=col(\bar{y}_c,\bar{y}_{0\Gamma}),
\end{aligned} \tag{6.35}$$

де область зміни змінної $s'$ визначається згідно з (6.34).

Таким чином, задача знаходження моделюючої вектор-функції $\bar{u}(s)$ (див. формули (6.24) – (6.29)) зведеться до задачі (6.21), розв'язок якої побудовано та досліджено в п. 4.3 (формули (4.23) – (4.27)).

### *6.5. Розв'язок задачі дискретного моделювання неперервно-спостережуваних зовнішньодинамічних збурень.*

Розглянемо варіант зведення задачі (6.23) до задачі (6.22), розв'язаної та дослідженої в п. 5.3.

Для цього виконаємо дискретизацію вектор-функції $\bar{u}(s)$ моделюючих функцій $u(s)$ $(s \in S_o^T)$, $u_0(s)$ $(s \in S_0^\infty)$ та $u_\Gamma(s)$ $(s \in S_\infty^T)$ точками $s_m$ $(m=\overline{1,M})$, $s_m^0$ $(m=\overline{1,M_0})$ і $s_m^\Gamma$ $(m=\overline{1,M_\Gamma})$ відповідно. Це еквівалентно заміні цих функцій векторами $\bar{u}_c, \bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma$. Елементи $d_{ij}(s-s')$ матричних функцій $D(s,s')$ при цьому перетворяться на матричні рядки-функції вигляду:

$$
\begin{aligned}
D_{i1}(s) &= str(d_{i1}(s-s_m), m=\overline{1,M});\\
D_{i2}(s) &= str(d_{i2}(s-s_m^o), m=\overline{1,M_0});\\
D_{i3}(s) &= str(d_{i3}(s-s_m^\Gamma), m=\overline{1,M_\Gamma}),
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

де $s \in S_0^T$, $s=(x \in S_0, t=0)$, $s=(x \in \Gamma, t \in [0,T])$ для $i=1,2,3$ відповідно.

Замість матричної функції $D(s,s')$ та векторних функцій $\bar{u}(s)$ та $\bar{y}(s)$ в (6.23) при розгляді задач (6.24) – (6.29) використаємо матричні функції, вектори та векторні функції:

$$
\begin{aligned}
&1)\ B(s)=(D_{12}(s), D_{13}(s));\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\ \ \bar{y}(s)=Y^c(s);\\
&2)\ B(s)=col((D_{i1}(s),D_{i2}(s),D_{i3}(s)), i=1;2);\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_c,\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\\
&\quad \bar{y}(s)=col(Y^c(s),Y^0(s));\\
&3)\ B(s)=col((D_{i1}(s),D_{i2}(s),D_{i3}(s)), i=1;3);\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_c,\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\\
&\quad \bar{y}(s)=col(Y^c(s),Y^\Gamma(s));\\
&4)\ B(s)=col((D_{i2}(s),D_{i3}(s), i=1;4);\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\\
&\quad \bar{y}(s)=col(Y^c(s),Y^{01}(s));\\
&5)\ B(s)=col((D_{i2}(s),D_{i3}(s), i=1;5);\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\\
&\quad \bar{y}(s)=col(Y^c(s),Y^{\Gamma 1}(s));\\
&6)\ B(s)=((D_{i1}(s),D_{i2}(s),D_{i3}(s)), i=1;6);\ \ \bar{u}=col(\bar{u}_c,\bar{u}_o,\bar{u}_\Gamma);\\
&\quad \bar{y}(s)=col(Y^c(s),Y^{01}(s),Y^{\Gamma 1}(s)),
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

де область зміни змінної $s$ визначається згідно з (6.36), а

$$
\begin{aligned}
Y^c(s) &= col(Y_\sigma^c(s), \sigma=\overline{1,R_c});\\
Y^0(s) &= col(Y_r^0(s), r=\overline{1,R_0});\\
Y^\Gamma(s) &= col(Y_\rho^\Gamma(s), \rho=\overline{1,R_\Gamma});\\
Y^{01}(s) &= col(Y_r^0(s), r=\overline{1,R_{01}});
\end{aligned}
$$

$$Y^{\Gamma 1}(s) = col(Y_{\rho}^{\Gamma}(s), \rho = \overline{1, R_{\Gamma 1}}).$$

Таким чином, задача знаходження вектора $\bar{u}$ значень моделюючих функцій $u(s), u_0(s), u_{\Gamma}(s)$ через вектор-функцію $\bar{y}(s)$ (див. формули (6.24) – (6.29)) зведеться до задачі (6.22), розв'язок якої побудовано та досліджено в п. 5.3 (формули (5.18), (5.24) – (5.27)).

### *6.6. Моделювання динаміки частково спостережуваних систем із розподіленими параметрами.*

Розв'язані вище задачі моделювання динаміки розглядуваних систем допускали недоступність спостереження одного з двох зовнішньодинамічних факторів – початкових або крайових умов (задачі (6.25) – (6.26)). Розглядалися особливості постановки та розв'язання поставлених вище задач за умови, що враховані в них початково-крайові умови спостерігаються частково (задачі (6.27) – (6.29)). Можливі постановки та розв'язання задач, в яких спостереження за вектор-функцією стану $y(s)$ відсутнє повністю.

Це викликає такі зміни у визначенні матричної $D(s, s')$ та векторної функції $\bar{y}(s)$ у співвідношенні (6.23), а, отже, у частинних випадках (6.20) – (6.22) задачі (6.23):

а) при відсутності спостереження $Y_{\sigma}^{c}(s)$ $(\sigma = \overline{1, R_c})$ будуть відсутні й компоненти $d_{1j}(s - s')$ $(j = \overline{1,3})$ матричної функції $D(s, s')$;

б) часткове спостереження початкових умов змінює до $R_{01}$ кількість складових $L_r^0(\partial_t)G(s - s')$ у визначенні вектор-функцій $d_{2j}(s - s')$ (формули (6.30)) та складових $Y_r^0(x)$ у визначенні вектор-функції $\bar{y}(s)$ (формули (6.27), (6.29));

в) часткове спостереження крайових умов змінює до $R_{\Gamma 1}$ кількість складових $L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)G(s - s')$ у визначенні вектор-функцій $d_{3j}(s - s')$ (формули (6.30)) та складових $Y_{\rho}^{\Gamma}(s)$ у визначенні вектор-функції $\bar{y}(s)$ (формули (6.28), (6.29)).

Описаною в пп.6.3 – 6.5 дискретизацією змінених таким чином матричних функцій $D(s - s')$ та векторних функцій $\bar{y}(s)$ задача (6.23) все одно зведеться до однієї із задач, сформульованих співвідношеннями (6.20) – (6.22). Це означає, що запропонована методика моделювання прямих задач динаміки розглядуваних систем дозволяє отримати розв'язки (найкращі в середньоквадратичному сенсі) цих задач і у випадку неповноти інформації про зовнішньодинамічну обстановку, в якій функціонує досліджувана система. Це, як правило, недосяжно при використанні класичних методів розв'язання таких задач.

# РОЗДІЛ 2

# ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУР СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядаються задача моделювання просторово-часової обстановки, в якій функціонує система, зосередженими в просторі та часі моделюючими функціями та задача моделювання дискретно спостережуваної зовнішньодинамічної обстановки розподіленими просторово-часовими моделюючими функціями. Ставляться та розв'язуються задачі оптимізації розміщення зосереджених моделюючих функцій та точкових спостережень за динамікою системи. Для реалізації градієнтної процедури оптимізації досліджуються проблеми диференціювання функціоналів оптимальності та їх залежності від скінченновимірних варіацій просторово-часових координат моделюючих функцій та спостерігачів за системою.

## §7. Задачі оптимізації структури лінійних динамічних систем із розподіленими параметрами

### *7.1. Проблеми оптимізації в моделюванні динаміки систем із розподіленими параметрами*

Розглянуті вище задачі моделювання початково-крайових умов (див. (1.3), (1.4))

$$L_r^0(\partial_t)y(x,t)\big|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (r = \overline{1, R_0}), \tag{7.1}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(x,t)\big|_{x=x^\Gamma\in\Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}) \tag{7.2}$$

та спостережень (див. (6.10))

$$L_\sigma^c(\partial_x, \partial_t)y(x,t) = Y_\sigma^c(s) \quad (\sigma = \overline{1, R_c}) \tag{7.3}$$

системи (див. (1.1))

$$L_1(\partial_x, \partial_t)y(x,t) = L_2(\partial_x, \partial_t)u(x,t) \tag{7.4}$$

розв'язувалися у трьох випадках:

1) дискретизувалися початково-крайові умови (7.1), (7.2) та спостереження (7. 3) за системою;

2) дискретизувалися моделюючі функції, якими імітувалася дія неперервних початково-крайових умов (7.1), (7.2) та спостережень (7.3);

3) дискретизувалися співвідношення (7.1) – (7.3) і функції $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, якими вони моделювалися.

У кожному з цих трьох випадків проблеми знаходжень вектора моделюючих функцій $\bar{u}(s)$ (див. (4.7)) або вектора $\bar{u}$ (див. (5.3), (5.4)) значень цих функцій зводиться до обернення співвідношень (див. (3.5), (4.6), (5.9)):

$$\int A(s')\bar{u}(s'')ds' = \bar{y}; \tag{7.5}$$

$$B(s)\bar{u} = Y(s); \tag{7.6}$$

$$C\bar{u} = \bar{y}, \tag{7.7}$$

де всі позначення відповідають прийнятим у (3.5), (4.6) та (5.9).

Для кожного з цих співвідношень записувалися множини $\Omega_u$ розв'язків (псевдорозв'язків) і помилки їх псевдообернення

$$\varepsilon_1^2 = \min_{\bar{u}(s)\in\Omega_u} \|\int A(s')u(s')ds' - \bar{y}\|^2 ; \tag{7. 8}$$

$$\varepsilon_2^2 = \min_{\bar{u}\in\Omega_u} \int\| B(s)\bar{u} - Y(s)\|^2 \ ds \ ; \tag{7. 9}$$

$$\varepsilon_3^2 = \min_{\bar{u}\in\Omega_u} \| C\bar{u} - \bar{y}\|^2 , \tag{7.10}$$

Зрозуміло, що значення помилок $\varepsilon_i^2 \quad (i = \overline{1,3})$ визначається точністю обернення співвідношень (7.5) – (7.7). Однак, як би точно не оберталися ці співвідношення, у своєму необерненому вигляді вони вже містять помилки заміни неперервної інтегральної моделі (див. (1.7))

$$y(s) = \int G(s - s')u(s')ds' \tag{7.11}$$

її дискретним аналогом. Помилки ці пов'язані з вибором кількості точок дискретизації початково-крайових умов, моделюючих функцій та вектора спостережень стану системи.

Тому виникає природне бажання зробити вибір точок дискретизації співвідношення (7.11) таким, щоб відповідна модель системи вигляду (7.5) – (7.7) була найближчою до реальної, а також, щоб побудовані тут методи дозволяли цю модель як можна точніше обернути. Якщо перша задача розв'язується з урахуванням фізичної суті проблеми, то друга – мінімізацією (за точками дискретизації) помилок (7.8) – (7.10).

### *7.2. Задача оптимізації спостерігачів.*

Розглянемо варіант розв'язання задачі моделювання, коли розв'язок її знаходиться шляхом обернення системи інтегральних рівнянь (7.5).

Виходячи з того, що матрична вектор-функція $A(s')$ – дискретизована за нештрихованими координатами матрична функція Гріна $G(s-s')$, а точками дискретизаціїї цих координат визначаються компоненти вектора $\bar{y}$ – вектора значень вектор-функції стану $y(s)$ системи — робимо висновок, що точками дискретизації системи (7.11), її початково-крайових умов (7.1), (7.2) та спостережень (7.3) визначається вибір координат розміщення спостерігачів за станом системи та її початково-крайовими умовами. Тому задача оптимального вибору точок дискретизаціїї співвідношень (7.1) – (7.3) та (7.11) є задачею оптимізації розміщення спостерігачів за зовнішньодинамічними характеристиками системи.

Позначивши через $S_A^*$ множину точок $s_k^*$ $(k=\overline{1,K})$ дискретизації зовнішньодинамічних характеристик системи (вона буде різною для різних задач) та враховуючи, що згідно з (4.14) помилки розв'язання задачі моделювання

$$\varepsilon_1^2(S_A^*) = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_1 P_1^+ \bar{y}\,, \tag{7.12}$$

де

$$P_1 = \int A(S_A^*, s)[A(S_A^*, s)]^T ds\,, \tag{7.13}$$

висновуємо, що проблема оптимального розміщення спостерігачів за системою (7.1) – (7.4) при моделюванні її дискретизованих початково-крайових умов функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ зведеться до задачі

$$\varepsilon_1(S_A^*) \to \min_{S_A^*}, \tag{7.14}$$

де без прив'язки до конкретної задачі (без визначення меж інтегрування) та конкретизації виразу для $A(S_A^*, s)$

$$\varepsilon_1\,(S_A^*) = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T \left(\int A(S_A^*, s) A^{(+)}(s, S_A^*) ds\right)\bar{y}. \tag{7.15}$$

При цьому $\bar{y}$ є теж функцією $S_A^*$, оскільки $\bar{y}$ є вектором значень функцій $Y_r^0(x)(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x,t)(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, та $Y_\sigma^c(\sigma=\overline{1,R_c})$ у точках $s_k^*(k=\overline{1,K})$.

### *7.3. Задача оптимізації керувачів.*

Зупинимося на особливостях моделювання початково-крайових умов через обернення функціональних співвідношень (7.6).

Виходячи з означення (5.10) матричного рядка-функції $B(s)$, висновуємо, що компоненти його є матричними функціями $G(s-s')$, дискретизованими за штрихованими координатами. Цікаво, що точками дискретизації матриці $G(s-s')$ визначаються й значення компонент вектора $\bar{u}$ – значення моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$. Тобто вибором точок дискретизації інтегральних співвідношень типу (7.11) – складових вектор-функції стану системи – визначаються точки прикладання моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$. Тому задача оптимального вибору точок дискретизації для цього випадку є задачею оптимального розміщення моделюючих факторів $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та керуючого – $u\ (s)$.

Позначивши через $S_B^*$ множину точок $s_k^*$ $(k=\overline{1,K})$ дискретизації моделюючих функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та керуючої функції $u(s)$ (множина буде різною для різних задач), визначаємо, що, згідно з (5.25), (5.26), помилки розв'язань задачі моделювання в цьому випадку визначаються величиною

$$\varepsilon_2^2(S_B^*) = b^2 - b_Y^T P_2^+ b_Y, \tag{7.16}$$

де без прив'язки до конкретної задачі (без визначення меж інтегрування та конкретизації виразу для $B(s,S_B^*)$)

$$P_2 = \int \left[ B(s,S_B^*) \right]^T B(s,S_B^*) ds, \tag{7.17}$$

$$b_Y = \int \left[ B(s,S_B^*) \right]^T Y(s) ds$$

(тут $Y(s)$ – вектор-функція, яка об'єднує значення функції початково-крайових умов та спостережень за системою, а $b^2$ – константа, не залежна від $S_B^*$).

Це означає, що проблема оптимального розміщення моделюючих та керуючих функцій при розв'язанні задач моделювання початково-крайових умов (7.1), (7.2) системи (7.4) та керування нею зводиться до задачі

$$\varepsilon_2^2(S_B^*) \to \min_{S_B^*}, \tag{7.18}$$

де з урахуванням визначення (5.28) матричного стовпця-функції $B^{(+)}(S_B^*,s)$, псевдооберненого до матричного рядка-функції $B(s,S_B^*)$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2(S_B^*) = b^2 - \left( \int Y^T(s) B(s,S_B^*) ds \right) \times \\ \times (\int B^{(+)}(S_B^*,s) Y(s) ds). \end{aligned} \tag{7.19}$$

### *7.4. Повна задача оптимізації структури систем із розподіленими параметрами.*

Розглянуті у двох попередніх пунктах постановки задач оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів є частковими, оскільки розглядаються окремо. Розглянемо випадок, коли дискретними є як спостереження за системою, так і моделюючі та керуючі функції $u_0(s), u_\Gamma(s)$, $u(s)$.

Розв'язок цієї задачі будувався в §3 шляхом обернення співвідношень типу (7.7), які отримували після дискретизаціїї як початково-крайових умов та спостережень (7.1) – (7.3), так і моделюючо-керуючих функцій $u_0(s), u_\Gamma(s)$, $u(s)$.

При цьому матричні функції Гріна $G(s-s')$ дискретизувалися як за штрихованими координатами (позначимо множину точок $s_m^*$ $(m=\overline{1,M})$ через $S_B^*$), так і за нештрихованими (позначимо множину точок $s_l^*$ $(l=\overline{1,L})$ через $S_A^*$).

Цими ж точками дискретизувалися спостереження (7.3) за станом системи, її початково-крайові умови (7.1), (7.2) та керуючо-моделюючі функції $u_0(s), u_\Gamma(s)$, $u(s)$. Це значить, що оптимальний вибір точок дискретизації визначає оптимальне розміщення як спостерігачів за системою, так і керувачів нею. Тому для розв'язання задачі оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів необхідно мінімізувати помилки $\varepsilon_3^2(S_A^*, S_B^*)$ обернення співвідношень типу (7.7) для кожної з розглядуваних задач.

З урахуванням (3.29) маємо, що

$$\varepsilon_3^2(S_A^*, S_B^*) = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T C(S_A^*, S_B^*)\left[C(S_A^*, S_B^*)\right]^+ \bar{y}, \qquad (7.\ 20)$$

а, отже, проблеми розв'язання обговорюваної задачі зведуться до розв'язання задачі

$$\varepsilon_3^2(S_A^*, S_B^*) \to \min_{S_A^*, S_B^*}. \qquad (7.\ 21)$$

### *7.5. Градієнтні процедури оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів для систем із розподіленими параметрами й проблеми їх реалізації.*

Розглянуті вище задачі оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів при переході від неперервної моделі початково-крайової задачі до різних форм дискретної звелися до задач мінімізації функціоналів $\varepsilon_1^2(S_A^*)$, $\varepsilon_2^2(S_B^*)$ та $\varepsilon_3^2(S_A^*, S_B^*)$ за множинами точок $S_A^*$ та $S_B^*$.

Для випадків, коли функціонали виражають помилки псевдонаближень до розв'язків рівнянь типу (7.5) – (7.7), функціонали $\varepsilon_i^2(\cdot)$ неперервно залежать від своїх параметрів. Тому для розв'язання задач (7.14), (7.18), (7.21) можна використати градієнтні процедури оптимізації функціоналів.

Бачимо, що функціонали залежать від параметрів $S_A^*$, $S_B^*$ через значення компонент вектора $\bar{y}$ (значення відповідних початково-крайових та спостережуваних функцій), елементи матриці $C(S_A^*, S_B^*)$, вектор-функції $A(S_A^*)$ та рядка-функції $B(S_B^*)$. При знаходженні градієнтів досліджуваних функціоналів доведеться диференціювати саме ці елементи. Якщо проблем із диференціюванням компонент вектора $\bar{y}$ не повинно бути, то вони можуть виникнути при роботі з матрицею $C(S_A^*, S_B^*)$, вектор-функцією $A(S_A^*)$ та рядком-функцією $B(S_B^*)$, тим більш, що вони входять у функціонали $\varepsilon_i^2(\cdot)$ $(i = \overline{1,3})$ й у псевдооберненому вигляді.

Розглянемо другу частину виразів (7.15), (7.19) та (7.20) для $\varepsilon_i^2(\cdot)$. З урахуванням того, що для всякої ($n^{\times}n$)-вимірної матриці $A$ та вектора $a \in R^n$

$$a^T Aa = trAaa^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}a_i a_j ,$$

висновуємо, що

$$\varepsilon_1^2(S_A^*) = \bar{y}^T \bar{y} - \sum_{i,j}\left[\int A(S_A^*, s)A^{(+)}(s, S_A^*)ds\right]_{i,j} \bar{y}_i \bar{y}_j ;$$

$$\varepsilon_2^2(S_B^*) = b^2 - \sum_{i,j}\iint\left[B(s_1, S_B^*)B^{(+)}(S_B^*, s_2)\right]_{i,j} Y_i(s_1)Y_j(s_2)ds_1 ds_2; \qquad (7.22)$$

$$\varepsilon_3^2(S_A^*, S_B^*) = \bar{y}^T \bar{y} - \sum_{i,j}\left[C(S_A^*, S_B^*)C^{+}(S_B^*, S_A^*)\right]_{i,j} \bar{y}_i \bar{y}_j .$$

Позначаючи через $K$ абстрактну розмірність множин $S_A^*$ ,$S_B^*$, розглянемо проблеми диференціювання $\varepsilon_i^2(\cdot)$ ( $i = \overline{1,3}$) по $s_k^* \in S_A^*, \sigma_k^* \in S_B^*$ $(k = \overline{1,K})$. Не записуючи компонент градієнтних векторів, зупинимося коротко на проблемах диференціювання функцій

$$\bar{y}(S_A^*), \quad A(S_A^*, s), \quad B(s, S_B^*), \quad C(S_A^*, S_B^*) \quad \text{по} \quad s_i^* \quad \text{та} \quad \sigma_i^* \quad .$$

З урахуванням того, що

$$\bar{y}_i(S_A^*) = Y(s_i^*) \qquad (i = \overline{1,K});$$

$$A(S_A^*, s) = col(G(s_i^* - s),\ i = \overline{1,K}) ;$$

$$B(s, S_A^*) = str(G(s - \sigma_i^*), \quad i = \overline{1,K});$$

$$C(S_A^*, S_B^*) = \left[G(s_i^* - \sigma_j^*)\right]_{i,j=1}^{i,j=K} ,$$

де $G(s - s')$ – матриця Гріна розглядуваної задачі, а $Y(s)$ – відома функція зовнішньодинамічних факторів (початково-крайових умов та спостережень за системою), знаходимо

$$\frac{\partial \bar{y}_i(S_A^*)}{\partial s_k^*} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \left.\dfrac{dY(s)}{ds}\right|_{s=s_k^*}, & i = k \end{cases}, \quad k = \overline{1,K} ;$$

$$\frac{\partial A(S_A^*, s')}{\partial s_k^*} = col(\begin{cases} 0, & i \neq k \\ \left.\dfrac{\partial G(s - s')}{\partial s}\right|_{s=s_k^*}, & i = k \end{cases}, \quad i = \overline{1,K});$$

$$\frac{\partial B(s', S_B^*)}{\partial \sigma_k^*} = str(\left\{ \begin{array}{ll} 0, & i \neq k \\ \left.\dfrac{\partial G(s-\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_k^*}, & i = k \end{array} \right\}, \quad i = \overline{1, K});$$

$$\frac{\partial C(S_A^*, S_B^*)}{\partial s_k^*} = \left[ \left[ \left\{ \begin{array}{l} 0, \ i \neq k \\ \left.\dfrac{\partial G(s-\sigma)}{\partial s}\right|_{s=s_k^*}, \ i = k \end{array} \right\} \right] \right]_{i,j=1}^{i,j=K};$$

$$\frac{\partial C(S_A^*, S_B^*)}{\partial \sigma_k^*} = \left[ \left[ \left\{ \begin{array}{l} 0, \ j \neq k \\ \left.\dfrac{\partial G(s-\sigma)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_k^*}, \ j = k \end{array} \right\} \right] \right]_{i,j=1}^{i,j=K}.$$

Залишаються відкритими питання диференціювання функцій $A^{(+)}(s, S_A^*)$, $B^{(+)}(S_B^*, s)$, $C^{(+)}(S_B^*, S_A^*)$. Ці питання проблематичні, оскільки немає явних функціональних залежностей функцій від змінних $s_i^*$ та $\sigma_i^*$. Однак, ми розв'яжемо цю проблему (див. наступні параграфи).

# §8. Дослідження та оптимізація структури дискретизованих динамічних систем

### *8.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Одним із варіантів розв'язання задач моделювання зовнішньодинамічної обстановки, в якій функціонує система з розподіленими параметрами, є варіант, коли дискретизуються її входи-виходи. Тобто цей варіант передбачає, що дискретизовані зовнішньодинамічні збурення моделюються дискретизованими моделюючими функціями. При цьому проблема знаходження останніх зводиться до обернення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (див. п. 3.1.) вигляду

$$C\bar{u} = \bar{y} \quad , \qquad (8.1)$$

де $C$ – задана прямокутна матриця розмірності $L \times M$, $\bar{y}$ – відомий вектор, а $\bar{u}$ – шуканий розв'язок.

Вище (див. п. 7.4) указувалося, що структура матриці $C$ та векторів $\bar{y}$, $\bar{u}$ визначається вибором точок розміщення спостерігачів та керувачів системи, проблеми оптимального розміщення яких будуть розв'язані, якщо будуть знайдені явні залежності матриці $C^{+}(S_B^*, S_A^*)$ від елементів множин $S_A^*$ (координат спостерігачів) та $S_B^*$ (координат керувачів). Питання побудови цих залежностей ми вивчимо нижче.

Будуть побудовані аналітичні залежності елементів матриці $C^{+}(S_B^*, S_A^*)$ від довільного $s_i^*$ елемента множини $S_A^*$ та елемента $\sigma_i^*$ множини $S_B^*$, а також формули диференціювання матриці $C^{+}(S_B^*, S_A^*)$ за цими елементами.

У процесі розв'язання цієї проблеми будуть побудовані формули обернення прямокутних матриць, розширених рядком або стовпчиком з явною аналітичною залежністю результатів такого обернення від початкової матриці та вектор-стовпця (чи вектор-рядка), яким ця матриця розширена.

Оскільки розширення матриці *C* вектор-рядком означає появу в досліджуваній системі нового спостерігача, а розширення цієї ж матриці новим вектор-стовпцем – появу нового керувача, то будуть створені умови для дослідження динамічних систем (у дискретизованому варіанті), які допускають розширення (звуження) мережі спостерігачів (керувачів) системи.

### *8.2. Формули Гревіля обернення прямокутних матриць.*

Будемо виходити з того, що для довільної прямокутної матриці $C$ розмірності $(L \times M)$ відома матриця $C^+$, обернена (псевдообернена) до неї. За умови, що матриця $C$ розширена рядком $a^T$, маємо

$$C_1^+ = \begin{pmatrix} C \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left( C^+ - \dfrac{Z(C)aa^T C^+}{a^T Z(C)a} \vdots \dfrac{Z(C)a}{a^T Z(C)a} \right) & \text{при} \quad a^T Z(C)a > 0; \\ \left( C^+ - \dfrac{R(C)aa^T C^+}{1 + a^T R(C)a} \vdots \dfrac{R(C)a}{a^T R(C)a} \right) & \text{при} \quad a^T Z(C)a = 0, \end{cases} \tag{8.2}$$

де $R(C) = C^+(C^+)^T$, $Z(C) = I - C^+C$. Доведення формули (8.2) виконаємо, використовуючи методику М.Ф.Кириченка та отриманий вище загальний розв'язок (3.26) систем лінійних рівнянь (8.1).

Для доведення формули (8.2) для випадку, коли $a^T Z(C)a > 0$ (це умова лінійної незалежності вектор-рядка $a^T$ з рядками матриці $C$), розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} C \\ a^T \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix},$$

яку для зручності запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Cu &= y; \\ a^T u &= y_1. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Розв'язок системи (8.3) подамо у вигляді

$$u = C^+ y + Z(C)v \qquad \forall v \in R^M,$$

при цьому будемо вимагати, щоб

$$\left\{ u : \quad a^T u = y_1 \right\} \neq \varnothing.$$

З урахуванням того, що $(C^T)^+ = C\|C\|^{-2}$, з умови, що

$$a^T (C^+ y + Z(C)v) = y_1, \tag{8.4}$$

знаходимо:

$$v = \frac{Z(C)a}{a^T Z(C)a}(y_1 - a^T C^+ y) + (I - \frac{Z(C)aa^T Z(C)}{a^T Z(C)a})w. \tag{8.5}$$

Підставивши (8.5) у (8.4), отримаємо тотожність $\forall w \in R^M$.

З умови

$$\left\| C^+ y + Z(C)v \right\|^2 \to \min_v$$

висновуємо, що $w=0$, а, отже,

$$v = \frac{Z(C)a}{a^T Z(C)a}(y_1 - a^T C^+ y).$$

Після чого знаходимо

$$u = C^+ y + \frac{Z(C)a}{a^T Z(C)a}(y_1 - a^T C^+ y).$$

Приводячи останнє співвідношення до вигляду

$$u = \begin{pmatrix} C \\ a^T \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix},$$

отримуємо:

$$u = \left( C^+ - \frac{Z(C)aa^T C^+}{a^T Z(C)a} \right) y + \frac{Z(C)a}{a^T Z(C)a} y_1 = \left( C^+ - \frac{Z(C)aa^T C^+}{a^T Z(C)a} \vdots \frac{Z(C)a}{a^T Z(C)a} \right) \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо першу частину формули (8.2).

Для доведення другої частини формули знайдемо $(C^T \vdots a)^+$. Для цього будемо виходити з матричного рівняння

$$(C^T \vdots a) \begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} = y,$$

яке еквівалентне системі

$$C^T u + a\alpha = y. \tag{8.6}$$

Розв'язок $u(\alpha)$ системи (8.6), який при довільному $\alpha$ мінімізував би нев'язку *u*, запишемо у вигляді

$$u(\alpha) = (C^T)^+ y - (C^T)^+ a\alpha. \tag{8.7}$$

Параметр α знайдемо з умови

$$\|u(\alpha)\|^2 + \alpha^2 \to \min_{\alpha}.$$

З умови $\dfrac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha} = 0,$

де

$$\Phi(\alpha) = \alpha^2 + ((C^T)^+ y - (C^T)^+ a\alpha)^T ((C^T)^+ y - (C^T)^+ a\alpha),$$

знаходимо

$$\alpha = \frac{a^T C^+ (C^+)^T y}{1 + a^T C^+ (C^+)^T a}. \tag{8.8}$$

З урахуванням (8.8) із (8.7) знаходимо те

$$u(\ \alpha) = (C^T)^+ y - (C^T)^+ a \frac{a^T C^+ (C^+)^T}{1 + a^T C^+ (C^+)^T a},$$

при якому мінімізується нев'язка системи (8.6) і досягається мінімум її розв'язку. Звідси

$$\begin{pmatrix} u \\ \alpha \end{pmatrix} = \left(C^T \vdots a\right)^+ y = \begin{pmatrix} (C^T)^+ - \dfrac{(C^T)^+ a a^T R(C)}{1 + a^T R(C) a} \\ \dfrac{a^T R(C)}{1 + a^T R(C) a} \end{pmatrix} y. \qquad (8.9)$$

З урахуванням того, що

$$(C^T \vdots a)^+ = \left[ \begin{pmatrix} C \\ a^T \end{pmatrix}^+ \right]^T, \qquad (8.10)$$

з (8.9) знаходимо другу частину формули (8.2).

Інші варіанти формули (8.2) розглядати не будемо. Зауважимо, що, виходячи з (8.2) та (8.9), можна побудувати формулу обернення матриці $C$, розширеної стовпцем $a$, тобто матриці $(C \vdots a)$. З урахуванням (8.9), (8.10) запишемо спочатку цю формулу для матриці $(C^T \vdots a)^+$:

$$(C^T \vdots a)^+ = \left[ \begin{pmatrix} C \\ a^T \end{pmatrix}^+ \right]^T = \begin{cases} \begin{pmatrix} (C^T)^+ - \dfrac{(C^T)^+ a a^T [Z(C)]^T}{a^T [Z(C)]^T a} \\ \dfrac{a^T [Z(C)]^T}{a^T [Z(C)]^T a} \end{pmatrix}, & \text{при} \quad a^T [Z(C)]^T a > 0; \\ \begin{pmatrix} (C^T)^+ - \dfrac{(C^T)^+ a a^T [R(C)]^T}{1 + a^T [R(C)]^T a} \\ \dfrac{a^T [R(C)]^T}{a^T [R(C)]^T a} \end{pmatrix}, & \text{при} \quad a^T [Z(C)]^T a = 0. \end{cases}$$

(8.1
1)

З отриманого співвідношення, ураховуючи, що

$$\left[Z(C)\right]^T = \left[I - C^+ C\right]^T = I - \left[C^+ C\right]^T = I - C^T (C^T)^+;$$

$$\left[R(C)\right]^T = \left[C^+ (C^+)^T\right]^T = C^+ (C^+)^T = R(C),$$

для довільної прямокутної матриці *C* знаходимо:

$$(C \vdots a)^{+} = \begin{cases} \begin{pmatrix} C^{+} - \dfrac{C^{+} a a^{T} Z(C^{T})}{a^{T} Z(C^{T}) a} \\ \dfrac{a^{T} Z(C^{T})}{a^{T} Z(C^{T}) a} \end{pmatrix}, \text{ при } \quad a^{T} Z(C^{T}) a > 0; \\ \begin{pmatrix} C^{+} - \dfrac{C^{+} a a^{T} R(C^{T})}{1 + a^{T} R(C^{T}) a} \\ \dfrac{a^{T} R(C^{T})}{a^{T} R(C^{T}) a} \end{pmatrix}, \text{ при } \quad a^{T} Z(C^{T}) a = 0, \end{cases} \tag{8.12}$$

де $Z(C^{T}) = I_{L} - CC^{+}, \quad R(C^{T}) = (C^{+})^{T} C^{+}$.

Формули (8.2) та їх узагальнення у формі (8.12) дозволяють побудувати рекурентні обчислювальні алгоритми для обернення прямокутних матриць. Відштовхуючись від оберненої матриці невеликої розмірності (можливо навіть прямокутної) шляхом її розширення на один рядок (стовпчик) із використанням формул (8.2) та (8.12) можна побудувати обернення прямокутної матриці довільної розмірності.

### *8.3. До реалізації алгоритмів оптимізації розміщення входів-виходів у дискретизованій лінійній динамічній системі.*

Як відзначалося в п. 8.1, проблема оптимізації розміщення спостерігачів та керувачів за системою, яка зводиться до обернення системи (8.1), буде розв'язана, якщо будуть побудовані формули диференціювання матриці $C^{+}(S_A^*, S_B^*)$ по координатах $s_i^*$ та $\sigma_i^*$ спостерігачів і керувачів відповідно.

Побудуємо аналітичні залежності похідних від елементів матриці $C^{+}(S_A^*, S_B^*)$ по *k*-му елементу множини $S_A^*$. Для цього будемо виходити з того, що залежність матриці $C^{+}(S_A^*, S_B^*)$ від координати $s_k^* \in S_A^*$ визначається (див. (1.21)) $k$-тим рядком матриці $C(S_A^*, S_B^*)$. Виділимо внесок цього рядка в аналітичне зображення матриці $C^{+}(S_A^*, S_B^*)$. Це можна зробити, скориставшись формулою Гревіля (8.2) для обернення матриці

$$\bar{C}_k(\bar{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) = \begin{pmatrix} C_k(\bar{S}_A^*, S_B^*) \\ a_k^T(s_k^*, S_B^*) \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

де $C_k(\bar{S}_A^*, S_B^*)$ – матриця $C(S_A^*, S_B^*)$ без $k$-го рядка, $\bar{S}_A^*$ – множина точок $S_A^*$ без $k$-го елемента, а $a_k^T(s_k^*, S_B^*)$ – $k$-тий рядок, яким визначається залежність матриці $C(S_A^*, S_B^*)$ від $k$-го елемента множини $S_A^*$.

Щоб записати формулу Гревіля для матриці $\overline{C}_k(\cdot)$, урахуємо, що $k$-тий рядок матриці $C(\cdot)$

$$a_k^T(s_k^*, S_B^*) = (G(s_k - s_m^*), \quad m = \overline{1, M}),$$

де $G(s_k - s')$ – функція (не матрична!) Гріна розглядуваної задачі. Далі виконаємо послідовні перетворення формули (8.2) для матриці (8.13):

$$a_k^T(\cdot)a_l(\cdot) = \sum_{m=1}^{M} G(s_l^* - s_m^*)G(s_k^* - s_m^*) \stackrel{\Delta}{=} G_l(s_k^*);$$

$$\begin{aligned} &a_k^T(\cdot)C_k^T(\cdot) = (a_k^T(\cdot)a_l(\cdot), \quad l = \overline{1, L}; \quad l \neq k \ ) = \\ &= (\overline{G}_i(s_k^*) \stackrel{\Delta}{=} G_i(s_k^*), \quad i = \overline{1, k-1}; \ \ \overline{G}_i(s_k^*) \stackrel{\Delta}{=} G_{i+1}(s_k^*), \quad i = \overline{k, L-1} \ ) \stackrel{\Delta}{=} \overline{G}^T(s_k^*); \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$a_k^T(\cdot)[C_k(\cdot)]^+ = a_k^T(\cdot)C_k^T(\cdot)P_k^+ = \overline{G}^T(s_k^*)P_k^+ \stackrel{\Delta}{=} W^T(s_k);$$

$$Z(C_k(\cdot))a_k(\cdot) = (I - C_k^T(\cdot)P_k^+C_k(\cdot))a_k(\cdot) = a_k(\cdot) - [C_k(\cdot)]^T W(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*),$$

де

$$P_k = C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)]^T.$$

Ураховуючи, що

$$\overline{G}(s_k) = col(\overline{G}_i(s_k), \quad i = \overline{1, L-1});$$

$$W(s_k) = P_k^+ \overline{G}(s_k^*),$$

згідно з (8.14) знаходимо:

$$\begin{aligned} &a_k^T(\cdot)Z(C_k(\cdot))a_k(\cdot) = a_k^T(\cdot)a_k(\cdot) - a_k^T(\cdot)C_k^T(\cdot)P_k^+C_k(\cdot)a_k(\cdot) = \\ &= \sum_{m=1}^{M} G^2(s_k^* - s_m^*) - \overline{G}^T(s_k^*)P_k^+\overline{G}(s_k) \stackrel{\Delta}{=} \delta(s_k^*); \end{aligned}$$

$$1 + a_k^T(\cdot)R(C_k(\cdot))a_k(\cdot) = 1 + a_k^T(\cdot)C_k^+(\cdot)(C_k^+(\cdot))^T a_k(\cdot) = 1 + W^T(s_k^*)W(s_k^*) = \Delta(s_k^*).$$

Після цього формулу Гревіля (8.2) для матриці (8.13) запишемо у вигляді

$$\left[\overline{C_k}(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*)\right]^+ = \begin{cases} \left[\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^+ - \dfrac{D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*)W^T(s_k^*)}{\delta(s_k^*)} \vdots \dfrac{D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*)}{\delta(s_k^*)}\right] \text{при } \delta(s_k^*) > 0 \;; \\ \\ \left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^+ - \left[I_{L-1} - \dfrac{W(s_k^*)W^T(s_k^*)}{\Delta(s_k^*)} \vdots \dfrac{W(s_k^*)}{\Delta(s_k^*)}\right] \text{при } \delta(s_k^*) = 0 \;, \end{cases} \tag{8.15}$$

де $s_k^* \in S_A^*, \quad k = \overline{1, L}.$

Позначивши через $w_l(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) \quad (l = \overline{1, L})$ стовпці матриці $C^+(S_A^*, S_B^*)$ отримуємо:

$$\left[\bar{C}_k(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*)\right]^+ = \left[w_1(\cdot), ..., w_{k-1}(\cdot), w_{k+1}(\cdot), ..., w_L(\cdot), w_k(\cdot)\right] .$$

Звідси

$$w_l(\cdot) = \begin{cases} \left[\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]_l^+ - \dfrac{D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*)[W^T(s_k^*)]_l}{\delta(s_k^*)}\right] & \text{при} \quad \delta(s_k^*) > 0; \\ \left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]_l^+ - \dfrac{\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^T P_k^+ W(s_k^*)[W^T(s_k^*)]_l}{\Delta(s_k^*)} & \text{при} \quad \delta(s_k^*) = 0; \end{cases}$$

$$w_k(\cdot) = \begin{cases} \delta^{-1}(s_k^*) D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*) \text{ при } \delta(s_k^*) > 0; \\ \Delta^{-1}(s_k^*)\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^T P_k^+ W(s_k^*) \text{ при } \delta(s_k^*) = 0 \end{cases}$$

$$(s_k^* \in S_A^*; \quad l = \overline{1, L}; \quad l \neq k; \quad k = \overline{1, L}) ,$$

де $[\cdot]_l$ – *l*-стовпець матриці, або *l*-елемент вектора, залежно від контексту.

З цього можна знайти похідні від стовпчиків (а, отже, і елементів) матриці $C^+(S_A^*, S_B^*)$ по $s_k^* \in S_A^*$. Вони будуть такими:

$$\partial_{s_k^*} w_l(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) = -\partial_{s_k^*}\left[\frac{D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*)[W^T(s_k^*)]_l}{\delta(s_k^*)}\right] \quad \text{при} \quad \delta(s_k^*) > 0;$$

$$\partial_{s_k^*} w_l(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) = -\partial_{s_k^*}\left[\frac{\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^T P_k^+ W(s_k^*)[W^T(s_k^*)]_l}{\Delta(s_k^*)}\right]$$

при $\delta(s_k^*) = 0;$

$$\partial_{s_k^*} w_l(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) = \partial_{s_k^*}\left[\frac{D(s_k^*, \overline{S}_A^*, S_B^*)}{\delta(s_k^*)}\right] \quad \text{при} \quad \delta(s_k^*) > 0;$$

$$\partial_{s_k^*} w_l(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^*) = \partial_{s_k^*}\left[\frac{\left[C_k(\overline{S}_A^*, S_B^*)\right]^T P_k^+ W(s_k^*)}{\Delta(s_k^*)}\right] \quad \text{при} \quad \delta(s_k^*) = 0$$

$$(s_k^* \in S_A^*; \quad l = \overline{1, L}; \quad l \neq k; \quad k = \overline{1, L}).$$

Побудуємо аналітичні залежності похідних від елементів матриці $C^+(S_A^*, S_B^*)$ по $k$-му елементу множини $S_B^*$. Для цього позначимо через $\sigma_k^*$ – цей елемент, $\overline{S}_B^*$ – множину $S_B^*$ без $k$-го елемента. Через

$$a_k(\sigma_k^*, S_A^*) = col(G(s_l^* - \sigma_k^*), \quad l = \overline{1, L})$$

позначимо $k$-тий стовпець матриці $C(S_A^*, S_B^*)$, через $C_k(S_A^*, \overline{S}_B^*)$ – матрицю $C(S_A^*, S_B^*)$ без $k$-го $(1 \le k \le M)$ стовпця.

Щоб побудувати аналітичні залежності рядків $w_m^T(S_A^*, \overline{S}_B^*, \sigma_k)$ $(m = \overline{1, M})$ матриці

$$\left[C(S_A^*, S_B^*)\right]^+ = col(w_m^T(S_A^*, \overline{S}_B^*, \sigma_k), \qquad m = \overline{1, M}), \tag{8.17}$$

від $\sigma_k^*$ застосуємо формулу Гревіля до матриці

$$\overline{C}_k(S_A^*, \overline{S}_B^*, \sigma_k) = \begin{pmatrix} C_k^T(S_A^*, \overline{S}_B^*) \\ a_k^T(\sigma_k, S_A^*) \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

маючи на увазі, що

$$\left[\overline{C}_k(\cdot)\right]^+ = col(w_1^T(\cdot), ..., w_{k-1}^T(\cdot), w_{k+1}^T(\cdot), ..., w_M^T(\cdot), w_k^T(\cdot)\ ). \tag{8.19}$$

За аналогією з (8.14) виконаємо це послідовно. Отримаємо:

$$a_k^T(\cdot)a_m(\cdot)=\sum_{l=1}^{L}G(s_l^*-\sigma_k^*)G(s_l^*-\sigma_m^*)\overset{\Delta}{=}G_m(\sigma_k^*);$$

$$a_k^T(\cdot)C_k(\cdot)=(a_k^T(\cdot)a_m(\cdot),\quad m=\overline{1,M};\quad m\neq k\ \ )=(\overline{G_i}(\sigma_k^*)\overset{\Delta}{=}G_i(\sigma_k^*),\quad i=\overline{1,k-1};$$

$$\overline{G_i}(\sigma_k^*)\overset{\Delta}{=}G_{i+1}(\sigma_k^*),\quad i=\overline{k,M-1}\ \ )\overset{\Delta}{=}\overline{G}^T(\sigma_k^*);$$

$$a_k^T(\cdot)[C_k^T(\cdot)]^+=a_k^T(\cdot)C_k(\cdot)P_k^+=\overline{G}^T(\sigma_k^*)P_k^+\overset{\Delta}{=}W^T(\sigma_k^*);$$

$$P_k=[C_k(S_A^*,\overline{S}_B^*)]^T C_k(S_A^*,\overline{S}_B^*); \tag{8.20}$$

$$Z(C_k^T(\cdot))a_k(\cdot)=(I-C_k(\cdot)P_k^+C_k^T(\cdot))a_k(\cdot)=a_k(\cdot)-C_k(\cdot)W(\cdot)\overset{\Delta}{=}D(\sigma_k^*,S_A^*,\overline{S}_B^*);$$

$$a_k^T(\cdot)Z(C_k^T(\cdot))a_k(\cdot)=a_k^T(\cdot)a_k(\cdot)-a_k^T(\cdot)C_k(\cdot)P_k^+C_k^T(\cdot)a_k(\cdot)=$$

$$=\sum_{l=1}^{L}G^2(s_l^*-\sigma_k^*)-\overline{G}^T(\sigma_k^*)P_k^+\overline{G}(\sigma_k^*)\overset{\Delta}{=}\ \delta(\sigma_k^*);$$

$$1+a_k^T(\cdot)R(C_k^T(\cdot))a_k(\cdot)=1+a_k^T(\cdot)(C_k^T(\cdot))^+(C_k^T(\cdot)^+)^T a_k(\cdot)=$$

$$=1+W^T(\sigma_k^*)W(\sigma_k^*)=\Delta(\sigma_k^*).$$

Записуючи формулу Гревіля для матриці (8.18), з урахуванням (8.20) отримаємо:

$$\left[\overline{C}_k(S_A^*,\overline{S}_B^*,\sigma_k^*)\right]^+=$$

$$=\begin{cases}\left[\left[C_k^T(S_A^*,\overline{S}_B^*)\right]^+-\dfrac{D(\sigma_k^*,S_A^*,\overline{S}_B^*)W^T(\sigma_k^*)}{\delta(\sigma_k^*)}\vdots\dfrac{D(s_k^*,S_A^*\overline{S}_B^*,)}{\delta(\sigma_k^*)}\right] & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)>0;\\[2ex] \left[C_k^T(S_A^*,\overline{S}_B^*)\right]^+\left[I_{M-1}-\dfrac{W(s_k^*)W^T(\sigma_k^*)}{\Delta(\sigma_k^*)}\vdots\dfrac{W(\sigma_k^*)}{\Delta(\sigma_k^*)}\right] & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)=0,\end{cases} \tag{8.21}$$

де $\sigma_k^*\in S_B^*,\quad k=\overline{1,M}.$

Звідси з урахуванням (8.17), (8.19) знаходимо:

$$w_m(\cdot)=\begin{cases}\left[\left[C_k^T(S_A^*,\bar{S}_B^*)\right]_m^+-\dfrac{D(\sigma_k^*,S_A^*,\bar{S}_B^*)[W^T(\sigma_k)]_m}{\delta(\sigma_k^*)}\right] & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)>0;\\ \left[C_k^T(S_A^*,\bar{S}_B^*)\right]_m^+-\dfrac{C_k(S_A^*,\bar{S}_B^*)P_k^+W(\sigma_k^*)[W^T(\sigma_k^*)]_m}{\Delta(\sigma_k^*)} & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)=0;\end{cases}$$

(8.22)

$$w_k(\cdot)=\begin{cases}\delta^{-1}(\sigma_k^*)D(\sigma_k^*,S_A^*,\bar{S}_B^*) & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)>0;\\ \Delta^{-1}(\sigma_k^*)C_k(S_A^*,\bar{S}_B^*)P_k^+W(\sigma_k^*) & \text{при}\quad \delta(\sigma_k^*)=0\end{cases} \qquad (8.23)$$

$$(\sigma_k^*\in S_B^*;\quad m=\overline{1,M};\quad m\neq k;\quad k=\overline{1,M}),$$

де, як і вище, $[\cdot]_m - m$ -стовпець матриці, або $m$-елемент вектора в залежності від контексту.

