# 第三章

# 数值积分

## —— Gauss 求积公式

# 怎样构造更高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

● 含 $2n+2$ 个参数 (节点与系数)，为了使该公式具有尽可能高的代数精度，可将 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入公式，使其精确成立，则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式!

自由选取求积节点！等分点不一定最佳！

# 举例

**例：** 试确定节点 $x_i$ 和系数 $A_i$，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

**解：** 将 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0x_0 + A_1x_1 = 0 \\ A_0x_0^2 + A_1x_1^2 = 2/3 \\ A_0x_0^3 + A_1x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1,\ \ A_1 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \ x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故有 3 次代数精度！

**缺点：** 非线性方程组求解较困难！

# Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

**定义：** 若存在节点 $x_i \in [a, b]$ 及系数 $A_i$，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 $x_i$ 为**高斯点**，$A_i$ 为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

**性质：** 上面的求积公式至多具有 $2n+1$ 次代数精度

（将 $f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$ 代入验证即可）

**Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高**

# Gauss 点

**问题：** 如何计算 Gauss 点 $x_i$ 和 高斯系数 $A_i$

法一：解**非线性**方程组

太困难! ☹

法二：分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数

# 更多 G-L 公式

## 高斯求积公式的节点和系数

| $n$ | 节点个数 | Gauss点 | Gauss系数 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.0000000 | 2.0000000 |
| 1 | 2 | ±0.5773503 | 1.0000000 |
| 2 | 3 | ±0.7745967<br>0.0000000 | 0.5555556<br>0.8888889 |
| 3 | 4 | ±0.8611363<br>±0.3399810 | 0.3478548<br>0.6521452 |
| 4 | 5 | ±0.9061798<br>±0.5384693<br>0.0000000 | 0.2369269<br>0.4786287<br>0.5688889 |
| 5 | 6 | ±0.93246951<br>±0.66120939<br>±0.23861919 | 0.17132449<br>0.36076157<br>0.46791393 |

# 一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间：$[a, b]$， 权函数：$\rho(x) = 1$

做变量代换 $x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2}$

$$g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} A_i g(t_i)}$$

# G-L公式举例

$I[f]=0.4674011002723\cdots$

**例：** 用四点G-L公式 (n=3) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

**解：** 令 $x=\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}$

example_3_8.m

$$\Rightarrow \boxed{g(t)=\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)\,\mathrm{d}t$$

$$\approx\frac{\pi}{4}[0.3479g(-0.8611)+0.6521g(-0.3400)$$

$$+0.6521g(0.3400)+0.3479g(0.8611)]$$

$$\approx 0.4674$$

# 几点注记

- **Gauss 型求积公式的优点**
  - 计算精度高
- **Gauss 型求积公式的缺点**
  - 需计算 Gauss 点和 Gauss 系数
  - 增加节点时需重新计算
- **实际应用中可以使用复合 Gauss求积公式**
  - 将积分区间分隔成若干小区间
  - 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式