Robin Delabays

robin.delabays@hevs.ch

www.DelabaysRobin.site

Hes·so VALAIS WALLIS
Haute Ecole d'Ingénierie

Graphes et réseaux électriques

Colloque CRM
13 septembre 2023
Champéry

CRM

Prérequis informatiques

Instructions : `www.delabaysrobin.site`, lien vers GitHub en haut de page.

Tous les codes nécessaire peuvent être téléchargé dans le fichier compressé :

`23e-crm.zip`.

Les codes sont écrits en Julia, téléchargeable ici : `www.julialang.org`.

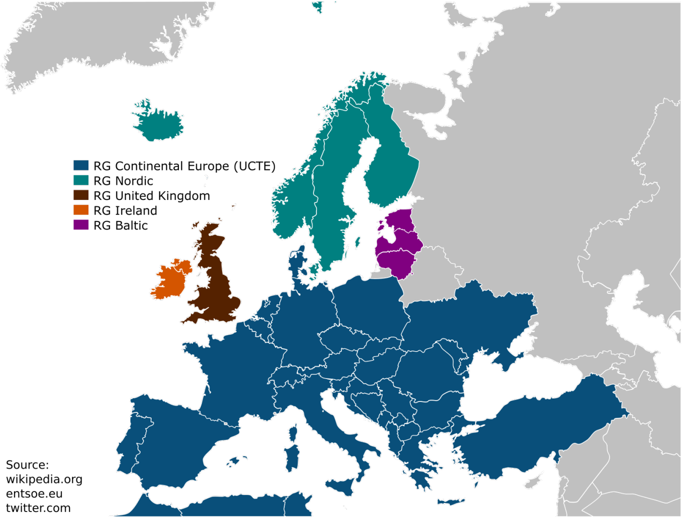
Liste des librairies à installer :

`DelimitedFiles, Graphs, LinearAlgebra, PyPlot, Statistics.`

Présentation

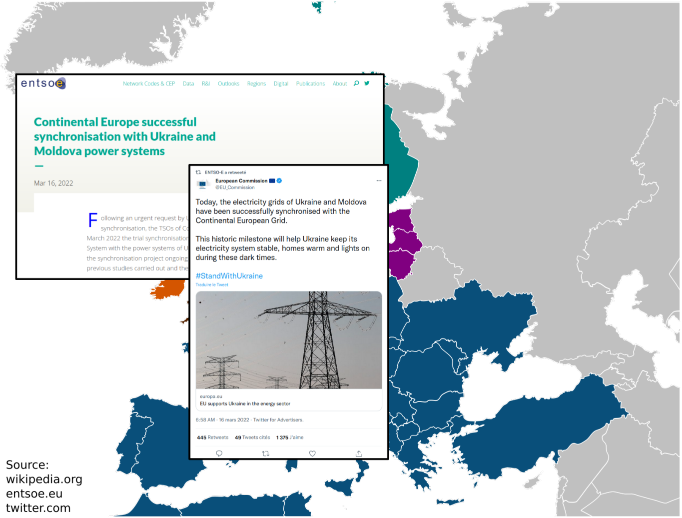
- Bachelor et Master en Mathématiques : UniGE ;
- Doctorat : Haute École d'Ingénierie, HES-SO Valais-Wallis ;
- Postdoc : UC Santa Barbara, USA ;
- Professeur Assistant : Haute École d'Ingénierie, HES-SO Valais-Wallis.

Les réseaux à haute tension



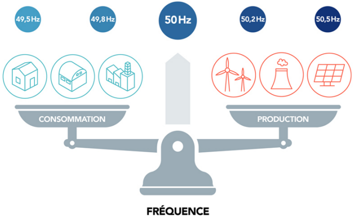
Source:
wikipedia.org
entsoe.eu
twitter.com

Les réseaux à haute tension

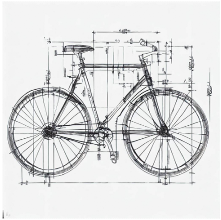


Source:
wikipedia.org
entsoe.eu
twitter.com

Équilibre entre production et consommation



$\sim$

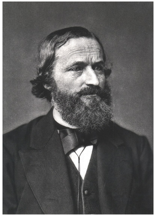


Des réseaux électriques aux graphes

Question : Est-il pertinent d'étudier les réseaux électriques par la théorie des graphes ?