Виходячи з (8.22), (8.23), знаходимо й похідні від рядків $w_m^T(\cdot)$ $(m=\overline{1,M})$ (а, отже, і елементів) матриці $C(S_A^*,S_B^*)$ за $\sigma_k^*\in S_B^*$. Вони будуть такими:

$$\partial_{\sigma_k^*}w_m(S_A^*,\bar{S}_B^*,\sigma_k^*)=-\partial_{\sigma_k^*}\left[\frac{D\ \ (\sigma_k^*,S_A^*,\bar{S}_B^*)[W^T(\sigma_k^*)]_m}{\delta\ \ (\sigma_k^*)}\right]\ \text{при}\ \ \delta(\sigma_k^*)>0;$$

$$\partial_{s_k^*}w_m(S_A^*,\bar{S}_B^*,\sigma_k^*)=-\partial_{\sigma_k^*}\left[\frac{C_k(S_A^*,\bar{S}_B^*)P_k^+W(\sigma_k^*)[W^T(\sigma_k^*)]_m}{\Delta(\sigma_k^*)}\right]\ \text{при}\ \ \delta(\sigma_k^*)=0;$$

$$\partial_{\sigma_k^*}w_m(S_A^*,\bar{S}_B^*,\sigma_k^*)=\partial_{\sigma_k^*}\left[\frac{D\ \ (\sigma_k^*,S_A^*,\bar{S}_B^*)}{\delta\ \ (\sigma_k^*)}\right]\ \text{при}\ \ \delta(\sigma_k^*)>0;$$

$$\partial_{\sigma_k^*}w_m(S_A^*,\bar{S}_B^*,\sigma_k^*)=\partial_{\sigma_k^*}\left[\frac{C_k(S_A^*,\bar{S}_B^*)P_k^+W(\sigma_k^*)}{\Delta(\sigma_k^*)}\right]\ \text{при}\ \ \delta(\sigma_k^*)=0$$

$(\sigma_k^*\in S_B^*;\quad m=\overline{1,M};\quad m\neq k;\quad k=\overline{1,M})$, де, як і вище, $[\cdot]_m - m$ елемент вектора $[\cdot]$.

Таким чином, побудовані формули диференціювання матриці $[C(S_A^*,S_B^*)]^+$ за координатами спостерігачів $(s_k^*\in S_A^*;\quad k=\overline{1,L})$ та керувачів ($\sigma_k^* \in S_B^*;\quad k = \overline{1, M}$), а, отже можуть бути реалізовані градієнтні процедури з оптимізації їх розміщення згідно з критерієм (7.10), (7.21), а саме:

$$\min_{\bar{u}\in\Omega_u} \left\| C\bar{u} - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{S_A^*},$$

$$\min_{\bar{u}\in\Omega_u} \left\| C\bar{u} - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{S_B^*}.$$

# §9. Оптимізаційні методи в задачах моделювання дискретизованих початково-крайових умов

*9.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Поставлені вище задачі та запропоновані алгоритми їх розв'язання можуть бути використані для оптимізації розміщення входів-виходів довільної лінійної системи, у тому числі й для розв'язання задачі оптимізації розміщення спостерігачів-керувачів при моделюванні дискретизованих початково-крайових умов дискретно розміщеними фіктивними зовнішньодинамічними збуреннями.

Більш точною і природною постановкою задачі моделювання дискретизованих початково-крайових умов є варіант, коли моделюючі функції неперервні в області зміни своїх аргументів (див. п. 4.1). У наступних пунктах §4 показано, що розв'язання задачі зводиться до обернення системи інтегральних рівнянь вигляду

$$\int A(s')\bar{u}(s')ds' = \bar{y}, \tag{9.1}$$

де $\bar{y}$ – дискретизований початково-крайовий стан системи, $\bar{u}(s')$ – вектор-функція, якою цей стан моделюється, а $A(s')$ – матрична вектор-функція, яка через функцію Гріна пов'язана зі специфікою розглядуваної системи (область інтегрування залежить від постановки конкретної задачі).

Ураховуючи, що матрична вектор-функція $A(s)$ суттєво залежить (див. п. 4.1) від точок спостережень $s_l^*$ $(l=\overline{1,L})$ за системою, а також те, що функція ця впливає на точність обернення співвідношень (9.1), у п. 7.2 була поставлена задача оптимізації вибору точок спостереження за системою з умови, щоб

$$\varepsilon_1^2(S_A^*) = \| \int A(S_A^*, s')u(s')ds' - \bar{y} \|^2 \to \min_{s_k^*, k=\overline{1,L}}, \tag{9.2}$$

де $S_A^* = \{s_1^*, \dots, s_L^*\}$ – множина точок спостереження за системою.

У п. 7.5 запропоновані градієнтні процедури розв'язання задачі (9.2). Там же вказувалось, що процедури ці будуть реалізовані, якщо будуть побудовані аналітичні залежності похідних за $s_k^*$ $(k=\overline{1,L})$ від матричного рядка-функції $A^{(+)}(s, S_A^*)$, псевдооберненого до матричного стовпця-функції $A(S_A^*, s)$.

Для побудови аналітичних залежностей $A^{(+)}(s, S_A^*)$ від $s_k^* \in S_A^*$ $(k=\overline{1,L})$, а, отже, і для розв'язання проблеми диференціювання $A^{(+)}(s, S_A^*)$ за $s_k^*$, нижче буде запропоновано підхід, що ґрунтується на узагальненнях формул Гревіля для матричних стовпців-функцій $A(S_A^*, s)$.

*9.2. Формули Гревіля для матричних стовпців-функцій.*

Як і в п. 4.2 § 4, в якому будувався загальний розв'язок системи вигляду (9.1), розглянемо спочатку дискретизований варіант системи, поданий співвідношеннями (4.9), а саме:

$$\sum_{i=1}^{N} A(s_i)\bar{u}(s_i)\Delta s_N = \bar{y}, \tag{9.3}$$

де $\Delta s_N$ – крок дискретизації інтервалу (області) інтегрування в (9.1). Як і в п. 4.2, уведемо до розгляду матричний рядок-функцію дискретного аргументу

$$A_1(\cdot) = \left( A(s_1)\sqrt{\Delta s_N}, \ldots, A(s_N)\sqrt{\Delta s_N} \right)$$

таку, що

$$A_1(i) = A(s_i)\sqrt{\Delta s_N} \quad (i = \overline{1,N}); \tag{9.4}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N\to\infty} A(s_i) = A(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N\to\infty} A^T(s_i) = A^T(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} (A_1(\cdot)A_1^T(\cdot))^+ = A^{(+)}(s).$$

Зауважимо, що як для функцій неперервного, так і дискретного аргументу розуміється неявна залежність їх від множити точок $S_A^*$.

Ураховуючи, що введення до розгляду матричного рядка-функції $A_1(\cdot)$ дозволило побудувати загальний розв’язок задачі обернення співвідношень (9.1) із неперервними матричними функціями, поширимо формули Гревіля (8.2) спочатку на матричний рядок-функцію дискретного аргументу $A_1(\cdot)$.

Розширюючи кожен із $L$-вимірних стовпців-функцій $A(s_k)\sqrt{\Delta s_N}$ $(k = \overline{1,N})$ елементом $a^T(s_k)\sqrt{\Delta s_N}$, застосуємо формули Гревіля (8.2) до матричного рядка

$$A_{1*}(\cdot) = \left( \begin{pmatrix} A(s_1)\sqrt{\Delta s_N} \\ a^T(s_1)\sqrt{\Delta s_N} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A(s_N)\sqrt{\Delta s_N} \\ a^T(s_N)\sqrt{\Delta s_N} \end{pmatrix} \right). \tag{9.5}$$

Залежність від $S_A^*$ не вказується для спрощення записів та викладок. Вона буде вказана при побудові розрахункових формул для задач оптимізації вибору точок $S_A^*$.

Виходячи із структури формули Гревіля (8.2), позначимо через

$$a_1^T(\cdot) = (a^T(s_1)\sqrt{\Delta s_N}, \cdots, \sqrt{\Delta s_N});$$

$$A_a = A_1(\cdot)a_1(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} A(s_k)a(s_k)\Delta s_N; \tag{9.6}$$

$$A_a^T = a_1^T(\cdot)A_1^T(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} a^T(s_k)A^T(s_k)\Delta s_N;$$

$$Z_a = a_1^T(\cdot)Z(A_1(\cdot))a_1(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} a^T(s_k)a(s_k)\Delta s_N - A_a^T P^+ A_a;$$

$$r_a = a_1^T(\cdot)R(A_1(\cdot))a_1(\cdot) = A_a^T R(P) A_a,$$

де

$$P = A_1(\cdot)A_1^T(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} A(s_k)A^T(s_k)\Delta s_N;$$

$$R(P) = P^+[P^+]^T.$$

Після чого, виходячи з (8.2), отримуємо:

$$A_{1*}^+(\cdot) = \begin{pmatrix} A_1(\cdot) \\ a_1^T(\cdot) \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left[ A_1^+(\cdot) - \dfrac{(a_1(\cdot)A_a^T - A_1^T(\cdot)P^+A_a A_a^T)P^+}{Z_a} \vdots \dfrac{a_1(\cdot) - A_1^T(\cdot)P^+A_a}{Z_a} \right] & \text{при } Z_a > 0; \\ \left[ A_1^+(\cdot) - \dfrac{A_1^T(\cdot)R(P)A_a A_a^T P^+}{1+r_a} \vdots \dfrac{A_1^T(\cdot)R(P)A_a}{1+r_a} \right] & \text{при } Z_a = 0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Звідси, позначивши

$$A_{1*}^+(\cdot) = col\left(A_*^{(+)}(s_1), \ldots, A_*^{(+)}(s_N)\right)\left(\sqrt{\Delta s_N}\right)^{-1},$$

для елементів $A_*^{(+)}(s_k)$ $k = (\overline{1, N})$ отримуємо:

$$A_*^{(+)}(s_k) =$$

$$= \begin{cases} \left[ A^{(+)}(s_k) - \dfrac{(a(s_k)A_a^T - A^T(s_k)P^+A_a A_a^T)P^+}{Z_a} \vdots \dfrac{a(s_k) - A^T(s_k)P^+A_a}{Z_a} \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } Z_a > 0; \\ \left[ A^{(+)}(s_k) - \dfrac{A^T(s_k)R(P)A_a A_a^T P^+}{1+r_a} \vdots \dfrac{A^T(s_k)R(P)A_a}{1+r_a} \right] \quad \text{при } Z_a = 0, \end{cases} \tag{9.8}$$

де $k=\overline{1,N}$ ,

$$col\left(A^{(+)}(s_1),...,A^{(+)}(s_N)\right)\left(\sqrt{\Delta s_N}\right)^{-1}=\left(A(s_1)\sqrt{\Delta s_N},...,A(s_N)\sqrt{\Delta s_N}\right)^{(+)}=A_1^{+}(\cdot),$$

а інші позначення відповідають прийнятим у (9.6).

Для переходу до неперервного випадку будемо виходити із співвідношень (9.8), розглядаючи їх при $N\to\infty$ .

Ураховуючи, що за аналогією з (9.4)

$$\lim_{N\to\infty} a(s_k)=a(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} a^T(s_k)=a^T(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} A^{(+)}(s_k)=A^{(+)}(s)=A^T(s)P^+,$$

з (9.8) отримаємо:

$$A_*^{(+)}(s)=\begin{pmatrix}A(s)\\ a^T(s)\end{pmatrix}^{(+)}=\begin{cases}\left[A^T(s)P^+-\dfrac{(a(s)A_a^T-A^T(s)P^+A_aA_a^T)P^+}{Z_a}\vdots\dfrac{a(s)-A^T(s)P^+A_a}{Z_a}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{при } Z_a>0;\\ \left[A^T(s)P^+-\dfrac{A^T(s)R(P)A_aA_a^TP^+}{1+r_a}\vdots\dfrac{A^T(s)R(P)A_a}{1+r_a}\right]\ \text{при } Z_a=0,\end{cases}\qquad (9.9)$$

де

$$A_a=\int A(s)a(s)ds; \qquad A_a^T=\int a^T(s)A^T(s)ds;$$

$$Z_a=\int a^T(s)a(s)ds-A_a^TP^+A_a; \qquad r_a=A_a^TR(P)A_a;$$

$$P=\int A(s)A^T(s)ds; \qquad R(P)=P^+[P^+]^T.$$

Область інтегрування тут визначається постановкою задачі моделювання. У даному параграфі ця область збігається з областю інтегрування у співвідношеннях (9.1).

### *9.3. До реалізації алгоритмів оптимізації розміщення спостерігачів у задачі моделювання початково-крайових умов.*

Для реалізації описаної в п. 7.5 градієнтної процедури оптимізації розміщення спостерігачів, координати яких визначаються значеннями $\{s_k^*,k=\overline{1,L}\}=S_A^*$ , будемо виходити з того, що координати ці впливають на розв'язок задачі через вектор-стовпець $A(s)$ , що відобразимо, перепозначивши далі $A(s)$ на $A(S_A^*,s)$ . Урахуємо, що залежність цієї вектор-функції від координати $s_k^*$ $\forall k = \overline{1, L}$ визначається її $k$-тим елементом $a_k^T(s_k^*, s) = G(s_k^* - s)$, де $G(s_k^* - s)$ – матрична функція Гріна розглядуваної задачі. Проблему диференціювання $\left[A(s_A^*, s)\right]^{(+)}$ по $s_k^*$ розв'яжемо, якщо буде явна залежність вектор-стовпця $A(S_A^*, s)^{(+)}$ від $s_k^*$.

Для розв'язання поставленої проблеми застосуємо узагальнену формулу Гревіля (9.9) до матричної функції

$$A_*(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) = \begin{pmatrix} A_k(\overline{S}_A^*, s) \\ a_k^T(s_k^*, s) \end{pmatrix},$$

де $A_k(\overline{S}_A^*, s)$ – матричний стовпець-функція $A(S_A^*, s)$ без $k$-го елемента, $a_k^T(s_k^*, s)$ – цей елемент, а $\overline{S}_A^* = \{s_1^*, \ldots, s_{k-1}^*, s_{k+1}^*, \ldots, s_L^*\}$.

При цьому

$$[A_*(\overline{S}_A^*, s, s_k^*)^{(+)} = \begin{cases} [M_1(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) \vdots \upsilon_1(\overline{S}_A^*, s, s_k^*)] \text{ при } Z_a > 0; \\ [M_2(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) \vdots \upsilon_2(\overline{S}_A^*, s, s_k^*)] \text{ при } Z_a = 0, \end{cases} \tag{9.10}$$

де

$$M_1(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) = A_k^T(\overline{S}_A^*, s,)P_k^+ - \frac{(a_k(s_k^*, s) - A_k^T(\overline{S}_A^*, s)P_k^+ A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*))A_a^T(\overline{S}_A^*, s_k^*)P_k^+}{Z_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)};$$

$$M_2(\overline{S}_A, s, s_k^*) = A_k^T(\overline{S}_A, s)P_k^+ - \frac{A_k^T(\overline{S}_A^*, s)R(P_k)A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)A_a^T(\overline{S}_A^*, s_k^*)P_k^+}{1 + r_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)}; \tag{9.11}$$

$$\upsilon_1(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) = \frac{a_k(s_k^*, s) - A_k^T(\overline{S}_A^*, s)P_k^+ A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)}{Z_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)};$$

$$\upsilon_2(\overline{S}_A^*, s, s_k^*) = \frac{A_k^T(\overline{S}_A^*, s)R(P_k)A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)}{1 + r_a(\overline{S}_A^*, s_k^*)};$$

$$\begin{gathered} A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*) = \int A_k(\overline{S}_A^*, s)a_k(s_k^*, s)ds; \\ A_a^T(\overline{S}_A^*, s_k^*) = \int a_k^T(s_k^*, s)A_k^T(\overline{S}_A^*, s)ds; \\ Z_a(\overline{S}_A^*, s_k^*) = \int a_k(s_k^*, s)a_k^T(s_k^*, s)ds - A_a^T(\overline{S}_A^*, s_k^*)P_k^+ A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*); \\ r_a(\overline{S}_A^*, s_k^*) = A_a^T(\overline{S}_A^*, s_k^*)R(P_k)A_a(\overline{S}_A^*, s_k^*); \\ P_k = \int A_k(\overline{S}_A^*, s)A_k^T(\overline{S}_A^*, s)ds; \;\; R(P_k) = P_k^+[P_k^+]^T. \end{gathered} \tag{9.12}$$

Позначивши через $\omega_\ell = (\bar{S}_A^*, s, s_k^*)$ $(\ell = \overline{1, L})$ елементи матричного рядка $[A(\bar{S}_A^*, s)]^{(+)}$, з урахуванням того, що

$$A_*(\bar{S}_A^*, s, s_k^*)^{(+)} = [\omega_1(\cdot), \ldots, \omega_{k-1}, (\cdot), \omega_{k+1}(\cdot), \ldots, \omega_L(\cdot), \ldots, \omega_k(\cdot)],$$

з (9.10) – (9.12) знаходимо:

$$\partial_{s_k^*} \omega_\ell(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) = -\partial_{s_k^*} \left[ \frac{(a_k(s_k^*, s) - A_k^T(\bar{S}_A^*, s_k^*) P_k^+ A_a(\bar{S}_A^*, s_k^*))[A_a^T(\bar{S}_A^*, s_k^*) P_k^+]_\ell}{Z_a(\bar{S}_A^*, s_k^*)} \right]$$

при $Z_a(\cdot) > 0$;

$$\partial_{s_k^*} \omega_\ell(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) = -\partial_{s_k^*} \left[ \frac{A_k^T(\bar{S}_A^*, s) R(P_k) A_a(\bar{S}_A^*, s_k^*)[A_a^T(\bar{S}_A^*, s_k^*) P_k^+]_\ell}{1 + r_a(\bar{S}_A^*, s_k^*)} \right]$$

при $Z_a(\cdot) = 0$;

$$\partial_{s_k^*} \omega_k(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) = \partial_{s_k^*} v_1(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) \text{ при } Z_a(\cdot) > 0; \qquad (9.13)$$

$$\partial_{s_k^*} \omega_l(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) = \partial_{s_k^*} v_2(\bar{S}_A^*, s, s_k^*) \text{ при } Z_a(\cdot) = 0$$

$$(s_k^* \in S_A^*; \ell = \overline{1, L};\ \ \ell \neq k;\ \ k = \overline{1, L}),$$

де $[\cdot]_\ell$ – $\ell$-елемент рядка $[\cdot]$.

Таким чином, побудовано аналітичні формули диференціювання матричного рядка-функції $[A(S_A^*, s)]^{(+)}$ за координатами $s_k^* \in S_A^*$ $(k = \overline{1, L})$ спостерігачів. Це відкриває шлях для реалізації градієнтних процедур оптимізації розміщення спостерігачів розглядуваних систем згідно із критерієм (7.8), (7.14), (7.15), а саме:

$$\min_{\bar{u}(s) \in \Omega_u} \| \int A(S_A^*, s') \bar{u}(s') ds' - \bar{y} \|^2 \to \min_{S_A^*},$$

де $\Omega_u$ – множина псевдорозв'язків відповідної задачі моделювання,

$$\min_{\bar{u} \in \Omega_u} \left\| C\bar{u} - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{S_A^*},$$

$$\min_{\bar{u} \in \Omega_u} \left\| C\bar{u} - \bar{y} \right\|^2 \to \min_{S_B^*}.$$

# § 10. Оптимізаційні методи моделювання неперервних початково-крайових умов

*10.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Розглянуті в попередніх двох параграфах методи дозволяють оптимізувати вибір точок спостереження за зовнішньодинамічними факторами системи (зовнішньодинамічні збурення, початкові та крайові умови) при моделюванні їх дискретними та неперервними за просторово-часовими координатами моделюючими функціями $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ у випадку, коли зовнішньодинамічні фактори, які підлягають моделюванню, дискретизовані. Однак, як відзначалося в п. 5.1, цікавими й потрібними для практики є постановки задач, коли зовнішньодинамічні фактори системи при їх моделюванні залишаються неперервними. Ці задачі поставлено та розв'язано в § 5.

Побудова розв'язків таких задач, або найкращого середньоквадратичного наближення до них, знаходиться при оберненні системи функціональних співвідношень:

$$B(s)\bar{u} = Y(s), \tag{10.1}$$

де $Y(s)$ – узагальнена вектор-функція зовнішньодинамічних факторів, які моделюються, $\bar{u}$ – вектор значень моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, а $B(s)$ – матрична функція, яка через функцію Гріна пов'язана зі специфікою розв'язуваної задачі. Вигляд цієї функції та її розмірність визначаються вибором точок, в яких діють керувачі та моделюючі функції.

Позначивши через $S_B^* = \{s_k^*, k = \overline{1, M}\}$ множину точок дискретизації моделюючих функцій $u_0(s), u_\Gamma(s),$ керуючої функції $u(s)$ та враховуючи помилки в розв'язанні задачі моделювання, що визначається величиною

$$\varepsilon_2^2(S_B^*) = \int \| B(s)\bar{u} - Y(s) \|^2 \, ds \,, \tag{10.2}$$

розписаною згідно з (7.16) у п. 7.3, поставимо задачу мінімізації цих помилок.

Описані в 7.5 градієнтні методи розв'язання задачі

$$\varepsilon_2^2(S_B^*) \to \min_{S_B^*} \tag{10.3}$$

можуть бути реалізовані за умови, коли будуть побудовані зручні для використання аналітичні формули обчислення похідних від матричної функції $[B(s, S_B^*)]^{(+)}$ за координатами $s_k^* \in S_B^*$ $(k = \overline{1, M})$ керувачів – координатами, якими визначається розмірність та структура вектора $\bar{u}$ і пов'язаного з ним матричного рядка-функції $B(s, S_B^*)$.

Нижче, з використанням узагальнень формул Гревіля, будуть запропоновані варіанти побудови аналітичних залежностей $[B(s,S_B^*)]^{(+)}$ від $s_k^* \in S_B^* \quad (k=\overline{1,M})$ , а, отже, і обчислення похідних

$\partial_{s_k^*}[B(s,S_B^*)]^{(+)} \ \forall k=\overline{1,M}, \ \forall s_k^* \in S_B^*$ .

*10.2. Формули Гревіля для матричних рядків-функцій.*

Як і в п. 5.2 § 5, в якому будувався загальний розв'язок системи вигляду (10.1), розглянемо спочатку дискретизовані варіанти системи, подані співвідношеннями (5.14), а саме:

$$B(s_i)\bar{u} = Y(s_i) \quad (i=\overline{1,N}), \tag{10.4}$$

де $s_i$ – точки дискретизації координати $s$.

Позначивши через $\Delta s_N$ крок дискретизації інтервалу (області) зміни змінної $s$ , як і в п. 5.2, уведемо до розгляду матричний стовпець-функцію дискретного аргументу

$$B_1(\cdot) = col(B(s_1)\sqrt{\Delta s_N},...,B(s_N)\sqrt{\Delta s_N})$$

такий, що

$$\begin{gathered} B_1(i) = B(s_i)\sqrt{\Delta s_N} \quad (i=\overline{1,N}); \\ \lim_{N\to\infty} \frac{B_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N\to\infty} B(s_i) = B(s); \\ \lim_{N\to\infty} \frac{B_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} = \lim_{N\to\infty} B^T(s_i) = B^T(s); \\ \lim_{N\to\infty} (B_1^T(\cdot)B_1(\cdot))^+ \frac{B_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}} = B^{(+)}(s). \end{gathered} \tag{10.5}$$

Зауважимо, що, як і при роботі з матричними вектор-функціями $A(s)$ (§9), функції $B(s)$ та $B_1(\cdot)$ залежать неявно від множини точок $S_B^*$. Залежність ця розуміється й тимчасово не вказується для спрощення записів та викладок, але буде вказана при побудові розрахункових формул для задач оптимізації вибору точок $S_B^*$.

Ураховуючи, що процес побудови та дослідження загального розв'язку задачі обернення співвідношень (10.1) будувався з використанням розв'язку задачі для дискретизованого аналогу (10.4) цих співвідношень, а також того, що явну залежність псевдооберненої матриці від своїх параметрів ми отримали з використанням формули Гревіля, розглянемо варіанти узагальнення цієї формули на матричний стовпець-функцію $B_1(\cdot)$ дискретного аргументу $i=\overline{1,N}$ .

Розширюючи кожну з $(L\times M)$-вимірних матриць $B(s_k)\sqrt{\Delta s_N}$ $(k=\overline{1,N})$ $L$-вимірним стовпцем $a(s_k)\sqrt{\Delta s_N}$, застосуємо формулу Гревіля (8.2) до матричного стовпця

$$B_{1*}(\cdot)=col((B(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\vdots a(s_i)\sqrt{\Delta s_N}),i=\overline{1,N}). \qquad (10.6)$$

Виходячи зі структури формули Гревіля (8.11) для прямокутної матриці *C*, розширеної стовпцем $a$, позначимо:

$$a_1(\cdot)=col(a(s_1)\sqrt{\Delta s_N},...,a(s_N)\sqrt{\Delta s_N});$$

$$B_a=B_1^T(\cdot)a_1(\cdot)=\sum_{k=1}^{N}B^T(s_k)a(s_k)\Delta s_N;$$

$$B_a^T=a_1^T(\cdot)B_1(\cdot)=\sum_{k=1}^{N}a^T(s_k)B(s_k)\Delta s_N; \qquad (10.7)$$

$$Z_a=a_1^T(\cdot)Z(B_1^T(\cdot))a_1(\cdot)=\sum_{k=1}^{N}a^T(s_k)a(s_k)\Delta s_N-B_a^TP^+B_a;$$

$$r_a=a_1^T(\cdot)R(B_1^T(\cdot))a_1(\cdot)=B_a^T(P^+)^TP^+B_a=B_a^TR(P^T)B_a;$$

$$P=B_1^T(\cdot)B_1(\cdot)=\sum_{k=1}^{N}B^T(s_k)B(s_k)\Delta s_N;\quad R(P^T)=(P^T)^+P^+.$$

Після чого, виходячи з (8.11), (8.12), отримуємо:

$$B_{1*}^+(\cdot)=(col((B(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\vdots a(s_i)\sqrt{\Delta s_N}),\quad i=\overline{1,N}))^+=$$

$$=\left[\left(\begin{pmatrix}B^T(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\\ a^T(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\end{pmatrix},i=\overline{1,N}\right)^+\right]^T=\left[\begin{pmatrix}B_1^T(\cdot)\\ a_1^T(\cdot)\end{pmatrix}^+\right]^T=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}B_1^+(\cdot)-\dfrac{P^+B_a(a_1^T(\cdot)-B_a^TP^+B_1^T(\cdot))}{Z_a}\\ \dfrac{a_1^T(\cdot)-B_a^TP^+B_1^T(\cdot)}{Z_a}\end{pmatrix} & \text{при}\quad Z_a>0\\ \begin{pmatrix}B_1^+(\cdot)-\dfrac{P^+B_a(a_1^T(\cdot)-B_a^TR(P^T)B_1^T(\cdot))}{1+r_a}\\ \dfrac{B_a^TR(P^T)B_1^T(\cdot)}{1+r_a}\end{pmatrix} & \text{при}\quad Z_a=0\end{array}\right\}. \qquad (10.8)$$

Звідси, позначивши

$$B_{1*}^{+}(\cdot)=(B_*^{(+)}(s_1),...,B_*^{(+)}(s_N))(\sqrt{\Delta s_N})^{-1},$$

для елементів $B_*^{(+)}(s_k),\quad (k=\overline{1,N})$ отримаємо:

$$B_*^{(+)}(s_k)=\begin{cases}\begin{pmatrix} B^{(+)}(s_k)-\dfrac{P^+B_a(a^T(s_k)-B_a^TP^+B^T(s_k))}{Z_a}\\ \dfrac{a^T(s_k)-B_a^TP^+B^T(s_k)}{Z_a}\end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a>0;\\ \begin{pmatrix} B^{(+)}(s_k)-\dfrac{P^+B_a(a^T(s_k)-B_a^TR(P^T)B^T(s_k))}{1+r_a}\\ \dfrac{B_a^TR(P^T)B^T(s_k)}{1+r_a}\end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a=0,\end{cases} \tag{10.9}$$

де $k=\overline{1,N}$ ,

$$(B^{(+)}(s_1),...,B^{(+)}(s_N))(\sqrt{\Delta s_N})^{-1}=(col(B(s_i)\sqrt{\Delta s_N},\ i=\overline{1,N}))^+=B_1^+(\cdot),$$

а інші позначення відповідають прийнятим у (10.7).

Для переходу до неперервного випадку будемо виходити із співвідношення (10.9), розглядаючи їх при $N\to\infty$.

Враховуючи, що за аналогією з (10.5)

$$\lim_{N\to\infty}a(s_k)=a(s);\quad \lim_{N\to\infty}a^T(s_k)=a^T(s);$$

$$\lim_{N\to\infty}B^{(+)}(s_k)=B^{(+)}(s)=P^+B^T(s),\quad P=\int B^T(s)B(s)ds,$$

з (10.9) отримаємо:

$$=\begin{cases}\begin{pmatrix} P^+B^T(s\ )-\dfrac{P^+B_a(a^T(s\ )-B_a^TP^+B^T(s\ ))}{Z_a}\\ \dfrac{a^T(s\ )-B_a^TP^+B^T(s\ )}{Z_a}\end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a>0;\\ \begin{pmatrix} P^+B^T(s\ )-\dfrac{P^+B_a(a^T(s)-B_a^TR(P^T)B^T(s))}{1+r_a}\\ \dfrac{B_a^TR(P^T)B^T(s\ )}{1+r_a}\end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a=0,\end{cases} \tag{10.10}$$

де

$$B_a=\int B^T(s)a(s)ds;\quad B_a^T=\int a^T(s)B(s)ds;$$

$$Z_a = \int a^T(s)a(s)ds - B_a^T P^+ B_a; \;\; r_a = B_a^T R(P^T) B_a; \qquad (10.11)$$

$$P = \int B^T(s)B(s)ds; \;\; R(P^T) = (P^T)^+ P^+.$$

Зауважимо, що область інтегрування в (10.11) залежить від постановки задачі моделювання. Область тут не конкретизується, оскільки відсутня конкретизація задачі й при записі рівнянь (10.1).

### *10.3. До реалізації алгоритмів оптимізації розміщення керувачів у задачі моделювання початково-крайових умов.*

Для реалізації описаної в п. 7.5 градієнтної процедури оптимізації розміщення керувачів, координати яких визначаються значеннями $\{s_k^*, k = \overline{1, M}\} = S_B^*$, будемо виходити з того, що координати ці впливають на розв'язок задачі через рядок-функцію $B(s)$, що відобразимо, перепозначивши далі $B(s)$ на $B(s, S_B^*)$. Залежність цієї вектор-функції від координати $s_k^*$ $\forall k = \overline{1, M}$ визначається її $k$-тим елементом $a_k(s - s_k^*) = G(s - s_k^*)$, де $G(s - s')$ – матрична функція Гріна розглядуваної задачі. Проблему диференціювання $[B(s, S_B^*)]^{(+)}$ по $s_k^*$ розв'яжемо, якщо буде побудована явна залежність цього вектор-рядка $B(s, S_B^*)$ від $s_k^*$.

Для розв'язання поставленої проблеми застосуємо узагальнену формулу Гревіля (10.10) до матричної функції

$$B_*(s, \overline{S}_B^*, s_k) = (B_k(s, \overline{S}_B^*) \vdots a_k(s, s_k^*)),$$

де $B_k(s, \overline{S}_B^*)$ – матричний рядок-функція $B(s, S_B^*)$ без $k$-го елемента, $a_k(s, s_k^*)$ – цей елемент, а $\overline{S}_B^* = \{s_1^*, ..., s_{k-1}^*, s_{k+1}^*, ..., s_M^*\}$.

При цьому

$$[B_*(s, \overline{S}_B^*, s_k^*)]^{(+)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} M_1(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) \\ \vartheta_1(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) \end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) > 0; \\ \begin{pmatrix} M_2(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) \\ \vartheta_2(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) \end{pmatrix} & \text{при} \quad Z_a(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) = 0, \end{cases} \qquad (10.12)$$

де

$$M_1(s, \overline{S}_B^*, s_k^*) = P_k^+ B_k^T(s, \overline{S}_B^*) - \frac{P_k^+ B_a(\overline{S}_B^*, s_k^*)(a_k^T(s, s_k^*) - B_a^T(\overline{S}_B^*, s_k^*) P_k^+ B_k^T(s, \overline{S}_B^*))}{Z_a(\overline{S}_B^*, s_k^*)}; \qquad (10.13)$$

$$M_2(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=P_k^+B_k^T(s,\bar{S}_B^*)-\frac{P_k^+B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)(a_k^T(s,s_k^*)-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)R(P_k^T)B_k^T(s,\bar{S}_B^*))}{1+r_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)};$$

$$\vartheta_1(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=\frac{a_k^T(s,s_k^*)-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)P_k^+B_k^T(s,\bar{S}_B^*)}{Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)}; \quad (10.14)$$

$$\vartheta_2(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=\frac{B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)R(P_k^T)B_k^T(s,\bar{S}_B^*)}{1+r_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)};$$

$$B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)=\int B_k^T(s,\bar{S}_B^*)a(s,s_k^*)ds;$$

$$B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)=\int a^T(s,s_k^*)B_k(s,\bar{S}_B^*)ds;$$

$$Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)=\int a^T(s,s_k^*)a(s,s_k^*)ds-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)P_k^+B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*); \quad (10.15)$$

$$r_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)=B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)R(P_k^T)B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*);$$

$$P_k=\int B_k^T(s,\bar{S}_B^*)B(s,\bar{S}_B^*)ds;\ \ R(P_k^T)=(P_k^T)^+P_k^+.$$

Позначивши через $\omega_m(s,\bar{S}_B^*,s_k)$ $(m=\overline{1,M})$ елементи матричного стовпця $[B(s,S_B^*)]^{(+)}$, з урахуванням того, що

$$[B_*(s,\bar{S}_B^*,s_k)]^{(+)}=col(\omega_1(\cdot),...,\omega_{k-1}(\cdot),\omega_{k+1}(\cdot),...,\omega_M(\cdot),\omega_k(\cdot)),$$

з (10.12) – (10.15) знаходимо:

$$\partial_{s_k^*}\omega_m(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=-\partial_{s_k^*}\left[\frac{[P_k^+B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)]_m[a_k^T(s,s_k^*)-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)P_k^+B_k^T(s,\bar{S}_B^*)]}{Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)}\right]$$

при $Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)>0$;

$$\partial_{s_k^*}\omega_m(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=-\partial_{s_k^*}\left[\frac{[P_k^+B_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)]_m[a_k^T(s,s_k^*)-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)R(P_k^T)B_k^T(s,\bar{S}_B^*)]}{1+r_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)}\right]$$

при $Z_a(S_B^*,s_k^*)=0$;

$$\partial_{s_k^*}\omega_k(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=\partial_{s_k^*}\left[\frac{a_k^T(s,s_k^*)-B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)P_k^+B_k^T(s,\bar{S}_B^*)}{Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)}\right]$$

при $Z_a(S_B^*,s_k^*)>0$;

$$\partial_{s_k^*}\omega_k(s,\bar{S}_B^*,s_k^*)=\partial_{s_k^*}\left[\frac{B_a^T(\bar{S}_B^*,s_k^*)R(P_k^T)B_k^T(s,\bar{S}_B^*)}{1+r_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)}\right]$$

при $Z_a(\bar{S}_B^*,s_k^*)=0$ ;

$$(s_k^* \in S_B^*; m = \overline{1, M}; m \neq k; k = \overline{1, M}),$$

де $[\cdot]_m$ – $m$-елемент матричного стовпця $[\cdot]$.

Тобто, для матричного стовпця-функції $[B(s, S_B^*)]^{(+)}$ побудовані аналітичні формули диференціювання за координатами $s_k^* \in S_B^*$ $(k = \overline{1, M})$ керувачів. Це дозволяє практично реалізувати градієнтні процедури оптимізації розміщення керувачів розглядуваної системи згідно з критерієм (7.9), (7.18), (7.19), а саме:

$$\min_{\bar{u} \in \Omega_u} \int \| B(s)\bar{u} - Y(s) \|^2 \, ds \to \min_{S_B^*},$$

де $\Omega_u$ – множина псевдорозв'язків відповідної задачі моделювання.

# § 11. Формули псевдообернення збурених матриць та їх місце в задачах моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами

### *11.1. Дискретизований варіант задачі динаміки збурених систем.*

У розглянутих вище постановках та розв'язках задач моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами розумілося, що фізико-технічні характеристики системи незмінні. Через це незмінними вважалися і характеристики моделі. Це і структура моделі, і структура та властивості її входів-виходів.

Однак у реальному житті деякі характеристики моделі та їх входів-виходів можуть зазнавати невеликих змін – збурень (випадкових, або детермінованих). Ці зміни з урахуванням прийнятих у роботі методів моделювання впливають на матричну функцію Гріна, на визначені нею значення елементів матриць та матричних рядків (стовпців)-функцій. Тому потрібні формули, які б дозволили врахувати ці впливи на характеристики моделі та розв'язок задачі.

Для початку обмежимося дискретизованим варіантом моделі системи, коли матрична функція Гріна дискретизована як за штрихованими, так і за нештрихованими координатами. У цьому випадку модель системи визначається прямокутною матрицею $C$, а розв'язок та дослідження моделі пов'язані з матрицею $C^+$, псевдоoберненою до $C$.

Будемо вважати, що збурення матриці $C$ виконується (у загальному випадку) за всіма елементами, що спонукає працювати з матрицями $(C+ab^T)$ та $(C+ab^T)^+$, де для $(L\times M)$-вимірної матриці $C$, $a\in R^L$, $b\in R^M$ – вектори, якими й визначається збурення матриці $C$, а, отже, і системи вцілому.

Якщо пригадати структуру інтегральної форми моделі та вникнути в її дискретизований варіант, то стає зрозумілим, що матриця $ae_i^T$ $(i=\overline{1,M})$ описує збурення $i$-го входу системи, а матриця $e_ib^T$ $(i=\overline{1,L})$ – її $i$-го виходу. Набір матриць $ae_i^T$ та $e_ib^T$ дозволяє накрити всі входи-виходи системи. Тому дослідження змін матриць $(C+ab^T)$ та $(C+ab^T)^+$ у залежності від значень векторів $a$ та $b$ є актуальним.

Якщо при роботі з матрицею $(C+ab^T)$ проблем немає (залежності від $a$ та $b$ тут явні), то для матриці $(C+ab^T)^+$ потрібні зручні та ефективні методи обчислення впливів $a$ та $b$ на зміст її елементів.

Нижче наведемо формули, якими задається аналітична залежність

$$(C+ab^T)^+=f(C,C^+,a,b) \tag{11.1}$$

для різних випадків та варіантів збурень. Ці варіанти пов'язані з лінійною залежністю (незалежністю) векторів $a$ та $b$ з вектор-стовпцями (рядками) матриці $C$, яка визначається значеннями $a^TZ(C^T)a$ та $b^TZ(C)b$, де $Z(C^T)=I_L-CC^+$ та $Z(C)=I_M-C^+C$ – проекційні оператори на лінійні оболонки, натягнені на вектор-стовпці та вектор-рядки матриці $C$. Ці формули були побудовані

М.Ф. Кириченком. Ми наведемо їх без доведення, орієнтуючись більше на використання формул для розв’язання розглядуваних нами задач.

*11.2. Формули обернення збурених матриць.*

1). Якщо $a^T Z(C^T)a > 0,\ b^T Z(C)b > 0,$ то

$$(C+ab^T)^+ = C^+ - \frac{C^+ aa^T Z(C^T)}{a^T Z(C^T)a} - \frac{Z(C)bb^T C^+}{b^T Z(C)b} +$$

$$+Z(C)ba^T Z(C^T)\frac{1+b^T C^+ a}{a^T Z(C^T)ab^T Z(C)b}\ ; \qquad (11.2)$$

2). Якщо $a^T Z(C^T)a = 0,\quad b^T Z(C)b > 0$ , то

$$(C+ab^T)^+ = \left( I_M - \frac{kk^T}{\|k\|^2} \right) \times$$

$$\times\left( \left( I_M - \frac{Z(C)bb^T}{b^T Z(C)b} \right) C^+ \left( I_L - \frac{aa^T}{1+\|a\|^2} \right) + \frac{Z(C)ba^T}{b^T Z(C)b(1+\|a\|^2)} \right), \quad (11.3)$$

де

$$k = C^+ a - \frac{Z(C)b}{b^T Z(C)b}(1+b^T A^+ a)\ ;$$

3). Якщо $a^T Z(C^T)a = 0,\quad b^T Z(C)b = 0,\quad b^T C^+ a = -1$ , то

$$(C+ab^T)^+ = C^+ - \frac{C^+ aa^T R(C^T)}{a^T R(C^T)a} -$$

$$-\frac{R(C)bb^T C^+}{b^T R(C)b} + \frac{C^+ ab^T C^+ b^T C^+ (C^+)^T C^+ a}{a^T R(C^T)ab^T R(C)b}\ , \qquad (11.4)$$

де $R(C) = C^+ (C^+)^T$ ;

4). Якщо $a^T Z(C^T)a = 0,\quad b^T Z(C)b = 0,\quad b^T C^+ a \neq -1$ , то

$$(C+ab^T)^+ = C^+ - \frac{C^+ ab^T C^+}{1+b^T C^+ a}\ . \qquad (11.5)$$

### *11.3. Проблеми дослідження систем із розподіленими параметрами при просторово-динамічних збуреннях їх користувачів-спостерігачів.*

Крім дискретизованого випадку систем із розподіленими параметрами, при моделюванні їх зовнішньодинамічних факторів розглядалися випадки, коли дискретні спостереження та керування системою комбінувалися з неперервними. Інтегральні моделі та розв'язки задач динаміки таких систем будувалися (див. п. 4.1, 5.1) з використанням матричних стовпців

$$A(s') = col(G(s_i - s'),\ i = \overline{1,L}\ ), \tag{11.6}$$

матричних рядків

$$B(s) = str(G(s - s_i),\ i = \overline{1,M}\ ) \tag{11.7}$$

та їх обернень

$$[A(s)]^{(+)} = str(\ A_i^{(+)}(s),\quad i = \overline{1,L}\ ), \tag{11.8}$$
$$[B(s)]^{(+)} = col(\ B_i^{(+)}(s), i = \overline{1,M}\ ).$$

Ураховуючи, що елементи матричних вектор-функцій $A(s')$ та $B(s)$ відповідають конкретним спостерігачам та керувачам, а також те, що ці спостерігачі-керувачі можуть мати певні флуктуації (збурення), є сенс узагальнити на матричний рядок

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}\ \ (a \in R^L;\ b(s) \in R^M\ \ \forall s \in S_0^T\ )$$

та матричний стовпець

$$[B(s)+a(s)b^T]^{(+)}\ \ (a(s) \in R^L\ \ \forall s \in S_0^T\ ;\ b \in R^M)$$

наведені вище формули обернення збурених прямокутних матриць.

Це дозволило б побудувати аналітичні залежності

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)} = f_A(A(s), [A(s)]^{(+)}, a, b(s));$$
$$[B(s)+a(s)b^T]^{(+)} = f_B(B(s), [B(s)]^{(+)}, a(s), b),$$

а, отже, і виконати дослідження розглядуваних систем при флуктуаціях (збуреннях) певних спостерігачів та керувачів.

