

第三章

数值积分

—— Gauss 求积公式

怎样构造更高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

● 含 $2n+2$ 个参数 (节点与系数), 为了使该公式具有尽可能高的代数精度, 可将 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ 代入公式, 使其精确成立, 则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式!

自由选取求积节点! 等分点不一定最佳!

举例

例：试确定节点 x_i 和系数 A_i ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：将 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可

得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} A_0 = 1, A_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故有 3 次代数精度！

缺点：非线性方程组求解较困难！

Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

定义：若存在节点 $x_i \in [a, b]$ 及系数 A_i ，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为**高斯点**， A_i 为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

性质：上面的求积公式至多具有 $2n+1$ 次代数精度

(将 $f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$ 代入验证即可)

Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高

Gauss 点

问题： 如何计算 Gauss 点 x_i 和高斯系数 A_i

法一：解非线性方程组



太困难! ☹

法二：分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数

更多 G-L 公式

高斯求积公式的节点和系数

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	± 0.5773503	1.0000000
2	3	± 0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	± 0.8611363 ± 0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	5	± 0.9061798 ± 0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	± 0.93246951 ± 0.66120939 ± 0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间: $[a, b]$, 权函数: $\rho(x) = 1$

→ 做变量代换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$

→ $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

→
$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) \, dt \approx \sum_{i=0}^n A_i g(t_i)$$

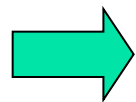
G-L公式举例

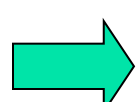
$$I[f]=0.46740110027234\dots$$

例：用四点G-L公式 (n=3) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$

解：令 $x = \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}$

example_3_8.m


$$g(t) = \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1)$$


$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1) dt \\ &\approx \frac{\pi}{4} [0.3479 g(-0.8611) + 0.6521 g(-0.3400) \\ &\quad + 0.6521 g(0.3400) + 0.3479 g(0.8611)] \\ &\approx 0.4674 \end{aligned}$$

几点注记

- Gauss 型求积公式的优点

- 计算精度高

- Gauss 型求积公式的缺点

- 需计算 Gauss 点和 Gauss 系数
- 增加节点时需重新计算

- 实际应用中可以使用复合 Gauss 求积公式

- 将积分区间分隔成若干小区间
- 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式