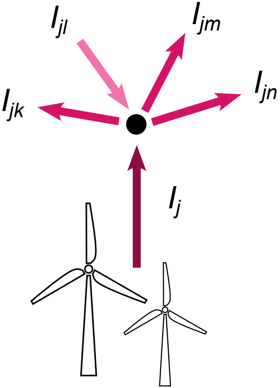
Réponse : Oui, le graphe du réseau apparaît naturellement des lois physiques.

La physique au niveau d'un sommet



La loi de Kirchhoff pour les noeuds :

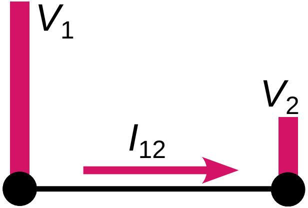
$$I_j = \sum_k I_{jk} \,.$$



La physique au niveau d'une arête

Loi d'Ohm :

$$I_{jk} = \frac{V_k - V_j}{R_{jk}} .$$



La relation entre courant et tension

En combinant la loi de Kirchhoff et la loi d'Ohm, on obtient :

$$I_j = \sum_k I_{jk} = \sum_k \frac{V_k - V_j}{R_{jk}} \, .$$

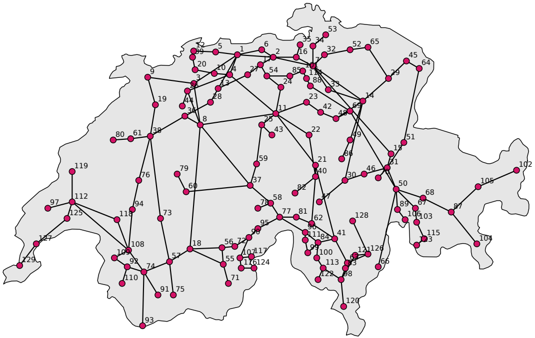
En définissant le Laplacien pondéré du graphe,

$$L_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{R_{jk}} = -G_{jk} \, , & j \neq k \, , \; j \sim k \, , \\ 0 \, , & j \nsim k \, , \\ \sum_\ell \frac{1}{R_{j\ell}} = \sum_m G_{j\ell} \, , & j = k \, , \end{cases}$$

on a la relation (vectorielle) :

$$\boxed{\vec{I} = -L\vec{V} \, .}$$

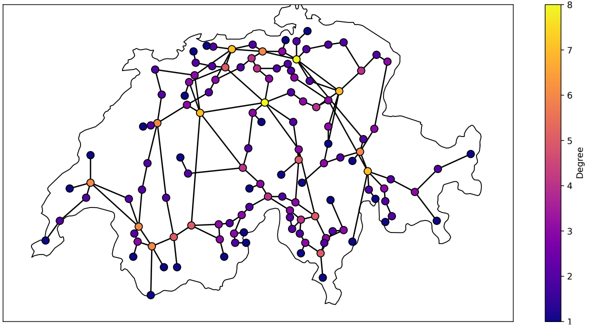
Graphe pondéré par les résistances des lignes



Un graphe **pertinent** découle naturellement des lois physiques.

Degré

Rappel : le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes auxquelles il appartient.