### *11.4. Формули псевдообернення збурених матричних стовпців-функцій.*

Для поширення співвідношень (11.2) – (11.5) на матричний стовпець-функцію (11.6) розглянемо спочатку це поширення для матричного стовпця-функції дискретного аргументу

$$A_1(\cdot) = (A(s_i)\sqrt{\Delta s_N}, i = \overline{1,N}),$$

збуреного матричним рядком-функцією

$$ab_1^T(\cdot) = (ab^T(s_i),\quad i = \overline{1,N})\sqrt{\Delta s_N}\ ,$$

де, як і в п. 9.2, $\Delta s_N$ – крок дискретизації інтервалу (області) зміни неперервного аргументу $s$, $b(s) \in R^M$ для довільного $s$ із заданої області, а

$$A_1(i)=A(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\,;\ b_i(i)=b(s_i) \qquad (i=\overline{1,N});$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=A(s)\,; \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{A_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=A^T(s)\,; \tag{11.9}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}(A_1(\cdot)A_1^T(\cdot))^+=A^{(+)}(s)\,;\ \lim_{N\to\infty}\frac{b_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=b(s)\,.$$

З урахуванням спільності у формулах (11.2) – (11.5) уведемо до розгляду скорочені позначення:

$$\Delta a=a^TZ(A_1^T(\cdot))a\,; \qquad \Delta_b=b_1^T(\cdot)Z(A_1(\cdot))b_1(\cdot);$$

$$\delta_a=a^TR(A_1^T(\cdot))a; \qquad \delta_b=b_1^T(\cdot)R(A_1(\cdot))b_1(\cdot); \tag{11.10}$$

$$A_b=A_1(\cdot)b_1(\cdot);\ A_b^T=b_1^T(\cdot)A_1^T(\cdot);\ P=A_1(\cdot)A_1^T(\cdot).$$

Після чого формули (11.2) – (11.5) стосовно $A_1(\cdot)$ запишемо у вигдяді:

а) якщо $\Delta_a>0;\ \Delta_b>0$, то

$$[A_1(\cdot)+ab_1^T(\cdot)]^+=A_1^T(\cdot)P^+-\Delta_a^{-1}A_1^T(\cdot)P^+aa^TZ(P)-\Delta_b^{-1}(b_1(\cdot)-$$

$$-A_1^T(\cdot)P+A_b)A_b^TP^++\Delta_a^{-1}\Delta_b^{-1}(b_1(\cdot)-A_1^T(\cdot)P^+A_b)\,a^TZ(P)(1+A_b^TP^+a); \tag{11.11}$$

б) якщо $\Delta_a=0;\ \Delta_b>0$, то

$$[A_1(\cdot)+ab_1^T(\cdot)]^+=$$

$$=\left[A_1^T(\cdot)P^+-\frac{\chi_1(\cdot)A_\chi^TP^+}{\|\chi_1(\cdot)\|^2}+\frac{(\chi_1(\cdot)b_\chi-b_1(\cdot)+A_1^T(\cdot)P^+A_b)A_b^TP^+}{\Delta_b}-\right.$$

$$\left.-\frac{\chi_1(\cdot)A_\chi^TP^+A_bA_b^TP^+}{\|\chi_1(\cdot)\|^2\Delta_b}\right]\left(I_L-\frac{aa^T}{1+\|a\|^2}\right)+\frac{b_1(\cdot)a^T-A_1^T(\cdot)P^+A_ba^T}{\Delta_b(1+\|a\|^2)}- \tag{11.12}$$

$$-\frac{\chi_1(\cdot)(b_\chi-A_\chi^TP^+A_b)a^T}{\Delta_b\|\chi_1(\cdot)\|^2(1+\|a\|^2)},$$

де

$$\chi_1(\cdot)=col(\chi(1),\ldots,\chi(N))=A_1^T(\cdot)P^+a-\Delta_b^{-1}(b(\cdot)-A_1^T(\cdot)P^+A_b)(1+A_b^TP^+a)$$

векторний стовпець такий, що

$$\chi_1(k)=\chi(k)=A^T(k)P^+a-\Delta_b^{-1}(b(k)-A^T(k)P^+A_b)(1+A_b^TP^+a);$$

$$A_\chi^T = \sum_{k=1}^{N} \chi^T(k) A^T(k);$$

$$b_\chi = \sum_{k=1}^{N} \chi^T(k) b(k);$$

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $A_b^T P^+ a = -1$, то

$$[A_1(\cdot) + ab_1^T(\cdot)]^+ = A_1^T(\cdot) P^+ - \delta_a^{-1} A_1^T(\cdot) P^+ aa^T P^+ PP^+ - \delta_b^{-1} A_1^T(\cdot) P^+ P^+ A_b A_b^T P^+ +$$
$$+ \delta_a^{-1} \delta_b^{-1} A_1^T(\cdot) P^+ a A_b^T P^+ A_b^T P^+ P^+ PP^+ a; \quad (11.13)$$

г) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $A_b^T P^+ a \neq -1$, то

$$[A_1(\cdot) + ab_1^T(\cdot)]^+ = A_1^T P^+ - \frac{A_1^T(\cdot) P^+ a A_b^T P^+}{1 + A_b^T P^+ a}. \quad (11.14)$$

Позначивши

$$[A_1(\cdot) + ab_1(\cdot)]^+ = col([A(s_i) + ab^T(s_i)]^{(+)},\ i = \overline{1,N})(\sqrt{\Delta s_N})^{-1};$$

$$[A_1(\cdot)]^+ = col([A(s_i)]^{(+)},\ i = \overline{1,N})(\sqrt{\Delta s_N})^{-1},$$

де

$$[A(s_i)]^{(+)} = A^T(s_i) P^+;\ P = \sum_{i=1}^{N} A(s_i) A^T(s_i) \text{ для } i = \overline{1,N},$$

з (11.11) – (11.14) знаходимо:

а) якщо $\Delta_a>0$, $\Delta_b>0$, то

$$[A(s_i) + ab^T(s_i)]^{(+)} = A^T(s_i) P^+ - \Delta_a^{-1} A^T(s_i) P^+ aa^T Z(P) -$$
$$- \Delta_b^{-1} (b(s_i) - A^T(s_i) P^+ A_b) A_b^T P^+ + \Delta_a^{-1} \Delta_b^{-1} (b(s_i) -$$
$$- A^T(s_i) P^+ A_b) a^T Z(P)(1 + A_b^T P^+ a); \quad (11.15)$$

б) якщо $\Delta_a=0$, $\Delta_b>0$, то

$$[A(s_i) + ab^T(s_i)]^{(+)} = \Bigg[ A^T(s_i) P^+ - \frac{\chi(s_i) A_\chi^T P^+}{\Delta} +$$

$$+ \left( \frac{(\chi(s_i) b_\chi - b(s_i) + A^T(s_i) P^+ A_b}{\Delta_b} \right) A_b^T P^+ - \frac{\chi(s_i) A_\chi^T P^+ A_b A_b^T P^+}{\Delta \Delta_b} \Bigg] \left( I_L - \frac{aa^T}{1 + \|a\|^2} \right) +$$

$$+ \frac{b(s_i) a^T - A^T(s_i) P^+ A_b a^T}{\Delta_b (1 + \|a\|^2)} - \frac{\chi(s_i)(b_\chi - A_\chi^T P^+ A_b) a^T}{\Delta_b \Delta (1 + \|a\|^2)}, \triangleright \quad (11.16)$$

де $\chi(s_i) = A^T(s_i)P^+a - \Delta_b^{-1}\left(b(s_i)\text{-}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(s_i)\mathrm{P}^+\mathrm{A}_b\right)\left(1+\mathrm{A}_b^{\mathrm{T}}\mathrm{P}^+a\right)$;

$$A_\chi^T = \sum_{i=1}^{N}\chi^T(s_i)A^T(s_i);$$

$$b_\chi = \sum_{i=1}^{N}\chi^T(s_i)b(s_i); \ \sum_{i=1}^{N}\chi^2(s_i) = \Delta;$$

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$; $A_b^T P^+a = -1$, то

$$[A(s_i)+ a\, b^T(s_i)]^{(+)}=A^T(s_i)P^+-\delta_a^{-1}A^T(s_i)P^+\,a\,a^TP^+PP^+-$$

$$-\delta_b^{-1}A^T(s_i)P^+P^+A_bA_b{}^TP^+ + \delta_a^{-1}\delta_b^{-1}A^T(s_i)P^+a\,A_b^T\,P^+\,A_b^T\,P^+\,A_b^T\,P^+P^+PP^+a; \quad (11.17)$$

ґ) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$; $A_b^T \neq -1$, то

$$[A(s_i)+ab^T(s_i)]^{(+)}=A^T(s_i)P^+-\frac{A^T(s_i)\mathrm{P}^+aA_b^T P^+}{1+A_b^T P^+a}. \quad (11.18)$$

Упродовж (11.5) – (11.18)

$$\Delta_a = a^T(I_L - PP^+)^+a; \qquad \Delta_b = \sum_{i=1}^{N}b^2(s_i) - A_b^T P^+A_b; \quad (11.19)$$

$$\delta_a = a^T P^+PP^+a; \qquad \delta_b = A_b^T P^+P^+A_b;$$

$$A_b = \sum_{i=1}^{N}A(s_i)b(s_i); \ A_b^T = \sum_{i=1}^{N}b^T(s_i)A^T(s_i); \ P=\sum_{i=1}^{N}A(s_i)A^T(s_i).$$

При $N\to\infty$ з (11.15) – (11.18) з урахуванням (11.19) та того, що, згідно з (11.19)

$$\lim_{N\to\infty} A(s_i) = A(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} A^T(s_i) = A^T(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} A^T(s_i)P^+ = A^{(+)}(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} b(s_i) = b(s);$$

$$\lim_{N\to\infty} b^T(s_i) = b^T(s)$$

для $[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}$ знаходимо:

а) якщо $\Delta_a>0$, $\Delta_b>0$, то

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}=A^T(s)P^+-\Delta_a^{-1}[A(s)]^T P^+ aa^T Z(P)-$$
$$-\Delta_b^{-1}(b(s)-[A(s)]^T P^+ A_b)A_b^T P^+ + \Delta_a^{-1}\Delta_b^{-1}(b(s)-$$
$$-[A(s)]^T P^+ A_b)a^T Z(P)(1+A_b^T P^+ a); \qquad (11.20)$$

б) якщо $\Delta_a=0$, $\Delta_b>0$, то

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}=$$
$$=\left(A^T(s)P^+ - \frac{k(s)A_k^T P^+}{\|k(s)\|^2} + \frac{(k(s)b_k - b(s) + [A(s)]^T P^+ A_b)A_b^T P^+}{\Delta_b} -\right.$$
$$\left.-\frac{k(s)A_k^T P^+ A_b A_b^T P^+}{\|k(s)\|^2 \Delta_b}\right)\left(I_L - \frac{aa^T}{1+\|a\|^2}\right) + \frac{b(s)a^T - [A(s)]^T P^+ A_b a^T}{\Delta_b(1+\|a\|^2)} - \qquad (11.21)$$
$$-\frac{k(s)(b_k - A_k^T P^+ A_b)a^T}{\Delta_b \|k(s)\|^2 (1+\|a\|^2)},$$

де

$$k(s)=[A(s)]^T P^+ a-\Delta_b^{-1}(b(s)-[A(s)]^T P^+ A_b)(1+A_b^T P^+ a);$$
$$A_k^T = \int_{S_0^T} k^T(s)[A(s)]^T ds;$$
$$b_k = \int_{S_0^T} k^T(s)b(s)ds;$$

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$; $A_b^T P_a=-1$, то

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}=A^T(s)P^+-\delta_a^{-1}[A(s)]^T P^+ aa^T P^+ PP^+-$$
$$-\delta_b^{-1}[A(s)]^T P^+ P^+ A_b A_b^T P^+ +$$
$$+\delta_a^{-1}\delta_b^{-1}[A(s)]^T P^+ a A_b^T P^+ A_b^T P^+ P^+ PP^+ a; \qquad (11.22)$$

г) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$; $A_b^T \neq -1$, то

$$[A(s)+ab^T(s)]^{(+)}=A^T(s)P^+ - \frac{A^T(s)P^+ a A_b^T P^+}{1+A_b^T P^+ a}, \qquad (11.23)$$

де

$$\Delta_a=a^T(I_L-PP^+)a;\ \Delta_b=\|b(s)\|^2-A_b^T P^+ A_b;$$
$$\delta_a=a^T P^+ PP^+ a;\ \delta_b=A_b^T P^+ P^+ A_b; \qquad (11.24)$$

$$A_b = \int\limits_{S_0^T} A(s)\,b(s)ds; \qquad A_b^T = \int\limits_{S_0^T} b^T(s)\,[A(s)]^T ds;$$

$$P = \int\limits_{S_0^T} A(s)\,A^T(s)ds$$

(межі інтегрування визначаються конкретною підстановкою задачі).

### *11.5. Формули псевдообернення збурених матричних рядків-функцій.*

Аналогічно розглянутому вище виконаємо поширення співвідношень (11.2) – (11.5) на матричний рядок-функцію $[B(s)+a(s)b^T]$. Як це було зроблено для матричного стовпця-функції $[A(s)+ab^T(s)]$, розглянемо спочатку матричну вектор-функцію дискретного аргументу

$$B_1(\cdot)=col(B(s_i)\sqrt{\Delta s_N}, i=\overline{1,N}),$$

збурену матричною вектор-функцією

$$a_1(\cdot)b^T=col(a(s_i)b^T,\ i=\overline{1,N})\sqrt{\Delta s_N}\ ,$$

де для $a(s)\in R^L$ та довільного $s$ із заданої області

$$B_1(i)=B(s_i)\sqrt{\Delta s_N}\ ;\ a_1(i)=a(s_i)\ \ (i=\overline{1,N});$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{a_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=a(s);$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{B_1(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=B(s);$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{B_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=B^T(s);$$

$$\lim_{N\to\infty}(B_1^T(\cdot)B_1(\cdot))^+\frac{B_1^T(i)}{\sqrt{\Delta s_N}}=B^{(+)}(s).$$

Для зручного запису співвідношень (11.2) – (11.5) стосовно матричного рядка-функції $[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+$ уведемо до розгляду скорочені позначення:

$$\Delta_a = a_1^T(\cdot)Z(B_1^T(\cdot))a_1(\cdot);\ \ \Delta_b = b^TZ(B_1(\cdot))b;$$

$$\delta_a = a_1^T(\cdot)R(B_1^T(\cdot))a_1(\cdot);\ \ \delta_b = b^TR(B_1(\cdot))b;$$

$$B_a = B_1^T(\cdot)a_1(\cdot);\quad B_a^T = a_1^T(\cdot)B_1(\cdot);\ P = B_1^T(\cdot)B_1(\cdot).$$

Формули (11.2) – (11.5) стосовно $B_1(\cdot)$ запишемо у вигляді :

а) якщо $\Delta_a>0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+= B_1^+(\cdot)-\Delta_a^{-1}P^+B_a(a_1^T(\cdot)-B_a^TP^+B_1^T(\cdot))-$$
$$-\Delta_b^{-1}Z(P)bb^TP^+B_1^T(\cdot)+\Delta_a^{-1}\Delta_b^{-1}Z(P)b(a_1^T(\cdot)-$$
$$-B_a^TP^+B_1^T(\cdot))(1+b^TP^+B_a); \qquad (11.25)$$

б) якщо $\Delta_a=0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+=\left(I_M-\frac{\chi\chi^T}{\|\chi\|^2}\right)\times \qquad (11.26)$$
$$\times\left[\left(I_M-\frac{Z(P)bb^T}{\Delta_b}\right)P^+\left(B_1^T(\cdot)+\frac{B_aa_1^T(\cdot)}{1+\|a_1(\cdot)\|^2}\right)+\frac{Z(P)ba_1^T(\cdot)}{\Delta_b(1+\|a_1(\cdot)\|^2)}\right],$$

де $\chi=P^+B_a-\Delta_b^{-1}Z(P)b(1+b^TP^+B_a)$;

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a=-1$, то

$$[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+= B_1^+(\cdot)-\delta_a^{-1}P^+B_aB_a^TP^+P^+B_1^T(\cdot)-$$
$$-\delta_b^{-1}P^+PP^+bb^TP^+B_1^T(\cdot)+\delta_a^{-1}\delta_b^{-1}P^+B_ab^TP^+B_1^T(\cdot)b^TP^+PP^+P^+B_a; \qquad (11.27)$$

г) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a\neq-1$, то

$$[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+= B_1^+(\cdot)-\frac{P_1^+B_ab^TP^+B_1^T(\cdot)}{1+b^TP^+B_a}. \qquad (11.28)$$

Позначивши

$$[B_1(\cdot)+a_1(\cdot)b^T]^+=([B(s_i)+a(s_i)b^T]^{(+)},\ i=\overline{1,N})(\sqrt{\Delta s_N})^{-1};$$
$$[B_1(\cdot)]^+=([B(s_i)]^{(+)},\ i=\overline{1,N})(\sqrt{\Delta s_N})^{-1},$$

де

$$[B(s_i)]^{(+)}=P^+B^T(s_i),\ P=\sum_{i=1}^{N}B^T(s_i)B(s_i)\ \text{для}\ i=\overline{1,N},$$

з (11.25) – (11.28) знаходимо:

а) якщо $\Delta_a>0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B(s_i)+a(s_i)b^T]^+=P^+B^T(s_i)-\Delta_a^{-1}P^+B_a(a^T(s_i)-B_a^TP^+B^T(s_i))- \qquad (11.29)$$
$$--\Delta_b^{-1}Z(P)bb^TP^+B^T(s_i)+\Delta_a^{-1}\Delta_b^{-1}Z(P)b(a^T(s_i)-B_a^TP^+B^T(s_i))(1+b^TP^+B_a);$$

б) якщо $\Delta_a=0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B(s_i)+a(s_i)b^T]^+=$$

$$=\left(I_M-\frac{\chi\chi^T}{\|\chi\|^2}\right)\left[\left(I_M-\frac{Z(P)bb^T}{\Delta_b}\right)P^+\times\right.$$
$$\left.\times\left(B^T(s_i)+\frac{B_a a^T(s_i)}{1+\Delta}\right)+\frac{Z(P)ba^T(s_i)}{\Delta_b(1+\Delta)}\right], \quad (11.30)$$

де $\chi=P^+B_a-\Delta_b^{-1}Z(P)b(1+b^TP^+B_a)$, $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\|a(s_i)\|^2$ ;

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a=-1$, то

$$[B(s_i)+a(s_i)b^T]^+=P^+B^T(s_i)-\delta_a^{-1}P^+B_aB_a^TP^+P^+B^T(s_i)-$$
$$-\delta_b^{-1}P^+PP^+bb^TP^+B^T(s_i)+\delta_a^{-1}\delta_b^{-1}P^+B_ab^TP^+B^T(s_i)b^TP^+PP^+P^+B_a; \quad (11.31)$$

г) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a\neq-1$, то

$$[B(s_i)+a(s_i)b^T]^+=P^+B^T(s_i)-\frac{P^+B_ab^TP^+B^T(s_i)}{1+b^TP^+B_a}. \quad (11.32)$$

Упродовж (11.29) – (11.32)

$$\Delta_b=b^T(I_M-P^+P)b;\ \Delta_a=\sum_{s_i=1}^{N}\|a(s_i)\|^2-B_a^TP^+B_a;$$
$$\delta_b=b^TP^+PP^+b;\qquad \delta_a=B_a^TP^+P^+B_a;$$
$$B_a=\sum_{i=1}^{N}[B(s_i)]^Ta(s_i);\qquad B_a^T=\sum_{i=1}^{N}[a(s_i)]^TB(s_i); \quad (11.33)$$
$$P=\sum_{i=1}^{N}B^T(s_i)B(s_i).$$

При $N\to\infty$ з (11.29) – (11.32) з урахуванням (11.33) та того, що

$$\lim_{N\to\infty}B(s_i)=B(s);\qquad \lim_{N\to\infty}B^T(s_i)=B^T(s);$$
$$\lim_{N\to\infty}P^+B^T(s_i)=B^{(+)}(s);$$
$$\lim_{N\to\infty}a(s_i)=a(s);\qquad \lim_{N\to\infty}a^T(s_i)=a^T(s),$$

для $[B(s)+a(s)b^T]^{(+)}$ знаходимо:

а) якщо $\Delta_a>0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B(s)+a(s)b^T]^{(+)}= P^+B^T(s)- \Delta_a^{-1} P^+B_a[a^T(s)-B^TP^+B^T(s)] - \tag{11.34}$$

$$- \Delta_b^{-1} Z(P)bb^T P^+B^T(s)+ \Delta_a^{-1} \Delta_b^{-1} Z(P)b(a^T(s)- B_a^T P^+B^T(s))(1+b^TP^+B_a);$$

б) якщо $\Delta_a=0$, $\Delta_b>0$, то

$$[B(s)+a(s)b^T]^{(+)}=$$

$$= \left( I_M - \frac{kk^T}{\|k\|^2} \right) \left[ \left( I_M - \frac{Z(P)bb^T}{\Delta_b} \right) P^+ \times \right.$$

$$\left. \times \left( B^T(s) + \frac{B_a a^T(s)}{1+\|a(s)\|^2} \right) + \frac{Z(P)ba^T(s)}{\Delta_b(1+\|a(s)\|^2)} \right], \tag{11.35}$$

де $k=P^+B_a- \Delta_b^{-1} Z(P)b(1+b^TP^+B_a)$;

в) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a= -1$, то

$$[B(s)+ a(s)b^T]^{(+)}=P^+B^T(s)- \delta_a^{-1} P^+B_a B_a^T P^+P^+B^T(s)-$$

$$- \delta_b^{-1} P^+PP^+bb^T P^+B^T(s)+ \delta_a^{-1} \delta_b^{-1} P^+B_ab^TP^+B^T(s)b^TP^+PP^+B_a; \tag{11.36}$$

г) якщо $\Delta_a=\Delta_b=0$, $b^TP^+B_a\neq -1$, то

$$[B(s)+a(s)b^T]^{(+)}=P^+B^T(s)- \frac{P^+B_ab^TP^+B^T(s)}{1+b^TP^+B_a}, \tag{11.37}$$

де

$$\Delta_b=b^T(I_M-P^+P)b;\ \Delta_a= \int_{S_0^T} \|a(s)\|^2 ds - B_a^T P^+ B_a\ ;$$

$$\delta_b=b^TP^+PP^+b; \qquad \delta_a= B_a^T P^+P^+B_a;$$

$$B_a= \int_{S_0^T} [B(s)]^T a(s)ds; \qquad B_a^T = \int_{S_0^T} [a(s)]^T B(s)ds;$$

$$P= \int_{S_0^T} B^T(s)B(s)ds$$

(межі інтегрування визначаються конкретною постановкою задачі).

# § 12. Дослідження моделей лінійних динамічних систем із розподіленими параметрами при скінченновимірних варіаціях параметрів

*12.1. Постановка задачі та проблеми її розв'язання.*

Градієнтна процедура оптимізації множин $S_A^*$ точок спостережень та $S_B^*$ точок керувань системою з розподіленими параметрами при моделюванні її початково-крайових умов функціями $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та векторами $\bar{u}_0$, $\bar{u}_\Gamma$ (див. п. 7.5) може ефективно працювати в області псевдорозв'язку задачі. При переході від множини псевдорозв'язків до єдиного, або точного розв'язку градієнтні функції можуть мати розриви, а функціонали

$$\varepsilon_1^2(S_A^*,\ S_B^*) = \bar{y}^T\bar{y} - \sum_{i,j}[C(S_A^*,S_B^*)[C^*(S_A^*,S_B^*)]^+]_{ij}\,\bar{y}_i\bar{y}_j;$$

$$\varepsilon_2^2(S_A^*) = \bar{y}^T\bar{y} - \sum_{i,j}[\int A(S_A^*,s)A^{(+)}(s,S_A^*)ds]_{ij}\,\bar{y}_i\bar{y}_j; \tag{12.1}$$

$$\varepsilon_3^2(S_B^*) = b^2 - \int\int Y^T(s_1)B(s_1,S_B^*)[B(s_2,S_B^*]^{(+)}Y(s_2)ds_1ds_2\,,$$

визначені згідно з (7.22) – нескінченні прирости.

Щоб уникнути неприємностей на шляху до оптимального розв'язання задач розміщення спостерігачів та керувачів, надамо координатам $s_k^* \in S_A^*$ $(k=\overline{1,L})$ та $s_k^* \in S_B^*$ $(k=\overline{1,M})$ скінченні прирости $\Delta s_k^*$ і дослідимо прирости $\Delta_k\varepsilon_i^2(\cdot) = \varepsilon_i^2(\cdot)\,|_{s_k^*+\Delta s_k^*} - \varepsilon_i^2(\cdot)\,|_{s_k^*}$ $(i=\overline{1,3})$.

*12.2. Проблеми скінченновимірної варіації координат спостерігачів.*

З урахуванням того, що

$$\bar{y}(S_A^*) = col\ \ (\bar{y}_k \overset{\Delta}{=} y(s_k),\ k=\overline{1,L});$$

$$C(S_A^*),\ S_B^*) = col(str(G(s_i^* - s_j^*), j=\overline{1,M}), i=\overline{1,L});$$

$$A(S_A^*,s) = col(G(s_i^* - s), i=\overline{1,L}),$$

розглянемо задачі знаходження приростів $\Delta_k\varepsilon_i^*(\cdot)$ $(i=\overline{1,2})$ при скінченновимірних варіаціях координат спостерігачів $(s_k^* \in S_A^*, k=\overline{1,L})$.

При варіаціях координат $s_k^*$ спостерігачів на величину $\Delta s_k^*$ отримуємо:

$$\bar{y}(\bar{S}_A^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = col(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{k-1}, y(s_k^*+\Delta s_k^*), \bar{y}_{k+1},\ldots,\bar{y}_L);$$

$$C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = col\left(str\left(\begin{cases}(G(s_i^* - s_j^*), i \neq k \\ (G(s_k^* + \Delta s_k^* - s_j^*), i = k\end{cases}, j = (\overline{1, M}), i = \overline{1, L}\right)\right);$$

$$[C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ = [\sigma_{ml}(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]_{m,l=1}^{m=M,l=L}; \qquad (12.2)$$

$$A(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*) = col\left(\begin{cases}G(s_i^* - s), i \neq k \\ G(s_k^* + \Delta s_k^* - s), i = k\end{cases}, i = \overline{1, L}\right);$$

$$[A(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} = (\sigma_l(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*), l = \overline{1, L}),$$

де $G(s - s')$ – функція Гріна розглядуваної задачі.

З урахуванням того, що

$$y(s_k^* + \Delta s_k^*) = y(s_k^*) + \Delta y(s_k^*) = \bar{y}_k + \Delta \bar{y}_k;$$

$$G((s_k^* + \Delta s_k^*) - s) = G(s_k^* - s) + \Delta_k^A G(s); \qquad (12.3)$$

$$\sigma_{ml}(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = \sigma_{ml}(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^A \sigma_{ml};$$

$$\sigma_\ell(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*) = \sigma_l(S_A^*, s) + \Delta_k^A \sigma_l(s) \qquad (l = \overline{1, L}),$$

знаходимо:

$$\bar{y}(\overline{S}_A^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = \bar{y}(S_A^*) + \Delta_k \bar{y};$$

$$\Delta_k \bar{y} = col(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, \Delta y(s_k^*), \underbrace{0, \ldots, 0}_{L-k});$$

$$C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = C(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^A C;$$

$$\Delta_k^A C = str(col(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, \Delta_k G(s_j^*), \underbrace{0, \ldots, 0}_{L-k}), j = \overline{1, M});$$

$$[C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ = [C(S_A^*, S_B^*)]^+ + \Delta_k^A C^{(+)};$$

$$\Delta_k^A C^{(+)} = [\Delta_k^A \sigma_{ml}]_{m,l=1}^{m=M;l=L};$$

$$A(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*) = A(S_A^*, s) + \Delta_k A(s);$$

$$\Delta_k A(s) = col(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, \Delta_k^A G(s), \underbrace{0, \ldots, 0}_{L-k});$$

$$[A(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} = [A(S_A^*, s)]^{(+)} + \Delta_k A^{(+)}(s); \qquad (12.4)$$

$$\Delta_k A^{(+)}(s) = str(\Delta_k^A \sigma_l(s), l = \overline{1, L}).$$

Після чого з точністю до нескінченно малих величин першого порядку малості для $s_k^* \in S_A^*$ $(k = \overline{1, L})$ знаходимо:

$$\Delta_k \varepsilon_1^2(S_A^*, S_B^*) = (\bar{y}(S_A^*) + \Delta_k \bar{y})^T (\bar{y}(S_A^*) + \Delta_k \bar{y}) -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{L} [(C(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^A C)([C(S_A^*, S_B^*)]^+ + \Delta_k^A C^{(+)})]_{ij} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \bar{y}_i, (i \neq k) \\ \bar{y}_i + \Delta \bar{y}_k, (i = k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_j, (j \neq k) \\ \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_k, (j = k) \end{Bmatrix} -$$
$$-\bar{y}^T(S_A^*)\bar{y}(S_A^*) + \sum_{i,j=1}^{L} [C(S_A^*, S_B^*)[C(S_A^*, S_B^*)]^+]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j =$$
$$= 2\bar{y}_k(\Delta \bar{y}_k) - \sum_{i,j} [C(S_A^*, S_B^*)(\Delta_k^A C^{(+)})]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j - \sum_{i,j=1}^{L} [(\Delta_k^A C)[C(S_A^*, S_B^*)]^+]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j -$$
$$-\sum_{i=1}^{L} \{[C(S_A^*, S_B^*)[C(S_A^*, S_B^*)^+]_{ik} + [C(S_A^* S_B^*)[C(S_A^*, S_B^*)]^+]_{ki}\}(\Delta \bar{y}_k);$$
$$\Delta_k \varepsilon_2^2(S_A^*, s) = (\bar{y}(S_A^*) + \Delta_k \bar{y})^T (\bar{y}(S_A^*) + \Delta_k \bar{y}) -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{L} [\int (A(S_A^*, s) + \Delta_k A(s))([A(S_A^*, s)]^+ + \Delta_k A^{(+)}(s)) ds]_{ij} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \bar{y}_i, (i \neq k) \\ \bar{y}_i + \Delta \bar{y}_k, (i = k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_j, (j \neq k) \\ \bar{y}_j + \Delta \bar{y}_k, (j = k) \end{Bmatrix} -$$
$$-\bar{y}^T(S_A^*)\bar{y}(S_A^*) + \sum_{i,j=1}^{L} [\int A(S_A^*, s)[A(S_A^* s)]^+ ds]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j = \qquad (12.5)$$
$$= 2\bar{y}_k(\Delta \bar{y}_k) - \sum_{i,j=1}^{L} [\int A(S_A^*, s) \Delta_k A^{(+)}(s) ds]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{L} [\int (\Delta_k A(s)[A(S_A^* s)]^{(+)} ds]_{ij} \bar{y}_i \bar{y}_j -$$
$$-\sum_{i=1}^{L} \{[\int A(S_A^*, s)[A(S_A^*, s)]^{(+)} ds]_{ik} + [\int A(S_A^*, s)[A(S_A^*, s)]^{(+)} ds]_{ki}\}(\Delta \bar{y}_k).$$

Аналізуючи співвідношення (12.5), (12.6), висновуємо, що прирости $\Delta_k \varepsilon_1^2(\cdot)$ та $\Delta_k \varepsilon_2^2(\cdot)$ можуть бути вирахувані, якщо будуть відомі прирости $\Delta_k \bar{y}$, $\Delta_k^A, C$, $\Delta_k^A C^{(+)}$ для $\Delta_k \varepsilon_1^2(\cdot)$ та $\Delta_k \bar{y}$, $\Delta_k A(s)$, $\Delta_k A^{(+)}(s)$ для $\varepsilon_2^2(\cdot)$.

Якщо проблем обчислення $\Delta_k \bar{y}$, $\Delta_k^A C$, $\Delta_k A(s)$ не існує (вони вираховуються згідно з (12.4), (12.3)), то обчислення приростів $\Delta_k^A C^{(+)}$ та $\Delta_k A^{(+)}(s)$ залишається проблематичним. Алгоритми обчислення $\Delta_k^A C^{(+)}$ та $\Delta_k A^{(+)}(s)$

ми подамо нижче, виходячи з формул (11.2) – (11.5) обернення збурених прямокутних матриць та узагальнення цих формул у формі (11.20) – (11.23).

*12.3. Проблеми скінченновимірної варіації координат керувачів.*

Розглянемо проблеми знаходження $\Delta_k \varepsilon_1^2(S_A^*, S_B^*)$ та $\Delta_k \varepsilon_3^2(S_B^*)$ при зміні $k$-тої $(k = \overline{1, M})$ координати $s_k^*$ керувача на величину $\Delta s_k^*$.

Знову будемо виходити з того, що

$$C(S_A^*, S_B^*) = col(str(G(s_i^* - s_j^*), j = \overline{1, M}), i = \overline{1, L}); \qquad (12.6)$$

$$B(s, S_B^*) = str(G(s - s_j^*), j = \overline{1, M}).$$

При варіаціях координат $s_k^*$ керувачів на величину $\Delta s_k^*$ маємо:

$$C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = col(str\left(\begin{cases} G(s_i^* - s_j^*), j \neq k \\ G(s_i^* - (s_k^* + \Delta s_k^*)), j = k \end{cases}, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, L}\right);$$

$$[C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ = [\sigma_{ml}(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]_{m,l=1}^{m=M;l=L}; \qquad (12.7)$$

$$B(s, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = str\left(\begin{cases} G(s - s_j^*), j \neq k \\ G(s - (s_k^* + \Delta s_k^*)), j = k \end{cases}, j = \overline{1, M}\right);$$

$$[B(s, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} = col(\sigma_m(s, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*), m = \overline{1, M}),$$

де $G(s - s')$ – функція Гріна розглядуваної задачі.

Ураховуючи, що

$$G(s - (s_k^* + \Delta s_k^*)) = G(s - s_k^*) + \Delta_k^B G(s); \qquad (12.8)$$

$$\sigma_{ml}(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + s_k^*) = \sigma_{ml}(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^B \sigma_{ml};$$

$$\sigma_m(s, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = \sigma_m(s, S_B^*) + \Delta_k^B \sigma_m(s) \qquad (m = \overline{1, M}),$$

знаходимо:

$$C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*) = C(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^B C;$$

$$\Delta_k^B C = col(str(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, \Delta_k^B G(s_i), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M-k}), i = \overline{1, L});$$

$$[C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ = [C(S_A^*, S_B^*)]^+ + \Delta_k^B C^{(+)};$$

$$\Delta_k^B C^{(+)} = [\Delta_k^B \sigma_{ml}]_{m,l=1}^{m=M,l=L};$$

$$B(s, \overline{S}_B^* s_k^* + \Delta s_k^*) = B(s, \overline{S}_B^*) + \Delta_k B(s);$$

$$\Delta_k B(s) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1}, \Delta_k^B G(s), \underbrace{0,\ldots,0}_{M-k});$$

$$[B(s,\overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} = [B(s,S_B^*)]^{(+)} + \Delta_k B^{(+)}(s);$$

$$\Delta_k B^{(+)}(s) = col(\Delta_k^B \sigma_m(s), m = \overline{1,M}).$$

Після чого з точністю до нескінченно малих величин першого порядку малості для $s_k^* \in S_B^* (k = \overline{1,M})$ знаходимо:

$$\Delta_k \varepsilon_1^2(S_A^*, S_B^*) = (\overline{y}(S_A^*))^T (\overline{y}(S_A^*)) -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{L} [(C(S_A^*, S_B^*) + \Delta_k^B C)([C(S_A^*, S_B^*)]^+ + \Delta_k^B C^{(+)}]_{ij} \overline{y}_i(S_A^*) \overline{y}_j(S_A^*) -$$
$$- \overline{y}^T(S_A^*) \overline{y}(S_A^*) + \sum_{i,j=1}^{L} [C(S_A^*, S_B^*)[C(S_A^*, S_B^*)]^+]_{ij} \overline{y}_i(S_A^*) y_j(S_A^*) =$$
$$= - \sum_{i,j=1}^{L} C(S_A^*, S_B^*)(\Delta_k^B C^{(+)}) + (\Delta_k^B C)[C(S_A^*, S_B^*)]^+]_{ij} \overline{y}_i \overline{y}_j :$$

$$\Delta_k \varepsilon_3^2(s, S_B^*) = b^2 - \iint Y^T(s_1)[B(s_1 S_B^*) + \Delta_k B(s_1)][[B(s_2, S_B^*)]^{(+)} +$$
$$+ \Delta_k B^{(+)}(s_2)]Y(s_2) ds_1 ds_2 - b^2 + \iint Y^T(s_1) B(s_1 S_B^*)[B(s_2 S_B^*)]^{(+)} Y(s_2) ds_2 =$$
$$= - \iint Y^T(s_1)[B(s_1, S_B^*)(\Delta_k B^{(+)}(s_2)) + (\Delta_k B(s_1))[B(s_2, S_B^*)]^{(+)}] Y(s_2) ds_1 ds_2.$$

Аналізуючи співвідношення (12.10), (12.11), висновуємо, що прирости $\Delta_k \varepsilon_1^2(\cdot)$ та $\Delta_k \varepsilon_3^2(\cdot)$ можуть бути вирахувані, якщо будуть відомі прирости $\Delta_k^B C,\ \Delta_k^B C^{(+)}$ для $\Delta_k \varepsilon_1^2(\cdot)$ та $\Delta_k B(s)$, $\Delta_k B^{(+)}(s)$ для $\varepsilon_3^2(\cdot)$.

Прирости $\Delta_k^B C$ та $\Delta_k B(s)$ вираховуються згідно з (12.8), (12.9). Обчислення ж приростів $\Delta_k^B C^{(+)}$ та $\Delta_k B^{(+)}(s)$ залишається проблематичним. Алгоритми обчислення цих приростів будуть побудовані нами з використанням формул (11.2) – (11.5) обернення збурених прямокутних матриць та їх узгоджень у формі (11.34) – (11.37).

### *12.4. Про прирости псевдообернених прямокутних матриць та матричних функцій при скінченновимірних варіаціях координат спостерігачів та керувачів.*

Для побудови аналітичної залежності елементів $\Delta_k^A \sigma_{ml}$ $(m = \overline{1,M}; l = \overline{1,L})$ матриці $\Delta_k^A C^{(+)}$ від скінченновимірної варіації $\Delta s_k^*$, координати $s_k^* \in S_A^*$, $k$-го $(k = \overline{1,L})$ спостерігача будемо виходити з означення (12.4) цього елемента, а також урахуємо особливості матриці $C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)$, яка залежить від координати $s_k^*$ через $k$-тий рядок. Для того, щоб урахувати вплив приросту $\Delta s_k^*$ на матрицю $\Delta_k^A C^{(+)}$ із використанням (11.2) – (11.5) псевдообернення збурених прямокутних матриць, обчислимо:

$$\Delta_k^A C^{(+)} = [C(\overline{S}_A^*, S_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ - [C(S_A^*, S_B^*)]^+ =$$
$$= [C(S_A^*, S_B^*) + ab^T(\Delta s_k^*)]^+ - [C(S_A^*, S_B^*)]^+,$$

де

$$a = col(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{L-k});$$
$$b^T(\Delta s_k^*) = (\Delta_k^A G(s_m^*), m = \overline{1,M}).$$

Аналогічно, виходячи з (11.20) – (11.23), можна побудувати й аналітичні залежності приросту

$$\Delta_k A^{(+)}(s) = [A(\overline{S}_A^*, s, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} - [A(S_A^*, s)]^{(+)} = [A(S_A^*, s) + ab^T(s)]^{(+)} - [A(S_A^*, s)]^{(+)},$$

де $a$ – одиничний вектор, визначений вище, а

$$b^T(s) = \Delta_k^A G(s) = G((s_k^* + \Delta s_k^*) - s) - G(s_k^* - s).$$

Таким чином будуються аналітичні залежності елементів $\Delta_k^B \sigma_{ml} (m = \overline{1,M}; l = \overline{1,L})$ матриці $\Delta_k^B C^{(+)}$ від скінченновимірних варіацій $\Delta s_k^*$ координат $s_k^* \in S_B^*$ $(k = \overline{1,M})$ керувачів. Як і вище, будемо виходити з означення (12.9) цього елемента, а також особливостей залежності матриці $C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)$ від координати $s_k^* \in S_B^*$. Ураховуючи, що ця залежність проявляється через $k$-тий рядок матриці $C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)$, залежності $\Delta_k^B \sigma_{ml}$ від $\Delta s_k^*$ побудуємо з формул (11.2) – (11.5) псевдообернення збурення прямокутних матриць, ураховуючи, що

$$\Delta_k^B C^{(+)} = [C(S_A^*, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^+ - [C(S_A^*, S_B^*)]^+ = [C(S_A^*, S_B^*) + a(\Delta s_k^*) b^T]^+ - [C(S_A^*, S_B^*)]^+,$$

де

$$a(\Delta s_k^*) = col(\Delta_k G(s_l^*), l = \overline{1,L});$$
$$b^T = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{M-k}).$$

При моделюванні неперервних початково-крайових умов дискретно розміщеними керувачами приріст

$$\Delta_k B^{(+)}(s) = [B(s, \overline{S}_B^*, s_k^* + \Delta s_k^*)]^{(+)} - [B(s, S_B^*)]^{(+)}$$

матричної функції $[B(s,S_B^*)]^{(+)}$ при варіації на $\Delta s_k^*$ координати $s_k^*$ $k$-того керувача визначимо співвідношенням:

$$\Delta_k B^{(+)}(s) = [B(s,S_B^*) + a(s)b^T]^{(+)} - [B(s,S_B^*)]^{(+)},$$

де $b$ – одиничний вектор, визначений вище, а

$$a(s) = \Delta_k^B G(s) = G(s-(s_k^* + \Delta s_k^*)) - G(s - s_k^*).$$

Це дозволяє з використанням (11.34) – (11.37) розв’язати поставлену задачу. Таким чином можна побудувати розрахункові формули для обчислення приростів похибок $\varepsilon_i^2(\cdot)$ (див. (12.1)) при скінченновимірних варіаціях точок спостережень та прикладення моделюючих фіктивних зовнішньодинамічних збурень у задачах оптимізації розміщення останніх у випадках, коли градієнтні процедури оптимізації не дають позитивних результатів.

# РОЗДІЛ 3

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розв'язуються задачі термінального керування лінійними динамічними системами дискретного та неперервного аргументів при їх заданому початковому стані. Досліджуються умови точності та однозначності розв'язання задач. Розв'язок задачі коректується за додатково заданими проміжними станами системи, точність досягнення яких зростає пріоритетно з часом. Для випадку, коли початковий стан системи заданий частково, пропонується алгоритм його моделювання. Результати з розв'язання задач термінального керування узагальнюються на випадок, коли функція стану системи повинна наближатися до певної кількості проміжних значень.

## § 13. Математичне моделювання задач керування лінійними динамічними системами дискретного аргументу

### *13.1. Інтегральні моделі динаміки лінійних систем і можливості з їх використання в розв'язанні обернених задач.*

Розглянуті вище методи й підходи були спрямовані на заміну диференціальної моделі лінійної динамічної системи інтегральною (див. пп. 1.1, 1.2). Задачі переходу від диференціальних співвідношень (1.1), (1.2) для функції стану $y(x,t)$ до інтегральних виду (1.9), (1.11) – (1.13) були розв'язані в попередніх параграфах. Були побудовані розв'язки, або найкращі середньоквадратичні наближення до них, для задач моделювання зовнішньодинамічної обстановки, в якій функціонує система, та прямих задач динаміки таких систем. Поза розглядом залишилися обернені задачі динаміки. Однак, як указувалося на початку даного посібника (див. § 1), перехід від диференціальної форми моделі динаміки розглядуваних систем до інтегрального зображення мотивувався зручностями в розв'язанні саме обернених задач. Проблеми розв'язання деяких із цих задач на прикладі лінійної динамічної системи із зосередженими параметрами ми й розглянемо нижче.

Будуть побудовані та досліджені на точність і однозначність загальні розв'язки задач керування такими системами, у тому числі й пріоритетного керування, коли ціна точності зростає з часом. Для зручності розв'яжемо ці задачі спочатку в дискретній постановці, а потім отримані результати поширимо на неперервний випадок. Зауважимо, що методика дослідження цих задач запропонована М.Ф.Кириченком.

### *13.2. Задачі термінального керування лінійними динамічними системами дискретного аргументу.*

Розглянемо динаміку системи, вектор-функція $x(k)\in R^n$ стану якої в дискретні моменти часу $k=\overline{1,N}$ визначається через вхідну вектор-функцію $u(k)\in R^m$ та ( $n\times n$ ) і ( $n\times m$ )-вимірні матриці $A(k)$ і $B(k)$ співвідношеннями:

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k);\quad x(0)=0. \tag{13.1}$$

Знайдемо значення керуючої вектор-функції $u(k)$ $(k=\overline{1,N})$ так, щоб

$$\left\|x(N+1)-X_N\right\|^2\to\min_{u(k),k=\overline{0,N}}, \tag{13.2}$$

де $X_N$ – задане значення вектор-функції стану $x(k)$ у точці $k=N+1$.

Для розв’язання задачі будемо виходити з того, що

$$x(1)=B(0)u(0);$$

$$x(2)=A(1)x(1)+B(1)u(1);$$

$$x(N+1)=A(N)\ldots A(1)B(0)u(0)+A(N)\ldots A(2)B(1)u(1)+\ldots$$

$$+A(N)B(N-1)u(N-1)+B(N)u(N)=\sum_{j=0}^{N}W(N,j)u(j), \tag{13.3}$$

де

$$W(N,j)=A(N)\ldots A(j+1)B(j).$$

З урахуванням (13.3) задачу (13.1), (13.2) замінимо такою:

$$\left\|\sum_{j=0}^{N}W(N,j)u(j)-X_N\right\|^2\to\min_{u(j),\ j=\overline{0,N}}.$$

Проблема її розв’язання зводиться до знаходження загального розв’язку системи:

$$W(N)u_N=X_N,$$

де

$$u_N = (u(0),\ldots,u(N)) \in R^{(N+1)m},$$

а

$$W(N) = (W(N,0),\ \ldots\ ,\ W(N,N))$$

– задана матриця розмірності $n \times (N+1)m$.

Згідно з викладеним у п. 3.5 знаходимо, що

$$u_N \in \Omega_N = \{u_N : u_N = W^+(N)X_N + v - W^+(N)W(N)v,\ \forall\ \ v \in R^{m(N+1)}\}, \tag{13.4}$$

де

$$W^+(N) = \begin{pmatrix} W^T(N,0) \\ \ldots \\ W^T(N,N) \end{pmatrix} \left( \sum_{j=0}^{N} W(N,j)W^T(N,j) \right)^+ .$$

Після чого з (13.5) висновуємо, що

$$u(k) \in \Omega_k = \{u(k) : u(k) =$$

$$W^T(N,k)P_N^+ X_N + v(k) - W^T(N,k)P_N^+ v_N,\ \ \forall v(k) \in R^m\}, \tag{13.5}$$

де

$$P_N = \sum_{j=0}^{N} W(N,j)W^T(N,j);$$

$$v_N = \sum_{j=0}^{N} W(N,j)v(j) .$$

Відхилення кінцевого значення стану системи від очікуваного визначимо співвідношеннями

$$\varepsilon^2(X_N) = \min_{\substack{u(k)\in\Omega_k, \\ k=\overline{0,N}}} \left\| x(N+1) - X_N \right\|^2 = \min_{u_N \in \Omega_N} \left\| W(N)u_N - X_N \right\|^2 =$$

$$= X_N^T Z(W^T(N))X_N = X_N^T Z(P_N)X_N . \tag{13.6}$$

При

$$X_N^T Z(P_N)X_N = 0$$

система (13.1) буде керованою, що дозволяє послідовністю керувань $u(k)$ $(k = \overline{0,N})$, вибраних згідно з (13.6), стан $x(k)$ розглядуваної системи в кінцевий момент часу точно перевести в бажаний. Керування $u(k)$ при цьому будуть однозначно визначатися формулою

$$u(k) = W^T(N,k)P_N^+ X_N \quad (k = \overline{0,N})$$

при

$$\det \ (W^T(N)W(N)) > 0\,. \tag{13.7}$$

При невиконанні (13.7) маємо загальний випадок, визначений співвідношенням (13.6). При цьому

$$\min_{\substack{u(k)\in\Omega_k \\ k=\overline{0,N}}} \|u_N\|^2 = X_N^T P_N^+ X_N \tag{13.8}$$

### *13.3. Задачі пріоритетного керування лінійними динамічними системами дискретного аргументу.*

Загальний розв’язок (13.5) розглянутої вище задачі переводу системи (13.1) у задану точку $X_N$ може бути уточнений, якщо очікуваний стан системи задається не тільки в останній точці часового інтервалу, а й упродовж траєкторії. При цьому будемо виходити з того, що пріоритетність точок, в яких задається стан системи, зростає зі збільшенням номера точки. Отже, множину

$$\Omega_u(N) = Arg \min_{u_N\in R^{m(N+1)}} \|x(N+1) - X_N\|^2 \tag{13.9}$$

керувань $u_N = (u(0),\ldots u(N))$, які стан розглядуваної системи в точці $N+1$ роблять рівним $X_N$, або близьким до нього, послідовно уточнимо згідно з критеріями

$$\|x(N+1-i) - X_{N-i}\|^2 \to \min_{u_N\in\Omega_u(N+1-i)} \quad (i=\overline{1,N})\,, \tag{13.10}$$

де $X_{N-1},\ \ldots\ ,X_0$ – задані значення функції стану в точках $N,\ \ldots\ ,1$, а

$$\Omega_u(N-i) = Arg \min_{u_N\in\Omega(N+1-i)} \|x(N+1-i) - X_{N-i}\|^2\,. \tag{13.11}$$

При розв’язанні задачі будемо виходити з того, що, згідно з (13.5), (13.6),

$$\begin{aligned} \Omega_u(N) = \{u(k):\ u(k) = \\ = W^T(N,k)P_N^+ X_N + v_1(k) - \\ -W^T(N,k)P_N^+ \sum_{s=0}^{N} W(N,s)v_1(s) \ \ \forall \ \ v_1(k)\in R^m,\ k=\overline{0,N}\}, \end{aligned} \tag{13.12}$$

де $W(N,k)$ та $P_N$ визначені вище.

Для побудови множини $\Omega_u(N-1)$, визначеної співвідношенням (13.11), при $i=1$ будемо виходити з того, що, згідно з (13.3),

$$x(N) = \sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)u(j),$$

де $u(0), \dots, u(N-1)$ – керуючі функції. визначені співвідношеннями (13.12).

Визначимо вектор-функції $v_1(k) \in R^m$ у (13.12) з умови (13.10) при $i = 1$. Це еквівалентно розв'язанню системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{s=0}^{N-1} W(N-1, s)v_1(s) - \sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ \sum_{s=0}^{N} W(N, s)v_1(s) =$$

$$= X_{N-1} - \sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ X_N \qquad (13.13)$$

відносно $v_1(s)$ $s = \overline{0, N}$.