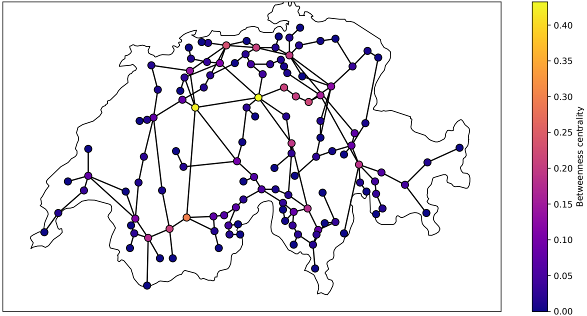


Centralité intermédiaire (*betweenness centrality*)

Soit σ_{st} le nombre de **plus courts chemins** de s à t et $\sigma_{st}(v)$ le nombre de tels chemins **passant par** v.

La **centralité intermédiaire** du sommet v est

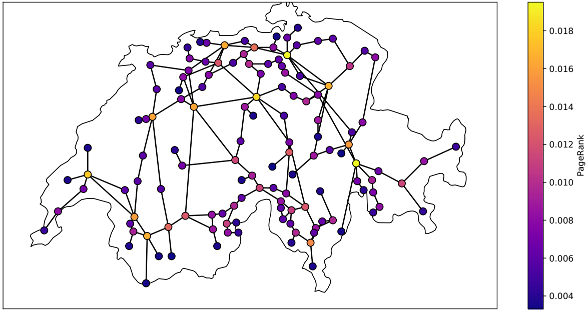
$$c_b(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} .$$



PageRank (algorithme de Google)

Quantifie l'importance d'un sommet au sein d'un graphe avec les hypothèses :

- Plus j'ai de voisins, plus je suis important ;
- Plus mes voisins sont importants, plus je suis important.

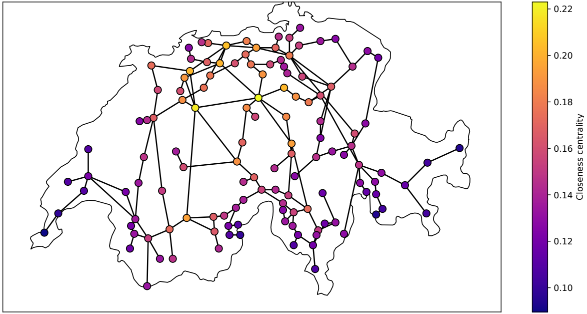


Centralité proximale* (*closeness centrality*)

On note $d(v, w)$ la **distance** (au sein du graphe) entre les sommets v et w.

La **centralité proximale** du sommet v est

$$c_c(v) = \frac{n-1}{\sum_w d(v,w)} \, .$$

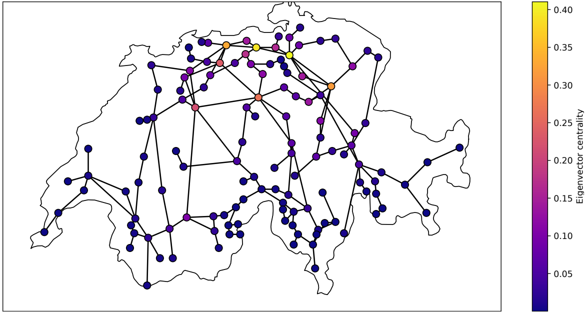


Centralité propre* (*eigenvector centrality*)

On cherche un score x pour les sommets tel que le score de chaque sommet est proportionnel au score moyen de ses voisins. On veut :

$$x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_w a_{vw} x_w \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\vec{x} = \lambda \vec{x}\,.$$

Le théorème de Perron-Frobenius nous garanti qu'il existe un unique tel vecteur $\vec{x}$ dont les composantes sont positives.