Позначивши

$$W_1(N, s) = -\sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ W(N, s) + W(N-1, s)$$

$$s = \overline{0, N-1};$$

$$W_1(N, N) = -\sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ W(N, N),$$

систему (13.13) запишемо у вигляді:

$$\sum_{s=0}^{N} W_1(N, s)v_1(s) = X_{N-1} - \sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ X_N .$$

Звідси знаходимо, що

$$v_1(k) \in \Omega_V(N-1) = \{v_1(k) : v_1(k) = W_1^T(N, k)P_{N-1}^+ (X_{N-1} - \sum_{j=0}^{N-1} W(N-1, j)W^T(N, j)P_N^+ X_N) + v_2(k) -$$

$$-W_1^T(N, k)P_{N-1}^+ \sum_{j=0}^{N} W_1(N, j)v_2(j) \quad \forall v_2(k) \in R^m, \; k = \overline{0, N}\},$$

де

$$P_{N-1} = \sum_{j=0}^{N} W_1(N, j)W_1^T(N, j).$$

Тобто множина $R^m$ значень вектор-функції $v_1(k)$ $(k = \overline{0, N})$ звужена до $\Omega_V(N-1)$. Множина ж керуючих функцій $u(0), \dots, u(N-1)$ визначиться співвідношеннями:

$$\Omega_u(N-1) = \{u(k) : u(k) = W^T(N, k)P_N^+ X_N + v_1(k) -$$

$$-W^T(N,k)P_N^+\sum_{s=0}^{N}W(N,s)v_1(s),\ \ \forall\ \ v_1(s)\in\Omega_V(N-1),\ \ k=\overline{0,N-1}\}\,.$$

Виконуючи підстановку визначених таким чином $u(k)$ в аналітичне зображення функції стану

$$x(N-1)=\sum_{s=0}^{N-2}W(N-2,j)u(j)$$

згідно з критерієм (13.10), записаним для $i=2$, знаходимо множину $\Omega_V(N-2)$, а, отже, і $\Omega_u(N-2)$. Далі процес можна продовжувати згідно з (13.10) для $i=3,\ \dots,N$.

Результатом цього рекурентного процесу буде послідовність множин

$$\Omega_u(N-i)=\{u(k):u(k)=W^T(N,k)P_N^+X_N+v_i(k)-W^T(N,k)P_N^+\sum_{s=0}^{N}W(N,s)v_i(s),$$

$$\forall\ \ v_i(s)\in\Omega_V(N-i),\ \ k=\overline{0,N-i}\}\quad (i=\overline{0,N})\,, \tag{13.14}$$

де

$$\Omega_V(N-i)=\{v_i(k):v_i(k)=W_i^T(N,k)P_{N-i}^+\times(X_{N-i}\sum_{j=0}^{N-i}W(N-i,j)W^T(N,j)P_N^+X_N)+$$

$$+v_{i+1}(k)-W_i^T(N,k)P_{N-i}^+\sum_{j=0}^{N}W_i(N,j)v_{i+1}(j),\ \ \forall\ \ v_{i+1}(k)\in R^m\quad k=\overline{0,N}\};$$

$$P_{N-i}=\sum_{j=0}^{N}W_i(N,j)W_i^T(N,j)\,;$$

$$W_i(N,s)=-\sum_{j=0}^{N-i}W(N-i,j)W^T(N,j)P_N^+W(N,s)+W(N-i,s),s=\overline{0,N-i};$$

$$W_i(N,s)=-\sum_{j=0}^{N-i}W(N-i,j)W^T(N,j)P_N^+W(N,s),\ \ s=\overline{N-i+1,N}\quad .$$

### *13.4. Задачі спостереження для лінійних динамічних систем дискретного аргументу.*

Розглянута вище методика побудови загального розв’язку задачі термінального керування системою (13.1) може бути успішно використана для розв’язання задачі відновлення стану системи

$$x(k+1)=A(k)u(k)\quad k=\overline{0,N-1}) \tag{13.15}$$

за спостереженням

$$y(j)=G(j)x(j)\quad (j=\overline{0,N})\,, \tag{13.16}$$

де $x-n$-вимірний, а $y-m$-вимірний вектори.

Для розв'язання задачі (13.15), (13.16) розглянемо задачу відновлення лінійної комбінації $c^T x(0) \quad (c \in R^n)$ за сигналом $y(j) \quad (j = \overline{0, N})$. Якщо покласти

$$c^T x(0) = \sum_{k=0}^{N} y^T(k) V_c(N,k), \tag{13.17}$$

то проблема знаходження $c^T x(0)$ зводиться до розв'язання задачі керування для спряженої системи

$$\begin{gathered} \xi(k) = A^T(k)\xi(k+1) + G^T(k)V_c(N,k); \\ \xi(N+1) = 0; \ \xi(0) = c \quad (k = \overline{N,0}). \end{gathered} \tag{13.18}$$

Згідно з розв'язком (13.6) системи (13.1)

$$\begin{gathered} V_c(N,k) \in \Omega_V(N,k) = \{V_c(N,k) : V_c(N,k) = \\ = W^T(0,k)P^+ c + w(N,k) - W^T(0,k)P^+ \sum_{j=0}^{N} W(0,j)w(N,j) \\ k = \overline{0,N}, \ \forall w(N,j) \in R^m\}, \end{gathered} \tag{13.19}$$

де

$$W(0,k) = A^T(0) \ \ldots \ A^T(k-1)G^T(k); \ P = \sum_{j=0}^{N} W(0,j)W^T(0,j).$$

Покладаючи в (13.17) $c = e_i \quad (i = \overline{1,n})$ та враховуючи (13.19), знайдемо $x_i(0)$, а, отже, і

$$x(0) = \sum_{k=0}^{N} \left[ P^+ W(0,k) + \Omega(N,k) - \sum_{s=0}^{N} \Omega(N,s) W^T(0,s) P^+ W(0,k) \right] y(k),$$

$$\forall \Omega(N,k) \in R^{n \times m}.$$

Це і є загальний розв'язок задачі спостереження (13.15), (13.16).

Він буде однозначним при

$$\det \ P > 0. \tag{13.20}$$

Точність розв'язання задачі визначається нев'язкою обернення системи (13.18)

$$\varepsilon^2 = \min_{\substack{V_c(N,k) \in \Omega_V(N,k), \\ k = \overline{0,N}}} \left\| \xi(0) - c \right\|^2 = c^T Z(W(0)) c, \tag{13.21}$$

де

$$W(0) = (W(0,N) \vdots \ \ldots \ \vdots W(0,0)).$$

### *13.5. Моделювання неоднорідних початкових умов у задачі термінального керування лінійними динамічними системами дискретного аргументу.*

Наведений вище (див. п. 13.2) розв'язок задачі (13.1), (13.2) виводу стану системи

$$x(k+1) = A(k)u(k) + B(k)u(k) \tag{13.22}$$

на момент часу $k = N+1$ у точку (точно або наближено)

$$x(N+1) = X_N \tag{13.23}$$

побудовано за нульових початкових умов. Для побудови та дослідження розв'язку

$$(\hat{u}(0),\ldots,\hat{u}(N)) = \arg\min_{\bar{u}} \|x(N+1) - X_N\|^2, \tag{13.24}$$

де

$$\bar{u} = col(u(0),\ldots,u(N)),$$

цієї задачі за умови, коли

$$x(0) = X_0 \neq 0, \tag{13.25}$$

можна скористатися розв'язком (13.5) задачі (13.1), (13.2) та умовами (13.6), (13.7) його точності й однозначності після заміни вектора $X_N$ на вектор $X_N - X_0$.

Побудуємо розв'язок задачі (13.22) – (13.25) за умови, що інформація про значення $x_{p+1}(0),...,x_n(0)$ $(p < n)$ відсутня, а

$$x^1(0) = col(x_1(0),...,x_p(0)) = X_0^1. \tag{13.26}$$

При розв'язанні задачі (13.22) – (13.25), (13.26) будемо виходити з розв'язку (13.5) задачі (13.1), (13.2), який використаємо для моделювання неоднорідних початкових умов (13.26). У процесі моделювання припустимо, що до стану (13.26) розглядувану систему призвели деякі невідомі нам зовнішньодинамічні збурення

$$u_0(-N_0-1), u_0(-N_0),...,u_0(-1),$$

де $N_0$ не пов'язане з розглядуваними вище значеннями $N$.

Логічно знайти їх з умови

$$\left\|x^1(0) - X_0^1\right\|^2 \to \min_{\overline{u_0}}, \tag{13.27}$$

де

$$\overline{u_0} = col(u_0(k), k = \overline{-N_0-1,-1}). \tag{13.28}$$

Розписуючи за аналогією з (13.3) динаміку розглядуваної системи на інтервалі $k = \overline{-N_0-1,0}$ при $x(-N_0-1) = 0$, висновуємо, що

$$
\begin{aligned}
&x(-N_0) = B(-N_0-1)u_0(-N_0-1);\\
&x(-N_0+1) = A(-N_0)x(-N_0) + B(-N_0)u_0(-N_0);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x(0) = A(-1)\dots A(-N_0)B(-N_0-1)u_0(-N_0-1) +\\
&+A(-1)\dots A(-N_0+1)B(-N_0)u_0(-N_0) + \dots\\
&+A(-1)B(-2)u(-2) + B(-1)u(-1) = \sum_{j=-N_0-1}^{-1} w(N_0, j)u_0(j),
\end{aligned}
\tag{13.29}
$$

де

$$w(N_0, j) = A(-1)\dots A(j+1)B(j).$$

Ураховуючи це, умови (13.23),(13.26) запишемо у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&W^1(N, N_0, -1)U = X_0^1;\\
&W(N, N_0, N)U = X_N,
\end{aligned}
\tag{13.30}
$$

де $W^1(N, N_0, j)$ – матриця, утворена першими $p$ рядками матриці

$$W(N, N_0, j) = W(N_0, -N_0-1), \dots, W(N_0, -1), W(N, 0), \dots, W(N, j), \underbrace{0, \dots, 0}_{N-j}$$

$$(j = \overline{-N_0-1, N}), \tag{13.31}$$

а

$$U = col(u_0(-N_0-1), u_0(-N_0), \dots, u_0(-1), u(0), \dots, u(N)).$$

Уводячи до розгляду матрицю

$$W = col(W^1(N, N_0, -1), W(N, N_0, N)) \tag{13.32}$$

та вектор

$$X = col(X_0^1, X_N),$$

проблему знаходження вектора $U$ моделююче-керуючих функцій $u_0(k)$ $(k = \overline{-N_0-1, -1})$ та $u(k)$ $(k = \overline{0, N})$, який би розв'язував задачі (13.23), (13.27), зведемо до обернення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$WU = X \tag{13.33}$$

такого, щоб

$$\| WU - X \|^2 \to \min_U . \tag{13.34}$$

Розв'язок $\hat{U}$ задачі (13.33), (13.34) визначається співвідношенням

$$\hat{U} = \arg\min_U \left\| \bar{W}U - \bar{X} \right\|^2,$$

де

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} W^1(N_0, -N_0-1) & \dots & W^1(N_0, -1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & W(N, 0) & \dots & W(N, N) \end{pmatrix};$$

$$\bar{X} = col(X_0^1, X_N - \bar{X}_0),$$

а

$$\bar{X}_0 = \sum_{j=-N_0-1}^{-1} W(N_0, j) u_0(j).$$

Звідси згідно з викладеним у § 3 висновуємо:

$$U = \bar{W}^T P^+ + \bar{X} + (I - \bar{W}^T P^+ + \bar{W})V, \tag{13.35}$$

де

$$P = \bar{W}\bar{W}^T = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=-N_0-1}^{-1} W^1(N_0, j)(W^1)^T(N_0, j) & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=0}^{N} W(N, j) W^T(N, j) \end{pmatrix},$$

а $V$ – довільний вектор розмірності $(N_0 + N) \times m,$ що дорівнює нулю при

$$\det W^T W > 0. \tag{13.36}$$

При цьому

$$\varepsilon^2 = \min_U \left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 + \left\| x(N+1) - X_N \right\|^2 =$$

$$= \min_U \left\| WU - X \right\|^2 = X^T (I - PP^+) X \ . \tag{13.37}$$

*13.6. Моделювання розв’язку загальної задачі керування лінійними динамічними системами дискретного аргументу.*

Виходячи з розв’язку (13.35) розглянутої вище задачі (13.22) – (13.25), (13.26) термінального керування системою (13.22) побудуємо вектор моделююче-керуючих функцій $u_0(k)$ $(k = \overline{-N_0 - 1, -1})$ та $u(k)$ $(k = \overline{0, N})$ для випадку, коли вектор стану $x(k)$ $k = (\overline{0, N+1})$ крім початково-кінцевих умов (13.23), (13.26) мусить задовольняти наступним:

$$x(i) = X_i \ (i = \overline{1, I}; \ I < N), \tag{13.38}$$

де $X_i \in R^n$ – задані вектори.

Проблема розв’язання цієї задачі зводиться до обернення системи (13.33) згідно з (13.34), де

$$W = col(W^1(N, N_0, -1), (W(N, N_0, i), i = \overline{1, I}), W(N, N_0, N)) \tag{13.39}$$

$$X = col(X_0^1, (X_i, i = \overline{1, I}), X_N).$$

Ураховуючи (13.39), з (13.35) отримаємо розв’язок задачі.

Однозначність розв’язання задачі визначається співвідношенням (13.36), (13.39), а

$$\varepsilon^2 = \min_U \left( \left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 + \sum_{i=1}^{I} \left\| x(i) - X_i \right\|^2 + \left\| x(N+1) - X_N \right\|^2 \right) = X^T (I - WW^+) X .$$

# § 14. Математичне моделювання задач керування лінійними динамічними системами неперервного аргументу

## *14.1. Задачі термінального керування лінійними динамічними системами неперервного аргументу*

*Викладена вище методика використання результатів лінійної алгебри до дослідження динаміки лінійних динамічних систем дискретного аргументу дозволяє успішно розв'язати ще цілий ряд задач для цього класу систем. Ми ж зупинимося на питаннях поширення викладених вище результатів на лінійні динамічні системи неперервного аргументу.*

Розглянемо систему, динаміка якої описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{14.1}$$

де $\forall t^* \in [t_0, T]$ $A(t^*), B(t^*)$ $(L \times M)$ та $(L \times K)$-вимірні матриці, $x(t^*) \in R^M$, $u(t^*) \in R^K$, а $x(0) = 0$.

Розв'яжемо задачу знаходження $u(t)$ такого, щоб

$$\left\| x(T) - X_T \right\|^2 \to \min_{u(t),\, t \in [t_0, T]}, \tag{14.2}$$

де $X_T \in R^M$ – заданий вектор.

Для розв'язання задачі (14.1), (14.2) будемо виходити з того, що

$$x(T) = \int_{t_0}^{T} W(T, \tau) u(\tau) d\tau, \tag{14.3}$$

де

$$W(T, \tau) = X(T, \tau) B(\tau) \tag{14.4}$$

– матриця імпульсних перехідних характеристик, в якій $X(T, \tau)$ – матриця фундаментальних розв'язків така, що

$$\begin{gathered} \frac{dX(t,\tau)}{dt} = A(t) X(t,\tau); \\ \frac{dX(t,\tau)}{d\tau} = [X(t,\tau)]^{-1} A(\tau); \\ X(t,t) = I. \end{gathered} \tag{14.5}$$

Для розв'язання задачі (14.2), (14.3) уведемо до розгляду матричну та векторну функції $W_N(\cdot)$ та $u_N(\cdot)$ від аргументу $t$ такі, що

$$\forall t_i^* \in [t_0, T] \quad (i = \overline{0, N})$$

$$W_N(t_i^*) = W(T, t_i^*) \sqrt{\Delta t_N};$$

$$u_N(t_i^*) = u(t_i^*) \sqrt{\Delta t_N},$$

де

$$\Delta t_N = (T - t_0)/N .$$

Після чого шукане

$$u(t) = \lim_{N\to\infty} \left( \frac{\hat{u}_N(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} \right), \tag{14.6}$$

де

$$\hat{u}_N(\cdot) = \arg\min_{u_N(\cdot)} \left\| W_N(\cdot) u_N(\cdot) - X_T \right\|^2 . \tag{14.7}$$

Виходячи із загального розв'язку (3.26) рівняння (3.25), висновуємо, що

$$\hat{u}_N(\cdot) \in \Omega_u = \{u_N(\cdot) : u_N(\cdot) = W_N^+(\cdot) X_T - (I - W_N^+(\cdot) W(\cdot)) v_N(\cdot)\} , \tag{14.8}$$

де $v_N(\cdot)$ – довільна вектор-функція така, що $\forall t^* \in [t_0, T]$ $v(t^*) \in R^K$ ,

$$W_N^+(\cdot) = W_N^T(\cdot) \left( \sum_{i=1}^{N} W_N(t_i^*) W_N^T(t_i^*) \right)^+ .$$

З урахуванням співвідношень (3.33) із (14.8) висновуємо, що визначена в (14.6) функція

$$u(t) \in \Omega_u = \{u(t) : u(t) = W^T(T,t) P^+ X_T - v_1(t) + W^T(T,t) P^+ P_v\} , \tag{14.9}$$

де $v_1(t)$ – довільна вектор-функція така, що $\forall t^* \in [t_0, T]$ $v_1(t^*) \in R^K$,

$$P = \int_{t_0}^{T} W(T,\tau) W^T(T,\tau) d\tau ; \qquad P_v = \int_{t_0}^{T} W(T,\tau) v_1(\tau) d\tau .$$

За аналогією з уведеними в (14.9) матричними функціями

$$W^T(T,\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{W_N^T(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} \tag{14.10}$$

можна ввести до розгляду матричні функції

$$W^+(T,\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{W_N^T(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} (W_N(\cdot) W_N^T(\cdot))^+ , \tag{14.11}$$

псевдообернені до матричних функцій $W(T,\tau)$. У цьому випадку співвідношення (14.9) запишемо у вигляді:

$$u(t) \in \Omega_u = \{u(t) : u(t) = W^+(T,t) X_T - v_1(t) + W^+(T,t) P_v\} .$$

При цьому, визначений співвідношенням

$$\hat{u}(t) = \arg\min_{u(t)\in\Omega_u} \left\| u(t) \right\|^2 ,$$

розв’язок задачі (14.1), (14.2) буде таким:

$$u(t) = W^{+}(T,t)X_T = W^T(T,t)P^{+}X_T\,. \tag{14.12}$$

Розглядувана в (14.1), (14.2) система буде керованою (а, отже, значення $X_T$ у момент часу $T$ буде досягатися точно) при

$$\varepsilon^2 = X_T^T(I - PP^{+})X_T = 0\,. \tag{14.13}$$

У загальному ж випадку

$$\varepsilon^2 = \min_{u(t)\in\Omega_u}\left\|x(T) - X_T\right\|^2 > 0\,. \tag{14.14}$$

Визначена в (14.9) множина $\Omega_u$ даватиме однозначний псевдорозв’язок (при (14.14)), або розв’язок (при (14.13)) задачі (14.1), (14.2) при

$$\det(P_1) > 0\,,$$

де

$$P_1 = \int_{t_0}^{T} W^T(T,\tau)W(T,\tau)d\tau\,.$$

*14.2. Задачі пріоритетного керування лінійними динамічними системами неперервного аргументу.*

Загальний розв’язок задачі (14.1), (14.2) у формі (14.9), як і розв’язок (13.5) задачі (13.1), (13.2), може бути уточнений, якщо поряд з умовою (14.2) послідовно ставити та вимагати, щоб виконувались умови

$$\left\|x(\tau_{N+1-i}) - X_{N-i}\right\|^2 \to \min_{u(t)\in\Omega_{N+1-i}} \quad (i = \overline{1,N}) \tag{14.15}$$

при заданих $\tau_N,\ \ldots,\tau_1, X_{N-1},\ \ldots, X_0$ таких, що $\tau_n < \tau_{n+1}$ $(n = \overline{1,N};\ \ \tau_{N+1} \equiv T)$ та $\Omega_N = \Omega_u$, де $\Omega_u$ визначена співвідношенням (14.9), а

$$\Omega_{N-i} = Arg\min_{u(t)\in\Omega_{N+1-i}}\left\|x(\tau_{N+1-i}) - X_{N-i}\right\|^2\,.$$

При розв’язанні задачі будемо виходити із загального розв’язку (14.9) задачі (14.1), (14.2), а також із того, що

$$x(\tau_{N+1-i}) = \int_{t_0}^{\tau_{N+1-i}} W(\tau_{N+1-i},\tau)u(\tau)d\tau \quad (i = \overline{1,N})\,,$$

де функція $W(\tau_{N+1-i},\tau)$ визначатиметься співвідношеннями, аналогічними наведеним вище (14.4), (14.5).

Ураховуючи (14.2), (14.5) при $i = 1$, звузимо область $\Omega_u$.

Це можна виконати, обмежуючи довільність у виборі вектор-функції $v_1(t)$ у співвідношенні (14.9) умовою:

$$\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)v_1(\tau)d\tau - \left(\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau\right)P_N^+ \int_{t_0}^{\tau_{N+1}} W(T,\tau)v_1(\tau)d\tau =$$

$$= X_{N-1} - (\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau)P_N^+ X_N \quad , \qquad (14.16)$$

де $P_N$=$P$, а $P$ визначено вище.

Позначивши

$$W_1(T,\tau) = -\left(\int_{\tau_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau)\right)P_N^+ W(T,\tau) + W(\tau_N,\tau) \quad \tau\in[t_0,\tau_N];$$

$$W_1(T,\tau) = -\left(\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau\right)P_N^+ W(T,\tau), \; \tau\in[\tau_N,\tau_{N+1}],$$

співвідношення (14.16) запишемо у вигляді:

$$\int_{t_0}^{\tau_{N+1}} W_1(T,\tau)v_1(\tau)d\tau = X_{N-1} - (\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau)P_N^+ X_N.$$

Звідки висновуємо, що

$$v_1(t)\in \Omega_{V,N-1} =$$

$$=\left\{ v_1(t):\; v_1(t) = W_1^T(T,t)P_{N-1}^+\left( X_{N-1} - (\int_{t_0}^{\tau_N} W(\tau_N,\tau)W^T(T,\tau)d\tau)P_N^+ X_N\right) + \right.$$

$$\left. + v_2(t) - W_1^T(T,t)P_{N-1}^+ \int_{t_0}^{\tau_{N+1}} W_1(T,\tau)v_2(\tau)d\tau, \;\; \forall v_2(t^*)\in R^m \text{ при } t^*\in[t_0,T] \right\},$$

де

$$P_{N-1} = \int_{t_0}^{T} W_1(T,\tau)W_1^T(T,\tau)d\tau \,\cdot$$

Це звужує множину керуючих вектор-функцій $u(t)$ $t\in[0,\tau_N]$, визначену співвідношеннями (14.9), до такої:

$$\Omega_{N-1} = \left\{ u(t): u(t) = W^T(T,t)P_N^+ X_N + v_1(t) - W^T(T,t)P_N^+ \int_{t_0}^{T} W(N,\tau)v_1(\tau)d\tau, \right.$$

$$\left. \forall v_1(t)\in \Omega_{V,N-1},\; t\in[t_0,\tau_N] \right\}.$$

Подальше уточнення множини $\Omega_{N-1}$ керуючих функцій $u(t)$ виконаємо, уводячи до розгляду ще одну часову точку $\tau_{N-1}$, а, отже, ураховуючи ще одне обмеження типу (14.15), саме те, що відповідає значенню $i = 2$. Якщо знайдену таким чином множину функцій $v_2(t)$ позначити через $\Omega_{V,N-2}$, а множину отриманих з їх участю керуючих функцій – через $\Omega_{N-2}$ і продовжити цей процес на $i = 3, 4, \ldots, N$, то отримаємо:

$$\Omega_{N-i} = \Big\{ u(t) : u(t) = W^T(T,t)P_N^+ X_N + v_i(t) - W^T(T,t)P_N^+ \int_{t_0}^{T} W(N,\tau)v_i(\tau)d\tau,$$

$$\forall v_i(\tau) \in \Omega_{V,N-i},\ t \in [t_0, \tau_{N+1-i}] \Big\} \quad (i = \overline{0,N}),$$

де для $i = \overline{1,N}$

$$\Omega_{V,N-i} = \{ v_i(t) : v_i(t) = W_i^T(T,t)P_{N-i}^+ \left( X_{N-i} - \left( \int_{t_0}^{\tau_{N-i+1}} W(\tau_{N-i+1},\tau)W^T(T,\tau)d\tau \right) P_N^+ X_N \right) +$$

$$+ v_{i+1}(t) - W_i^T(T,t)P_{N-i}^+ \int_{t_0}^{T} W_i(N,\tau)v_{i+1}(\tau)d\tau \quad \forall v_{i+1}(t^*) \in R^m$$

при $t^* \in [t_0, T]\}$;

$$P_{N-i} = \int_{t_0}^{T} W_i(T,\tau)W_i^T(T,\tau)d\tau;$$

$$W_i(T,t) = -\left( \int_{t_0}^{\tau_{N-i+1}} W(\tau_{N-i+1},\tau)W^T(T,\tau)d\tau \right) P_N^+ W(T,t) \text{ при } t \in [\tau_{N-i+1}, T].$$

### *14.3. Моделювання неоднорідних початкових умов у задачі термінального керування лінійними динамічними системами неперервного аргументу.*

Розглянемо задачу керування системою (14.1) за умови, що

$$x^1(0) = X_0^1; \quad x(T) = X_T, \tag{14.17}$$

де $x^1(t) = col(x_1(t), ..., x_p(t))$, а $X_0^1 \in R^p$ та $X_T \in R^n$ – задані вектори. Проблема розв'язання задачі зводиться до знаходження керуючої функції $u(t)$ ($t \in [t_0, T]$) згідно з (14.2), де $x(t)$ – стан розглядуваної системи, який у цьому випадку вже не буде виражатися співвідношенням (14.3).

Як і при розв'язанні задачі керування лінійною динамічною системою (13.22) – (13.25), (13.26), будемо виходити з того, що стан $X_0^1$ розглядуваної системи моделюється дією фіктивної керуючої функції $u_0(t)$ $t \in [-T_0, 0]$ так, що

$$\left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 = \left\| \int_{-T_0}^{0} W^1(0,t)u_0(t)dt - X_0^1 \right\|^2 \to \min_{u_0(t)}, \tag{14.18}$$

де $W^1(t,\tau)$ – перші *p* компонент матричної функції $W(t,\tau)$, визначеної співвідношенням (14.4). За цих умов

$$x(t)=\int_{-T_0}^{0} W(t,\tau)u_0(\tau)d\tau+\int_{0}^{t} W(t,\tau)u(\tau)d\tau. \qquad (14.19)$$

Дискретизуючи інтервали $[-T_0,0]$ та $[0,T]$ точками $(i=\overline{-N_0-1,-1})$ та $\tau_i\in[0,T]$ $(i=\overline{0,N+1})$ такими, що $t_{i+1}-t_i=\Delta t$ $(i=\overline{-N_0-1,-1})$, $\tau_{i+1}-\tau_i=\Delta\tau$ $(i=\overline{0,N},\tau_0\equiv 0)$, та вводячи до розгляду матриці

$$\overline{W}^1(N_0,j)=W^1(0,t_j)\sqrt{\Delta t},$$
$$\overline{W}(N,j)=W(T,\tau_j)\sqrt{\Delta\tau} \qquad (14.20)$$

і вектор

$$\overline{X}=col(X_0^1,X_T),$$

задачу знаходження значень

$$col(\ (u_0(t_i)\sqrt{\Delta t},\quad i=\overline{-N_0-1,-1}\ ),\ (u\ \ (\tau_i)\sqrt{\Delta\tau},\quad i=\overline{0,N})\ )=U \qquad (14.21)$$

моделююче-керуючих функцій $u_0(t)$ $(t\in[-T_0,0])$ та $u(t)$ $(t\in[0,T])$ таких, щоб

$$\left\|x^1(0)-X_0^1\right\|^2+\left\|x(T)-X_T\right\|\to\min_U, \qquad (14.22)$$

зведемо до обернення системи алгебраїчних рівнянь $\overline{\overline{W}}U=\overline{X}$ згідно з критерієм $\left\|\overline{\overline{W}}U-\overline{X}\right\|^2\to\min\limits_U$, де, за аналогією з (13.32),

$$\overline{\overline{W}}=\begin{pmatrix}\overline{W}^1(N_0,-N_0-1) & \dots & \overline{W}^1(N_0,-1) & 0 & \dots & 0\\ \overline{W}(N_0,-N_0-1) & \dots & \overline{W}(N_0,-1) & \overline{W}(N,0) & \dots & \overline{W}(N,N)\end{pmatrix}.$$

Виходячи з розв'язку (13.35) задачі (13.33), (13.34) та прийнятих позначень, знаходимо:

$$u_0(t_j)=((\overline{W}^1)^T(N_0,j),\overline{W}^T(N_0,j))P^+(\overline{X}-W_v)+v_0(t_j)\quad(j=\overline{-N_0-1,-1}); \qquad (14.23)$$
$$u(t_j)=(0,\overline{W}^T(N,j))P^+(\overline{X}-W_v)+v(t_j)\quad(j=\overline{0,N}),$$

де $v_0(t_j)$, $v(t_j)$ – довільні вектори розмірності $m$, $P=\overline{\overline{W}}\,\overline{\overline{W}}^T$, а

$$W_v=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=-N_0-1}^{-1}\overline{W}^1(N_0,j)v_0(j)\Delta t\\ \sum\limits_{j=0}^{N}\overline{W}(N,j)v(j)\Delta\tau+\sum\limits_{j=-N_0-1}^{-1}\overline{W}(N_0,j)v_0(j)\Delta t\end{pmatrix}.$$

Звідси, уводячи до розгляду

$$\hat{u}_0(t) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{u_0(t_i)}{\sqrt{\Delta t}}, \qquad \hat{u}(t) = \lim_{N \to \infty} \frac{u(\tau_i)}{\sqrt{\Delta \tau}},$$

при $N \to \infty$, $N_0 \to \infty$ знаходимо, що моделююче-керуючі функції $\hat{u}_0(t)$ $(t \in [-T_0, 0])$ та $u(t)$ $(t \in [0, T])$ такі, що

$$(\hat{u}_0(t), \hat{u}(t)) = \arg\min_{\substack{u_0(t)\\ u(t)}} (\left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 + \left\| x(T) - X_T \right\|^2) \qquad , \tag{14.24}$$

визначаються співвідношеннями:

$$\hat{u}_0(t) \in \Omega_0 = \{u_0(t) : u_0(t) = ((W^1)^T(0,t), W^T(0,t))P^+(\bar{X} - W_v) + v_0(t)\}, \tag{14.25}$$

$$\hat{u}(t) \in \Omega_u = \{u(t) : u(t) = (0, W^T(T,t))P^+(\bar{X} - W_v) + v(t)\},$$

де $v_0(t) \in R^m$ та $v(t) \in R^m$ – довільні векторні функції, а

$$P = \begin{pmatrix} \int\limits_{-T_0}^{0} W^1(0,t)(W^1)^T(0,t)dt & \int\limits_{-T_0}^{0} W^1(0,t)W^T(0,t)dt \\ \int\limits_{-T_0}^{0} W(0,t)(W^1)^T(0,t)dt & \int\limits_{-T_0}^{0} W(0,t)W^T(0,t)dt + \int\limits_{0}^{T} W(N,t)W^T(N,t)dt \end{pmatrix}, \tag{14.26}$$

$$W_v = \begin{pmatrix} \int\limits_{-T_0}^{0} W^1(0,t)v_0(t)dt \\ \int\limits_{-T_0}^{0} W(0,t)v_0(t)dt + \int\limits_{0}^{T} W(N,t)v(t)dt \end{pmatrix}. \tag{14.27}$$

При цьому

$$\min_{\substack{u_0(t)\in\Omega_0\\ u(t)\in\Omega_n}} (\left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 + \left\| x(T) - X_T \right\|^2) = \bar{X}^T \bar{X} - \bar{X}^T P P^+ \bar{X}.$$

### *14.4. Моделювання розв’язку загальної задачі керування лінійними динамічними системами неперервного аргументу.*

Поширимо розвинутий вище підхід до моделювання початкового стану лінійної динамічної системи (14.1) у задачі (14.20) термінального керування нею на розв’язання більш загальної задачі, коли крім фінального стану

$$x(T) = X_T \tag{14.28}$$

досліджувана система повинна досягти $I$ проміжних станів

$$x(t_i) = X_i \qquad (i = \overline{1, I}). \tag{14.29}$$

Будемо виходити з того, що початковий стан системи відомий тільки за $p < n$ компонентами вектор-функції $x(t)$, тобто

$$x_j(0) = X_{0j} \qquad (j = \overline{1, p}). \tag{14.30}$$

Для розв'язання задачі вектор-функцію $x(t)$ зобразимо співвідношенням (14.19), в якому $u_0(t)$ $(t \in [-T_0, 0])$ та $u(t)$ $(t \in [0, T])$ – моделююча та керуюча функції, які знайдемо з умови:

$$\Phi_1 = \left\| x^1(0) - X_0^1 \right\|^2 + \sum_{i=1}^{I} \left\| x(t_i) - X_i \right\|^2 + \left\| x(T) - X_T \right\|^2 \to \min_{u_0(t), u(t)}, \tag{14.31}$$

де

$$x^1(t) = col(x_j(t), j = \overline{1, p}),$$

$$X_0^1 = col(X_{0j}, j = \overline{1, p}) \ .$$

Залишаючись у межах уведених у попередньому пункті позначень, висновуємо, що розв'язання задачі (14.31) еквівалентне оберненню системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-T_0}^{0} W^1(0, t) u_0(t) dt = X_0^1;$$

$$\int_{-T_0}^{0} W(0, t) u_0(t) dt + \int_{0}^{T_i} W(T_i, t) u(t) dt = X_i \quad (i = \overline{1, I+1})$$

при $X_{I+1} \equiv X_T$ такому, що

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \sum_{i=1}^{I+1} \left\| \int_{-T_0}^{0} W(0, t) u_0(t) dt + \int_{0}^{T_i} W(T_i, t) u(t) dt - X_i \right\|^2 + \\ + \left\| \int_{-T_0}^{0} W^1(0, t) u_0(t) dt - X_0^1 \right\|^2 \to \min_{u_0(t), u(t)}. \end{aligned} \tag{14.32}$$

Дискретизуючи за аналогією з (14.20), (14.21) функції $W(0, t)$, $W(T_i, t)$, $u_0(t)$ та $u(t)$, знайдемо (як і в (14.23)) значення моделююче-керуючих функцій у точках $t_i \in [-T_0, 0]$ $(i = \overline{-N-1, -1})$ та $\tau_i \in [0, T]$ $(i = \overline{0, N})$ відповідно. Звідси при $N_0 \to \infty$, $N \to \infty$ (як і в (14.24)) знайдемо множини $\Omega_0$ та $\Omega_u$ моделююче-керуючих функцій $u_0(t)$ та $u(t)$ відповідно. За аналогією з (14.24) вони будуть такими:

$$\Omega_0 = \{u_0(t) : \ u_0(t) = W_0^T(t) P^+ (\overline{X} - W_v) + v_0(t)\}, \tag{14.33}$$

$$\Omega_u = \{u(t):\ u(t) = W_u^T(t)P^+(\overline{X} - W_v) + v(t)\}\ , \qquad (14.34)$$

де $v_0(t),\ \ v(t)$ – довільні $m$-вимірні вектор-функції,

$$\overline{X} = col(X_0^1, (X_i,\ \ i = \overline{1, I+1}))\ ,$$

$$W_0^T(t) = ((W^1)^T(0,t), (W^T(0,t),\ \ i = \overline{1, I+1}))\ ,$$

$$W_u^T(t) = (0, (W_i^T(t),\ \ i = \overline{1, I+1}))\ ,$$

$$W_i^T(t) = \begin{cases} W^T(T_i, t)\ \ ,\ \text{при}\ \ 0 < t < T_i; \\ \quad 0\ \ ,\ \text{при}\ \ t > T_i, \end{cases}$$

$$P = [P_{ij}]_{i,j=0}^{i,j=I+1},$$

$$P_{00} = \int_{-T_0}^{0} W^1(0,t)(W^1)^T(0,t)dt,$$

$$P_{0j} = \int_{-T_0}^{0} W^1(0,t)W^T(0,t)dt\ \ \ (j = \overline{1, I+1}),$$

$$P_{i0} = \int_{-T_0}^{0} W^1(0,t)(W^1)^T(0,t)dt\ \ \ (i = \overline{1, I+1}),$$

$$P_{ij} = \int_{-T_0}^{0} W(0,t)W^T(0,t)dt + \int_{0}^{T} W_i(t)W_j^T(t)dt\ \ \ (i, j = \overline{1, I+1}),$$

$$W_v = col\left( \int_{-T_0}^{0} W^1(0,t)v_0(t)dt, \left( \left( \int_{-T_0}^{0} W(0,t)v_0(t)dt + \int_{0}^{T} W_i^T v(t)dt \right), i = \overline{1, I+1} \right) \right)\ \ .$$

При цьому

$$X_0 = \int_{-T_0}^{0} W(0,t)u_0(t)dt\ \ ,$$

а

$$\min_{\substack{u_0(t)\in\Omega_0 \\ u(t)\in\Omega_u}} \Phi_1 = \min_{\substack{u_0(t)\in\Omega_0 \\ u(t)\in\Omega_u}} \Phi_2 = \overline{X}^T\,\overline{X} - \overline{X}^T PP^+\,\overline{X}\ \ .$$

# § 15. Псевдообернені методи моделювання в задачах керування динамікою систем із розподіленими параметрами

### *15.1. Про доцільність поширення методів моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами на задачі керування.*

Розглянуті вище методи моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами ґрунтувалися на вмінні точно, або наближено, обертати алгебраїчні, інтегральні та функціональні співвідношення:

$$Au = y; \quad \int A(s)u(s)ds = y; \quad B(s)u = y(s), \tag{15.1}$$

де $A$ – прямокутна матриця; $u$, $y$ – вектори; $A(s)$, $B(s)$ – матричні функції; $u(s)$, $y(s)$ – векторні функції відповідних розмірностей.

З використанням цих методів розв’язувалися задачі моделювання початково-крайових умов та розподілених зовнішньодинамічних (див. § 6) збурень при наявності спостережень, або без них. При цьому спостереження за системою задавалися у вигляді (див. п. 6.1.)

$$L_\sigma^c(\partial_x, \partial_t)y(s) = Y_\sigma^c(s) \ \ (\sigma = \overline{1,R}, s \in S_c \subset S_0). \tag{15.2}$$

***Математичні постановки задач (6.11) – (6.17), що відповідають розглядуваним задачам моделювання, особливо не зміняться, якщо співвідношеннями вигляду (15.2) будуть описуватися не спостереження за системою, а бажаний стан, якого система мусить набути в певних просторово-часових точках.***

Тобто методика розв’язання задач, сформульованих у п. 6.1, буде працювати й тоді, коли співвідношення (15.2) замінимо одним із наступних:

$$L_\sigma^s(\partial_s)y(s) = Y_\sigma^s(s) \qquad (s \in S_c); \tag{15.3}$$

$$L_\sigma^x(\partial_t)y(s)|_{t=t_l} = Y_{\sigma l}^x(x) \quad (x \in S_x); \tag{15.4}$$

$$L_\sigma^t(\partial_x)y(s)|_{x=x_l} = Y_{\sigma l}^t(t) \quad (t \in [0,T]); \tag{15.5}$$

$$L_\sigma(\partial_x, \partial_t)y(s)|_{s=s_l} = Y_{\sigma l} \quad (\sigma = \overline{1,R};\ l = \overline{1,L}), \tag{15.6}$$

де $L_\sigma^S(\cdot)$, $L_\sigma^x(\cdot)$, $L_\sigma^t(\cdot)$, $L_\sigma(\cdot)$ – задані матричні диференціальні оператори, а $Y_\sigma^S(s)$, $Y_{\sigma l}^x(x)$, $Y_{\sigma l}^t(t)$, $Y_{\sigma l}$ – задані векторні функції та вектори.

З використанням розглянутих вище методик можна ставити й розв'язувати задачі визначення множини керуючих функцій $u(s)$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x)$ $(x\in\Gamma,\rho=\overline{1,\mathrm{R}_\Gamma})$ (кожної окремо, або в довільній комбінації) таких, щоб, залежно від постановки задачі:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^{(1)}=\sum_{\sigma=1}^{R}\int_{S_c}\left\|L_\sigma^s(\partial_s)y(s)-Y_\sigma^s(s)\right\|^2 ds\to\min_{U(s)};\\
&\Phi_1^{(2)}=\sum_{\sigma=1}^{R}\sum_{l=1}^{L}\int_{S_c}\left\|L_\sigma^x(\partial_t)y(s)\,|_{t=t_l}-Y_{\sigma l}^x(x)\right\|^2 dx\to\min_{U(s)};\\
&\Phi_1^{(3)}=\sum_{\sigma=1}^{R}\sum_{l=1}^{L}\int_0^T\left\|L_\sigma^t(\partial_x)y(s)\,|_{x=x_l}-Y_{\sigma l}^t(t)\right\|^2 dt\to\min_{U(s)};\\
&\Phi_1^{(4)}=\sum_{\sigma=1}^{R}\sum_{l=1}^{L}\left\|L_\sigma(\partial_x,\partial_t)y(s)\,|_{x=x_l,t=t_l}-Y_{\sigma l}\right\|^2\to\min_{U(s)};
\end{aligned}\qquad(15.7)$$

$$\Phi_2=\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}\left\|L_r^0(\partial_t)y(s)\,|_{t=0}-Y_r^0(x)\right\|^2 dx\to\min_{U(s)};\qquad(15.8)$$

$$\Phi_3=\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_\gamma dx\int_o^T\left\|L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)-Y_\rho^\Gamma(x,t)\right\|^2 dt\to\min_{U(s)},\qquad(15.9)$$

де $U(s)$ – вибірка керуючих функцій, або векторів їх значень, підібраний відповідно для кожної поставленої задачі.

*15.2. Постановки задач керування.*

Запропонуємо алгоритм розв'язання (не доводячи до кінцевого результату) задач керування динамікою систем із розподіленими параметрами, виходячи з розглядуваних вище постановок задач моделювання.

Нехай задано систему, вектор-функція стану $y(s)$ якої в обмеженій контуром $\Gamma$ просторовій області $S_0$ задовольняє співвідношення:

$$\begin{aligned}
&L_1(\partial_x,\partial_t)y(s)=L_2(\partial_x,\partial_t)u(s),\ s\in S_0\times[0,T]\ ;\\
&L_r^0(\partial_t)y(s)\,|_{t=0}=Y_r^0(x),\quad (r=\overline{1,R_0},\ x\in S_0)\,;\\
&L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\,|_{x=x^\Gamma\in\Gamma}=Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t),\quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}\ ,\ t\in[0,T]),
\end{aligned}\qquad(15.10)$$

де всі позначення відповідають прийнятим у (1.1) – (1.4). В одній із чотирьох визначених співвідношеннями (15.3) – (15.6) форм задано бажаний в області $S_\sigma$, в області $S_x$ для $t = t_l$ $(l=\overline{1,L})$, при $x=x_l$ $(l=\overline{1,L})$ для $\forall t \in [0,T]$, для $x=x_l$ та $t=t_l$ стан $Y_\sigma^S(s)$, $Y_{\sigma l}^x(x)$, $Y_{\sigma l}^t(t)$, $Y_{\sigma l}$ розглядуваної системи.

Необхідно визначити невідомі керуючі функції з вибірки

$$U(s)=\{u(s), Y_r^0(x) \quad (\mathrm{r}=\overline{1,R_0}), Y_\rho^\Gamma(x) \ (x\in\Gamma, \rho=\overline{1,R_\Gamma})\}$$

таких функцій, які б дозволяли системі (14.10) досягти одного із заданих співвідношеннями (15.3) – (15.6) станів, якщо:

1). Відома функція $u(s)$; невідомі $Y_r^0(x)$, $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ ; (15.11)

2). Відомі функції $Y_r^0(x)$; невідомі $u(s)$, $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ ; (15.12)

3). Відомі функції $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ ; невідомі $u(s)$, $Y_r^0(x)$; (15.13)

4). Відомі функції $u(s)$, $Y_r^0(x)$; невідомі $Y_\rho^\Gamma(x,t)$; (15.14)

5). Відомі функції $u(s)$, $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ ; невідомі $Y_r^0(x)$; (15.15)

6). Відомі функції $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ , $Y_r^0(x)$; невідома $u(s)$. (15.16)

Як і в п. 6.1, оберемо критерії знаходження керуючих функцій (15.11) – (15.16):

1). $\Phi_1^{(i)} \to \min\limits_{Y_r^0(x), Y_\rho^\Gamma(s)}$ ; (15.17)

2). $\Phi_1^{(i)} + \Phi_2 \to \min\limits_{u(s), Y_\rho^\Gamma(s)}$ ; (15.18)

3). $\Phi_1^{(i)} + \Phi_3 \to \min\limits_{u(s), Y_r^0(x)}$ ; (15.19)

4). $\Phi_1^{(i)} + \Phi_2 \to \min\limits_{Y_\rho^\Gamma(s)}$; (15.20)

5). $\Phi_1^{(i)} + \Phi_3 \to \min\limits_{Y_r^0(s)}$; (15.21)

6). $\Phi_1^{(i)} + \Phi_2 + \Phi_3 \to \min\limits_{u(s)}$, (15.22)

де $i=\overline{1,4}$ , $\Phi_1^{(i)}$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ визначені співвідношеннями (15.7) – (15.9).

### *15.3. Про особливості розв'язання задач керування динамікою систем із розподіленими параметрами.*

Визначені співвідношеннями (15.11) – (15.22) задачі керування системою (15.10) подібні до задач (6.4) – (6.17) моделювання динаміки системи (15.10) при наявності спостережень за нею. Тому, як і в (6.4) – (6.17), поставлені вище задачі керування можна звести до обернення матричних інтегрально-функціональних співвідношень

$$\int \left\| \int D(s-s')\bar{u}(s')ds' - \bar{y}(s) \right\|^2 ds \to \min_{U(s)}, \qquad (15.23)$$

від яких дискретизацією за штрихованими та нештрихованими координатами легко перейдемо до співвідношень вигляду (15.1).

Компоненти $U(s), \bar{u}(s), \bar{y}(s)$ співвідношення (15.23) будуть визначатися згідно з (6.24) – (6.29), якщо замість

$$col(\ Y_\sigma^c(s),\ \sigma = \overline{1, R_0}\ )$$

у визначенні векторної функції $\bar{y}(s)$ покласти

$$\begin{aligned}
&col(Y_\sigma^s(s), \sigma = \overline{1,R}) \quad (s \in S_0),\\
&col(col(Y_{\sigma l}^x(x), l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R}) \quad (x \in S_x),\\
&col(col(Y_{\sigma l}^t(t), l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R}) \quad (t \in [0,T]),\\
&col(col(Y_{\sigma l}(x), l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R})
\end{aligned} \qquad (15.24)$$

для задач керування, визначених з урахуванням $\Phi_1^{(i)}$ ($i=\overline{1,4}$) відповідно. Зміняться й блоки $d_{ij}(s-s')$ ($j=\overline{1,3}$) матричної функції $D(s-s')$, визначеної в (6.31).

При цьому

$$d_{ij}(s-s')=col\,(L_\sigma^s(\partial_s)G(s-s'), \sigma = \overline{1,R}) \quad (s \in S_\sigma);$$

$$d_{ij}(s-s')=col\,((L_\sigma^x(\partial_t)G(s-s')|_{t=t_l}, l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R}) \ (x \in S_x);$$

$$d_{ij}(s-s')=col\,((L_\sigma^t(\partial_x)G(s-s')|_{x=x_l}, l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R}) \quad (\mathrm{t} \in [0,T]) \ ;$$

$$d_{ij}(s-s')=col\,((L_\sigma(\partial_x,\partial_t)G(s-s')|_{x=x_l;t=t_l}, l = \overline{1,L}), \sigma = \overline{1,R}) \qquad (15.25)$$

для $i$=1,2,3,4 у задачах (15.17) – (15.22) відповідно. Як і в (6.30), у (15.25) $G(s-s')$ – матрична функція Гріна, а $s' \in S_0 \times [0,T]$ при $j=1$; $s' \in S_0^\infty = S_0 \times (-\infty, 0]$ при $j=2$; $s' \in S_\infty^T = (R^\nu \setminus S_0) \times [0,T]$ при $j=3$.

Виконуючи дискретизацію співвідношень (15.23), як це було зроблено в пп. 6.3 – 6.5, задачі керування системою (15.10) зведемо до задач обернення співвідношень (15.1), розв'язувати які ми вміємо.

### *15.4. Задачі термінального керування динамікою систем із розподіленими параметрами.*

Окремим випадком розглянутих вище задач (15.3) – (15.6) керування системою (15.10) є дві задачі термінального керування, в яких для моменту часу $t = T$ :

$$L_\sigma(\partial_s)y(s)|_{t=T}=Y_\sigma(x) \qquad (\sigma=\overline{1,R}); \tag{15.26}$$

$$L_\sigma(\partial_s)y(s)|_{x=x_l\ ,\ t=T}=Y_{\sigma l} \qquad (l=\overline{1,L}\ ;\sigma=\overline{1,R}). \tag{15.27}$$

Як і в загальній задачі керування, станів $Y_\sigma(x)$, $Y_{\sigma l}$ можна досягти (точно, або наближено) однією з описаних у (15.11) – (15.16) комбінацій керуючих функцій $U(s)$.

Ураховуючи, що розв’язок задач (15.26), (15.27) еквівалентний розв’язку задач

$$\sum_{\sigma=1}^{R}\int_{S_0}\left\|L_\sigma(\partial_s)y(s)|_{t=T} - Y_\sigma(x)\right\|^2 dx \to \min_{U(s)}\ ; \tag{15.28}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{R}\sum_{l=1}^{L}\left\|L_\sigma(\partial_s)y(s)|_{x=x_l,t=T} - Y_{\sigma l}\right\|^2 \to \min_{U(s)}\ , \tag{15.29}$$

проблему їх розв’язання зведемо до задачі обернення матричного інтегрально-функціонального співвідношення (15.23), в якому $D(s\text{-}s')$, $U(s)$, $\bar{u}(s)$, $\bar{y}(s)$ визначаються дещо зміненими співвідношеннями (6.24) – (6.31). Ці зміни полягають у тому, що, як і вище:

1) вектор-функція $col(Y_\sigma^c(s), \sigma=\overline{1,R_0})$ у (6.24) – (6.29) замінюється на $col(Y_\sigma(x), \sigma=\overline{1,R})$ та $col((Y_{\sigma l}, l=\overline{1,L}), \sigma=\overline{1,R})$ для задач (15.28) та (15.29) відповідно;

2) блоки $dij(s\text{-}s')$ матричних функцій $D(s\text{-}s')$ у (6.31) замінюються на $d_{1j}(s\text{-}s')=col\,(L_\sigma(\partial_s)G(s-s')|_{t=T}, \sigma=\overline{1,R})$

та

$d_{1j}(s\text{-}\ s')=col\,((L_\sigma(\partial_s)G(s-s')|_{x=x_l,\,t=T}, l=\overline{1,L}), \sigma=\overline{1,R})$ для задач (14.28) та (14.29) відповідно.

Обертаючи дискретизовані за штрихованими й нештрихованими координатами співвідношення (15.23), отримаємо розв’язки задач (15.28), (15.29).

### *15.5. Задача термінального керування динамікою систем із розподіленими параметрами в необмеженій просторово-часовій області.*

Розглядувані у двох попередніх пунктах задачі керування системою (15.10) спрощуються в необмеженій просторово-часовій області. Враховуючи, що такі спрощення життєво виправдані й мають місце при розв'язанні практичних задач, в яких уплив початкових та крайових умов на функцію стану $y(s)$ не суттєвий, розглянемо задачу виводу точок $x_l^* \quad (l=\overline{1,L})$ системи (15.10) на момент часу $t=T$ у заданий стан $Y_l^* \quad (l=\overline{1,L})$, тобто, щоб

$$\sum_{l=1}^{L}\left\|y(x_l^*,T)-Y_l^*\right\|^2 \to \min_{u(t),t\in[0,T]} . \qquad (15.30)$$

Для розв'язання задачі (15.30) будемо виходити з того, що вектор-функцію стану $y(s)$ у розглядуваній області зміни аргументу s можна подати у вигляді:

$$y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{t}G(s-s')u(s')ds' , \qquad (15.31)$$

де $G(s- s')$ – матрична функція Гріна, а $u(s)$ – керуюча вектор-функція.

Дискретизуючи співвідношення (15.31) точками ( $x_l^*,T$ ), уведемо до розгляду матричну та векторну функції

$$G(s')=col(G(x_l^*-x',T-t'),l=\overline{1,L}) ,$$

$$Y=col(y(x_l^*,T),l=\overline{1,L}) ,$$

що дозволяє задачу (15.30) записати у вигляді:

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{t}G(s')u(s')-Y\right\|^2 \to \min_{u(s)} . \qquad (15.32)$$

Розв'язок задач типу (15.32) ми вже будували, тому, не зупиняючись на деталях, висновуємо, що

$$u(s)\in\Omega_u=\{u(s): u(s)=G^T(s)P^+(Y-P_v)+v(s)\} , \qquad (15.33)$$

де $v(s)$ – довільна інтегрована в необмеженій просторово-часовій області функція, а

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{t}G(s')G^T(s')dt';$$

$$P_v=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{t}G(s')v(s')dt'. \qquad (15.34)$$

При цьому

$$\hat{u}(s)=\arg\min_{u(s)\in\Omega_u}\left\|u(s)\right\|^2=G^T(s)P^+Y;$$

$$\varepsilon^2=\min_{u(s)\in\Omega_u}\sum_{l=1}^{L}\left\|y(x_l^*,T)-Y_l^*\right\|^2=Y^T(I-PP^+)Y.$$

Множина $\Omega_u$ , визначена згідно з (15.33), буде однозначною, якщо

$$\lim_{L_1\to\infty, L_2\to\infty} [G^T(s_l^*)G(s_m^*)]_{l,m=1}^{l=L_1, m=L_2} > 0 \quad \forall s_1^*, s_m^* \in R^{\nu+1}.$$

Виходячи з (15.33), (15.34), запишемо частинний випадок розв'язку (15.33), (15.34) задачі (15.30), який відповідає $L$=1. Для цього позначимо через $x_T$ просторову точку розглядуваної області зміни аргументу $x$, яка на момент часу $t$=$T$ мусить зайняти задане положення $Y$, або наблизитись до нього так, щоб

$$\left\| y(s_T) - Y \right\|^2 \to \min_{u(s)}, \tag{15.35}$$

де $s_T = (x_T, T)$.

Виходячи з (15.33), (15.34) множину

$$\Omega_u = Arg \min_{u(s)} \left\| y(s_T) - Y \right\|^2$$

розв'язків задачі запишемо у вигляді:

$$\Omega_u = \left\{ u(s) : u(s) = G^T(s_T, s)P^+Y + v_1(s) - G^T(s_T, s)P^+P_v \right\},$$

де $v_1(s)$ – довільна вектор-функція, розмірність якої узгоджена з розмірністю $u(s)$, $G(s, s')$ – матрична функція Гріна, а

$$P = \int_{S_0} G(s_T, s)G^T(s_T, s)ds;$$
$$P_v = \int_{S_0} G(s_T, s)v_1(s)ds,$$

де $S_0$ – область, в якій задана функція $u(s)$.

### *15.6. Задача пріоритетного керування динамікою систем із розподіленими параметрами в необмеженій просторово-часовій області.*

Розглянемо розв'язок задачі керування системою (15.10) у необмеженій просторово-часовій області за умови, що зовнішньодинамічне збурення $u(s)$ системи локалізоване в області $S_0$, а, крім умови (15.35), вимагається, щоб

$$\left\| y(s_{N+1-i}) - Y_{N-i} \right\|^2 \to \min_{u(s)\in\Omega_{N+1-i}} \quad (i = \overline{1, N}), \tag{15.36}$$

де $s_N, ..., s_1, Y_{N-1}, ..., Y_0$ – задані значення просторово-часової координати $s$ та вектора $Y$ такі, що $s_n < s_{n+1}$ ($n = \overline{1, N}$; $s_{N+1} \equiv s_T$), а $\Omega_N \equiv \Omega_u$, $\Omega_{N-i} = Arg \min_{u(t)\in\Omega_{N+1-i}} \left\| y(s_{N+1-i}) - Y_{N-i} \right\|^2$.

Покладемо, що в загальному випадку просторово-часова область дії зовнішньодинамічного збурення $u(s)$ з часом змінюється, і до моменту часу $t_{N+1-i}$ ($i=\overline{1,N}$) дорівнює $S_{N+1-i}=S(t_{N+1-i})$. З цього випливає

$$y(s_{N+1-i})=\int\limits_{S_{N+1-i}} G(s_{N+1-i},s)u(s)ds=\int\limits_{0}^{\Delta\, t_{n+1-i}} dt \int\limits_{X(t)} G(s_{N+1-i},s)u(s)ds, \qquad (15.37)$$

де $X(t)$ – область зміни просторових координат $x$ на момент часу

$$t\in[0,t_{N+1-i}].$$

Розглянемо розв'язок задачі при $N$=1, коли множина $\Omega_u$ керуючих функцій $u(s)$ визначається умовою (15.35) та однією з (при $i$=$N$=1) умов (15.36). При цьому обмежується довільність у виборі вектор-функції $v_1(s)$, оскільки в цьому випадку вона повинна задовольняти умову:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{S_N} G(s_N,s)v_1(s)ds-\\ &-\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)P_N^+\int\limits_{S_N} G(s_T,s)v_1(s)ds=\\ &=Y_{N-1}-\left(\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)ds\right)P_N^+Y_N,\end{aligned} \qquad (15.38)$$

де (як і в подальшому) інтегрування по області $S_N$ розуміється як у (15.37), а $P_N\equiv P$.

Позначивши через

$$G_1(s_T,s)=-\left(\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)ds\right)P_N^+G(s_T,s)+G(s_N,s),\quad s\in S_N;$$

$$G_1(s_T,s_T)=-\left(\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)ds\right)P_N^+G(s_T,s_T),$$

співвідношення (15.38) перепишемо у вигляді:

$$\int\limits_{S_N} G_1(s_T,s)v_1(s)ds=Y_{N-1}-\left(\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)ds\right)P_N^+Y_N.$$

Звідси висновуємо, що

$$\begin{aligned}&v_1(s)\in\Omega_{V,N-1}=\{v_1(s):\ v_1(s)=\\ &=G_1^T(s_T,s)P_{N-1}^+(Y_{N-1}-(\int\limits_{S_N} G(s_N,s)G^T(s_T,s)ds)P_N^+Y_N)+\\ &+v_2(s)-G_1^T(s_T,s)P_{N-1}^+\int\limits_{S_N} G_1(s_T,s)v_2(s)ds,\ \forall v_2(s^*)\in R^M\}\end{aligned}$$

при $s^* \in X(t) \times [0,t]$, де

$$P_{N-1} = \int\limits_{S_T} G_1(s_T, s) G_1^T(s_T, s) ds \cdot$$

Це звужує множину керуючих вектор-функцій $u(s)$, визначену раніше, до такої:

$$\Omega_{N-1} = \{u(s) : u(s) = G^T(s_T, s) P_N^+ Y_N + v_1(s) -$$
$$-G^T(s_T, s) P_N^+ \int\limits_{S_T} G(s_N, s) v_1(s) ds, \ \forall v_1(s) \in \Omega_{V,N-1}\}.$$

Подальше уточнення множини $\Omega_{N-1}$ керуючих функцій $u(s)$ виконаємо, розглядаючи ще одну точку $s_{N-1}$ та ураховуючи обмеження типу (15.36) те, що відповідає значенню $i$=2. Якщо знайдену таким чином множину функцій $v_2(s)$ позначити через $\Omega_{V,N-2}$, а множину отриманих із їх участю керуючих функцій – через $\Omega_{N-2}$ та продовжити цей рекурентний процес на $i$=3,4,...,$N$, отримаємо:

$$\begin{gathered} \Omega_{N-i} = \{u(s) : u(s) = G^T(s_T, s) P_N^+ Y_N + v_i(s) - \\ -G^T(s_T, s) P_N^+ \int\limits_{S_T} G(s_N, s) v_i(s) ds \end{gathered} \tag{15.39}$$

$$\forall v_i(s) \in \Omega_{V,N-i}, \ s \in X(t) \times [0,t]\}, \ i = \overline{1, N+1},$$

де

$$\Omega_{V,N-i} = \{v_i(s) \ : \ v_i(s) = W_i^T(s_T, s) P_{N-i}^+ (Y_{N-i} - (\int\limits_{S_{N-i+1}} G(s_{N-i+1}, s) G^T(s_T, s) ds) P_N^+ Y_N) + \tag{15.40}$$

$$+v_{i+1}(s) - G_i^T(s_T, s) P_{N-i}^+ \int\limits_{S_T} G_i(s_T, s) v_{i+1}(s) ds \ \ \forall v_{i+1}(s^*) \in R^M$$

при

$$s^* \in X(t) \times [0,t]\} \ (i = \overline{1, N}),$$

$$P_{N-i} = \int\limits_{S_T} G_i(s_T, s) G_i^T(s_T, s) ds, \tag{15.41}$$

$$G_i(s_T, s) = -(\int\limits_{S_{N-i+1}} G(s_{N-i+1}, s) G^T(s_T, s) ds) P_N^+ G(s_T, s) + G(s_{N-i+1}, s) \tag{15.42}$$

при

$$s \in X(t) \times [0, t_{N-i+1}];$$

$$G_i(s_T, s) = -(\int\limits_{S_{N-i+1}} G(s_{N-i+1}, s) G^T(s_T, s) ds) P_N^+ G(s_T, s) \tag{15.43}$$

при

$$s \in X(t) \times [t_{N-i+1}, T].$$

Співвідношення (15.39) – (15.43) цілком розв'язують задачу побудови множини керуючих функцій $u(s)$ для динамічної системи, вектор-функція станів якої задовольняє умови (15.35), (15.36).

# РОЗДІЛ 4

# ІДЕНТИФІКАЦІЙНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядаються алгоритми ідентифікації алгебраїчно перетворюючих систем із поширенням їх на задачі ідентифікації ядра матрично підсумовуючих та матрично розподіляючих систем, а далі й на інтегрально та функціонально перетворюючі системи. Пропонується алгоритм нелінійної ідентифікації ядер розглядуваних систем та оптимізаційний підхід до розв’язання проблеми. Отримані результати використовуються для ідентифікації перерізів функції Гріна початково-крайової задачі динаміки систем із розподіленими параметрами, що дозволяє спростити розглядувані раніше підходи до розв’язання прямих та обернених задач динаміки досліджуваних систем.

## § 16. Задачі ідентифікації динаміки систем із розподіленими параметрами

### *16.1. Загальна постановка задачі.*

Розглядувані вище підходи до дослідження динаміки систем із розподіленими параметрами ґрунтувалися на заміні їх диференціальних моделей (1.1) – (1.4) інтегральними моделями вигляду (1.9), (1.11) – (1.13). Псевдоінверсні методи обернення алгебраїчних, інтегральних та функціональних перетворень дозволяють виконати таку заміну (побудувати моделюючі функції в неперервному або дискретному вигляді) тільки при відомій функції (матриці) Гріна $y^{(i)}(t) \in R^p \;\; \forall \;\; t \in [0,t] \;\; (i=\overline{1,n})$ у необмеженій просторово-часовій області. Викладена ж у § 2 методика побудови функції $G(s-s')$ дозволяє виконати це для систем, динаміка яких описана вже диференціальним рівнянням вигляду (1.1).

Для більшості досліджуваних практиками процесів давно побудовані диференціальні моделі й проблем використання наведених нами підходів до моделювання їх динаміки в прямій та оберненій постановці не існує. Технічні ж процеси, які мають місце при науковому вивченні та практичній реалізації сучасних інформаційних технологій, досить часто виходять за межі моделей вигляду (1.1). Інколи досліджуваний процес настільки складний і не вивчений, що побудувати диференціальні залежності для нього або принципово неможливо, або вони будуть дуже далекими від реальності й користуватися ними буде недоцільно. Тут і потрібні не фізико-технологічні підходи до опису динаміки процесу, які ґрунтуються на математичному зображенні недостатньо вивчених, або недоступних для формалізації реальних процесів, а принципово нові методики, основані на спостереженнях за станом системи та зовнішньодинамічними умовами, в яких ця система функціонує. Тобто потрібен математичний апарат, який би міг надійно та з бажаним (або наперед відомим) ступенем точності пов'язати спостережуваний стан системи зі спостереженнями за тими фізико-технологічними факторами, які його спричиняють.

Якщо, залишаючись у межах прийнятих нами термінологій, позначити через $y(s)$ вектор-функцію стану системи в просторово-часовій області $S_0^T$, а через $u(s)$ – вектор-функцію зовнішньодинамічних впливів на цю систему, то проблема побудови такої бажаної інтегральної моделі вигляду (1.7) зведеться до знаходження перетворюючої матричної функції (функції Гріна в нашому розумінні) такої, що

$$G(s-s') \in \Omega\,, \tag{16.1}$$

де

$$\Omega = \left\{ G(s-s') : \int\limits_{S_y} \left\| \int\limits_{S_u} G(s-s')u(s')ds' - y(s) \right\|^2 ds \to \min_{G(s-s')} \right\}, \tag{16.2}$$

$S_y \in S_0^T$ та $S_u \in S_0^T$ – області, в яких виконується спостереження за станом $y(s)$ системи та вектора $u(s)$ зовнішньодинамічних впливів на неї відповідно.

На підтвердження сказаного в § 1 зауважимо, що в загальному випадку розв'язати задачу побудови множини $\Omega$ неможливо. Тому, як і при побудові та дослідженні моделей вигляду (1.9), (1.11) – (1.13), зупинимося на трьох частинних випадках поставленої задачі.

### *16.2. Проблеми ідентифікації дискретизованих інтегральних моделей динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Як і при розв'язанні (§ 3) сформульованої в § 1 загальної задачі побудови інтегральної моделі вигляду (1.9), (1.11) – (1.13), зупинимося для початку на випадку, коли вектор-функція стану $y(s)$ ($s \in S_y$) та вектор-функція $u(s)$ ($s \in S_u$) зовнішньодинамічних впливів на систему спостерігаються в скінченних множинах точок $s_l$ $(l=\overline{1,L})$ та $s'_m\,(m=\overline{1,M})$ відповідно.

У цьому випадку шукана перетворююча матрична функція $G(s-s')$ вироджується в матрицю $G=[G(s_l-s'_m)]_{l,m=1}^{l=M,m=M}$, блоки-елементи $g_{lm}$ $(l=\overline{1,L},\ m=\overline{1,M})$ якої знаходяться з умови, щоб

$$\sum_{l=1}^{L}\left[\sum_{m=1}^{M} g_{lm}u(s'_m)\Delta s_m - y(s_l)\right]^2 \to \min_{g_{\ell m}}, \tag{16.3}$$

де $\Delta s_m = s_{m+1}-s_m$ – крок дискретизації області $S_u$. Позначивши через $n=\overline{1,N}$ номер спостереження за системою та вводячи до розгляду вектори

$$u^{(n)} = col(u_m^{(n)}, m=\overline{1,M})\ ,$$
$$y^{(n)} = col(y_l^{(n)}, l=\overline{1,L})\ ,$$

де $u_m^{(n)} = u(s'^{(n)}_m)\Delta s_m,\ y_l^{(n)} = y(s_\ell^{(n)})$ для $n=\overline{1,N}$, задачу (16.3) знаходження елементів матриці $G$ замінимо такою:

$$\sum_{n=1}^{N}\left\| Gu^{(n)} - y^{(n)}\right\|^2 \to \min_G\ . \tag{16.4}$$

Задача (16.4) побудови матриці $G$ значень перетворюючої матричної функції $G(s-s')$ значно простіша від задачі (16.1), (16.2) побудови множини $\Omega$ самих матричних функцій $G(s-s')$. Вона може бути розв’язана з використанням методів лінійної алгебри, покладених у основу побудови (§ 3) дискретизованого варіанту інтегральної моделі динаміки розглядуваних систем. Дійсно, ідентифікаційна задача (16.4) еквівалентна задачі обернення дослідженої нами вище матричної системи

$$GU=Y \tag{16.5}$$

згідно з критерієм

$$\left\|GU-Y\right\|^2 \to \min_G\ , \tag{16.6}$$

де

$$U = str(u^{(n)}, n=\overline{1,N})\ ,$$
$$Y = str(y^{(n)}, n=\overline{1,N})\ .$$

## *16.3. Проблеми ідентифікації систем із дискретно спостережуваною функцією стану.*

Другим частинним випадком ідентифікації задачі (16.1), (16.2) є випадок, коли, на відміну від розглядуваного вище, дискретні за $s \in S_y$ вимірювання значень $y_l = y(s_l)$ вектор-функції стану виконуються при неперервно спостережуваній вектор-функції $u(s)$ $(s \in S_u)$ зовнішньодинамічних збурень системи.

Проблема знаходження вектора $\vec{G}_1(s') = col(G_l(s'), l = \overline{1,L})$ значень $G_l(s')$ $(s \in S_y,\ l = \overline{1,L})$ матричної функції $G(s - s')$, які відповідають спостережуваним у $s_l \in S_y$ $(l = \overline{1,L})$ значенням $y_l = y(s_l)$ вектор-функції $y(s)$ $(s \in S_y)$, зведеться до обернення системи інтегральних рівнянь

$$\int_{S_u} \vec{G}_1(s')u(s')ds' = \vec{y}, \tag{16.7}$$

де $\vec{y} = col(y_l,\ l = \overline{1,L})$.

Позначивши через $N$ кількість спостережень за системою, а через $n = \overline{1,N}$ – номер такого спостереження, від системи (16.7) перейдемо до наступної:

$$\int_{S_u} \vec{G}_1(s')U(s')ds' = Y, \tag{16.8}$$

де матриця $Y$ збігається з визначеною вище, а

$$U(s') = str(u^{(n)}(s'),\ n = \overline{1,N})$$

(тут $u^{(n)}(s')$ – $n$-е вимірювання вектор-функції $u(s')$ зовнішньодинамічних збурень).

Нижче ми побудуємо та дослідимо множину

$$\Omega_1 = \{\vec{G}_1(s') : \left\| \int_{S_u} \vec{G}_1(s')U(s')ds' - Y \right\|^2 \to \min_{\vec{G}_1(s')}\} \tag{16.9}$$

псевдорозв’язків ідентифікаційних співвідношень (16.8), узагальнюючи методику розв’язання дискретизованого варіанту задачі, аналогічно тому, як у § 4 узагальнювалися результати розв’язання задач, сформульованих у § 3.

### *16.4. Проблеми ідентифікації систем із дискретно спостережуваною функцією зовнішньодинамічних впливів.*

Заслуговує на увагу ще один частинний випадок ідентифікаційної задачі (16.1), (16.2) – випадок, коли вектор-функція $y(s)$ $(s \in S_y)$ стану системи може бути спостережуваною неперервно за $s$, а вектор-функція $u(s)$ $(s \in S_u)$ зовнішньодинамічних впливів доступна для вимірювань тільки в $M$ точках $s'_m \in S_u$ $(m = \overline{1,M})$.

Проблема знаходження вектора $\overrightarrow{G_2}(s) = str(G_m(s), m = \overline{1,M})$ значень $G_m(s)$ матричної функції $G(s - s')$, яка зовнішньодинамічні впливи $u_m = u(s'_m)$ перетворює на спостережувану в $S_y$ вектор-функцію $y(s)$, зведеться до обернення системи функціональних рівнянь

$$\overrightarrow{G_2}(s)\vec{u} = y(s) \ \ (s \in S_y), \tag{16.10}$$

де $\vec{u} = col(u_m, m = \overline{1,M})$.

Вимагаючи виконання співвідношення (16.9) при кожному $n$-му ( $n = \overline{1,N}$ ) спостереженні, висновуємо, що шукана матрична вектор-функція $\overrightarrow{G}_2(s)$ задовольнятиме рівняння

$$\overrightarrow{G_2}(s)U = Y(s) \ \ (s \in S_y), \tag{16.11}$$

де матриця $U$ збігається з визначеною вище, а

$$Y(s) = str(y^{(n)}(s), \ \ n = \overline{1,N})$$

(тут $y^{(n)}(s), \ n = \overline{1,N}$ ) – $n$-$e$ вимірювання вектор-функції $y(s)$ стану системи).

Далі, з використанням методики поширення результатів розв’язання дискретного варіанту (§ 3) задачі моделювання динаміки систем із розподіленими параметрами на дискретно керовані (§ 5) системи, результати розв’язання дискретизованого варіанту (16.5) ідентифікаційної задачі (16.1), (16.2) будуть поширені й на розглядуваний тут випадок.

Буде побудована та досліджена множина

$$\varOmega_2 = \left\{ \vec{G}_2(s) : \int\limits_{S_y} \left\| \vec{G}_2(s)\vec{u} - y(s) \right\|^2 ds \to \min_{\vec{G}_2(s)} \right\} \tag{16.12}$$

псевдорозв'язків ідентифікаційних співвідношень (16.11).

### *16.5. Ідентифікаційно-псевдоінверсний підхід до побудови матричної функції Гріна динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Розглянуті вище задачі побудови матричних вектор-функцій $\vec{G}_1(s')$ та $\vec{G}_2(s)$, якщо вони будуть розв’язані, дозволяють досить близько підійти до вирішення проблеми побудови інтегральної моделі (1.7) динаміки систем із розподіленими параметрами. Це можна зробити для систем, неперервно спостережуваних як за вхідним ($u(s)$ $(s \in S_u)$), так і за вихідним зовнішньодинамічним збуренням вектору $y(s)$ $(s \in S_y)$ стану системи.

Дійсно, виконуючи спостереження:

а) за вектор-функцією $y(s)$ у точках $s_l \in S_y$ $(l = \overline{1,L})$ при заданій вектор-функції $u(s)$ $(s \in S_u)$ зовнішньодинамічних збурень;

б) за вектор-функцією $y(s)$ $(s \in S_y)$ при вимірюваній у точках $s_m \in S_u$ $(m = \overline{1,M})$ вектор-функції зовнішньодинамічних збурень можна ставити та розв’язувати задачі (16.8) – (16.9) та (16.11) – (16.12) з побудови матричних вектор-функцій $\vec{G}_1(s')$ $(s \in S_u)$ та $\vec{G}_2(s)$ $(s \in S_y)$ відповідно.

Знайдені таким чином матричні вектор-функції $\vec{G}_1(s')$ та $\vec{G}_2(s)$ є перерізами двохаргументної матричної функції $G(s - s')$, яка у співвідношенні (1.7) виконує роль матричної функції Гріна динаміки розглядуваної системи в обмеженій просторово-часовій області. Методи ж обчислювальної математики та комп’ютерної графіки дозволяють при необхідності від перерізів перейти до аналітичного та графічного зображення шуканої функції $G(s - s')$, а, отже, і виконати (точно чи з певною точністю, однозначно чи неоднозначно) побудову інтегральної моделі динаміки розглядуваної системи у вигляді (1.7).

### 16.6. *Про загальність псевдоінверсного підходу до ідентифікації систем із розподіленими параметрами*.

Сформульовані в пунктах 16.3 та 16.4 задачі (16.8) – (16.9) та (16.11) – (16.12) із знаходження матричних вектор-функцій $\vec{G}_1(s')$ та $\vec{G}_2(s)$ є допоміжними для розв'язання задачі побудови перерізів двохаргументної матричної функції Гріна $G(s-s')$ при ідентифікації інтегральної моделі динаміки систем із розподіленими параметрами. Методика розв'язання цих задач (якщо вона буде розвинута), а також розв'язки задачі (16.5), (16.6) можуть бути використані при ідентифікації трьох досить широких класів перетворювачів, а саме:

1) дискретного матричного перетворювача вигляду

$$Ax = y\ , \tag{16.13}$$

де $x \in R^M$ та $y \in R^L$ – векторні вхід та вихід системи, а $A \in R^{L\times M}$ – шукана матриця, яка виконує перетворення входу $x$ на вихід $y$ ;

2) інтегрального перетворювача вигляду

$$\int_S A(s)x(s)ds = y\ , \tag{16.14}$$

де $s \in R^n$ , $x(s) \in R^M$ для $s \in S$, $y \in R^L$ – розподілений у $S$ вхід та дискретний вихід системи, а $A(s) \in R^{L\times M}$ – шукана матрична функція, якою вхід $x(s)$ перетворюється на вихід $y$;

3) функціонального перетворювача вигляду

$$B(s)x = y(s)\ \ (s \in S), \tag{16.15}$$

де $s \in R^n$ , $x \in R^M$ та $y(s) \in R^L$ для $s \in S$ – дискретний та розподілений у $S$ вхід та вихід системи, а $B(s) \in R^{L\times M}$ – шукана матрична функція, якою вхід $x$ перетворюється на вихід $y(s)$ .

Розглядувані нижче підходи до розв'язання задач (16.5) – (16.6), (16.8) – (16.9) та (16.11) – (16.12) дозволяють розв'язати задачі ідентифікації матриці *A* та матричних функцій $A(s)$ , $B(s)$ – перетворювачів вигляду (16.13) – (16.15) згідно з критеріями:

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{N} \left\| A x^{(n)} - y^{(n)} \right\|^2 \to \min_A , \qquad (16.16)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{N} \left\| \int_S A(s) x^{(n)}(s) ds - y^{(n)} \right\|^2 \to \min_{A(s)} , \qquad (16.17)$$

$$\Phi_3 = \sum_{n=1}^{N} \left\| \int_S (B(s) x^{(n)} - y^{(n)}(s)) ds \right\|^2 \to \min_{B(s)} , \qquad (16.18)$$

де $N$ – кількість спостережень за відповідним перетворювачем, а $n$ – номер такого спостереження.

Ураховуючи сказане, а також те, що задачі (16.13) – (16.18) через свою абстрактність простіші для сприйняття, ніж сформульовані вище задачі (16.5) – (16.6), (16.8) – (16.9) та (16.11) – (16.12), при побудові ідентифікаційних методів дослідження динаміки розглядуваних систем будемо виходити з них.

Для випадків, коли точність, з якою знайдені згідно з (16.16) – (16.18) матриця $A$ та матричні функції $A(s)$, $B(s)$ задовольняють перетворенням (16.13) – (16.15), недостатня, розглянемо варіанти нелінійного (поліноміального) перетворення вхідного сигналу на вихідний. Крім матриці $A$ та матричних функцій $A(s)$, $B(s)$ побудуємо ще й поліноміальні перетворення $P(X)$, $P(X(s))$, де $X = (x^{(1)}, ..., x^{(N)})$, $X(s) = (x^{(1)}(s), ..., x^{(N)}(s))$ такі, щоб

$$\left\| A P(X) - Y \right\|^2 \le \min_A \Phi_1 ,$$

$$\left\| \int_S A(s) P(X(s)) ds - Y \right\|^2 \le \min_{A(s)} \Phi_2 ,$$

$$\int_S \left\| B(s) P(X) - Y(s) \right\|^2 ds \le \min_{B(s)} \Phi_3 ,$$

де

$$Y = (y^{(1)}, ..., y^{(N)}) ,$$

$$Y(s) = (y^{(1)}(s), ..., y^{(N)}(s)) .$$

Зауважимо, що всі ці задачі стосовно алгебраїчного перетворення вигляду (16.5) розв'язані в роботах М.Ф.Кириченка. Запропонована там методика розв'язання сформульованих вище задач і буде викладена нами далі.

# § 17. Задачі ідентифікації лінійних алгебраїчних, інтегральних та функціональних перетворень

*17.1. Постановка та план розв’язання задачі.*

Розглянемо задачу ідентифікації алгебраїчного перетворення (16.5), виходячи із заданих послідовностей

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$$

та

$$y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)},$$

де $x^{(i)} \in R^m$, $y^{(i)} \in R^p$ $(i = \overline{1,n})$ – вектори вхідних та (відповідно) вихідних сигналів. При цьому побудуємо матрицю $A \in R^{p \times m}$ таку, щоб

$$Ax^{(i)} = y^{(i)} \tag{17.1}$$

для кожного $i = \overline{1,n}$.

Для ідентифікації інтегрального та функціонального перетворень (16.8) та (16.11) відповідно такої, щоб для $n$ вимірюваних за $t \in S$ вхідних

$$x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), ..., x^{(n)}(t),$$

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$$

($x^{(i)} \in R^m$, $x^{(i)}(t) \in R^m$ $\forall i = \overline{1,n}$) та $n$ вихідних

$$y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)},$$

$$y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), ..., y^{(n)}(t)$$

($y^{(i)} \in R^p$, $y^{(i)}(t) \in R^p$ $\forall i = \overline{1,n}$) сигналів (тут і надалі розуміємо, що $t \in [0,T]$)

$$\int_0^T A(t)x^{(i)}(t)dt = y^{(i)}, \tag{17.2}$$

$$B(t)x^{(i)} = y^{(i)}(t) \tag{17.3}$$

для кожного $i = \overline{1,n}$, розглянемо дві допоміжні задачі:

а) при заданих

$$x^{(1)}(k), x^{(2)}(k), ..., x^{(n)}(k) \qquad (k = \overline{1,N}),$$

$$y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$$

($x^{(i)}(k) \in R^m$ $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall k = \overline{1,N}$; $y^{(i)} \in R^p$ $\forall i = \overline{1,n}$) побудуємо послідовність матриць

$$A(1), A(2), ..., A(N), \qquad (A(k) \in R^{p \times m} \ \forall k = \overline{1,N})$$

таких, щоб

$$\sum_{k=1}^{N} A(k)x^{(i)}(k) = y^{(i)} \tag{17.4}$$

для кожного $i=\overline{1,n}$;

б) при заданих

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)},$$

$$y^{(1)}(k), y^{(2)}(k), ..., y^{(n)}(k) \qquad (k=\overline{1,N})$$

$$(x^{(i)} \in R^m \quad \forall i=\overline{1,n};\ y^{(i)}(k) \in R^p \quad \forall i=\overline{1,n},\ \forall k=\overline{1,N})$$

побудуємо послідовність матриць

$$B(1), B(2), ..., B(N) \qquad (B(k) \in R^{p\times m} \qquad \forall k=\overline{1,N})$$

таких, щоб

$$B(k)x^{(i)} = y^{(i)}(k) \tag{17.5}$$

для кожного $i=\overline{1,n}$.

Далі розв’язки ідентифікаційних задач (17.2), (17.3) отримаємо з розв’язку допоміжних задач (17.4), (17.5) при $N \to \infty$.

*17.2. Задача ідентифікації алгебраїчних систем.*

Розглянемо розв’язок задачі (17.1). Будемо виходити з того, що вектори $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$ та $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$ утворюють матриці

$$X = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ ... \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix} \tag{17.6}$$

та

$$Y = (y^{(1)}, ..., y^{(n)}) = \begin{pmatrix} y_{(1)}^T \\ ... \\ y_{(p)}^T \end{pmatrix} \tag{17.7}$$

відповідно. Через $x_{(1)}, ..., x_{(m)}$ та $y_{(1)}, ..., y_{(p)}$ тут і надалі будемо позначати вектори, які утворюють рядки матриць. Шукану матрицю $A$ запишемо у вигляді:

$$A = (a^{(1)}, ..., a^{(m)}) = \begin{pmatrix} a_{(1)}^T \\ ... \\ a_{(p)}^T \end{pmatrix}. \tag{17.8}$$

Ця матриця визначатиметься як розв’язок матричної системи

$$AX = Y. \tag{17.9}$$

Транспонуючи (17.9), маємо:

$$X^T A^T = Y^T.$$

Звідси робимо висновок, що

$$X^T a_{(i)} = y_{(i)} \qquad (i=\overline{1,p}). \tag{17.10}$$

Кожне $i$ -те ( $i=\overline{1,p}$ ) рівняння системи (17.10) дає розклад $y_{(i)}$ -вектора за системою векторів $x_{(1)},...,x_{(m)}$ . Це значить, що проекція вектора $y_{(i)}$ ( $i=\overline{1,p}$ ) на ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$ , натягненої на вектор-рядки $x_{(1)},...,x_{(m)}$ матриці $X$ , дорівнює нулю. Інакше кажучи, необхідною й достатньою умовою існування розв'язку кожного $i$ -го рівняння системи (17.10) є така:

$$\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\, y_{(i)} = Z(X)y_{(i)} = 0 \quad (i=\overline{1,p}). \tag{17.11}$$

Звідси

$$\left\| Z(X)y_{(i)} \right\|^2 = y_{(i)}^T Z(X) y_{(i)} = 0 \qquad (i=\overline{1,p})$$

або

$$y_{(i)}^T (I_n - X^+ X) y_{(i)} = 0 \quad (i=\overline{1,p}). \tag{17.12}$$

За умови (17.13) загальний розв'язок системи (17.10) запишемо у вигляді:

$$a_{(i)} = (X^T)^+ y_{(i)} + Z(X^T)v_{(i)} \quad \forall v_{(i)} \in R^m, \forall i=\overline{1,p}. \tag{17.13}$$

Ураховуючи, що

$$Z(X^T) = I_m - (X^T)^+ X^T = (I_m - XX^+)^T = (Z(X^T))^T,$$

з (17.13) знаходимо

$$a_{((i))}^T = y_{(i)}^T X^+ + v_{(i)}^T Z(X^T).$$

Звідси

$$A = YX^+ + VZ(X^T) \qquad \forall V \in R^{p\times m}. \tag{17.14}$$

Таким чином, задача (17.1) з побудови матриці $A$ перетворення спостережуваних вхідних векторів $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(n)}$ на вихідні $y^{(1)},y^{(2)},...,y^{(n)}$ розв'язана. Необхідною й достатньою умовою істинності такого розв'язку є співвідношення (17.11). Розв'язок (17.14) буде однозначним ( $V \equiv 0$ ), якщо

$$\det(XX^T) > 0. \tag{17.15}$$

### *17.3. Задача ідентифікації дискретно підсумовуючих перетворювачів.*

Розглянемо задачу побудови матриць $A(1),A(2),...,A(N)$ , які послідовність вхідних сигналів $x^{(j)}(1),...,x^{(j)}(N)$ для всякого $j=\overline{1,n}$ згідно з (17.4) підсумовують у вихідний сигнал $y^{(j)}$ .

Для розв'язання задачі позначимо через

$$\overline{A}(\cdot) = str(A(1),..., A(N)),$$

$$\overline{x}^{(j)}(\cdot) = col(x^{(j)}(1),...,x^{(j)}(N)) \; ( j=\overline{1,n} ) \tag{17.16}$$

матричну та векторну функції дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ такі, що

$$\overline{A}(k) = A(k), \qquad \overline{x}^{(j)}(k) = x^{(j)}(k)$$

для $k = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$.

Після цього систему (17.4) стосовно $j$-го спостерігача запишемо в такому символічному зображенні:

$$\overline{A}(\cdot)\overline{x}^{(j)}(\cdot) = y^{(j)} \quad (j = \overline{1,n}). \tag{17.17}$$

Це еквівалентне матричному рівнянню

$$\overline{A}(\cdot)\overline{X}(\cdot) = Y, \tag{17.18}$$

в якому $\overline{X}(\cdot) = col(X(1),...,X(N))$ – матрична функція дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ така, що

$$\overline{X}(\cdot) = str(\overline{x}^{(j)}(\cdot), j = \overline{1,n}) = col((x_{(i)}^T(k), i = \overline{1,m}), k = \overline{1,N}); \tag{17.19}$$

$$\overline{X}(k) = X(k) \in R^{m \times n} \qquad \forall\ k = \overline{1,N},$$

а

$$Y = str(y^{(j)}\ j = \overline{1,n}) = col(y_{(i)}^T, i = \overline{1,p}) \qquad (y_{(i)} \in R^n).$$

Позначимо для зручності

$$\overline{A}(\cdot) = col(\overline{a}_{(i)}^T(\cdot), i = \overline{1,p}); \tag{17.20}$$

$$X(k) = col(x_{(i)}^T(k), i = \overline{1,m}) = str(x^{(1)}(k),...,x^{(n)}(k)),$$

де

$$\overline{a}_{(i)}^T(\cdot) = str(a_{(i)}^T(1),...,a_{(i)}^T(N)) \quad (i = \overline{1,p});$$

$$col(\overline{a}_{(1)}^T(k),..,\overline{a}_{(p)}^T(k)) = A(k) \quad (k = \overline{1,N}).$$

У термінах введених позначень транспонована ідентифікаційна система (17.18) запишеться у вигляді

$$\overline{X}^T(\cdot)\overline{a}_{(i)}(\cdot) = y_{(i)} \quad (i = \overline{1,p}). \tag{17.21}$$

Система рівнянь (17.21) матиме розв'язок тоді й тільки тоді, коли (за аналогією з (17.11), (17.12))

$$y_{(i)}^T(I_n - \overline{X}^+(\cdot)\overline{X}(\cdot))y_{(i)} = y_{(i)}^T y_{(i)} - y_{(i)}^T P_2^+ P_2 y_{(i)} = 0 \tag{17.22}$$

для всякого $i = \overline{1,p}$, де, ураховуючи (17.19) та (17.20),

$$P_2 = \overline{X}^T(\cdot)\overline{X}(\cdot) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} x_{(i)}(k)x_{(i)}^T(k) = \left[\sum_{k=1}^{N}[x^{(i)}(k)]^T x^{(j)}(k)\right]_{i,j=1}^{i,j=n}.$$

При цьому

$$\overline{a}_{(i)}(\cdot) \in \Omega_a = \left\{ \overline{a}_{(i)}(\cdot):\ \overline{a}_{(i)}(\cdot) = \overline{X}(\cdot)P_2^+ y_{(i)} + Z(\overline{X}^T(\cdot))\overline{v}_{(i)}(\cdot) \right\} \qquad (17.23)$$

для всякого $i = \overline{1, p}$, де

$$\overline{v}_{(i)}(\cdot) = col(\mathrm{v}_{(\mathrm{i})}(k), k = \overline{1, N})$$

– довільна вектор-функція дискретного аргументу $k = \overline{1, N}$ така, що

$$\overline{v}_{(i)}(k) = v_{(i)}(k) \quad \forall v_{(i)}(k) \in R^m \ (k = \overline{1, N};\ i = \overline{1, p}),$$

а

$$Z(\overline{X}^T(\cdot)) = I - \overline{X}(\cdot)\overline{X}^+(\cdot) = I - \overline{X}(\cdot)P_2^+\overline{X}^T(\cdot).$$

Транспонуючи та об'єднуючи систему розв'язків (17.23) для всіх $i = \overline{1, p}$, знаходимо, що матрична функція $\overline{A}(\cdot)$, визначена ідентифікаційним рівнянням (17.18), задовольнятиме умову

$$\overline{A}(\cdot) \in \Omega_A = \left\{ \overline{A}(\cdot):\ \overline{A}(\cdot) = YP_2^+\overline{X}^T(\cdot) + V(\cdot) - X_V P_2^+ \overline{X}^T(\cdot) \right\}, \qquad (17.24)$$

де

$$V(\cdot) = str(V(k), k = \overline{1, N})$$

– матрична функція дискретного аргументу $k = \overline{1, N}$ така, що $\forall V(k) \in R^{p\times m}$, $\overline{V}(k) = V(k)$, а

$$X_V = \overline{V}(\cdot)\overline{X}(\cdot) = \sum_{k=1}^{N} V(k)X(k) = \left[\sum_{k=1}^{N} v_{(i)}^T(k)x^{(j)}(k)\right]_{i,j=1}^{i=p;\,j=n}.$$

Для випадку, коли

$$\det(X(\cdot)X^T(\cdot)) > 0, \qquad (17.25)$$

множина $\Omega_A$ даватиме однозначний розв'язок

$$\overline{A}(\cdot) = YP_2^+\overline{X}^T(\cdot) \qquad (17.26)$$

символічного матричного рівняння (17.18).

Виконуючи у співвідношеннях (17.24) – (17.26) перехід від матричних функцій $\overline{A}(\cdot)$, $\overline{X}(\cdot)$, $\overline{V}(\cdot)$ до матриць $A(k)$, $X(k)$, $V(k)$ ($k = \overline{1, N}$), знаходимо, що елементи-матриці послідовності ідентифікаційних матриць розглядуваного нами перетворення (17.4) у загальному випадку (при виконанні (17.22)) задовольнятимуть умови:

$$A(k) \in \Omega_{Ak} = \left\{ A(k): \; A(k) = YP_2^{+} X^{T}(k) + V(k) - X_V P_2^{+} X^{T}(k) \right\}$$

$$( k = \overline{1, N} ) \qquad (17.27)$$

При

$$\det \left[ \begin{pmatrix} x(1) \\ ... \\ x(N) \end{pmatrix} \left( x^T(1)...x^T(N) \right) \right] > 0 \qquad (17.28)$$

$$A(k) = YP_2^{+} X^{T}(k) \quad ( k = \overline{1, N} ). \qquad (17.29)$$

Зауважимо, що умовою (17.25) визначається повнота матриці-функції $\overline{X}(\cdot)$. У термінах її елементів це означає, що $rank(X(k)) = m \;\; \forall \;\; k = \overline{1, N}$ .

## *17.4. Задача ідентифікації лінійно інтегруючих перетворювачів.*

Розглянемо задачу ідентифікації системи (17.2), інтегруючої розподілений на інтервалі $[0, T]$ сигнал $x^{(i)}(t)$ в $i$ -му ( $i = \overline{1, n}$ ) спостереженні за нею у вихідний вектор $y^{(i)}$ .

Для того, щоб (як було сказано в пункті 17.1) при розв'язанні задачі побудови перетворюючої матричної функції $A(t)$ скористатися результатами ідентифікації дискретно інтегруючого перетворювача (17.4), інтервал $[0, T]$ дискретизуємо точками $t_m$ $( m = \overline{1, N}, \quad N < \infty )$ такими, що $t_{m+1} - t_m = \Delta t_m$ , а також позначимо через

$$\overline{A}(\cdot) = str(A(t_m)\sqrt{\Delta t_m}, \quad m = \overline{1, N}) ,$$

$$\overline{X}(\cdot) = col(X(t_m)\sqrt{\Delta t_m}, \quad m = \overline{1, N})$$

матричні функції дискретного аргументу $m = \overline{1, N}$ такі, що $\overline{A}(m) = A(t_m)\sqrt{\Delta t_m}$ , $\overline{X}(m) = X(t_m)\sqrt{\Delta t_m}$ . Зауважимо, що тут і надалі

$$X(t) = (x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)) ,$$

$$Y = (y^{(1)}, ..., y^{(n)}) .$$

Це дозволяє розв'язок розглядуваної задачі отримати при $N \to \infty$ з розв'язку ідентифікаційної задачі

$$\overline{A}(\cdot)\overline{X}(\cdot) = Y , \qquad (17.30)$$

яку ми розв'язали в попередньому пункті.

Ураховуючи сказане із співвідношень (17.27) – (17.29), знаходимо, що в загальному випадку

$$A(t) \in \Omega_A = \left\{ \; A(t): \;\; A(t) = (Y - X_V) P_2^{+} X^{T}(t) + V(t) \; \right\}, \qquad (17.31)$$

де $V(t)$ – довільна інтегрована за $t \in [0,T]$ матриця розмірності $p \times m$, а

$$P_2 = \int_0^T X^T(t)X(t)dt, \qquad X_V = \int_0^T V(t)X(t)dt.$$

Визначена співвідношенням (17.31) матрична функція $A(t)$ буде розв'язком розглядуваної задачі тоді й тільки тоді, коли

$$y_{(i)}^T y_{(i)} - y_{(i)}^T P_2^+ P_2 y_{(i)} = 0 \qquad \forall i = \overline{1,n}. \tag{17.32}$$

За умови, що

$$\lim_{N\to\infty} \det\Big[[X(t_i)X^T(t_j)]_{i,j=1}^{i,j=N}\Big] > 0,$$

розв'язок задачі буде однозначним. При цьому

$$A(t) = YP_2^+ X^T(t).$$

*17.5. Задача ідентифікації дискретно розподіляючих перетворювачів.*

Розглянемо задачу побудови послідовності матриць $B(1),...,B(N)$, які заданий в $j$-му ( $j = \overline{1,n}$ ) вимірі вхідний сигнал $x^{(j)}$ згідно з (17.5) перетворюють у послідовність $y^{(j)}(1),...,y^{(j)}(N)$ вихідних сигналів.