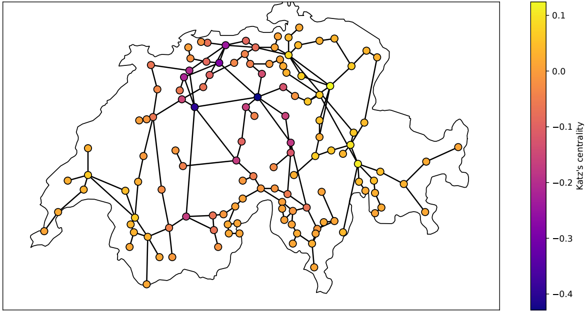
Centralité de Katz (*Katz's centrality*)

Un sommet est d'autant plus central que :

- il est proche de beaucoup d'autres sommets ;
- il est relié aux autres sommets par beaucoup de chemins.

La **centralité de Katz** prend ces deux facteurs en compte comme suit :

$$c_k(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w} \alpha^k \left(A^k\right)_{wv} .$$



Exemple 1 : `crm-ex-nodes.jl`

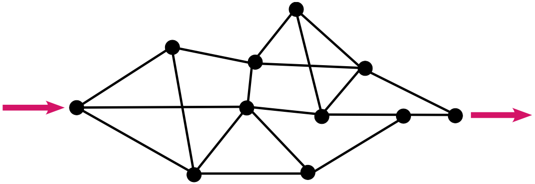
Lien en haut de la page :
www.delabaysrobin.site

```
cd("Adresse/du/Répertoire")

include("crm-ex-nodes.jl")
```

Flots de puissance

Question : Étant données des injections et soustractions de courants, comment ceux-ci vont-ils se distribuer sur les lignes ?



Réponse : Le Laplacien va nous aider à répondre à cette question.

Calcul des tensions

La loi d'Ohm : $I_{jk} = \dfrac{V_k - V_j}{R_{jk}}$.

On cherche donc à déterminer les tensions qui satisfont : $\vec{I} = -L\vec{V}$.

Problème : Le Laplacien n'est pas inversible !

Pseudo inverse

Le Laplacien est réel et symétrique. On peut donc la diagonaliser dans une base orthonormée,

$$L\vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \,, \qquad \lambda_k \in \mathbb{R} \,, \qquad \vec{u}_j \cdot \vec{u}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \,, & j = k \,, \\ 0 \,, & j \neq k \,. \end{cases}$$

De plus, L est à diagonale dominante et donc : $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$.

$$L = U^\top \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ \vdots & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} U \quad \Longrightarrow \quad L^\dagger := U^\top \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ \vdots & \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} \end{pmatrix} U \,.$$

Calcul des tensions

La loi d'Ohm : $I_{jk} = \dfrac{V_k - V_j}{R_{jk}}$.

On cherche donc à déterminer les tensions qui satisfont : $\vec{I} = -L\vec{V}$.

Problème : Le Laplacien n'est pas inversible !

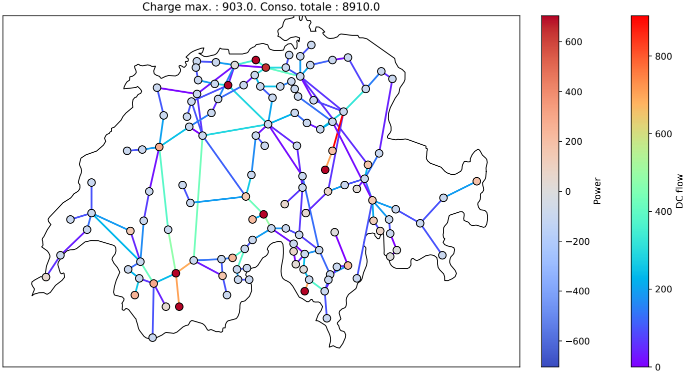
$$\boxed{\vec{I} = -L\vec{V} \quad \Longrightarrow \quad \vec{V} = -L^{\dagger}\vec{I}.}$$

Remarques :

- Requiert $\sum_k I_k = 0$;
- On peut ajouter une constante à toutes les tensions .

Calcul des "flots de puissance"

On peut déterminer la distribution du courant : $I_{jk} = \dfrac{V_k - V_j}{R_{jk}}$.