Для розв'язання задачі позначимо через

$$\overline{B}(\cdot) = col(B(1),...,B(N)),$$

$$\overline{y}^{(j)}(\cdot) = col(y^{(j)}(1),...,y^{(j)}(N)) \qquad (j = \overline{1,n})$$

матричну та векторну функції дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ такі, що

$$\overline{B}(k) = B(k), \qquad \overline{y}^{(j)}(k) = y^{(j)}(k)$$

для $k = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$.

Після чого систему (17.5) стосовно $j$-го спостерігача запишемо у такому символічному зображенні:

$$\overline{B}(\cdot)x^{(j)} = \overline{y}^{(j)}(\cdot). \tag{17.33}$$

Це еквівалентно матричному рівнянню

$$\overline{B}(\cdot)X = \overline{Y}(\cdot), \tag{17.34}$$

в якому

$$\overline{Y}(\cdot) = col(Y(1),...,Y(N))$$

матрична функція дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ така, що

$$\overline{Y}(k) = Y(k) \in R^{p\times n},$$

$$Y(k) = str(y^{(j)}(k), j = \overline{1,n}) = col(y_{(i)}^T(k), i = \overline{1,p}) \ \ \forall k \in \{1,N\},$$

а

$$X = str(x^{(j)}, j = \overline{1,n}) = col(x^T_{(i)}, i = \overline{1,m}) \qquad (x_{(i)} \in R^n).$$

Покладаючи

$$B^T(k) = (b_{(1)}(k), ..., b_{(p)}(k)),\ Y^T(k) = (y_{(1)}(k), ..., y_{(p)}(k))$$

та вводячи до розгляду векторні функції

$$\bar{b}_{(i)}(\cdot) = str(b_{(i)}(k), \quad k = \overline{1,N}),$$

$$\bar{y}_{(i)}(\cdot) = str(y_{(i)}(k), k = \overline{1,N})$$

дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ такі, що

$$\bar{b}_{(i)}(k) = b_{(i)}(k) \in R^m,$$

$$\bar{y}_{(i)}(k) = y_{(i)}(k) \in R^n,$$

транспоновану ідентифікаційну систему (17.34) запишемо у вигляді

$$X^T \bar{b}_{(i)}(\cdot) = \bar{y}_{(i)}(\cdot) \quad (i = \overline{1,p}). \tag{17.35}$$

Система рівнянь (17.35) матиме розв'язок тоді й тільки тоді, коли (знову ж за аналогією з (17.11), (17.12))

$$y^T_{(i)}(\cdot) y_{(i)}(\cdot) - y^T_{(i)}(\cdot) X^T P^+ X y_{(i)}(\cdot) = 0 \quad \forall\ i = \overline{1,p}, \tag{17.36}$$

де $P = XX^T$.

При цьому

$$\bar{b}_{(i)}(\cdot) \in \Omega_b = \left\{ \bar{b}_{(i)}(\cdot):\ \bar{b}_{(i)}(\cdot) = P^+ X \bar{y}_{(i)}(\cdot) + Z(X) \bar{v}_{(i)}(\cdot) \right\} \tag{17.37}$$

для всякого $i = \overline{1,p}$, де

$$\bar{v}_{(i)}(\cdot) = str(v_{(i)}(k), \quad k = \overline{1,N})$$

– довільна вектор-функція дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ така, що

$$\bar{v}_{(i)}(k) = v_{(i)}(k)\ \forall v_{(i)}(k) \in R^m, \qquad k = \overline{1,N},\ i = \overline{1,p},$$

а

$$Z(X) = I_m - P^+ P.$$

Транспонуючи та об'єднуючи систему розв'язків (17.37) для всіх $i = \overline{1,p}$, знаходимо, що матрична функція $\bar{B}(\cdot)$, визначена ідентифікаційним рівнянням (17.33), задовольнятиме умові

$$\bar{B}(\cdot) \in \Omega_B = \left\{ \bar{B}(\cdot):\ \bar{B}(\cdot) = \bar{Y}(\cdot) X^T P^+ + \bar{V}(\cdot)(I - PP^+) \right\}, \tag{17.38}$$

де

$$\bar{V}(\cdot) = col(V(k), \quad k = \overline{1,N})$$

– довільна матрична функція дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ така, що

$$\bar{V}(k) = V(k) \in R^{p \times m}.$$

За умови, коли

$$\det(XX^T) > 0\ , \tag{17.39}$$

множина $\Omega_B$ задаватиме однозначний розв'язок

$$\overline{B}(\cdot) = \overline{Y}(\cdot)X^T P^+ \tag{17.40}$$

символічного матричного рівняння (17.33).

Виконуючи у співвідношеннях (17.38) – (17.40) перехід від матричних функцій $\overline{B}(\cdot)$, $\overline{Y}(\cdot)$, $\overline{V}(\cdot)$ до матриць $B(k)$, $Y(k)$, $V(k)$ ( $k = \overline{1, N}$ ), знаходимо, що елементи-матриці послідовності ідентифікаційних матриць розглядуваного тут перетворення (17.33) у загальному випадку (при виконанні умови (17.36) для вибраного нами $N$ ) задовольнятимуть умови

$$B(k) \in \Omega_{Bk} = \left\{\ B(k):\ B(k) = Y(k)X^T P^+ + V(k) - V(k)PP^+\ \right\} \tag{17.41}$$

для всякого $k = \overline{1, N}$ .

При $\det(XX^T) > 0$

$$B(k) = Y(k)X^T P^+ \ \ ( k = \overline{1, N} ). \tag{17.42}$$

### *17.6. Задача ідентифікації лінійно-функціональних перетворювачів.*

Розглянемо задачу ідентифікації системи (17.3), якою стаціонарний у часі вхідний вектор $x^{(i)}$ в $i$ -му ( $i = \overline{1, n}$ ) спостереженні за системою перетворюється на розподілений на інтервалі $[0, T]$ вихідний сигнал $y^{(i)}(t)$.

Для поширення результатів розглянутої тільки що ідентифікації системи (17.5) на систему (17.3) інтервал $[0, T]$ дискретизуємо точками $t_m$ $(m = \overline{1, N},\ \ N < \infty)$ такими, що $t_{m+1} - t_m = \Delta t_N$ , а також позначимо через

$$\overline{B}(\cdot) = col(B(t_m)\sqrt{\Delta t_N},\ \ m = \overline{1, N})\ ,$$

$$\overline{Y}(\cdot) = col(Y(t_m)\sqrt{\Delta t_N},\ \ m = \overline{1, N})$$

матричні функції дискретного аргументу $m = \overline{1, N}$ такі, що

$$\overline{B}(m) = B(t_m)\sqrt{\Delta t_N}\ ,$$

$$\overline{Y}(m) = Y(t_m)\sqrt{\Delta t_N}\ .$$

Це дозволяє від розглядуваної неперервної за $t$ системою (17.3) перейти до дискретної системи вигляду (17.34), ідентифікаційний розв'язок якої нами вже побудовано у вигляді (17.38). Звідси при $N \to \infty$ отримуємо, що

$$B(t) \in \Omega_B = \left\{\ B(t):\ B(t) = Y(t)X^T P^+ + V(t) - V(t)PP^+\ \right\}, \tag{17.43}$$

де $V(t)$ – довільна інтегрована за $t \in [0,T]$ матриця розмірності $p \times m$, а $P = XX^T$.

Однозначним визначений співвідношенням (17.43) розв'язок задачі, як і вище, буде за умови, що $\det(XX^T) > 0$. При цьому

$$B(t) = Y(t)X^T P^+ . \qquad (17.44)$$

Зауважимо, що множина розв'язків (17.43), або один із них у формі (17.44), будуть існувати, коли (як це випливає з (17.36))

$$y_{(i)}^T(t)y_{(i)}(t) - y_{(i)}^T(t)X^T P^+ X y_{(i)}(t) = 0 \qquad (17.45)$$

для значення $t \in [0,T]$ та $i = \overline{1, p}$.

# § 18. Ідентифікаційний підхід до побудови нелінійних інтегральних моделей динаміки систем із розподіленими параметрами

### *18.1. Постановка задачі та план її розв'язання.*

Розглянуті в попередньому параграфі методи ідентифікації лінійних алгебраїчних, інтегральних та функціональних перетворень дозволяють стосовно систем із розподіленими параметрами побудувати матрицю значень, або вектор-функції перерізів матричної функції Гріна задачі динаміки систем із розподіленими параметрами.

Однак, як це відзначалось при ідентифікації кожного з розглянутих вище допоміжних перетворень, розв'язок задачі можливий тільки при певних співвідношеннях вхідних і вихідних характеристик перетворення. Для розглядуваного нами алгебраїчного (16.13), інтегрального (16.14) та функціонального (16.15) перетворень ці співвідношення записувалися умовами (17.12), (17.32) та (17.45) відповідно.

При невиконанні вказаних умов розглядувані перетворення не ідентифікуються й побудова функції Гріна, а, отже, і лінійної інтегральної моделі у вигляді (1.8), неможлива. Вихід один: спробувати побудувати інтегральну залежність між спостережуваними вхідним та вихідним сигналами в нелінійному вигляді. Однією з форм цієї моделі може бути така:

$$\int_{S_u} G(s-s')L(u(s'))ds' = y(s) \qquad s \in S_y, \tag{18.1}$$

де вектор-функція зовнішньодинамічних збурень $u(s')$ перетворюється у вектор-функцію $y(s)$ стану системи лінійною матричною функцією $G(s-s')$ та нелінійною функцією $L(\cdot)$.

Нелінійну частину $L(u(s))$ такої моделі далі виберемо в деякому класі функцій (напр., поліноміальних, чи тригонометричних), а лінійну частину ідентифікуємо розглянутими вище методами. При цьому, як і раніше, розглянемо три випадки ідентифікації:

1) ідентифікація матриці числових значень функції $G(s-s')$ у точках $s_l \in S_y \quad (l=\overline{1,L})$ та $s_m \in S_u \quad (m=\overline{1,M})$;

2) ідентифікація стовпця-функції $\vec{G}_1(s') = col(G_l(s'), l=\overline{1,L})$ для $s' \in S_u$;

3) ідентифікація рядка-функції $\vec{G}_2(s) = str(G_m(s), m=\overline{1,M})$ для $s \in S_y$.

Як і раніше, методику розв'язання цих трьох задач проілюструємо на алгебраїчному

$$AL(x) = y\ , \tag{18.2}$$

інтегральному

$$\int_0^T A(t)L(x(t))dt = y \tag{18.3}$$

та функціональному

$$B(t)L(x) = y(t) \tag{18.4}$$

перетвореннях послідовності стаціонарних та розподілених на інтервалі $[0,T]$ вхідних сигналів

$$x^{(1)}, \ \dots \ , x^{(n)} = \{x\} \tag{18.5}$$

та

$$x^{(1)}(t), \ \dots \ , x^{(n)}(t) = \{x(t)\} \tag{18.6}$$

у послідовності стаціонарних та розподілених там же вихідних сигналів

$$y^{(1)}, \ \dots \ , y^{(n)} = \{y\} \tag{18.7}$$

та

$$y^{(1)}(t), \ \dots \ , y^{(n)}(t) = \{y(t)\} \tag{18.8}$$

відповідно. Нелінійну частину $L(\cdot)$ розглядуваних моделей виберемо в класі поліноміальних перетворень.

### *18.2. Нелінійна ідентифікація алгебраїчних систем.*

Продовжимо задачу ідентифікації залежності послідовності вихідних сигналів вигляду (18.7) від послідовності (18.5) вхідних сигналів. Побудована в п. (17.2) ідентифікаційна матриця $A$ (формули (17.14)) дозволяє поєднати ці дві послідовності лінійною алгебраїчною залежністю вигляду

$$y = Ax \tag{18.9}$$

тільки при виконанні умови (17.12). У випадку ж, коли

$$\varepsilon_s = y_{(s)}^T (I_n - X^+ X) y_{(s)} > 0 \tag{18.10}$$

хоча б для одного $s \in \{1,\dots,p\}$, множини $\{x\}$ та $\{y\}$ вимірювань вхідних та вихідних сигналів не можуть бути пов'язані лінійною моделлю вигляду (18.9). Розглянемо, за яких умов і як ці дві множини можна ідентифікувати нелінійною моделлю (18.2).

Будемо виходити з того, що за умови (18.10) вектор $y_{(s)}$ (а це записаний у вигляді вектора рядок $y_{(s)}^T$ матриці $Y = col(y_{(i)}^T, \ i = \overline{1,p})$ ) не є лінійно залежним від векторів $x_{(j)}$ $(j = \overline{1,m})$ таких, що

$$col(x_{(j)}^T, \quad j = \overline{1,m}) = X \quad .$$

Тобто вектор $y_{(s)}$ $s \in \{1, \ ... \ , p\} s$ не розкладається за системою векторів $x_{(1)}, ..., x_{(m)}$ (розмірності векторів $y_{(s)}$ та $x_{(1)}, \ ... \ , x_{(m)}$ дорівнюють $n$). Це означає, що:

1) $r = rank \quad X < m$

(система векторів $x_{(1)}, \ ... \ , x_{(m)}$ є лінійно залежною);

2) кількості векторів $x_{(1)}, \ ... \ , x_{(m)}$ замало для розкладу за ними $n$-вимірного вектора $y_{(s)}$.

Вивчимо питання ідентифікації матриці А для першого випадку. Рекомендації з розв'язання задачі для другого випадку будуть подані в наступному параграфі.

Знайдемо номер $i_*$ вектора $x_{(i_*)}$, лінійно залежного в послідовності векторів $x_{(1)}, \ ... \ , x_{(m)}$. Для цього перевіримо на рівність одиниці діагональні елементи матриці $XX^+$. Значення $i_*$, при якому

$$x_{(i_*)}^T X^+ e_{i_*} \neq 1 \ , \tag{18.11}$$

де $e_{i_*}$ – одиничний орт з $R^m$, і визначить номер шуканого вектора $x_{(i_*)}$ ($x_{(i_*)}^T$ – рядки матриці $X$).

Ураховуючи, що

$$x_{(i_*)}^T = e_{i_*}^T X \ , \qquad X^+ = (X^T X)^+ X^T \ ,$$

співвідношення (18.11) запишемо в еквівалентному вигляді:

$$x_{(i_*)}^T (X^T X)^+ x_{(i_*)} \neq 1. \tag{18.12}$$

Виконання (18.11), що еквівалентно (18.12), хоча б для одного $i_* \in \{\overline{1, m}\}$ говорить про те, що серед $m$ спостерігачів вхідного сигналу $x^{(j)}$ $(j = \overline{1, n})$ один із них (спостерігач $i_*$) дає інформацію не нову, оскільки хоча б частина цієї інформації залежить від інформації, яку дають інші спостерігачі. Покращимо інформацію $x_{(i_*)}$ цього спостерігача, зменшуючи її долю у складі вектора $y_{(s)}$ для визначеного співвідношенням (18.10) $s \in \{\overline{1, p}\}$ .

У нас така інформація визначається величиною

$$\varepsilon_s^2 = \left\| Z(X) y_{(s)} \right\|^2$$

– квадратом проекції вектора $y_{(s)}$ на ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$, натягненої на вектор-рядки матриці $X$ .

При цьому можливі два випадки:

1) величина $\varepsilon_s^2 > 0$ для певного $s \in \{\overline{1,p}\}$ при виконанні (18.11) хоча б для одного $i_* \in \{\overline{1,m}\}$;

2) величина $\varepsilon_s^2 > 0$ для певного $s \in \{\overline{1,p}\}$, але (18.11) не виконується ні при якому $i_* \in \{\overline{1,m}\}$.

Другий випадок – це відкладений до наступного параграфу випадок, коли

$$rank \quad X = m \quad \text{і} \quad m < n.$$

На першому випадку зупинимось детальніше.

Величину

$$\varepsilon_s^2 = \left\| \Pr_{\overline{L(x)}} y_{(s)} \right\|^2 \quad ( \ s \in \{\overline{1,p}\})$$

інформації, яка не є лінійно залежною від потоку $\{x\}$ вхідної інформації системи, компенсуємо, розкладаючи її за системою векторів

$$x_{(i_*)}^{2\otimes}, \ \dots \quad , x_{(i_*)}^{k_*\otimes},$$

побудованих декартовим добутком

$$x_{(i_*)}^{j\otimes} = \underbrace{x_{(i_*)} \dots \ x_{(i_*)}}_{j-раз}$$

$x_{(i_*)}$ -вектора з ненульовими проекціями

$$Z(X) x_{(i_*)}^{j\otimes} \qquad (j = \overline{2, k_*})$$

їх у ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$. Значення $k_*$ виберемо з умови, щоб система векторів $x_{(i_*)}^{2\otimes}, \ \dots \quad , x_{(i_*)}^{k_*\otimes}$ була максимально повною, тобто, щоб

$$rank \quad (Z(X)(x_{(i_*)}^{2\otimes} \vdots \ \dots \ \vdots x_{(i_*)}^{k_*\otimes} \vdots x_{(i_*)}^{(k_*+1)\otimes}) = k_* - 1 \quad . \tag{18.13}$$

Інакше кажучи, будемо вимагати, щоб

$$\sum_{j=2}^{k_*} x_{(i_*)}^{j\otimes} c_j = Z(X) y_{(s)} \quad , \tag{18.14}$$

де $c_j$ – невідомі поки що константи.

Записуючи (18.14) у вигляді

$$X_{(i_*)} c = Z(X) y_{(s)} \quad , \tag{18.15}$$

де

$$X_{(i_*)} = (x_{(i_*)}^{2\otimes} \vdots \; \dots \; \vdots x_{(i_*)}^{k_* \otimes}) \ ,$$

$$c = col(c_2, \qquad \dots, c_{k_*}) \ ,$$

знаходимо, що

$$c = (X_{(i_*)})^{+} Z(X) y_{(s)} \ . \tag{18.16}$$

Лінійною комбінацією

$$[\sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{(i_*)}^{j\otimes}]^T \tag{18.17}$$

замінимо $x_{(i_*)}^T$ -рядок у матриці $X$ .

Якщо

$$y_{(s)}^T (I_n - \tilde{X}^{+} \tilde{X}) y_{(s)} = 0 \ , \tag{18.18}$$

де

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \cdots \\ x_{(i_*-1)}^T \\ \sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{(i_*)}^{j\otimes} \\ x_{(i_*+1)}^T \\ \cdots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix} , \tag{18.19}$$

то шукане нелінійне перетворення $L(x)$ вхідного вектора $x^{(i)} = col(x_j^{(i)}, \quad j = \overline{1, m})$ ( $i$ -те спостереження) матиме вигляд

$$L(x^{(i)}) = L \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \cdots \\ x_{i_*-1}^{(i)} \\ x_{i_*}^{(i)} \\ x_{i_*+1}^{(i)} \\ \cdots \\ x_m^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \cdots \\ x_{i_*-1}^{(i)} \\ \sum_{j=2}^{k_*} c_j [x_{i_*}^{(i)}]^j \\ x_{i_*+1}^{(i)} \\ \cdots \\ x_m^{(i)} \end{pmatrix} . \tag{18.20}$$

Лінійна ж частина (матриця $A$ ) розглядуваної нами моделі згідно з (17.14) буде такою:

$$A = Y\tilde{X}^{+} + V(I_m - \tilde{X}\tilde{X}^{+}) \ , \qquad (18.21)$$

де $V$ – довільна матриця розмірності $p \times m$, а

$$Y = str(y^{(1)}, \ ..., y^{(n)}) \ .$$

Тобто математична модель, якою в цьому випадку пов'язаний вхідний вектор $x = (x_1, \ ..., x_m)^T$ з вихідним вектором $y = (y_1, \quad ..., y_p)^T$, матиме вигляд

$$y = A\tilde{x} \ , \qquad (18.22)$$

де

$$\tilde{x} = col(x_1, \ ..., x_{i_*-1}, \sum_{j=2}^{k_*} c_j x_{i_*}^j, x_{i_*+1}, \ ..., x_m).$$

Якщо після заміни $i_*$-рядка лінійною комбінацією (18.17) виявиться, що $\varepsilon_s^2 > 0$ при тому ж або іншому $s \in \{\overline{1, p}\}$, то описану нами процедуру з перетворення матриці вхідних сигналів слід повторити спочатку, обравши згідно з (18.11), (18.12) нове значення $i_*$.

Унаслідок повторення можливе наступне:

1) $rank \ \ X$ стане рівним $m$ – усі рядки матриці $X$ стануть лінійно незалежними й далі нічого міняти; у цьому випадку запропонованим підходом точно ідентифікувати розглядувані вхідні та вихідні сигнали неможливо й треба перейти до побудови наближеної моделі (див. наступний параграф);

2) які б перетворення $i_*$-рядків матриці $X$ ми не виконували, створювані нами вектори $x_{(i_*)}^{j\otimes} \quad (j = \overline{2, k_*})$ не виходять за межі лінійної оболонки $L(X)$, тобто

$$Z(X)x_{(i_*)}^{j\otimes} = 0 \qquad \forall \ \ j = \overline{2, k_*};$$

у цьому випадку описаний підхід до ідентифікаційної побудови моделі безрезультатний.

### *18.3. Нелінійна ідентифікація дискретно підсумовуючих перетворювачів.*

Як і в п. 17.3, процедуру нелінійних перетворень алгебраїчного перетворювача вигляду (18.9) поширимо на дискретно підсумовуючу систему, яка послідовність вхідних сигналів $x^{(j)}(1), \quad ..., x^{(j)}(N)$ для $j = \overline{1, n}$ підсумовує у вихідний сигнал $y^{(j)} \in R^p$ так, що

$$y^{(j)} = \sum_{k=1}^{N} A(k) x^{(j)}(k) \ . \qquad (18.23)$$

Розглянутий у п. 17.3 алгоритм знаходження послідовності перетворюючих матриць $A(1),\ ...,\ A(N)$ працює тільки при виконанні умови (17.22). У випадку ж, коли

$$\varepsilon_s^2 = y_{(s)}^T y_{(s)} - y_{(s)}^T P_2^+ P_2 y_{(s)} > 0, \qquad (18.24)$$

де

$$P_2 = [\sum_{k=1}^{N} [x^{(i)}(k)]^T x^{(j)}(k)]_{i,j=1}^{i,j=n},$$

хоча б для одного $s \in \{1,\ ...,\ p\}$, множини значень вхідних та вихідного параметрів не можуть бути пов'язані лінійною моделлю вигляду (18.23).

Будемо виходити з того, що вектор $y_{(s)}$, який фігурує в умові (18.24), є записаний у вигляді стовпця рядок $y_{(s)}^T$ матриці

$$Y = str(y^{(j)},\quad j = \overline{1,n})$$

такої, що згідно з (18.23)

$$Y = \overline{A}(\cdot)\overline{X}(\cdot)\ , \qquad (18.25)$$

де, як і в § 16,

$$\overline{A}(\cdot) = (A(1),\ ...,\ A(N)),$$

$$\overline{X}(\cdot) = col(X(1),\ ...,\ X(N)),$$

$$\overline{A}(k) = A(k), \qquad \overline{X}(k) = X(k) \qquad \forall\ \ k = \overline{1,N},$$

$$X(k) = str(x^{(j)}(k),\quad j = \overline{1,n})\ .$$

Покладаючи, як і в (17.20),

$$\overline{A}(\cdot) = col(\overline{a}_{(i)}^T(\cdot),\quad i = \overline{1,p}),$$

за аналогією з (17.21) систему (18.25) запишемо у вигляді

$$\overline{X}^T(\cdot)\overline{a}_{(s)}(\cdot) = y_{(s)} \qquad (s = \overline{1,p})\ , \qquad (18.26)$$

або, що еквівалентно,

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_{(i)}(\cdot)[\overline{a}_{(s)}(\cdot)]_i = y_{(s)} \qquad (s = \overline{1,p})\ , \qquad (18.27)$$

де

$$str(\overline{x}_{(i)}(\cdot),\quad i = \overline{1,m}) = \overline{X}^T(\cdot)\ ,$$

$$col([\overline{a}_{(s)}(\cdot)]_i,\quad i = \overline{1,m}\ ) = \overline{a}_{(s)}(\cdot)\ .$$

Ураховуючи, що умова (18.24) є умовою несумісності системи (18.26) з її еквівалентним зображенням у вигляді (18.27), висновуємо, що в цьому випадку вектор $y_{(s)}$ не розкладається за системою векторів функцій

$\bar{x}_{(1)}(\cdot),\ ...,\ \bar{x}_{(m)}(\cdot)$ . Тобто за умови (18.24) хоча б один із векторів-функцій $\bar{x}_{(1)}(\cdot),\ ...,\ \bar{x}_{(m)}(\cdot)$ є лінійно залежним від інших. Номер такої вектор-функції за аналогією з (18.11) визначимо умовою:

$$\bar{e}_i^T(\cdot)\bar{X}(\cdot)P_2^+\bar{X}^T(\cdot)\bar{e}_i(\cdot) \neq 1 \qquad i \in \{\overline{1,m}\}, \tag{18.28}$$

де $\bar{e}_i(\cdot)$ – стовпець-функція дискретного аргументу $k = \overline{1,N}$ така, що

$$\bar{e}_i(k) = e_i \qquad \forall \quad k \in \{\overline{1,N}\} \tag{18.29}$$

(як і вище, тут $e_i$ – $i$ -ий орт з $R^m$ ).

Ураховуючи (18.29), умову (18.28) запишемо у вигляді

$$\xi_{(i)}^T P_2^+ \xi_{(i)} \neq 1 \ , \tag{18.30}$$

де

$$\xi_{(i)} = \sum_{k=1}^{N} x_{(i)}(k) \quad .$$

Виконання (18.30) хоча б для одного $i_* \in \{\overline{1,m}\}$ еквівалентне тому, що серед $m$ спостерігачів вхідного сигналу $x^{(j)}(k) \quad (j = \overline{1,m}\ ,\ \ k = \overline{1,N})$ один із них (спостерігач $i_*$ ) дає інформацію не нову, оскільки хоча б частина її залежить від інформації інших спостерігачів. Як і вище, інформація ця визначається величиною $\varepsilon_s^2$ , зміст якої в термінах розкладу (18.26) – квадрат проекції вектора $y_{(s)}$ на ортогональне доповнення $\overline{L(\bar{X}(\cdot))}$ до лінійної оболонки $L(\bar{X}(\cdot))$ , натягненої на вектор-рядки функції $\bar{X}(\cdot)$ . Тобто

$$\varepsilon_s^2 = \left\| Z(\bar{X}(\cdot))y_{(s)} \right\|^2 .$$

Розглянемо випадок, коли $\varepsilon_s^2 > 0$ для певного $s \in \{\overline{1,p}\}$ при знайденому згідно з (18.30) номеру $i_*$ лінійно залежного серед $\bar{x}_{(i)}(\cdot) \quad (i = \overline{1,m})$ рядка-функції $\bar{x}_{(i_*)}(\cdot)$ . Випадок, коли співвідношення (18.30) не виконується ні при якому $i \in \{\overline{1,m}\}$ , розглянемо в наступному параграфі.

Для компенсації $\mathrm{Pr}_{\overline{L(\bar{X}(\cdot))}}\, y_{(s)}$ , яка не розкладається за системою вектор-функцій $\bar{x}_{(1)}(\cdot),\ ...,\ \bar{x}_{(m)}(\cdot)$ , доповнимо її вибіркою вектор-функцій $\bar{x}_{(i_*)}^{2\otimes}(\cdot),\ ...,\ \bar{x}_{(i_*)}^{k_*\otimes}(\cdot)$ , лінійно незалежних від $\bar{x}_{(i)}(\cdot) \quad (i \in \{\overline{1,m}\})$ з ненульовими проекціями

$$Z(\bar{X}(\cdot))\bar{x}_{(i_*)}^{j\otimes}(\cdot) > 0 \qquad (j = \overline{2,k_*}) \tag{18.31}$$

в ортогональне доповнення $\overline{L(\bar{X}(\cdot))}$ до лінійної оболонки $L(\bar{X}(\cdot))$. При цьому, покладаючи

$$\bar{x}_{(i*)}^{s\otimes}(\cdot) = \bar{x}_{(i*)}(\cdot)\underbrace{\otimes\ldots\otimes}_{s-раз}\bar{x}_{(i*)}(\cdot)$$

(тут $\otimes$ – операція декартового добутку), число $k_*$ визначимо з умови, щоб

$$rank \quad (Z(\bar{X}(\cdot))(X^{(i*)}(j) \vdots x_{(i*)}^{(k_*+1)\otimes}(j))) = k_* - 1 \ , \qquad (18.32)$$

де

$$X^{(i*)}(j) = (x_{(i*)}^{2\otimes}(j) \vdots \ \ldots \ \vdots x_{(i*)}^{k_*\otimes}(j))$$

$$Z(\bar{X}(\cdot)) = I_n - P_2^{+}P_2 \ ,$$

а $j \in \{\overline{1,N}\}$.

Лінійною комбінацією векторів $(x_{(i*)}^{2\otimes}(k),...,x_{(i*)}^{k_*\otimes}(k)) \quad (k=\overline{1,N})$ замінимо компоненти $x_{(i*)}(k) \quad (k=\overline{1,N})$ вектор-функції $\bar{x}_{(i*)}(\cdot)$. Покладемо

$$x_{(i*)}(k) = \sum_{j=2}^{k_*} c_j^{(i*)}(k) x_{(i*)}^{j\otimes}(k) = X^{(i*)}(k)c^{(i*)}(k) \ , \qquad (18.33)$$

вектор $c^{(i*)}(k) = (c_2^{(i*)}(k),...,c_{k_*}^{(i*)}(k))^T \quad (k=\overline{1,N})$ при цьому визначаючи з умови, щоб

$$\sum_{k=1}^{N} X^{(i*)}(k)c^{(i*)}(k) = Z(\bar{X}(\cdot))y_{(s)} \ . \qquad (18.34)$$

Позначивши через $\bar{c}^{(i*)}(\cdot) \stackrel{\Delta}{=} col(c^{(i*)}(k), \quad k=\overline{1,N})$ вектор-функцію дискретного аргументу $k=\overline{1,N}$ таку, що

$$\bar{c}^{(i*)}(k) = c^{(i*)}(k) \ ,$$

співвідношення (18.34) перепишемо у вигляді

$$\bar{X}^{(i*)}(\cdot)c^{-(i*)}(\cdot) = Z(\bar{X}(\cdot))y_{(s)}, \qquad (18.35)$$

де

$$\bar{X}^{(i*)}(\cdot) = (X^{(i*)}(1),...,X^{(i*)}(N)).$$

Після обернення (18.35) знаходимо:

$$\bar{c}^{(i*)}(\cdot) = (\bar{X}^{(i*)}(\cdot))^T P_{(i*)}^{+}(Z(\bar{X}(\cdot))y_{(s)} - v_{(s)X}^{(i*)}) + \bar{v}_{(s)}^{(i*)}(\cdot) \ , \qquad (18.36)$$

де $\bar{v}_{(s)}^{(i*)}(\cdot) = col(v_{(s)}^{(i*)}(k), \quad k=\overline{1,N})$ – довільна вектор-функція дискретного аргументу $k=\overline{1,N}$ така, що $\bar{v}_{(s)}^{(i*)}(k) = v_{(s)}^{(i*)}(k) \in R^{k_*-1}$ ,

$$P_{(i*)} = \sum_{k=1}^{N} X^{(i*)}(k)[X^{(i*)}(k)]^T \quad ,$$

$$v_{(s)X}^{(i*)} = \sum_{k=1}^{N} X^{(i*)}(k) v_{(s)}^{(i*)}(k) \quad ,$$

а $X^{(i*)}(k) \quad (k = \overline{1,N})$ – компоненти вектор-функції $\overline{X}^{(i*)}(\cdot)$.

Це означає, що з урахуванням визначеної вище матриці $P_2 \in R^{n \times n}$

$$c^{(i*)}(k) = [X^{(i*)}(k)]^T P_{(i*)}^{+}[(I_n - P_2^{+} P_2) y_{(s)} - v_{(s)X}^{(i*)}] + v_{(s)}^{(i*)}(k) \,. \qquad (18.37)$$

Це дозволить змінити векторну функцію $\overline{x}_{(i)}(\cdot)$ у рівнянні (18.27), матричну функцію $\overline{X}(\cdot)$ у рівнянні (18.26), а, отже, і $X(k) \quad (k = \overline{1,N})$ у розв'язку (17.27) лінеаризованого варіанту розглядуваної задачі. При цьому

$$X(k) \stackrel{\Delta}{=} [x_{(i)}^{(j)}(k)]_{i,\, j=1}^{i=m,\; j=n}$$

заміниться на

$$X_{(*)}(k) = \left( \begin{pmatrix} x_{(1)}^{(j)}(k) \\ \dots \\ \sum\limits_{i=2}^{k*} c_i^{(i*)}(k)[x_{(i*)}^{(j)}(k)]^i \\ x_{(i*+1)}^{(j)}(k) \\ \dots \\ x_{(m)}^{(j)}(k) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,n} \right) \; (k = \overline{1,N}) \,. \qquad (18.38)$$

Зауважимо, що суттєвою у запропонованому алгоритмі покращання результатів розв'язання вихідної задачі є умова (18.31). При невиконанні (18.31) заміна (18.38) – безрезультатна. Позитивний результат, однак, може бути досягнуто при наступному значенні $i_*$ .

Проблема буде вирішена цілком, якщо набір векторів $c^{(i*)}(k) \quad (k = \overline{1,N})$, визначений згідно з (18.37), буде точно й однозначно задовольняти (18.35). Це буде за таких умов:

а) умова точності:

$$\varepsilon_{(s)}^2 = \min_{c^{(i*)}(k) \;\; (k = \overline{2,N})} \left\| \sum_{k=1}^{N} X^{(i*)}(k) c^{(i*)}(k) - Z(\overline{X}(\cdot)) y_{(s)} \right\|^2 =$$

$$= y_{(s)}^T (I_n - P_2^{+} P_2)^T (I_n - P_{(i*)} P_{(i*)}^{+})(I_n - P_2^{+} P_2) y_{(s)} = 0 \,; \quad (18.39)$$

б) умова однозначності:

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \det[[X^{(i_*)}(i)]^T X^{(i_*)}(j)]_{i,j=1}^{i=N_1,\, j=N_2} > 0\,. \qquad (18.40)$$

*18.4. Нелінійна ідентифікація лінійно інтегруючих перетворювачів.*

Виконаємо поширення процедури нелінійної ідентифікації лінійно підсумовуючого перетворювача (18.23) на лінійно інтегруючу систему

$$\int_0^T A(t)x(t)dt = y\ , \qquad (18.41)$$

проблеми лінійної ідентифікації якої розглядалися в п. 17.4 попереднього параграфу.

Покращимо розв'язок (17.31) задачі лінійної ідентифікації системи (18.41), отриманий нами в п. 17.4 у тому випадку, коли умова точності не виконується, тобто коли

$$\varepsilon_s^2 = \| \int_0^T a_{(s)}^T(t)X(t)dt - y_{(s)}^T \|^2 > 0 \qquad (18.42)$$

для деякого $s \in \{\overline{1,p}\}$ при

$$col(a_{(s)}^T(t), s=\overline{1,p}) \overset{\Delta}{=} A(t)\ ,$$

$$col(y_{(s)}^T, s=\overline{1,p}) \overset{\Delta}{=} Y\ .$$

У цьому випадку система інтегральних рівнянь

$$\int_0^T X^T(t)a_{(s)}(t)dt = y_{(s)} \qquad s \in \{\overline{1,p}\}\ ,$$

що використовується при побудові (17.31), не має точного розв'язку й причиною цього є лінійна залежність інформації $(i \in \{\overline{1,m}\})$, де

$$(x_{(1)}(t), ..., x_{(m)}(t)) \overset{\Delta}{=} X^T(t)\ ,$$

що дається принаймні одним із $m$ спостерігачів від інформації інших спостерігачів. Номер $i_*$ цього спостерігача визначимо з умови (18.30), в якій тепер

$$\xi_{(i_*)} = \int_0^T x_{(i_*)}(t)dt\ . \qquad (18.43)$$

Частка знайденого таким чином $i_*$-спостерігача в $s$-му $(s=\overline{1,p})$ виході системи визначається величиною

$$p_s = Z(X(t))y_{(s)} = (I - P_2^+ P_2)y_{(s)}\ , \qquad (18.44)$$

де

$$P_2 = \int_0^T X^T(t) X(t) dt \cdot$$

Для випадку, коли номер спостерігача $i_*$, що задовольняє (18.30), (18.43), знайдено, його вхідний сигнал $x_{(i_*)}(t)$ замінимо системою нових векторів:

$$x_{(i_*)}^{2\otimes}(t), ..., x_{(i_*)}^{k_*\otimes}(t).$$

Число $k_*$ при цьому визначимо співвідношенням

$$rank[(I - P_2^+ P_2)(X^{(i_*)}(t) \vdots x_{(i_*)}^{(k_*+1)\otimes}(t))] = k_* - 1 \qquad \forall t \in [0, T],$$

де

$$X^{(i_*)}(t) = (x_{(i_*)}^{2\otimes}(t) \vdots ... \vdots x_{(i_*)}^{k_*\otimes}(t)).$$

Лінійною комбінацією

$$\sum_{j=2}^{k_*} c_j^{(i_*)}(t) x_{(i_*)}^{j\otimes}(t)$$

побудованих таким чином векторів $x_{(i_*)}^{j\otimes}(t)$ $(j = \overline{2, k_*})$ замінимо вхідний сигнал $x_{(i_*)}(t)$. При цьому поставимо вимогу, щоб

$$\int_0^T X^{(i_*)}(t) c^{(i_*)}(t) dt = p_s, \tag{18.45}$$

де

$$c^{(i_*)}(t) = col(c_2^{(i_*)}(t), ..., c_{k_*}^{(i_*)}(t)).$$

Після обернення (18.45) за аналогією з (18.37) знаходимо

$$c^{(i_*)}(t) = [X^{(i_*)}(t)]^T P_{(i_*)}^+ [(I_n - P_2^+ P_2) y_{(s)} - \upsilon_{(s)X}] + \upsilon_{(s)}(t), \tag{18.46}$$

де $\upsilon_{(s)}(t) -$ довільна інтегрована на $[0, T]$ функція,

$$P_{(i_*)} = \int_0^T X^{(i_*)}(t) [X^{(i_*)}(t)]^T dt,$$

$$\upsilon_{s)X} = \int_0^T X^{(i_*)}(t) \upsilon_{(s)}(t) dt.$$

Це означає, що матричну функцію $X(t) \overset{\Delta}{=} [x_{(i)}^{(j)}(t)]_{i,j=1}^{i=m, j=n}$ у розв'язку (17.31) задачі лінійної ідентифікації системи (18.41) доцільно замінити на

$$X_{(*)}(t)=\left(\begin{pmatrix} x_{(1)}^{(j)}(t) \\ \ldots \\ \sum_{i=2}^{k_*} c_i^{(i_*)}(t)[x_{(i_*)}^{(j)}(t)]^i \\ x_{(i_*+1)}^{(j)}(t) \\ \ldots \\ x_{(m)}^{(j)}(t) \end{pmatrix}, j=\overline{1,n}\right). \tag{18.47}$$

Зауважимо, що заміна (18.47) буде успішною, якщо система вектор-функцій $x_{(i_*)}^{j\otimes}(t)$ $(j=\overline{2,k_*})$ (за аналогією з (18.31)) задовольнятиме умову

$$Z(X(t))x_{(i_*)}^{j\otimes}(t)>0 \tag{18.48}$$

для $j=\overline{2,k_*}$, де

$$X_x^{(j)}=\int_0^T X_{(*)}(t)x_{(i_*)}^{j\otimes}(t)dt\,.$$

За інших умов потрібно знайти нове значення $i_*$ з умов (18.30), (18.43). Це ж стосується й знайденої згідно з (18.46) вектор-функції $c^{(i_*)}(t)$, оскільки вона в загальному випадку знаходиться не точно і не однозначно.

З урахуванням сказаного робимо висновок, що розглядувана задача в цьому випадку буде розв'язана успішно, якщо

$$rank(X_{(*)}(t))=m \qquad \forall t\in[0,T] \tag{18.49}$$

або

$$\begin{aligned} &\|\int_0^T X^{(i_*)}(t)c^{(i_*)}(t)dt-\mathrm{Pr}_{\overline{L(X_{(*)}(t))}}\, y_{(s)}\|^2= \\ &=y_{(s)}^T(I_n-P_2^+P_2)^T(I_n-P_{(i_*)}P_{(i_*)}^+)(I_n-P_2^+P_2)y_{(s)}=0 \quad . \end{aligned} \tag{18.50}$$

Розв‘язок задачі буде виражатися співвідношенням (17.31) після заміни в ньому матричної функції $X(t)$ на матричну функцію $X^{(i_*)}(t)$.

Однозначність розв'язку при цьому визначається умовою

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \det\left[[X^{(i_*)}(t_i)]^T X^{(i_*)}(t_j)\right]_{i,j=1}^{i=N_1,\,j=N_2}>0 \qquad \forall t_i,t_j\in[0,T].$$

Якщо ж номер $i_*$, при якому виконуються умови (18.49) (або (18.50)), не знайдено, то (як і вище) не залишається нічого кращого, ніж зупинитися на тому $i_0\in\{\overline{1,m}\}$, при якому мінімізується кількість інформації, лінійно залежної від інформації інших спостерігачів.

*18.5. Нелінійна ідентифікація дискретно розподіляючих перетворювачів.*

Продовжимо розгляд задачі ідентифікації послідовності матриць $B(1),...,B(N)$ дискретно розподіляючого перетворювача (17.5), лінійний варіант якої розв'язано нами в п. 17.5. Зокрема, побудуємо розв'язок задачі в тому випадку, коли при заданих вхідних $x^{(i)}$ $(i=\overline{1,n})$ та вихідних $y^{(i)}(k)$ $(i=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,N})$ векторах знайдена згідно з (17.41) послідовність матриць $B(1),...,B(N)$ задовольняє співвідношення (17.5) з точністю

$$\varepsilon^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|B(k)x^{(i)}-y^{(i)}(k)\right\|^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{p}\left\|X^Tb_{(s)}(k)-y_{(s)}(k)\right\|^2>0.$$

Це означає, що хоча б при одному $s\in\{\overline{1,p}\}$ значення

$$\varepsilon_s^2=\sum_{k=1}^{N}\left\|X^Tb_{(s)}(k)-y_{(s)}(k)\right\|^2>0\ , \tag{18.51}$$

а система рівнянь

$$X^Tb_{(s)}(k)=y_{(s)}(k)\qquad (k=\overline{1,N})\ , \tag{18.52}$$

яка відповідає цьому $s$, не сумісна.

Виходячи з (18.52), висновуємо, що в цьому випадку вектор $y_{(s)}(k)$ не розкладається за системою вектор-рядків $x_{(i)}^T$ $(i=\overline{1,m})$ матриці $X$, оскільки хоча б один із них (позначимо його номер через $i_*$) є лінійно залежним від решти.

Ураховуючи, що

$$\varepsilon_s^2=\sum_{k=1}^{N}\left\|Z(X)y_{(s)}(k)\right\|^2=\sum_{k=1}^{N}\left\|\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\,y_{(s)}(k)\right\|^2\ ,$$

де $\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\,y_{(s)}(k)$ – проекція вектора $y_{(s)}(k)$ на ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$, натягненої на вектор-рядки $x_{(i)}^T$ $(i=\overline{1,m})$ матриці $X$, висновуємо, що величина $\varepsilon_s^2$ якраз і визначає ту частину вектора $y_{(s)}(k)$, яка не узгоджується із вхідною матрицею $X$.

Виходячи з цього, зменшимо величину $\varepsilon_s^2$, коректуючи значення вхідного сигналу $x_{(i_*)}$ $i_*$-го спостерігача.

Для визначення номера $i_*$ знову розглянемо значення скалярного добутку $s_i$ $i$-го рядка матриці $X$ на $i$-стовпець матриці $X^+$. Значення $i_*$, при якому

$$s_i = e_i^T X(X^T X)^+ X^T e_i \neq 1$$

і дасть нам шуканий номер.

Як і при ідентифікації алгебраїчних систем (див. п. 18.2), вхідний вектор $x_{(i_*)}$ знайденого таким чином $i_*$-спостерігача замінимо лінійною комбінацією векторів $x_{(i_*)}^{2\otimes},...,x^{k_*\otimes}$, лінійно незалежних від векторів $x_{(i)}$ $(i=\overline{1,m})$, з ненульовими проекціями

$$Z(X)x_{(i_*)}^{j\otimes} > 0 \quad (j=\overline{2,k_*}) \tag{18.53}$$

в ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$. Число $k_*$ при цьому визначимо з умови

$$rank(Z(X)(X_{(i_*)}^{\otimes} \vdots x_{(i_*)}^{(k_*+1)\otimes})) = k_* - 1, \tag{18.54}$$

де

$$X_{(i_*)}^{\otimes} = (x_{(i_*)}^{2\otimes} \vdots ... \vdots x_{(i_*)}^{k_*\otimes}).$$

З урахуванням того, що комбінація повинна компенсувати складову

$$Z(X)y_{(s)}(k)$$

векторів $y_{(s)}(k)$ для $k=\overline{1,N}$, уведемо до розгляду послідовність векторів

$$x_{(i_*)}(k) = \sum_{j=2}^{k_*} c_j^{(i_*)}(k)x_{(i_*)}^{j\otimes} = X_{(i_*)}^{\otimes} c^{(i_*)}(k) \quad (k=\overline{1,N}). \tag{18.55}$$

Вектор $c^{(i_*)}(k) = (c_2^{(i_*)}(k),...,c_{k_*}^{(i_*)}(k))^T$ $\forall k=\overline{1,N}$ при цьому визначимо з умови, щоб

$$X_{(i_*)}^{\otimes} c^{(i_*)}(k) = Z(X)y_{(s)}(k). \tag{18.56}$$

Звідси

$$c^{(i_*)}(k) \in \Omega_c = \{c^{(i_*)}(k):$$
$$c^{(i_*)}(k) = [X_{(i_*)}^{\otimes}]^T (X_{(i_*)}^{\otimes}[X_{(i_*)}^{\otimes}]^T)^+ (Z(X)y_{(s)}(k) - X_{(i_*)}^{\otimes} v_{(i_*)}(k)) + v_{(i_*)}(k)\},$$

де $v_{(i_*)}(k)$ $\forall k=\overline{1,N}$ – довільний вектор розмірності $k_*-1$. Послідовністю векторів $x_{(i_*)}(k)$ $(k=\overline{1,N})$, визначених згідно з (18.55), замінимо вектор-рядок $x_{(i_*)}^T$ матриці $X$ у рівнянні (18.52), а, отже, і в рівнянні (17.5), з якого співвідношення (18.52) отримані.

Це значить, що

$$B(k) = (Y(k)X_{(i_*)}^T(k) - V(k)P_{(i_*)}(k))P_{(i_*)}^+(k) + V(k), \tag{18.57}$$

де $V(k)$ – довільна матриця розмірності $p \times m$,

$$P_{(i*)}(k) = X_{(i*)}(k) X^T_{(i*)}(k),$$

$$X_{(i*)}(k) = \begin{pmatrix} x^T_{(1)} \\ \dots \\ x^T_{(i*-1)} \\ [\sum\limits_{j=2}^{k*} c_j^{(i*)}(k) x^{j\otimes}_{(i*)}]^T \\ x^T_{(i*+1)} \\ \dots \\ x^T_{(m)} \end{pmatrix}. \quad (18.58)$$

Результат ідентифікації буде успішним при

$$\min_{c^{(i*)}(k)\in\Omega_c} \sum_{k=1}^{N} \left\| X^{\otimes}_{(i*)} c^{(i*)}(k) - Z(X) y_{(s)}(k) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} y^T_{(s)}(k) Z(X)(I_n - X^{\otimes}_{(i*)}[X^{\otimes}_{(i*)}]^T (X^{\otimes}_{(i*)}[X^{\otimes}_{(i*)}]^T)^+) \times$$

$$\times Z(X) y_{(s)}(k) = 0.$$

У цьому випадку і $\varepsilon_s^2 = 0$. Крім того: ідентифікація буде однозначною при

$$\det([X^{\otimes}_{(i*)}]^T X^{\otimes}_{(i*)}) > 0.$$

Зауважимо, що суттєвою при такому розв'язанні задачі є умова (18.53). При невиконанні (18.53) заміна вхідної матриці $X$ матрицею $X_{(i*)}(k)$ безрезультатна. У цьому випадку слід узяти нове значення $i_*$ та повторити процедуру.