Exemple 2 : crm-ex-lines.jl

Lien en haut de la page :
www.delabaysrobin.site

```
cd("Adresse/du/Répertoire")

include("crm-ex-lines.jl")
```

Dynamique et stabilité

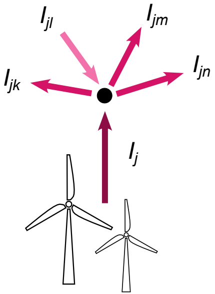
Question : La structure de graphe donne-t-elle une information sur la stabilité du réseau ?

Réponse : Oui, plus particulièrement les valeurs propres du Laplacien

Dynamique

Les tensions s'équilibrent :

$$\frac{d}{dt}V_j \sim I_j - \sum_{k\sim j} \frac{V_k - V_j}{R_{jk}} \,.$$



Sous forme vectorielle :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{V} \sim \vec{I} - L\vec{V} \,.}$$

Stabilité

On considère la déviation par rapport à l'état d'équilibre :

$$\vec{\delta}(t) = \vec{V}(t) - \vec{V}^* \,.$$

La déviation évolue dans le temps :

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \vec{I} - L\vec{V} = -L\vec{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\delta}(t) = e^{-Lt}\vec{\delta}(0) \,.$$

Stabilité (bis)

Si les valeurs et vecteurs propres de L sont donnés par

$$L\vec{u}_k = \lambda_k \vec{u}_k \,, \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\} \,,$$

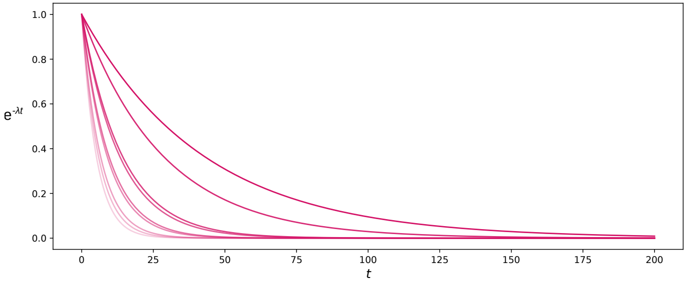
on peut écrire $\vec{\delta}$ dans **la base des vecteurs propres** :

$$\vec{\delta}(0) = \sum_k a_k \vec{u}_k \,.$$

On observe alors

$$\vec{\delta}(t) = e^{-Lt} \sum_k a_k \vec{u}_k = \sum_k e^{-\lambda_k t} a_k \vec{u}_k \,.$$

La stabilité est donc gouvernée par les valeurs propres du Laplacien du graphe. En particulier par la connectivité algébrique λ_1.



Exemple 2bis : `crm-ex-lines.jl`

Lien en haut de la page :
`www.delabaysrobin.site`

```
cd("Adresse/du/Répertoire")

include("crm-ex-lines.jl")
```

Conclusion

Nous avons vu :

- Que la structure de graphe découle naturellement de la physique des réseaux électriques ;
- La théorie algébrique des graphes nous permet d'étudier les flux (électriques) sur le réseau ;
- La stabilité du réseau est encodée dans la structure du réseau.

Possibles extensions :

- En courant alternatif, toutes les quantités deviennent complexes ;
- Beaucoup de sources de courant ont une grande masse rotative, i.e., la dynamique est de 2^{e} ordre.

Merci !

Distance résistive

Le Laplacien d'un graphe nous permet de calculer la **distance résistive** en toute paire de sommets :

$$\Omega_{ij} = L^{\dagger}_{ii} + L^{\dagger}_{jj} - L^{\dagger}_{ij} - L^{\dagger}_{ji}\,.$$

Théorème de Perron-Frobenius

Soit A un matrice carrée positive. Alors il existe une valeur propre de A, notée r, qui est :

- réelle et positive ;
- plus grande que le module de toutes les autres valeurs propres ;
- associée à un vecteur propre dont toutes les composantes sont positives.