### *18.6. Нелінійна ідентифікація функціонально перетворюючих систем.*

Розглянутий вище підхід до нелінійного перетворення вхідного сигналу, використаний нами для ідентифікації алгебраїчних систем вигляду (18.9), підсумовуючих (18.23), інтегруючих (18.41) та дискретно розподіляючих (17.5) перетворювачів поширимо на досліджувану в п. 17.6 функціонально-перетворюючу систему

$$B(t)x = y(t) \quad (t \in [0,T]). \quad (18.59)$$

Ідентифікуємо матрицю $B(t) \in R^{p\times m}$ розглядуваного перетворювача за умови, що спостерігаються вектори $x^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ та $y^{(i)}(t)$ $(i = \overline{1,n})$ вхідного та вихідного сигналів у тому випадку, коли ідентифікаційний розв'язок задачі, запропонований нами в п. 17.6, не може бути побудований.

Нагадаємо, що причиною цього є несумісність хоча б однієї (номер її ми позначали через $s$)

$$X^T b_{(s)}(t) = y_{(s)}(t) \qquad s \in \{\overline{1, p}\} \tag{18.60}$$

із $p$ систем транспонованого матричного рівняння

$$B(t)X = Y(t),$$

де

$$B(t) = col(b_{(s)}^T(t),\ \ s = \overline{1, p}) \in R^{p \times m}, \quad X = col(x_{(i)}^T,\ \ i = \overline{1, m}) \quad (x_{(i)} \in R^n),$$

$$Y(t) = col(y_{(i)}^T(t),\ \ i = \overline{1, p}) \quad (y_{(i)}(t) \in R^n) \qquad \forall t \in [0, T].$$

У цьому випадку (див. (17.45))

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^2 &= \int_0^T \left\| X^T b_{(s)}(t) - y_{s)}(t) \right\|^2 dt = \\ &= \int_0^T y_{(s)}^T(t) y_{(s)}(t) dt - \int_0^T y_{(s)}^T(t) X^T P^+ X y_{(s)}(t) dt > 0. \end{aligned} \tag{18.61}$$

Уводячи, як і в п. 17.6, до розгляду матричні функції

$$\begin{aligned} \overline{B}(\cdot) &= col(B(t_k)\sqrt{\Delta t_N}, k = \overline{1, N}), \\ \overline{Y}(\cdot) &= col(Y(t_k)\sqrt{\Delta t_N}, k = \overline{1, N}), \end{aligned} \tag{18.62}$$

та відповідно векторні функції

$$\begin{aligned} \overline{b}_{(s)}(\cdot) &= str(b_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ \ k = \overline{1, N}), \\ \overline{y}_{(s)}(\cdot) &= str(y_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ \ k = \overline{1, N}) \end{aligned} \tag{18.63}$$

дискретного аргументу $k = \overline{1, N}$ такі, що

$$\overline{B}(k) = B(t_k)\sqrt{\Delta t_N}, \quad \overline{Y}(k) = Y(t_k)\sqrt{\Delta t_N},$$

$$\overline{b}_{(s)}(k) = b_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N}, \quad \overline{y}_{(s)}(k) = y_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},$$

де $t_k \quad (k = \overline{1, N})$ – точки дискретизації інтервалу $[0, T]$, а $\Delta t_k$ – крок дискретизації, від рівнянь (18.60) перейдемо до рівнянь (18.52), а від умови (18.61) – до умови (18.51).

Це означає, що для ідентифікації компонент $B(k)$ матричної функції $\overline{B}(\cdot)$ у випадку, коли

$$\varepsilon_s^2 = \sum_{k=1}^{N} \left\| X^T \overline{b}_{(s)}(k) - \overline{y}_{(s)}(k) \right\|^2 > 0,$$

можна використати результати ідентифікації матриць $B(1), ..., B(N)$, отримані нами в п. 17.6. Записуючи ці результати в термінах уведених нами матричних $\bar{B}(\cdot)$, $\bar{Y}(\cdot)$ та векторних $\bar{b}_{(s)}(\cdot)$, $\bar{y}_{(s)}(\cdot)$ $(s \in \overline{1,p})$ функцій із наступним спрямуванням $N \to \infty$ та врахуванням того факту, що

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\bar{B}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = B(t), \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\bar{Y}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = Y(t),$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\bar{b}_{(s)}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = b_{(s)}(t), \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\bar{y}_{(s)}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = y_{(s)}(t),$$

знаходимо, що, якщо знайдеться такий номер $i_*$ спостерігача за вхідним сигналом $x^T_{(i_*)}$, для якого

$$e^T_{i_*} X (X^T X)^+ X^T e_{i_*} \neq 1, \tag{18.64}$$

то задача ідентифікації значень $B(k)$ $(k = \overline{1,N})$ матричної функції $\bar{B}(\cdot)$, а, отже, і матричної функції $B(t)$, буде розв'язана після нелінійного перетворення $x^T_{(i_*)}$-сигналу так, щоб

$$x_{(i_*)} \Rightarrow \sum_{j=2}^{k_*} c_j^{(i_*)}(t) x_{(i_*)}^{j\otimes}. \tag{18.65}$$

Тут, як і вище, $x_{(i_*)}^{2\otimes}, ..., x_{(i_*)}^{k_*\otimes}$ – система векторів, лінійно незалежних від $x_{(i)}$ $(i = \overline{1,m})$, з ненульовими проекціями

$$\Pr_{\overline{L(X)}} x^{j\otimes} = Z(X) x_{(i_*)}^{j\otimes} = (x_{(i_*)}^{j\otimes})^T x_{(i_*)}^{j\otimes} - (X x_{(i_*)}^{j\otimes})^T (XX^T) X x_{(i_*)}^{j\otimes} \tag{18.66}$$

в ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$, натягненої на вектор-рядки $x^T_{(i)}$ $(i = \overline{1,m})$ матриці $X$. Кількість $k_* - 1$ таких векторів визначимо з умови (18.54) максимальної повноти системи новостворених векторів.

Вектор $c^{(i_*)}(t) = col(c_j^{(i_*)}(t),\ j = \overline{2,k_*})$ коефіцієнтів перетворення визначимо з умови, щоб

$$X_{(i_*)}^{\otimes} c^{(i_*)}(t) = Z(X) y_{(s)}(t), \tag{18.67}$$

де

$$X_{(i_*)}^{\otimes} = (x_{(i_*)}^{2\otimes}, ..., x_{(i_*)}^{k_*\otimes}).$$

При цьому

$$c^{(i*)}(t)=(X_{(i_*)}^{\otimes})^T(X_{(i*)}^{\otimes}(X_{(i*)}^{\otimes})^T)^+(Z(X)y_{(s)}(t)-X_{(i*)}^{\otimes}v_{(i*)}(t))+v_{(i*)}(t), \quad (18.68)$$

де $v_{(i_*)}(t)$ – довільна інтегрована за $t\in[0,T]$ вектор-функція розмірності $k_*-1$.

Розв’язок задачі отримаємо з (18.57) у вигляді

$$B(t)=(Y(t)X_{(i_*)}^T(t)+V(t)P_{(i*)}(t))P_{(i_*)}^+(t)+V(t), \quad (18.69)$$

де $V(t)$ – довільна інтегрована за $t\in[0,T]$ матрична функція розмірності $p\times m$,

$$P_{(i*)}(t)=X_{(i_*)}(t)X_{(i*)}^T(t),$$

$$X_{(i_*)}(t)=\begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \dots \\ x_{(i*-1)}^T \\ (\sum_{i=2}^{k*} c_i^{(i*)}(t)[x_{(i_*)}^{(j)}], \quad j=\overline{1,n}) \\ x_{(i*)}^T \\ \dots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix}, \quad (18.70)$$

а

$$(x_{(i_*)}^{(1)},\dots,x_{(i_*)}^{(n)})=x_{(i_*)}^T.$$

Заміна (18.65) розв’яже задачу, якщо для кожного з векторів
$x_{(i_*)}^{j\otimes} \quad (j=\overline{2,k_*})$

$$\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\, x_{(i_*)}^{j\otimes}>0.$$

За інших умов слід узяти інше $i_*$. Процес розв’язання задачі в цілому буде успішним, якщо

$$\int_0^T\left\|X_{(i_*)}^{\otimes}c^{(i_*)}(t)-\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\, y_{(s)}(t)\right\|^2 dt=$$

$$=\int_0^T y_{(s)}^T(t)Z(X)(I_n-P_{(i*)}^{\otimes}[P_{(i*)}^{\otimes}]^+)Z(X)y_{(s)}(t)dt=0,$$

де

$$P_{(i*)}^{\otimes}=X_{(i*)}^{\otimes}(X_{(i*)}^{\otimes})^T.$$

Однозначність розв’язання задачі буде визначатися умовою

$$\det((X_{(i_*)}^{\otimes})^T X_{(i_*)}^{\otimes})>0.$$

# § 19. Оптимізаційні методи ідентифікації наближених моделей динаміки систем із розподіленими параметрами

### *19.1. Ідейна суть підходу.*

Залишаючись у межах запропонованого спрощення у викладі методики побудови математичних моделей динаміки систем із розподіленими параметрами, яка полягає в заміні багатовимірного об’єкту моделювання одновимірним (залежність вхідного та вихідного сигналів розглядається тільки стосовно простої змінної $t \in [0,T]$) та переході до розгляду канонічних моделей алгебраїчного (16.13), інтегрального (16.14) та функціонального (16.15) вигляду, розглянемо й далі проблеми ідентифікації цих моделей.

Як розглядуваний у § 17 метод лінійної ідентифікації стаціонарних та розподілених за $t \in [0,T]$ входів-виходів у вигляді алгебраїчних, інтегральних та функціональних моделей, так і розглянута в § 18 його нелінійна модифікація будуть успішними тільки за певних умов. Однак, можливі випадки, коли жоден із цих методів не дає бажаного результату – знайти матрицю $A$, чи матричні вектор-функції $A(t)$, $B(t)$ навіть при нелінійному перетворенні функцією $L(\cdot)$ вхідного сигналу не можливо.

У межах викладеної у роботі методики моделювання вихід один – побудувати модель вибраного класу наближено, але найбільш оптимально й точно.

При цьому слід ураховувати, що як у лінійних, так і в нелінійних моделях зберігається відхилення змодельованого виходу системи від істини. При цьому всі рядки матриці $X$ чи матричної функції $X(t)$ (а, отже, і всі спостерігачі за системою) лінійно незалежні й немає підстав для їх перетворень. Причина цього (див. § 18) в тому, що кількість $m$ лінійно незалежних рядків матриці $X$ (або матричної функції $X(t)$ ) недостатня для розкладу за ними $n$ -вимірного вектора $y_{(s)}$ ( або векторної функції $y_{(s)}(t)$ ) $(s \in \{\overline{1,p}\})$. Зробимо спробу шляхом нелінійних перетворень вхідних сигналів вийти за межі лінійної оболонки $L(X)$, розширивши кількість лінійно незалежних векторів (векторних функцій), за якими розкладається вектор $y_{(s)}$ (векторна функція $y_{(s)}(t)$) ( $s \in \{\overline{1,p}\}$ ).

Реалізуючи практично такі перетворення, слід зважати на:

1) номер рядка матриці $X$ чи матричної вектор-функції $X(t)$, що перетворюється (номер спостерігача), повинен бути найбільш впливовим на точність розв’язання задачі;

2) перетворення рядка мусить бути таким, щоб максимально зменшити похибки моделювання;

3) виконувані перетворення повинні дійсно зменшувати відхилення змодельованого виходу системи від реально спостережуваного.

Користуючись цими трьома вимогами, побудуємо введену вище функцію $L(\cdot)$ нелінійного перетворення вхідного сигналу, а з її використанням і лінійну частину моделі – матрицю $A$ чи матричні вектор-функції $A(t)$, $B(t)$ відповідно.

### *19.2. Оптимізаційний підхід до побудови наближеної системи нелінійних алгебраїчних перетворень.*

Продовжимо розгляд задачі побудови нелінійної системи (18.2) алгебраїчних перетворень послідовності $x_1, x_2, ..., x_n$ ($x_i \in R^m$ $i = \overline{1,n}$) вхідних у послідовність $y_1, y_2, ..., y_n$ ($y_i \in R^P$, $i = \overline{1,p}$) вихідних сигналів відповідно.

Зупинимося на відкладеному в § 18 випадку, коли:

1) ранг матриці $X$ рівний $m$, тобто

$$x_{(i)}^T X^+ e_i = 1 \qquad \forall i = \overline{1,m} \;;$$

2) нев'язка

$$\varepsilon_s^2 = y_{(s)}^T (I_n - X^+ X) y_{(s)} \qquad (s \in \{\overline{1,p}\}) \tag{19.1}$$

розв'язання одного (або кількох) рівнянь (див. 17.10)

$$X^T a_{(s)} = y_{(s)} \tag{19.2}$$

відмінна від нуля. Виходячи з того, що

$$\varepsilon_s^2 = \left\| \mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\, y_{(s)} \right\|^2, \tag{19.3}$$

виконаємо нелінійне перетворення

$$x_{(i_0)}^T \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k_0} c_j x_{(i_0)}^{j\otimes}\right)^T \tag{19.4}$$

$i_0$-рядка матриці

$$X = str(x^{(1)}, ..., x^{(n)}),$$

вибираючи номер $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$ за умови, щоб

$$i_0 = \arg \min_{i \in \{\overline{1,m}\}} \Phi(i), \tag{19.5}$$

де $(c_1, ..., c_k)^T = c$, $(c_1, ..., c_{k_0})^T = c_0$,

$$\Phi(i) = \min_{c \in R^k} \left\| \mathrm{Pr}_{\overline{L(\tilde{X}_i)}}\, y_{(s)} \right\|^2, \tag{19.6}$$

а

$$\tilde{X}_i = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \dots \\ x_{(i-1)}^T \\ (\sum_{j=1}^{k} c_j x_{(i)}^{j\otimes})^T \\ x_{(i+1)}^T \\ \dots \\ x_{(m)}^T \end{pmatrix} \qquad (19.7)$$

перетворена згідно з (19.4) матриця $X$. Значення $k$ виберемо за умови, щоб

$$rank(Z(X)(x_{(i_0)}^{1\otimes} \vdots \cdots \vdots x_{(i_0)}^{k\otimes} \vdots x_{(i_0)}^{(k+1)\otimes})) = k,$$

де $Z(X) = I_n - X^+X$ – проекційний оператор на ортогональне доповнення $\overline{L(X)}$ до лінійної оболонки $L(X)$, натягненої на вектор-рядки матриці $X$.

Підготуємо запропонований таким чином алгоритм нелінійного перетворення матриці $X$ вхідних сигналів до практичної реалізації. Для цього, виходячи з нев'язки $\varepsilon_s^2$ (формула (19.3)) розв'язання рівняння (19.2), з урахуванням перетворень (19.7) у вхідній матриці $X$, розпишемо аналітичні залежності

$$\Pr_{\overline{L(\tilde{X})}} y_{(s)} = Z(\tilde{X}) y_{(s)} \qquad (19.8)$$

у функціоналі $\Phi(i)$ (див. (19.6)).

Будемо виходити з того, що:

а) для прямокутної матриці $A \in R^{m\times n}$, розширеної рядком $a^T$ $(a \in R^n)$

$$Z\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} = Z(A) - \frac{Z(A)aa^T Z(A)}{\|Z(A)a\|^2}, \qquad (19.9)$$

де

$$Z(A) = I_n - A^+ A;$$

б) для прямокутної матриці $A \in R^{m\times n}$, отриманої після викреслювання останнього $(m+1)$-го рядка $a^T \in R^m$ з $[(m+1)\times n]$-вимірної матриці $\overline{A} = \left(A^T \vdots a\right)^T$

$$Z(A) = Z\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} + \frac{qq^T}{\|q\|^2}, \qquad (19.10)$$

де $q \in R^m$ визначається співвідношенням

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = (P \vdots q)\cdot$$

Аналітичну залежність $Z(\tilde{X})$ у виразі (19.8) побудуємо, виходячи з (19.9), (19.10), маючи на увазі, що для нашого випадку

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{X},\ \ A \Rightarrow \bar{X},\ \ a^T \Rightarrow [\sum_{j=1}^{k} c_j x_{(i)}^{j\otimes}]^T$$

у формулі (19.9) і

$$A \Rightarrow \bar{X},\quad \begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \Rightarrow X,\quad a^T \Rightarrow x_{(i)}^T$$

у формулі (19.10).

З урахуванням цього знаходимо, що

$$Z(\tilde{X}) = Z(\bar{X}) - \frac{Z(\bar{X})\sum_{j=1}^{k} c_j x_{(i)}^{j\otimes}(\sum_{j=1}^{k} c_j x_{(i)}^{j\otimes})^T Z(\bar{X})}{\left\| Z(\bar{X})\sum_{j=1}^{k} c_j x_{(i)}^{j\otimes} \right\|^2}, \tag{19.11}$$

де

$$Z(\bar{X}) = Z(X) + \frac{q_i q_i^T}{\|q_i\|^2}, \tag{19.12}$$

а $q_i = X^+ e_i$ $i$-тий стовпець матриці $X^+$.

Позначивши через

$$D_i = Z(\bar{X})(x_{(i)}^{1\otimes} \vdots \cdots \vdots x_{(i)}^{k\otimes}),$$

проекційну матрицю (19.11) запишемо у вигляді

$$Z(\tilde{X}) = Z(\bar{X}) - \frac{D_i c[D_i c]^T}{\|D_i c\|^2},$$

де, як і раніше, $Z(\bar{X})$ зображено виразом (19.12).

Виходячи з (19.8), знаходимо, що

$$\left\| \Pr_{\overline{L(\tilde{X})}} y_{(s)} \right\|^2 = y_{(s)}^T Z(\bar{X}) y_{(s)} - \frac{y_{(s)}^T (D_i c)(D_i c)^T y_{(s)}}{\|D_i c\|^2} = y_{(s)}^T Z(\bar{X}) y_{(s)} - \frac{(y_{(s)}^T D_i c)^2}{\|D_i c\|^2} \tag{19.13}$$

Ураховуючи, що перший член у (19.13) не залежить від виконаних згідно з (19.7) перетворень, висновуємо, що записаний співвідношенням (19.5)

$$\arg\min_{c} \left\| \Pr_{\overline{L(\tilde{X}_i)}} y_{(s)} \right\|^2$$

збігається з

$$\arg\max_{c \in R^k} \frac{(y_{(s)}^T D_i c)^2}{\left\| D_i c \right\|^2} \tag{19.14}$$

Вираз (19.14) для функціоналу $\Phi(i)$ можна спростити, ураховуючи, що для довільної матриці $D$ справедливе співвідношення

$$\arg\max_{c} \frac{(y^T Dc)^2}{\left\| Dc \right\|^2} = \arg \max_{c \in \left\{ c: c = \left\| Dc \right\|^2 = 1 \right\}} (y^T Dc)^2 = D^+ y \cdot$$

Це дозволяє знайти розв’язок задачі (19.14), а, отже, і (19.5) – знайти вектор $c \in R^k$ виконуваного згідно з (19.7) перетворення матриці $X$ . Воно буде таким:

$$c(i) = D_i^+ y_{(s)} \quad \{s \in \{\overline{1, p}\}\} \,. \tag{19.15}$$

Після підстановки (19.15) у (19.13) з (19.5) знаходимо:

$$\Phi(i) = y_{(s)}^T Z(\bar{X}) y_{(s)} - (y_{(s)}^T D_i D_i^+ y_{(s)})^2 \,. \tag{19.16}$$

Це значить, що вибір номера $i_0$ оптимального для перетворень (19.4), (19.7) рядка матриці $X$ зведеться до розв’язання задачі:

$$i_0 = \arg \min_{i \in \left\{ \overline{1, p} \right\}} \left\{ y_{(s)}^T Z(\bar{X}) y_{(s)} - (y_{(s)}^T P_i P_i^+ y_{(s)})^2 \right\} , \tag{19.17}$$

де $P_i = D_i D_i^T$ .

Виконавши перетворення (19.4) знайденого згідно з (19.17) $i_0$ -рядка матриці $X$ , визначимо

$$\varepsilon_s^2 (i_0) = y_{(s)}^T (I_n - \tilde{X}_{i_0}^+ \tilde{X}_{i_0}) y_{(s)} \,,$$

де $\tilde{X}_{i_0}$ – перетворена згідно з (19.7) матриця $X$ .

При $\varepsilon_s^2 (i_0) = 0$ задача розв’язана точно. При $\varepsilon_s^2$ >0 процес перетворень (19.4), (19.7) слід продовжити, зупинившись на

$$i_{опт} = \arg\min_{i_0} \{\varepsilon_s^2 (i_0)\} \,.$$

Знайдена з перетвореним згідно з (19.4) $i_0$ -рядком матриця $X_{опт}$ дозволяє згідно з (17.13) знайти й невідомий у (19.2) $a_{(s)}^T$ -рядок матриці $A$ . При цьому

$$a_{(s)} \in \Omega_s = \{a_{(s)} : a_{(s)} = (X_{опт}^T)^+ y_{(s)} + (I_m - X_{опт} X_{опт}^+) \upsilon_{(s)}\} \,,$$

де $\upsilon_{(s)}$ – довільний вектор розмірності $m$ . Точність ідентифікованого таким чином $s$ -того виходу ( $s$ -того спостерігача) системи буде визначатися величиною

$$\left\| y_{(s)мод} - y_{(s)} \right\|^2 = y_{(s)}^T (I_n - X_{опт}^+ X_{опт}) y_{(s)} ,$$

де

$$y_{(s)мод} = X_{опт}^T a_{(s)}$$

– значення вихідного сигналу, знайдене згідно з модифікованим таким чином перетворенням (19.2).

### *19.3. Оптимізаційні методи ідентифікації дискретно підсумовуючих перетворювачів.*

Продовжимо розв’язання задачі, сформульованої в п. 18.3 з використанням ідеї розв’язання такої ж задачі для лінійних алгебраїчних систем. Розглянемо проблему побудови послідовності матриць $A(1),..., A(N),$ які б $\forall \ j = \overline{1,n}$ послідовність вхідних сигналів $x^{(j)}(1),..., x^{(j)}(N)$ перетворювали (підсумовували) у вихідний вектор $y^{(j)} \in R^p$ так, що

$$y^{(j)} = \sum_{k=1}^{N} A(k) x^{(j)}(k) \,. \tag{19.18}$$

Ідентифікацію матриць $A(k)$ $(k = \overline{1,N})$ виконаємо за умови, коли

1) $\varepsilon_s^2 = y_{(s)}^T y_{(s)} - y_{(s)}^T P_2^+ P_2 y_{(s)} > 0$,

де $y_{(s)}^T$ – $s$ -ий рядок матриці

$$Y = str(y^{(j)}, \ j = \overline{1,n}) \,,$$

$$P_2 = [\sum_{k=1}^{N} [x^{(i)}(k)]^T x^{(j)}(k)]_{i,j=1}^{i,j=n} \,;$$

2) серед рядків-функцій $\bar{x}_{(i)}^T(\cdot)$ $(i = \overline{1,m})$ матричної функції

$$\bar{X}(\cdot) = col(X(1),..., X(N)) \,,$$

де

$$X(k) = str(x^{(j)}(k), \ \ j = \overline{1,n}) \ \bar{X}(k) = X(k) \,, \quad \forall k = \overline{1,N} \,,$$

нема лінійно залежних.

У цьому випадку розглядуваного в п. 18.3 номера $i_*$ вектор-функції $\bar{x}_{(i_*)}(\cdot)$ не існує і перетворення (18.33) його компонент, яке ми здійснювали, не доцільне.

Тут нічого кращого немає, як зупинитися на такому $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$, при якому нелінійне перетворення

$$\sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes}(k) \tag{19.19}$$

$x_{(i_0)}(k)$ -входу системи максимально зменшує проекцію $\Pr_{\overline{L(\tilde{\tilde{X}}(\cdot))}} y_{(s)}$ вектора $y_{(s)}$ на ортогональне доповнення до лінійної оболонки $L(\tilde{\tilde{X}}(\cdot))$, натягненої на вектор-рядки $\tilde{\tilde{x}}_{(i)}^T(\cdot)$ $(i=\overline{1,m})$, перетвореної згідно з (19.19) матричної функції $\bar{X}(\cdot)$, а тим самим і $\varepsilon_{(s)}^2$ – похибку в оберненні отриманого з урахуванням цих перетворень рівняння (18.35). Номер $i_0$ перетворюваного входу та вектор-функцію

$$\bar{c}^{(i_0)}(\cdot) = col((c_j^{(i_0)}(k), j=\overline{1,k_0}), k=\overline{1,N})$$

коефіцієнтів самого перетворення визначимо з умови

$$rankZ(\bar{X}(\cdot))(x_{(i_0)}(k), \vdots \cdots \vdots, x_{(i_0)}^{(k_0+1)\otimes}(k)) = k_0, \tag{19.20}$$

де $Z(\bar{X}(\cdot))$ – проекційна матриця на ортогональне доповнення до лінійної оболонки, натягненої на вектор-рядки матричної функції $\bar{X}(\cdot)$.

Побудуємо вираз для $\Pr_{\overline{L(\tilde{\tilde{X}}(\cdot))}} y_{(s)}$ виходячи з того, що

$$\tilde{\tilde{X}}(\cdot) = col(\tilde{\tilde{X}}'(1), ..., \tilde{\tilde{X}}'(N)), \tag{19.21}$$

де

$$\tilde{\tilde{X}}'(k) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T(k) \\ \cdots \\ \left[ \sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes}(k) \right]^T \\ \cdots \\ x_{(m)}^T(k) \end{pmatrix} \quad (k=\overline{1,N}).$$

При цьому будемо враховувати, що після узагальнення приведених у попередньому пункті формул (19.11), (19.12)

$$Z(\tilde{\bar{X}}(\cdot)) =$$

$$= Z(\bar{\bar{X}}(\cdot)) - \frac{Z(\bar{\bar{X}}(\cdot))\sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes}(k) (\sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes}(k))^T Z(\bar{\bar{X}}(\cdot))}{\left\| Z(\bar{\bar{X}}(\cdot))\sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes}(k)\right\|^2}, \qquad (19.22)$$

$$Z(\bar{\bar{X}}(\cdot)) = Z(\bar{X}(\cdot)) + \frac{q_{(i_0)}(\cdot) q_{(i_0)}^T(\cdot)}{\left\| q_{(i_0)}(\cdot)\right\|^2} = Z(\bar{X}(\cdot)) + \frac{\sum_{k=1}^{N} q_{(i_0)}(k) q_{(i_0)}^T(k)}{\sum_{k=1}^{N} q_{(i_0)}^T(k) q_{(i_0)}(k)},$$

а

$q_{(i_0)}(\cdot) = col(q_{(i_0)}(1), q_{(i_0)}(2), ..., q_{(i_0)}(N)) = \bar{X}^+(\cdot) e_{i_0} - i_0$ -стовпець-функція матричної функції $\bar{X}^+(\cdot)$.

Позначивши через

$$D_{i_0}(\cdot) = (Z(\bar{\bar{X}}(\cdot))(x_{(i_0)}^{1\otimes}(k) \ \vdots \cdots \vdots \ x_{(i_0)}^{k_0\otimes}(k)), \ k = \overline{1, N}),$$

робимо висновок, що

$$Z(\tilde{\bar{X}}(\cdot)) = Z(\bar{\bar{X}}(\cdot)) - \frac{D_{c0} D_{c0}^T}{D_{c0}^T D_{c0}}, \qquad (19.23)$$

де

$$D_{c0} = \sum_{k=1}^{N} D_{i_0}(k) c^{(i_0)}(k).$$

Після чого

$$[\Pr_{\overline{L(\tilde{\bar{X}}(\bullet))}} y_{(s)}]^2 = y_{(s)}^T Z(\tilde{\bar{X}}(\cdot)) y_{(s)} = y_{(s)}^T Z(\bar{\bar{X}}(\cdot)) y_{(s)} - \frac{(y_{(s)}^T D_{c0})^2}{D_{c0}^T D_{c0}}. \qquad (19.24)$$

Це означає, що для побудови $\bar{c}^{(i_0)}(\cdot)$, визначеного співвідношенням (19.20), необхідно розв'язати задачу знаходження:

$$\bar{c}^{(i_0)}(\cdot) = \arg \max_{\bar{c}^{(i_0)}(\cdot)} \frac{(y_{(s)}^T D_{c0})^2}{D_{c0}^T D_{c0}}.$$

Після узагальнення результатів попереднього пункту знаходимо, що

$$\bar{c}^{(i_0)}(\cdot) = D_{i_0}^+(\cdot) y_{(s)}. \qquad (19.25)$$

При цьому

$$\min_{\bar{c}^{(i_0)}(\cdot)} \left\| \Pr_{\overline{L(\tilde{\bar{X}}(\cdot))}} y_{(s)} \right\|^2 = y_{(s)}^T Z(\bar{\bar{X}}(\cdot)) y_{(s)} - y_{(s)}^T P_{i_0} P_{i_0}^+ y_{(s)} = \Phi(i_0), \qquad (19.26)$$

де

$$P_{i_0} = \sum_{k=1}^{N} D_{i_0}(k) D_{i_0}^T(k) \, .$$

Це означає, що оптимальний для перетворення (19.19) номер $i_0$ буде визначатися співвідношенням

$$i_0 = \arg \underline{\min}_{i=1,m} \{\Phi(i)\} \, . \tag{19.27}$$

Таким чином, задача (19.20) може бути розв’язана. Її розв’язок дозволить розв’язати й задачу ідентифікації матриць $A(1),...,A(N)$ (з урахуванням сформульованих тут особливостей її постановки). Розв’язок її буде подано співвідношенням (17.27) після заміни в ньому матричної функції $X(k) \quad (k = \overline{1,N})$ на матричну функцію $\tilde{\tilde{X}}'(k) \quad (i = \overline{1,N})$ .

### *19.4. Оптимізаційні методи ідентифікації лінійно інтегруючих перетворювачів.*

Виходячи з результатів оптимізаційної ідентифікації дискретно підсумовуючого перетворювача (19.18), продовжимо розв’язання задачі оптимізаційної ідентифікації лінійно інтегруючого перетворювача (18.41).

Розглянемо задачу ідентифікації матричної функції $A(t)$ інтегрального перетворювача

$$\int_0^T A(t)x(t)dt = y \tag{19.28}$$

вхідного сигналу $x(t) \in R^m \quad \forall t \in [0,T]$ у вихідний сигнал $y \in R^p$ для випадку, коли запропоновані в п. 18.4 методи не призводять до бажаного успіху за умови, коли:

1) (див. 18.42)

$$\varepsilon_s^2 = \left\| \int_0^T a_{(s)}^T(t) X(t) dt - y_{(s)}^T \right\|^2 > 0 \tag{19.29}$$

(незалежний від $t$ вектор-рядок $y_{(s)}^T$ вихідної матриці

$$\boldsymbol{Y = str(y^{(j)}, \, j = \overline{1,n})}$$

не розкладається за динамічними вектор-функціями $x_{(j)}^T(t)$ -рядками-функціями вхідної матриці-функції

$$X(t) = str(x^{(j)}(t), \, j = \overline{1,n}));$$

2) (див. (18.30), (18.43))

$$\xi_{(i)}^T P_2^+ \xi_{(i)} = 1 \quad \forall i \in \{\overline{1,m}\}$$

(усі рядки-функції $x_{(j)}^T(t) \quad (j = \overline{1,m})$ лінійно незалежні $\forall t \in [0,T]$).

Виходячи з умови (19.30), знайти номер $i_*$ рядка-функції матричної функції $X(t)$, який у п. 18.4 ми перетворили згідно з (18.47), неможливо. І тут немає нічого кращого, як зупинитися на тому $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$, при якому мінімізується кількість інформації, лінійно залежної від інформації інших спостерігачів.

Для розв'язання сформульованої таким чином задачі ідентифікації матричної функції $A(t)$ від неперервного інтегрального перетворювача (19.28) перейдемо до дискретно підсумовуючого перетворювача

$$\overline{A}(\cdot)\overline{X}(\cdot) = Y\ , \tag{19.30}$$

розглядуваного в пп. 18.3, 19.3 попереднього та даного параграфів.

Результати ідентифікації елементів $A(1),\ldots,A(N)$ матричної функції $A(\cdot)$, отриманої в п. 19.3 після нелінійного перетворення (див. (19.19)) рядка-функції $\overline{x}_{(i_0)}(\cdot)$ матричної функції $\overline{X}(\cdot)$, поширимо на розглядуваний тут перетворювач (19.28),ураховуючи, що

$$\overline{A}(\cdot) = str(A(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ k = \overline{1,N})\ ,$$

$$\overline{X}(\cdot) = col(X(t_k)\sqrt{\Delta\ t_N},\ k = \overline{1,N})\ ,$$

$$\overline{x}_{(i_0)}(\cdot) = col(x_{(i_0)}(k)\sqrt{\Delta\ t_N},\ k = \overline{1,N})\ ,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\overline{A}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = A(t)\,,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{X}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = X(t)\,,\quad \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{x}_{(i_0)}(\cdot)}{\sqrt{\Delta t_N}} = x_{(i_0)}(t)\,,$$

де $t_1,\ldots,t_N$ – точки дискретизації інтервалу $[0,T]$, а $\Delta\ t_N$ – крок такої дискретизації.

Номер $\acute{\imath}_0$ рядка-функції, який нелінійно перетворимо, структуру самого перетворення та розв'язок задачі отримаємо, повторюючи викладки п. 19.3 при $N \to \infty$.

При цьому вигляд перетворення $x^T_{(i_0)}(t)$ – рядка-функції матричної функції $X(t)$ – буде записуватись співвідношенням

$$x_{(i_0)}(t) = X^{(i_0)}(t)c^{(i_0)}(t)\,, \tag{19.31}$$

де

$$X^{(i_0)}(t) = (x^{1\otimes}_{(i_0)}(t)\vdots\cdots\vdots x^{k_0\otimes}_{(i_0)}(t))\,.$$

Номер $i_0$ перетворюваного рядка та вектор коефіцієнтів-функцій $c^{(i_0)}(t)$ оберемо з умови

$$(i_0, c^{(i_0)}(t)) = \arg\min_{c^{(i)}(t),\ i\in\{\overline{1,m}\}}\ [y^T_{(s)}(Z(\overline{X}(t) - P_{(i)}P^{\div}_{(i)})y_{(s)}]\,, \tag{19.32}$$

де

$$Z(\bar{X}(t)) = I_n - P_2^+ P_2 + \frac{\int_0^T q_{(i)}(t) q_{(i)}^T(t) dt}{\int_0^T q_{(i)}^T(t) q_{(i)}(t) dt}, \qquad (19.33)$$

$$P_2 = \int_0^T X^T(t) X(t) dt, \quad q_{(i)}(t) = X^+(t) e_{(i)},$$

$$P_{(i)} = \int_0^T Z(\bar{X}(t)) X^{(i)}(t) [Z(\bar{X}(t)) X^{(i)}(t)]^T dt.$$

Значення $k_0$ визначимо з умови

$$rank \;\; Z(X(t))(X^{(i_0)}(t) \vdots x_{(i_0)}^{(k_0+1)\otimes}) = k_0.$$

При цьому:

1) з (19.25) при $N \to \infty$

$$c^{(I_0)}(t) = D_{i_0}^+(t) y_{(s)}, \qquad .34)$$

де

$$D_{i_0}(t) = Z(\bar{X}(t))(x_{(i_0)}^{1\otimes}(t) \vdots \cdots \vdots x_{(i_0)}^{k_0 \otimes}(t));$$

2) з (19.26), (19.27) при $N \to \infty$

$$i_0 = \arg \min_{\underline{i=1,m}} \left\{ y_{(s)}^T Z(\bar{X}(t)) y_{(s)} - y_{(s)}^T P_{i_0} P_{i_0}^+ y_{(s)} \right\}, \qquad 9.35)$$

де

$$P_{i_0} = \int_0^T D_{i_0}(t) D_{i_0}^T(t) dt.$$

## *19.5. Оптимізаційні методи ідентифікації дискретно розподіляючих перетворювачів.*

Продовжимо розгляд задачі нелінійної ідентифікації послідовності матриць $B(1), \cdots, B(N)$ дискретно розподіляючого перетворювача (17.5) для випадку, коли нелінійні перетворення, запропоновані нами в п. 18.5, не дають успіхів. Це відбувається у випадку, коли:

1) ранг матриці $X$ вхідних сигналів перетворювача рівний $m$, тобто

$$x_{(i)}^T X^+ e_i = 1 \;\; \forall \;\; i = \overline{1, m};$$

2) нев'язка одного з рівнянь ( $s \in \{\overline{1, p}\}$)

$$X^T b_{(s)}(k) = y_{(s)}(k) \quad (k = \overline{1, N}) \qquad (19.36)$$

системи (17.5)

$$B(k) X = Y(k) \quad (k = \overline{1, N}) \qquad (19.37)$$

відмінна від нуля.

Позначивши через

$$\bar{b}_{(s)}(\cdot) = str(b_{(s)}(k)\ ,\ k = \overline{1,N}),$$

$$\bar{y}_{(s)}(\cdot) = str(y_{(s)}(k)\ ,\ k = \overline{1,N}),$$

де $\bar{b}_{(s)}(k) = b_{(s)}(k)$, $\bar{y}_{(s)}(k) = y_{(s)}(k)$ для $k = \overline{1,N}$, від задачі ідентифікації системи (19.36) перейдемо до задачі ідентифікації функціонального рівняння

$$X^T b_{(s)}(\cdot) = \bar{y}_{(s)}(\cdot), \qquad (19.38)$$

аналог (19.2) якого ідентифікувався вище.

Як і при ідентифікації рівняння (19.2), для $i = \overline{1,m}$ побудуємо максимально повну ( $rank\ \ (x^{1\otimes}_{(i_0)} \vdots \cdots \vdots x^{k_0\otimes}_{(i_0)} \vdots x^{(k_0+1)\otimes}_{(i_0)}) = k_0$ ) систему векторів

$$x^{1\otimes}_{(i_0)} \vdots \cdots \vdots x^{k_0\otimes}_{(i_0)}$$

з ненульовими проекціями

$$\mathrm{Pr}_{\overline{L(X)}}\, x^{\ j\otimes}_{\ (i_0)} > 0 \ \ (j = \overline{1,k}) \qquad (19.39)$$

на ортогональне доповнення $\overline{L\ (X)}$ до лінійної оболонки, натягненої на вектор-рядки $x^T_{(i)}$ $(i = \overline{1,m})$ матриці $X$, і виконаємо нелінійне перетворення

$$x^T_{(i_0)} \Rightarrow (\sum_{j-1}^{k_0} \bar{c}_j^{(i_0)}(\cdot) x^{\ j\otimes}_{\ (i_0)})^T \qquad (19.40)$$

$i_0$ -рядка ( $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$) цієї матриці.

Номер $i_0$ та коефіцієнти функції $(c_1^{(i_0)}(k), \cdots, c_{k_0}^{(i_0)}(k)) = [c^{(i_0)}(k)]^T$ перетворення (19.40) виберемо з умови, щоб

$$(i_0, \bar{c}^{(i_0)}(\cdot)) = \arg \min_{\bar{c}^{(i\ )}(\cdot\}, i=\overline{1,m}} \mathrm{Pr}_{\overline{L(\bar{X}_{(i)}(\cdot))}}\, y_{(s)}(\cdot), \qquad (19.41)$$

де $\bar{c}^{(i\ )}(\cdot) = col(c^{(i)}(k),\ k = \overline{1,N})$, $\bar{c}^{(i)}(k) = c^{(i)}(k)$, а $\bar{X}_{(i)}(\cdot)$ – матрична функція $\bar{X}(\cdot)$ з перетвореним згідно з (19.40) $i$ -тим вектор-рядком.

Як і в п. 19.2, задачу (19.41) розв'яжемо у два етапи:

1) знайдемо вектор-функцію $\bar{c}^{(i\ )}(\cdot)$ перетворення (19.40)

таку, щоб при заданому $\bar{y}_{(s)}(\cdot)$

$$\left[\mathrm{Pr}_{\overline{L(\bar{X}_{(i)}(\cdot))}}\, \bar{y}(\cdot)\right]^2 \to \min_{\bar{c}^{(i)}(\cdot)}; \qquad (19.42)$$

*2)* номер $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$ перетворюваного згідно з (19.40) вектор-рядка $x^T_{(i_0)}$ визначимо як розв`язок задачі

$$i_0 = \arg \min_{i \in \{\overline{1,m}\}} \{\Phi(i)\} , \tag{19.43}$$

де

$$\Phi(i) = \min_{\bar{c}^{(i)}(\cdot)} \left[ \Pr_{\overline{L(\bar{X}_{(i)}(\cdot))}} \bar{y}_{(s)}(\cdot) \right]^2 , \tag{19.44}$$

а $\bar{c}^{(i)}(\cdot)$ $(i = \overline{1,m})$ – розв'язок задачі (19.42).

При розв'язанні задачі (19.42) будемо виходити з того, що

$$\Pr_{\overline{L(\bar{X}_{(i)}(\cdot))}} y_{(s)}(\cdot) = Z(\bar{X}_{(i)}(\cdot))\bar{y}_{(s)}(\cdot) , \tag{19.45}$$

де

$$\bar{X}_{(i)}(\cdot) = \begin{pmatrix} \bar{x}^T_{(1)} \\ \cdots \\ \bar{x}^T_{(i-1)} \\ \left[ \sum_{j=1}^{k_i} \bar{c}_j^{(i)}(\cdot)\bar{x}_{(i)}^{j\otimes} \right]^T \\ \bar{x}^T_{(i+1)} \\ \cdots \\ \bar{x}^T_{(m)} \end{pmatrix} , \tag{19.46}$$

$$Z(\bar{X}_{(i)}(\cdot)) = Z(\overline{\overline{X}}_{(i)}) - \frac{Z(\overline{\overline{X}}_{(i)}) \sum_{j=1}^{k_i} \bar{c}_j^{(i)}(\cdot)\bar{x}_{(i)}^{j\otimes} (\sum_{j=1}^{k_i} \bar{c}_j^{(i)}(\cdot)\bar{x}_{(i)}^{j\otimes})^T Z(\overline{\overline{X}}_{(i)}(\cdot))}{\left\| Z(\overline{\overline{X}}_{(i)}) \sum_{j=1}^{k_i} \bar{c}_j^{(i)}(\cdot)\bar{x}_{(i)}^{j\otimes} \right\|^2} , \tag{19.47}$$

$$Z(\overline{\overline{X}}_{(i)}) = Z(X) + \frac{q_i q_i^T}{\|q_i\|^2} , \tag{19.48}$$

а $k_i$ визначається з умови, щоб

$$rank Z(\bar{X}(\cdot))(x_{(i)}^{1\otimes}(\cdot) \vdots \cdots \vdots x_{(i)}^{(k_i \div 1)\otimes}(\cdot)) = k_i . \tag{19.49}$$

Це дозволяє від задачі (19.42) перейти до задачі знаходження

$$\overline{\overline{c}}^{(i)}(\cdot) = \arg \max_{\bar{c}^{(i)}(\cdot)} \frac{(\bar{y}_{(s)}(\cdot) D_i \bar{c}^{(i)}(\cdot))^2}{\left\| D_i \bar{c}^{(i)}(\cdot) \right\|^2} ,$$

де

$$D_i = Z(\overline{\overline{X}}_{(i)})(x_{(i)}^{1\otimes} \vdots \cdots \vdots x_{(i)}^{k_i \otimes}) .$$

Звідси за аналогією з (19.15) знаходимо, що

$$\overline{\overline{c}}^{(i\ )}(\cdot) = \left[D_i\right]^{\div} \overline{y}_{(s)}(\cdot) , \tag{19.50}$$

а

$$\min_{\overline{c}^{(i)}(\cdot)} \left[ \Pr_{\overline{L(\overline{X}_{(i)}(\cdot))}} \overline{y}_{(s)}(\cdot) \right]^2 =$$

$$= \overline{y}_{(s)}^T(\cdot) Z(\overline{X}_{(i)}(\cdot)) \overline{y}_{(s)}(\cdot) - \overline{y}_{(s)}^T(\cdot) D_i D_i^{\div} \overline{y}_{(s)}(\cdot) \overset{\Delta}{=} \Phi(i) . \tag{19.51}$$

Тепер можна записати вираз для матричної функції $\overline{B}(\cdot)$ функціонального перетворення (19.37):

$$\overline{B}(\cdot) = (\overline{Y}(\cdot) \overline{X}_{(i_0)}^T(\cdot) - \overline{V}(\cdot) P_{(i_0)}) P_{(i_0)}^{\div} + \overline{V}(\cdot) , \tag{19.52}$$

де

$$\overline{V}(\cdot) = col(V(1), \cdots, V(N)) \quad \forall V(k) \in R^{p \times m} \text{ при } k = \overline{1, N} ,$$

$$P_{(i_0)} = \overline{X}_{(i_0)}(\cdot) \overline{X}_{(i_0)}^T(\cdot) ,$$

При цьому

$$\left\| \overline{B}(\cdot) X - \overline{Y}(\cdot) \right\|^2 \to \min_{\overline{B}(\cdot)} . \tag{19.53}$$

У термінах матриць $B(1), ..., B(N)$ функціонального перетворення (19.37) отримані результати запишуться таким чином:

1) шукані матриці $B(1), ..., B(N)$ можуть бути знайдені у вигляді

$$B(k) = (Y(k) X_{(i_0)}^T(k) - V(k) P_{(i_0)}^+) P_{(i_0)} + V(k) \quad (k = \overline{1, N}) , \tag{19.54}$$

де $V(k)$ – довільна матриця розмірності $p \times m$,

$$P_{(i_0)} = \sum_{k=1}^{N} X_{(i_0)}(k) X_{(i_0)}^T(k) ;$$

2) матрицю $X_{(i_0)}(k)$ отримуємо з матриці $X$ вхідних характеристик розглядуваного перетворення після заміни її $x_{(i_0)}^T$ -рядка на

$$\left[ \sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(k) x_{(i_0)}^{j\otimes} \right]^T ; \tag{19.55}$$

3) коефіцієнти-функції $(c_1^{(i_0)}(k), \cdots, c_{k_0}^{(i_0)}(k)) \overset{\Delta}{=} c^{(i_0)}(k)$ перетворення (19.55) можуть бути знайдені за формулами

$$c^{(i_0)}(k) = D^{+}_{i_0} y_{(s)}(k) \quad (k = \overline{1, N}, \; i_0 \in \{1, m\}), \tag{19.56}$$

де

$$D_{i_0} \; = \; Z(\overline{\overline{X}}_{(i_0)})(x^{1\otimes}_{(i_0)} \vdots \cdots \vdots x^{k_0\otimes}_{(i_0)}) \, ;$$

4) значення $k_0$ визначимо умовою

$$rank Z(\overline{X}(\cdot))(x^{1\otimes}_{(i_0)} \vdots \cdots \vdots x^{k_0\otimes}_{(i_0)} \vdots x^{(k_0+1)\otimes}_{(i_0)}) = k_0 \, ; \tag{19.57}$$

5) номер $i_0$ перетворюваного рядка матриці $X$ отримаємо, розв'язавши задачу:

$$i_0 \; = \; \arg \min_{i = \{1, m\}} \{\Phi(i)\} \, , \tag{19.58}$$

де

$$\Phi(i) = y^{T}_{(s)}(k) Z(\overline{\overline{X}}_{(i_0)}) y_{(s)}(k) - \sum_{k=1}^{N} y^{T}_{(s)}(k) D_i D^{+}_{i} y_{(s)}(k) \, . \tag{19.59}$$

### *19.6. Оптимізаційні методи ідентифікації функціонально перетворюючих систем.*

Розглянутий вище оптимізаційний підхід до ідентифікації алгебраїчних систем вигляду (18.9), поширений на задачі ідентифікації підсумовуючих (19.18), інтегруючих (19.28) та дискретно розподіляючих (17.5) перетворювачів, розвинемо й використаємо для ідентифікації розглядуваних у п. 18.6 функціонально-перетворюючих систем вигляду

$$B(t)x = y(t) \quad (t \in [\,0, T\,]) \tag{19.60}$$

на вхідних $x^{(i)} \in R^m$ та вихідних $y^{(i)}(t) \in R^p \;\; \forall \;\; t \in [0, t] \;\; (i = \overline{1, n})$ сигналах.

Побудуємо матрицю $B(t) \in R^{p \times m} \;\; \forall \;\; t \in [0, T]$ таку, щоб

$$\int_0^T \| B(t)x - y(t) \|^2 \, dt \to \min_{B(t)} \, . \tag{19.61}$$

Розглянуті раніше методи ідентифікації системи (19.60), дозволяючи точно побудувати матричну функцію $B(t)$, вимагали, щоб:

1) при лінійній ідентифікації (п. 17.6)

$$\varepsilon^2_s = \int_0^T y^{T}_{(s)}(t)(I - X^T (XX^T)^{+} X) y_{(s)}(t) dt = 0 \;\; \forall \;\; s \in \{\overline{1, p}\} \tag{19.62}$$

(див. (17.45));

2) при нелінійній ідентифікації (п. 18.6) при $\varepsilon^2_s > 0$ для деякого $(s \in \{\overline{1, p}\})$ існував номер $i_* \in \{\overline{1, m}\}$, для якого б

$$e^{T}_{i_*} X (X^T X)^{+} X^T e_{i_*} \neq 1 \tag{19.63}$$

(див. (18.64)).

Якщо ж $\varepsilon_s^2 > 0 \quad (s \in \{\overline{1,p}\})$, а номера $i_*$, який визначався б умовою (19.63), не існує, то точна ідентифікація матричної функції $B(t)$ неможлива (у класі розглядуваних нелінійних перетворень) і не залишається нічого іншого, як ідентифікувати матричну функцію $B(t)$ згідно з критерієм (19.61).

Для розв'язання задачі в цьому випадку, дискретизуючи інтервал $[0,T]$ точками $t_m \quad (m=\overline{1,N})$ з кроком $\Delta t_N$ та вводячи до розгляду (за аналогією з (19.38)) векторні функції

$$\overline{b}_{(s)}(\cdot) = str(b_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ k=\overline{1,N}),$$

$$\overline{y}_{(s)}(\cdot) = str(y_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ k=\overline{1,N})$$

дискретного аргументу $k=\overline{1,N}$ такі, що

$$\overline{b}_{(s)}(k) = b_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},\ \overline{y}_{(s)}(k) = y_{(s)}(t_k)\sqrt{\Delta t_N},$$

величину $\varepsilon_s^2$ будемо розглядати, як нев'язку системи

$$X^T\overline{b}_{(s)}(\cdot) = \overline{y}_{(s)}(\cdot) \qquad (19.64)$$

– однієї з $p$ систем матричного рівняння

$$\overline{B}(\cdot)X^T = Y(\cdot) \qquad (19.65)$$

(дискретного аналога перетворення (19.60)), де

$$\overline{B}(\cdot) = col\ \ (\overline{b}_i(\cdot)\ ,\ i=\overline{1,p}\ ),$$

$$\overline{Y}(\cdot) = col\ \ (\overline{y}_i(\cdot)\ ,\ i=\overline{1,p}\ ),$$

$$X = str(x^{(i)},\ i=\overline{1,n}).$$

Проблеми ідентифікації матричної функції $\overline{B}(\cdot)$ такої, щоб

$$\sum_{k=1}^{N}\left\| B(k)X^T - Y(k)\right\|^2 \to \min_{\overline{B}(\cdot)}, \qquad (19.66)$$

нами вивчені в попередньому пункті.

Виходячи з результатів (19.54) – (19.59) розв'язання задачі (19.66) та враховуючи, що

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\overline{B}(t_k)}{\sqrt{\Delta t_N}} = B(t)\ ,\ \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{Y}(t_k)}{\sqrt{\Delta t_N}} = Y(t)\ ,$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\overline{b}_{(s)}(t_k)}{\sqrt{\Delta t_N}} = b_{(s)}(t)\ ,\ \lim_{N\to\infty}\frac{\overline{y}_{(s)}(t_k)}{\sqrt{\Delta t_N}} = y_{(s)}(t)\ ,$$

висновуємо, що:

1) шукана матрична функція $B(t)$ визначається співвідношенням

$$B(t) = (Y(t)X_{(i_0)}^T(t) - V(t)P_{(i_0)})P_{(i_0)}^{+} + V(t) \quad t \in [0,T] \, , \tag{19.67}$$

де $V(t)$ – довільна інтегрована за $t \in [0,T]$ матрична функція розмірності $p \times m$,

$$P_{(i_0)} = \int_0^T X_{(i_0)}(t) X_{(i_0)}^T(t) dt \, ;$$

2) матричну функцію $X_{(i_0)}(t)$ отримуємо з матриці $X$ вхідних характеристик розглядуваного функціонального перетворення після заміни $x_{(i_0)}^T$ -рядка її на

$$\left[ \sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)}(t) x_{(i_0)}^{j\otimes} \right]^T \, ; \tag{19.68}$$

3) коефіцієнти-функції $(c_1^{(i_0)}(t), \cdots, c_{k_0}^{(i_0)}(t))^T \stackrel{\Delta}{=} c^{(i_0)}(t)$ перетворення (19.68) знаходяться за формулами:

$$c^{(i_0)}(t) = D_{i_0}^{+} y_{(s)}(t) \quad (t \in [0,T], \; i_0 \in \{\overline{1,m}\}) \, , \tag{19.69}$$

де

$$D_{i_0} = Z(\overline{X}_{i_0})(x_{(i_0)}^{1\otimes} \vdots \cdots \vdots x_{(i_0)}^{k_0 \otimes}) \, ,$$

$$Z(\overline{X}_{i_0}) = Z(X) + \frac{q_{i_0} q_{i_0}^T}{\left\| q_{i_0} \right\|^2} \, ,$$

$q_{i_0}$ – $i_0$ -стовпець матриці $X^+$;

4) значення $k_0$ визначається умовою

$$rank \; (x_{(i_0)}^{1\otimes} \vdots \cdots \vdots x_{(i_0)}^{k_0 \otimes} \vdots x_{(i_0)}^{k+1_0 \otimes}) = k_0 \, ; \tag{19.70}$$

5) номер $i_0$ перетворюваного згідно з (19.68) рядка матриці $X$ знаходиться як розв’язок задачі:

$$i_0 = \arg \min_{i \in \{\overline{1,m}\}} \{\Phi(i)\} \, , \tag{19.71}$$

де

$$\Phi(i) = \int_0^T y_{(s)}^T(t)(Z(\overline{X}_i) - D_i D_i^T) y_{(s)}(t) dt \, .$$

# § 20. Ідентифікаційно-псевдоінверсний підхід до моделювання задач динаміки систем із розподіленими параметрами.

## *20.1. Ще раз про інтегральні моделі динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Сформульований у § 1 та описаний у наступних чотирнадцяти параграфах підхід до моделювання прямих та обернених задач динаміки систем із розподіленими параметрами був спрямований на заміну диференціальної моделі (1.1) – (1.4)

$$
\begin{gathered}
L_1(\partial_x,\partial_t)y(x,t)=L_2(\partial_x,\partial_t)u(x,t),\\
L_r^0(\partial_t)y(x,t)\big|_{t=0}=Y_r^0(x)\ \ (r=\overline{1,R_0}),\\
L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(x,t)\Big|_{x=x^\Gamma\in\Gamma}=Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)\ \ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})
\end{gathered}
\tag{20.1}
$$

систем, які функціонують в обмеженій контуром $\Gamma$ просторово-числовій області

$$S_0^T=\left\{\ s=(x,t):x\in S_0\in R^N,t\in[0,T]\ \right\},$$

інтегрального вигляду (1.11) – (1.13)

$$
\begin{gathered}
y\ (x)=y_\infty(s)+y_0(s)+y_\Gamma(s),\\
y_0(s)=\int\limits_{-\infty}^{0}dt'\int\limits_{S_0}G(s'-s')u_0(s')dx',\\
y_\Gamma(s)=\int\limits_{0}^{T}dt'\int\limits_{R^N\backslash S_0}G(s-s')u_\Gamma(s')dx'.
\end{gathered}
\tag{20.2}
$$

При цьому малося на увазі, що (у загальному випадку) $y(x,t)$ – вектор-функція стану системи, $u(x,t)$ – вектор-функція зовнішньодинамічних збурень, $L_1(\partial_x,\partial_t)$, $L_2(\partial_x,\partial_t)$, $L_r^0(\partial_t)$ $(r=\overline{1,R_0})$ та $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ – задані матричні (у загальному випадку) диференціальні оператори, а $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$ та $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ – задані функції, якими визначаються початково-крайові умови розглядуваної системи.

Були запропоновані методи побудови матричної функції Гріна $G(s-s')$, а також методи знаходження моделюючих функцій $u_0(s')$ та $u_\Gamma(s)$ для прямих та обернених постановок задач динаміки. Були запропоновані методи розв'язання таких задач:

1) при заданих $u(x,t)$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ визначити $y(x,t)$ (пряма задача) так, щоб:

$$\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}(L_r^0(\partial_t)\,y(x,t)\big|_{t=0}-Y_r^0(x))^2\,dx\to\min\,; \tag{20.3}$$

$$\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_{\Gamma}dx\int_0^T(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(x,t)-Y_\rho^\Gamma(x,t))^2dt\to\min\,, \tag{20.4}$$

де $\Gamma$ – контур області $S_0$;

2) при заданих функціях $Y_T(x)$ $(x\in S_0)$, $Y_X(t)$ $(t\in[0,T])$, або векторі $Y^T=((Y_{ij},\ j=\overline{1,J}),i=\overline{1,I})$, визначити одну з функцій $u(x,t)$, $Y_r^0(x)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ (або їх комбінацію) так, щоб:

а) $$\int_{S_0}(y(x,T)-Y_T(x))^2dx\to\min, \tag{20.5}$$

б) $$\int_0^T(y(X,t)-Y_X(t))^2\,dt\to\min\,, \tag{20.6}$$

в) $$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y(x_i,t_j)-Y_{ij})^2\to\min \tag{20.7}$$

(задачі керування);

3) визначити функцію $u(x,t)$ зовнішньодинамічних збурень, функції $Y_r^0(x)$ початкових та функції $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ крайових умов за спостереженням $Y_H(x,t)$ стану системи в деякій розподіленій або континуальній області $\Omega\subset S_0$ при $\theta\le T$ так, щоб

$$\int_{\Omega}dx\int_0^\theta(y(x,t)-Y_H(x,t))^2\,dt\to\min\,. \tag{20.8}$$

Моделюючі функції $u_0(x,t)$, $u_\Gamma(x,t)$ разом із керуючою функцією $u(x,t)$ визначалися з одного або кількох (залежно від постановки задачі) співвідношень

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')\Big|_{t=T} u(s')\,ds' + \int_{S_0} dx' \int_{-\infty}^{0} G(s-s')\Big|_{t=T} u_0(s')\,dt' +$$

$$+ \int_{R^N \setminus S_0} dx' \int_0^T G(s-s')\Big|_{t=T} u_\Gamma(s')dt' = Y_T(x)\,, \qquad (20.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')\Big|_{x=X} u(s')\,ds' + \int_{S_0} dx' \int_{-\infty}^{0} G(s-s')\Big|_{x=X} u_0(s')\,dt' +$$

$$+ \int_{R^N \setminus S_0} dx' \int_0^T G(s-s')\Big|_{x=X} u_\Gamma(s')\,dt' = Y_X(t)\,, \qquad (20.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')\Big|_{\substack{x=x_i\\ t=tj}} u(s')\,ds' + \int_{S_0} dx' \int_{-\infty}^{0} G(s-s')\Big|_{\substack{x=x_i\\ t=tj}} u_0(s')\,dt' +$$

$$+ \int_{R^N \setminus S_0} dx' \int_0^T G(s-s')\Big|_{\substack{x=x_i\\ t=tj}} u_\Gamma(s')\,dt' = Y_{ij} \ \ (i=\overline{1,I};\ \ j=\overline{1,J})\,, \qquad (20.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u(s')\,ds' + \int_{S_0} dx' \int_{-\infty}^{0} L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u_0(s')\,dt' +$$

$$+ \int_{R^N \setminus S_0} dx' \int_0^T L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{t=0} u_\Gamma(s')dt' = Y_r^0(x)\ \ (r=\overline{1,R_0})\,, \qquad (20.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{x\in\Gamma} u(s')\,ds' + \int_{S_0} dx' \int_{-\infty}^{0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{x\in\Gamma} u_0(s')\,dt' +$$

$$+ \int_{R^N \setminus S_0} dx' \int_0^T L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{x\in\Gamma} u_r(s')\,dt' = Y_\rho^\Gamma(x,t)\ \ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})\,. \qquad (20.13)$$

Для обернення записаних залежно від постановки задачі співвідношень (20.9) – (20.13) таких, щоб

$$\int \left( L_l(\sigma,u(\cdot),u_0(\cdot),u_\Gamma(\cdot)) - L_p(\sigma,u(\cdot),u_0(\cdot),u_\Gamma(\cdot)) \right)^2 d\sigma \to \min_{u(\cdot),u_0(\cdot),u_\Gamma(\cdot)},$$

де $L_l(\cdot)$ – ліва частина, $L_p(\cdot)$ – права частина рівняння, що обертається, $\sigma = x \in S_0$, $\sigma = t \in [0,T]$, $\sigma = (x,t) \in S_0$, $\sigma = (x,t) \in \Gamma \times [0,T]$ залежно від номера групи рівнянь (20.9) – (20.13), рівняння ці приводилися до вигляду:

а) $\int A(s')\bar{u}(s')ds' = Y;$ (20.14)

б) $B(s)\bar{u} = Y(s),$ (20.15)

де $A(s')$, $B(s)$ – матричні функції, $Y$, $\bar{u}$ – вектори, а $Y(s)$ – векторна функція, які визначаються через матричну функцію Гріна, векторні функції $Y_T(x)$, $Y_X(t)$, $Y_r^o(x)$, $Y_\rho^\Gamma(x,t)$, $u_0(x,t)$, $u_\Gamma(x,t)$, значення $Y_{ij}$ та векторну функцію $\bar{u}(s) = col(u(s),u_0(s),u_\Gamma(s))$, дискретизовані за нештрихованими (випадок а), або штрихованими (випадок б) координатами відповідно (область інтегрування в (20.14) визначається постановкою конкретної задачі).

Це дозволило побудувати та дослідити на точність і однозначність множини керуюче-моделюючих вектор-функцій $u(s)$, $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, або їх значення в точках дискретизації рівнянь (20.9) – (20.13) за штрихованими координатами. При цьому

$$\bar{u}(s) \in \Omega_a = \{\bar{u}(s) : \bar{u}(s) = A^T(s)P_A^+(Y - A_v) + v(s)\}, \tag{20.16}$$

$$\bar{u} \in \Omega_b = \{\bar{u} : \bar{u} = P_B^+(B_Y - P_B v) + v\}, \tag{20.17}$$

де

$$P_A = \int A(s)A^T(s)\,ds, \quad P_B = \int B^T(s)B(s)ds,$$

$$A_v = \int A(s)v(s)ds, \quad B_Y = \int B^T(s)Y(s)\,ds,$$

а $v(s)$, $v$ – довільні вектор-функція та вектор, розмірності яких визначаються розмірностями вектор-функції $\bar{u}(s)$ та вектора $\bar{u}$.

Таким чином була побудована згідно з (20.2) вектор-функція стану $y(x,t)$, були відновлені або побудовані вектор-функції початкових $(Y_r^0(x),\ r = \overline{1,R_0})$ та крайових $(Y_\rho^\Gamma(x,t),\ \rho = \overline{1,R_\Gamma})$ умов (20.1) для задачі спостереження (20.8) та задач керування (20.5) – (20.7).

Недоліком прореферованого підходу до розв'язання задач (20.3) – (20.8) є громіздкість рівнянь (20.14), (20.15), що обертаються в процесі їх розв'язання, а також великі розмірності матриць $P_A$, $P_B$ у виразах (20.16), (20.17), які безпосередньо залежать від вибраної кількості точок дискретизації рівнянь (20.9) – (20.13). Проте, ці недоліки можна подолати, про що свідчить розв’язання окремих задач.

### *20.2. Суть ідентифікаційно-псевдоінверсійного підходу до побудови інтегральних моделей динаміки систем із розподіленими параметрами.*

Розглянемо один із варіантів покращання викладеної методики розв’язання задач (20.3) – (20.8). Як відзначалося в § 16, проблеми громіздкості та великих розмірностей, які виникають у процесі розв’язання деяких задач, дещо зменшилися б, якщо б можна було вектор-функцію $y(x,t)$ стану системи (20.1) в області $S_0^T$ зобразити у вигляді

$$y(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \qquad (20.18)$$

а не інтегральними співвідношеннями (20.2). У такому випадку зникла б необхідність визначення моделюючих вектор-функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$, що значно спростило б рівняння (20.9) – (20.13), які відповідають задачам (20.3) – (20.8), а, отже, і (20.14), (20.15).

Ураховуючи наш підхід до обернення рівнянь (20.9) – (20.13), який вимагає дискретизації їх за однією з груп (дискретизованих – недискретизованих) просторово-часових координат, дискретизуємо відповідним чином матричну функцію $G(s-s')$ у (20.18). Отримаємо:

$$\int_{S_0^T} G_1(s')u(s')ds' = y, \qquad (20.19)$$

або

$$G_2(s)u = y(s), \qquad (20.20)$$

де

$$\begin{gathered} G_1(s') = col(G(s_i - s'),\ i=\overline{1,p}), \\ G_2(s) = str(G(s-s_i'),\ i=\overline{1,m}), \\ y = col(y(s_i),\ i=\overline{1,p}), \quad u = col(u(s_i'),\ i=\overline{1,m}). \end{gathered} \qquad (20.21)$$

Бачимо, що вміння будувати матричні функції $G_1(s')$ та $G_2(s)$ цілком вистачає для побудови рівнянь (20.14), (20.15), які розв’язують сформульовані вище задачі (20.3) – (20.8). На ідентифікації (побудові) матричних функцій $G_1(s')$ та $G_2(s)$ на основі спостережень (дискретних або неперервних) за функціями $u(s)$ та $y(s)$ і була зосереджена наша увага в § 17 – § 19. При цьому припускалося, що спостереженню доступні:

а) матрична функція

$$U(s) = str(u^{(i)}(s),\ i = \overline{1,n}) \tag{20.22}$$

спостереження керуючої (вхідної) функції $u(s)$ та матриця

$$Y = str(y^{(i)},\ i = \overline{1,n}) \tag{20.23}$$

значень вектора $y$, визначеного відповідно до (20.21);

б) матриця

$$U = str(u^{(i)},\ i = \overline{1,n}) = col(u_{(i)}^T,\ i = \overline{1,m}) \tag{20.24}$$

виміряних відповідно до (20.21) зовнішньодинамічних впливів $u(s)$ та матрична функція

$$Y(s) = str(y^{(i)}(s),\ i = \overline{1,n}) \tag{20.25}$$

виразів для вектор-функції $y(s)$ стану системи, що їй відповідають. Через $n$ позначена кількість спостережень за системою. У цьому випадку визначення матричних функцій $G_1(s')$ та $G_2(s)$ таких, що

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{S_0^T} G_1(s')u^{(i)}(s')ds' - y^{(i)} \right\|^2 \to \min_{G_1(s)}, \tag{20.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{S_0^T} \left\| G_2(s)u^{(i)} - y^{(i)}(s) \right\|^2 ds \to \min_{G_2(s)}, \tag{20.27}$$

зводилося до обернення таких векторних інтегральних та функціональних рівнянь:

$$\int_{S_0^T} G_1(s')U(s')ds' = Y, \tag{20.28}$$

$$G_2(s)U = Y(s). \tag{20.29}$$

За умови, що матриці $U$, $Y$, матрична функція $U(s)$ та функція $Y(s)$ відомі, були побудовані (див. § 17 – § 19) матричні функції $G_1(s')$ та $G_2(s)$, а, отже, була розв'язана задача побудови двох перерізів матричної функції Гріна $G(s-s')$ в інтегральному зображенні (20.18) розв'язку задачі (20.1).

### *20.3. Інтегральні моделі в розв'язанні задач керування динамікою систем із розподіленими параметрами.*

Побудовані з використанням методик, описаних у трьох попередніх параграфах, вектор-функції $G_1(s')$ та $G_2(s)$ дають перерізи матричної функції Гріна $G(s-s')$, яких вистачає для чисельно-аналітичної побудови як самої функції $G(s-s')$, так і визначеного з її допомогою інтегрального розв'язку системи (20.1) у формі (1.11) – (1.13). Цей розв'язок буде відповідати (з визначеним ступенем точності) задачі (1.1) – (1.4) (або, що еквівалентно, – (9.1)), причому його близькість до точного розв'язку буде визначатись як кількістю точок, що фігурують у визначенні (20.21) вектор-функцій $G_1(s')$, $G_2(s)$, так і співвідношенням їх числа з розмірами області $S_0^T$ та ступенем гладкості початково-крайових умов задачі.

Інакше кажучи, побудовану нами функцію $G(s-s')$ можна використовувати як базову при побудові розв'язку (1.11) – (1.13) (або, що еквівалентно, – (20.2)) початково-крайової задачі (20.1). Методики, запропоновані вище, дозволяють знайти керуюче-моделюючі функції $u(s),\ u_0(s),\ u_\Gamma(s)$ або їх дискретні значення для задач (20.3) – (20.8).

Розв'язок цих задач можна спростити за умови, що побудовані нами перерізи $G_1(s')$, $G_2(s)$ повністю відповідають початково-крайовим умовам та адекватно описують досліджуваний процес. Це означає, що пряма задача, визначена співвідношеннями (20.1), (20.3), (20.4) – розв'язана, а обернені задачі (20.5) – (20.7) розв'яжемо, виходячи з (20.18), вважаючи функцію $u(x,t)$ керуючою. У цьому випадку функція $u(s)$ або її дискретне значення

$$\bar{u} = col(u(s_m), m=\overline{1,M_i}) \quad (i=\overline{1,2}) \tag{20.30}$$

знайдемо з обернення рівнянь

$$\int\limits_{S_0^T} G(s-s')\big|_{t=T} u(s')ds' = Y_T(x), \tag{20.31}$$

$$\int\limits_{S_0^T} G(s-s')\big|_{x=X} u(s')ds' = Y_X(t), \tag{20.32}$$

$$\int\limits_{S_0^T} G(s-s')\big|_{s=s_k} u(s')ds' = Y_k \quad (k=\overline{1,K}), \tag{20.33}$$

де

$$col(Y_k, k=\overline{1,K}) = Y .$$

Значення $\bar{u}^*(s)$ та $\bar{u}^*$ визначеної в (20.31) – (20.33) функції $u(s)$ та вектора значень (20.30) такі, що

$$\bar{u}_1^* = \arg\min_{\bar{u}_1} \Phi_1, \tag{20.34}$$

$$\bar{u}_2^* = \arg\min_{\bar{u}_2} \Phi_2, \tag{20.35}$$

$$\bar{u}^*(s) = \arg\min_{u(s)} \Phi_3, \tag{20.36}$$

де

$$\Phi_1 = \int\limits_{S_0} [\int\limits_{S_0^T} G(s-s')\big|_{t=T} u(s')ds' - Y_T(x)]^2 dx ,$$

$$\Phi_2 = \int_0^T [\int_{S_0^T} G(s-s')\Big|_{x=X} u(s')ds' - Y_X(t)]^2 dt ,$$

$$\Phi_3 = \sum_{k=1}^{K} [\int_{S_0^T} G(s-s')\Big|_{s=s_k} u(s')ds' - Y_k]^2 ,$$

визначимо співвідношеннями

$$\bar{u}_1^* \in \Omega_T = \left\{\bar{u}_1 : \bar{u}_1 = P_T^+ G_{TY}^T + v_1 - P_T^+ P_T v_1, \forall v_1 \in R^{M_1}\right\}, \quad (20.37)$$

$$\bar{u}_2^* \in \Omega_X = \left\{\bar{u}_2 : \bar{u}_2 = P_X^+ G_{XY}^T + v_2 - P_X^+ P_X v_2, \forall v_2 \in R^{M_2}\right\}, \quad (20.38)$$

$$\bar{u}^*(s) \in \Omega_K = \{u(s) : u(s) = G_K^T(s) P_K^+ Y + v(s) -$$
$$- G_K^T(s) P_K^+ G_{Kv}, \forall v(s)\} \quad (20.39)$$

відповідно.

Тут

$$P_T = \int_{S_0} G_T^T(x) G_T(x) dx, \quad G_{TY} = \int_{S_0} G_T^T(x) Y_T(x) dx,$$

$$P_X = \int_0^T G_X^T(t) G_X(t) dt, \quad G_{XY} = \int_0^T G_X^T(t) Y_X(t) dt, \quad (20.40)$$

$$P_K = \int_{S_0^T} G_K(s) G_K^T(s) ds, \quad G_{Kv} = \int_{S_0^T} G_K(s) v(s) ds,$$

а

$$G_T(x) = str(G(s-s_m)\Big|_{t=T}, m = \overline{1, M_1}),$$

$$G_X(t) = str(G(s-s_m)\Big|_{x=X}, m = \overline{1, M_2}),$$

$$G_K(s) = col(G(s_k - s), k = \overline{1, K}).$$

Точність розв'язку задач (20.34) – (20.36) буде визначатись величинами:

$$\varepsilon_1^2 = \min_{\bar{u} \in \Omega_T} \Phi_1 = \int_{S_0} Y_T^2(x) dx - G_{TY}^T P_T^+ G_{TY},$$

$$\varepsilon_2^2 = \min_{\bar{u} \in \Omega_X} \Phi_2 = \int_0^T Y_X^2(t) dt - G_{XY}^T P_X^+ G_{XY}, \quad (20.41)$$

$$\varepsilon_3^2 = \min_{u(s) \in \Omega_K} \Phi_3 = Y^T Y - Y^T P_K P_K^+ Y .$$

Для випадку, коли визначена відповідно до (20.39) функція (20.18) або її дискретний еквівалент не узгоджують розв'язок задачі ( $\varepsilon_i^2 >> 0$ для $i = \overline{1,3}$ ) з початково-крайовими умовами, при побудові керуючої функції $u(s)$ будемо додатково до (20.31) – (20.33) вимагати виконання початково-крайових умов (20.1) неперервно (для (20.31), (20.32)) або дискретно (для (20.33)). Це змінить визначення кожного з функціоналів $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ у (20.34) – (20.36) на величину

$$\Delta\Phi = \int_{S_0} \sum_{r=1}^{R_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)\big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx +$$

$$+\int_{\Gamma} dx \int_0^T \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x,t))^2 dt$$

для задач (20.34), (20.35) та

$$\Delta\Phi = \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{r=1}^{R_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l}} - Y_r^0(x_l))^2 +$$

$$+\sum_{l=1}^{L_\Gamma} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s)\Bigg|_{\substack{t=t_l\\x=x_l^\Gamma}} - Y_\rho^\Gamma(x_l^\Gamma, t_l))^2$$

для задачі (20.36).

Тут $x_l \in S_0 \quad (l=\overline{1,L_0}),\ x_l^\Gamma \in \Gamma \quad (l=\overline{1,L_\Gamma}),\quad t_l \in [0,T] \quad (l=\overline{1,L_\Gamma})$ – точки дискретизації початково-крайових умов (20.1).

Розв'язок задач (20.34) – (20.36) у цьому випадку буде визначатися співвідношеннями (20.37) – (20.39), в яких тепер, на відміну від (20.40):

$$P_T = \int_{S_0} G_T^T(x) G_T(x) dx + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T G_r^0(x) dx +$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(x,t)]^T G_\rho^\Gamma(x,t) dt,$$

$$P_X = \int_0^T G_X^T(t) G_X(t) dt + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T G_r^0(x) dx +$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(x,t)]^T G_\rho^\Gamma(x,t) dt, \qquad (20.42)$$

$$P_K = \int_{S_0^T} G^{0\Gamma}(s')[G^{0\Gamma}(s')]^T ds',$$

$$G_{TY} = \int_{S_0} G_T^T(x) Y_T(x) dx + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T Y_r^0(x) dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(x,t)]^T Y_\rho^\Gamma(x,t) dt,$$

$$G_{XY} = \int_0^T G_X^T(t) Y_X(t) dt + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T Y_r^0(x) dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma} dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(x,t)]^T Y_\rho^\Gamma(x,t) dt, \qquad (20.43)$$

$$G_{Kv} = \int_{S_0^T} G^{0\Gamma}(s') v(s') ds',$$

$$G_r^0(x) = str(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m)\Big|_{t=0}, m=\overline{1,M_1}) \quad (r=\overline{1,R_0}),$$
$$G_\rho^\Gamma(x,t) = str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m)\Big|_{x\in\Gamma}, m=\overline{1,M_1}) \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}), \tag{20.44}$$
$$Y = col((Y_k, k=\overline{1,K}),((Y_r^0(x_{rk}), k=\overline{1,K_r}), r=\overline{1,R_0}),$$
$$((Y_\rho^\Gamma(x_{\rho k}, t_{\rho k}), k=\overline{1,K_\rho}), \rho=\overline{1,R_\Gamma})),$$

а вектор-функція $G_K(s)$ замінена на

$$G^{0\Gamma}(s') = col((G_k(s'),((L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_{rk}}}, k=\overline{1,K_r}), r=\overline{1,R_0}),$$

$$((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{\substack{t=t_{\rho k}\\ x=x_{\rho k}\in\Gamma}}, k=\overline{1,K_\rho}), \rho=\overline{1,R_\Gamma})).$$

Тут і далі $x_{rk}$, $x_{\rho k}$, $t_{\rho k}$ – точки дискретизації початково-крайових умов (20.1).

Точність розв’язаних таким чином задач буде визначатися співвідношеннями (20.41) з урахуванням визначених у (20.42) і (20.43) матриць $P_T$, $P_X$, $P_K$ та векторів $Y$, $G_{TY}$, $G_{XY}$.

### *20.4. Інтегральні моделі в розв’язанні задач керування динамікою систем із розподіленими параметрами.*

Зупинимося коротко на розв’язанні задачі (20.8), яка є близькою (за математичною постановкою) до розглянутих вище задач керування.

Будемо виходити з того, що початково-крайові умови даної системи визначаються рівняннями (20.1), а функція стану – рівнянням (20.18). Задача (20.8) буде розв’язана, якщо буде визначена функція $u(s)$ ($s\in S_0^T$) або її дискретний аналог $\bar{u} = str(u(s'_m), m=\overline{1,M})$ такі, що

$$\delta_1^2 = \left\| \int_{S_0^T} G_1(s')u(s')ds' - \bar{Y}_H \right\|^2 \to \min_{u(s)}, \tag{20.45}$$

$$\delta_2^2 = \int_\Omega \|G_2(s)\bar{u} - Y_H(s)\|^2 ds \to \min_{\bar{u}}, \tag{20.46}$$

де $\bar{Y}_H = col(Y_H(s_l), l=\overline{1,L})$

дискретизоване значення функції спостереження $Y_H(s)$, а

$$G_1(s') = col(G(s_l - s'), l=\overline{1,L}),$$
$$G_2(s) = str(G(s-s'_m), m=\overline{1,M}).$$

Звідси знаходимо, що

$$u(s) = G_1^T(s)P_1^+\overline{Y}_H + v(s) - G_1^T(s)P_1^+P_v,$$

$$\overline{u} = P_2^+G_Y + \overline{v} - P_2^+P_2\,\overline{v},$$

де $v(s)$ – довільна інтегрована в $S_0^T$ функція, $\overline{v}$ – довільний вектор такої самої розмірності, як і вектор $\overline{u}$,

$$P_1 = \int_{S_0^T} G_1(s)G_1^T(s)ds,\ P_2 = \int_{\Omega} G_2^T(s)G_2(s)ds,$$

$$P_v = \int_{S_0^T} G_1(s)v(s)ds,\ G_Y = \int_{\Omega} G_2^T(s)Y_H(s)ds.$$

При цьому

$$\delta_1^2 = \overline{Y}_H^T(I - P_1\,P_1^+)\overline{Y}_H \qquad (20.47)$$

$$\delta_2^2 = \int_{\Omega} Y_H^2(s)ds - G_Y^T P_2^+ G_Y. \qquad (20.48)$$

Задача відновлення $u(s)$ та $\overline{u}$, відповідно до (20.45), (20.46), буде розв'язана однозначно, якщо

$$\lim_{N\to\infty} \det\left[G_1^T(s_i)G_1(s_j)\right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0 \quad \forall s_i,\ s_j \in S_0^T$$

та $\det P_2 > 0$ відповідно.

Зауважимо, що розв'язок задачі відновлення функції $u(s)$ ($s \in S_0^T$), а відповідно й стану $y(s)$ ($s \in S_0^T$), за спостереженням $Y_H(s)$ ($s \in \Omega \subset S_0^T$) при відомих початково-крайових умовах можна покращати, ураховуючи формулювання критеріїв (20.45), (20.46). У цьому випадку функція $u(s)$, або вектор $\overline{u}$ її значень визначимо внаслідок обернення таких систем рівнянь:

а) для задачі (20.45):

$$\int_{S_0^T} G_1(s')u(s')ds' = \overline{Y}_H,$$

$$\int_{S_0^T} G_{rk}^0(s')u(s')ds' = Y_r^0(x_{rk})\quad (x_{rk} \in S_0, k = \overline{1,K_r}, r = \overline{1,R_0}), \qquad (20.49)$$

$$\int_{S_0^T} G_{\rho k}^{\Gamma}(s')u(s')ds' = Y_{\rho}^{\Gamma}(s_{\rho k})\quad (s_{\rho k} \in \Gamma\times[0,T], k = \overline{1,K_{\rho}}, \rho = \overline{1,R_{\Gamma}});$$

б) для задачі (20.46):

$$\begin{aligned}&G_2(s)\bar{u} = Y_H(s) \quad (s \in \Omega),\\ &G_r^0(x)\bar{u} = Y_r^0(x) \quad (x \in S_0, r = \overline{1, R_0}),\\ &G_\rho^\Gamma(s)\bar{u} = Y_\rho^\Gamma(s) \quad (s \in \Gamma \times [0,T], \rho = \overline{1, R_\Gamma}),\end{aligned} \tag{20.50}$$

де функції $G_r^0(x), G_\rho^\Gamma(s)$ збігаються з визначеними в (20.44), а

$$G_{rk}^0(s') = L_r^0(\partial_t) G(s - s')\Big|_{\substack{t=0,\\ x=x_{rk}}},$$

$$G_{\rho k}^\Gamma(s') = L_\rho^\Gamma(\partial_x) G(s - s')\Big|_{s = s_{\rho k} \in \Gamma \times [0,T]}.$$

Розв'язок задачі відновлення функції $u(s)$ та її значення $\bar{u}$ в цьому випадку запишемо у вигляді

$$u(s) = G_H^T(s) P_{1H}^+ \bar{Y}_H + v(s) - G_H^T(s) P_{1H}^+ G_{Hv}, \tag{20.51}$$

$$\bar{u} = P_{2H}^+ G_{HY}^T + v - P_{2H}^+ P_{2H} v, \tag{20.52}$$

де $v(s)$ – довільна інтегрована в $S_0^T$ функція, $\bar{v}$ – довільний вектор розмірності такої ж, як і вектор $\bar{u}$, а

$$\bar{Y}_H = col((Y_H(s_l), l = \overline{1, L}), ((Y_r^0(x_k), k = \overline{1, K_r}), r = \overline{1, R_0}),$$
$$((Y_\rho^\Gamma(s_k), k = \overline{1, K_\rho}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}))$$

$$G_H(s) = col(G_1(s), ((G_{rk}^0(s), k = \overline{1, K_r}), r = \overline{1, R_0}),$$
$$((G_{\rho k}^\Gamma(s), k = \overline{1, K_\rho}), \rho = \overline{1, R_\Gamma})),$$

$$P_{1H} = \int_{S_0^T} G_H(s) G_H^T(s) ds,$$

$$P_{2H} = \int_\Omega G_2^T(s) G_2(s) ds + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T G_r^0(x) dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_\Gamma dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(s)]^T G_\rho^\Gamma(s) dt,$$

$$G_{HY} = \int_\Omega G_2^T(s) Y_H(s) ds + \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} [G_r^0(x)]^T Y_r^0(x) dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_\Gamma dx \int_0^T [G_\rho^\Gamma(s)]^T Y_\rho^\Gamma(s) dt,$$

$$G_{Hv} = \int_{S_0^T} G_H(s) v(s) ds.$$

Точність розв'язання задачі, за аналогією з (20.47) та (20.48), буде визначатися співвідношеннями:

$$\delta_1^2 = \min_{u(s)} \left[ \sum_{l=1}^{L} (y(s_l) - Y_H(s_l))^2 + \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{k=1}^{K_r} (y(0, x_{rk}) - Y_{rk}^0)^2 + \right.$$

$$\delta_1^2 = \min_{u(s)}\left[\sum_{l=1}^{L}(y(s_l)-Y_H(s_l))^2+\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{k=1}^{K_r}(y(0,x_{rk})-Y_{rk}^0)^2+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{k=1}^{K_\rho}(y(s_{\rho k})-Y_{\rho k}^\Gamma)^2\right]=\bar{Y}_H^T(I-P_{1H}P_{1H}^+)\bar{Y}_H,$$

$$\delta_2^2 = \min_{\bar{u}}\left[\int_\Omega (y(s)-Y_H(s))^2\,ds+\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}(L_r^0(\partial_t)y(x,t)\big|_{t=0}-Y_r^0(x))^2dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_\Gamma dx\int_0^T(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(x,t)-Y_\rho^\Gamma(x,t))^2dt\right]=\int_\Omega Y_H^2(s)ds+\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}(Y_\Gamma^0(x))^2dx+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_\Gamma dx\int_0^T(Y_\rho^\Gamma(s))^2dt-G_{HY}^TP_{2H}^+G_{HY}.$$

# ЛІТЕРАТУРА

1. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – М., 1977.

2. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практитчна стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К., 2000.

3. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

4. Бондарь С.В. Псевдообращение матриц в задаче идентификации и построения адаптивных регуляторов // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №3. – С. 49–58.

5. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

6. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. –К., 1988.

7. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. О разностном подходе к решению задач оптимального управления с распределенными параметрами // Числ. методы механики сплошн. среды. – 1977. – № 8. – С. 25 – 40.

8. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

9. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Наконечный А.Г. Минимаксные оценки и регуляторы динамических систем. – К., 1978. (Препринт / АН УРСР, Ін-т кібернетики; № 78–31).

10. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Наконечный А.Г. Регуляторы и минимаксные фильтры для систем с распределенными параметрами. – К., 1979. (Препринт / АН УРСР, Ін-т кібернетики; № 28).

11. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантомахеническими системами. – М., 1984.

12. Волощук С.Д., Стоян В.А. Проблемы оптимизации в моделировании точечно управляемых динамических систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 4. – С. 53–66.

13. Гантмахер А.Ф. Теория матриц. – М., 1967.

14. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач практической устойчивости численными методами и оптимизация динамики пучков // ПММ. – 1987.-51. Вып. 5. – С. 717–723.

15. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки. – К., 1997.

16. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – К., 1995.

17. Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К., Беляев Н.Н. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде. – К., 1997.

18. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для объектов с распределенными параметрами. – К., 1988.

19. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Классическая теория поля. – М. – Л., 1949.

20. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №2. – С. 98–107.

21. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К., 1978.

22. Кириченко Н.Ф. Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. – К., 1972.

23. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. – 1995. – №1. – С. 114–127.

24. Кириченко Н.Ф. Рекуррентность операций псевдообращения в задачах идентификации и синтеза матриц // Кибернетика и вычислительная техника. – 1994. – № 104. – С. 17–21.

25. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Множественные проблемы анализа и синтеза систем управления // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №3. – С. 68–77.

26. Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т. Оптимальный синтез структур для линейных систем управления // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1, 2. – С. 162–171.

27. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей управления // Проблемы управления и информатики. – 2001. – №1. – С. 6–22.

28. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения // Автоматика. – 1993. – №5. – С. 69–81.

29. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – №3. – С. 90–104.

30. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Построение общего решения начально-краевых задач, задач наблюдения и терминального управления для систем с распределенными параметрами // Электромагнитные волны и электронные системы-1999. – № 6. – С. 4–15.

31. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. – К., 1985.

32. Куржанский А.Б. Об информационных множествах управляемой системы // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 1. – С. 14–17.

33. Ладиков-Роев Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах. – М., 1978.

34. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. математ. и мех. – 1942. – Т. VI, вип. 2, 3. – С. 12–36.

35. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М., 1955.

36. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М., 1975.

37. Ляшенко И.Н., Григоркив В.С. Моделирование динамики многосекторной экономики с кусочно-линейными производственными функциями // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – №3. – С.156–162.

38. Ляшенко И.Н. Макромодели экономического роста. К., 1979.

39. Ляшко И.И. Численное решение псевдопараболических уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 5. – С. 103–108.
40. Ляшко И.И., Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Спивак А.Ю. Численное решение псевдогиперболических уравнений // Доповіді НАН України. – 1998. – № 5. – С. 29–33.
41. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. – К., 1998.
42. Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Тригуб А.С. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. – К., 1998.
43. Наконечный А.Г. Минимаксные оценки параметров // Вычислит. и прикл. мат. – 1979. – Вып. 39. – С. 17–24.
44. Петрашень Г.И. К теории колебаний тонких пластин // Уч. записки ЛГУ. Сер.: физ.-мат. науки. – 1951. – № 149 вип. 24. – С. 67–83.
45. Петрашень Г.И., Молотков Л.А. О некоторых проблемах динамической упругости в случае сред, содержащих тонкие слои // Вестник ЛГУ. Сер.: физ. и хим. – 1958. – № 22, вип. 4. – С. 137–156.
46. Самойленко Ю.И., Губарев В.Ф., Кривонос Ю.Г. Управление быстропротекающими процессами в термоядерных установках. – К., 1988.
47. Селезов І.Т. Дослідження поперечних коливань пластини // Прикладна механіка. – 1960. – Т. VI, вип.5. – С. 13–19.
48. Селезов І.Т. Про гіпотези, які лежать в основі утончених рівнянь поперечних коливань пластин і деякі особливості цих рівнянь // Прикл. механіка. – 1961. – Т. VII. – С.43–48.
49. Сергиенко И.В. Об основных направлениях развития информатики // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 6. – С. 3–108.
50. Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Скопецкий В.В. Задачи с разрывными решениями и высокоточные алгоритмы их дискретизации // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 4. – С. 13–30.
51. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
52. Скопецкий В.В., Стоян В.А. Задача приоритетного управления динамикой систем с распределенными параметрами в неограниченной пространственно-временной области // Доповіді НАН України. – 2001. – № 1.
53. Скопецкий В.В., Стоян В.А. О некоторых новых результатах по решению проблем моделирования и управления динамикой систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 73–84.
54. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – К., 2001.
55. Скопецкий В.В., Стоян В.А., Благовещенская Т.Ю. Об интегральных и функциональных преобразованиях в пространственно-временных областях с пустотами // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2.

56. Скопецкий В.В., Стоян В.А. О некоторых новых результатах по решению проблем моделирования и управления системами с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3.

57. Соколов А.А. Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики // Труды Свердловск. горно-геолог. ин-та. – Свердловск, 1946.

58. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. – Чернівці, 1995.

59. Стоян В.А. Про один підхід до розв'язання просторових осесиметричних задач еластодинаміки товстих плит // ДАН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 12. – С. 40–43.

60. Стоян В.А. Про задачу спостереження для гіперболічних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 1997. – № 4. – С. 206–212.

61. Стоян В.А. Обращение линейных пространственно-временных преобразований в ограниченных областях // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 5. – С. 149–156.

62. Стоян В.А. Об уравнениях и решении однородной осесимметричной задачи динамики упругого слоя // ДАН УССР. Сер.А. – 1979. – № 9. – С. 733–736.

63. Стоян В.А., Кириченко Н.Ф. О терминальном управлении динамикой толстого упругого слоя // Доповіді НАН України. – 1997. – № 11. – С. 99–103.

64. Стоян В.А. О терминальном управлении гиперболическими системами // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 4. – С. 25–30.

65. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 79–86.

66. Стоян В.А. Псевдообращение интегральных операторов в задачах наблюдения, терминального управления и моделирования динамики систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 4. – С. 112–120.

67. Стоян В.А. Метод псевдообернених матриць в задачах динаміки систем з розподіленими параметрами // Доповіді НАН України. – 1998. – № 7. – С. 108–112.

68. Стоян В.А. Про задачу спостереження для системи з розподіленими параметрами // Доповіді НАН України. – 1998. – № 9. – С. 121–125.

69. Стоян В.А. Про формули диференціювання псевдообернених матриць та матричних функцій // Доповіді НАН України. – 1999. – № 6. – С. 107–111.

70. Стоян В.А. Про формули обернення дискретно-спостережуваних функцій стану систем з розподіленими параметрами // Доповіді НАН України. – 1998. – № 11. – С. 106–111.

71. Стоян В.А. Про формули обчислення скінченних приростів псевдообернених матриць та матричних функцій // Доповіді НАН України. – 1999. – № 7. – С. 99–103.

72. Стоян В.А. К оптимизации псевдообращений линейных пространственно-временных преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 6.

73. Стоян В.А. Псевдообращение возмущенных и невозмущенных вектор-функций Грина для систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 1. – С. 23–30.

74. Стоян В.А. О задаче идентификации матрично интегрирующих систем // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 5. – С. 157–170.

75. Стоян В.А. О конечных приращениях невязок псевдообращений линейных пространственно-временных преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 1. – С. 73–84.

76. Стоян В.А. Об оптимизации моделей динамики систем с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 2. –С. 100–111.

77. Стоян В.А., Волощук С.Д. Про моделювання задач динаміки гіперболічних систем // Доповіді НАН України. – 2003. – № 2. – С. 71–77.

78. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К., 1969.

79. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М., 1966.

80. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М., 1978.

81. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. – К., 1992.

82. Чикрий А.А. Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах управления // Проблемы управления и информатики. – 1994. – № 1/2. – С. 47–59.

83. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения выпуклых экстремальных задач // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.

84. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К., 1979.

85. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells // Quart J. Appl. Math. – 1957. – Vol. 14. – № 4. – P. 105–111.

# ЗМІСТ

**Навчальне видання**

**СТОЯН** Володимир Антонович

# МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Навчальний посібник


Редактор *Л.Л.Воронцова*
Технічний редактор *А.В.Правдивець*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

**Підписано до друку 18.03.03. Формат 60x84$^{1/16}$. Вид. № 131. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 100. Ум. друк. арк. 12,2. Обл.-вид. арк. 4,7. Зам. № 23-1129.**

**Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"**
**01030, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43,**
**☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; (38044) 234 0105; факс (38044) 239 31 20.**
**Свідоцтво внесено до державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.**