Highschool Geometry 고등수학 도형

박성렬

October 28, 2018

1 용어

1.1 isosceles triangle

이등변 삼각형 - 두 변의 길이가 같은 삼각형

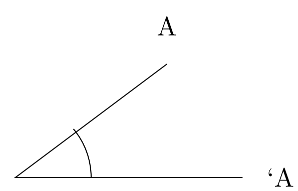
1.2 equilateral triangle

정삼각형 - 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형

2 기본개념

2.1 회전 Rotation

도형의 회전을 알아보고자 할 때에는, 도형의 회전이 일어났다고 예상되는 지점에 점을 먼저 찍어야 한다. 회전이 이루어난 점을 기준으로 기존의 점 A와 새로운 점 'A를 찍어서 연결하면 회전이 일어난 각이 나온다.

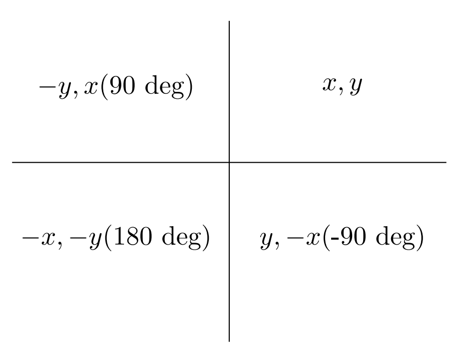


2.1.1 회전의 수학적 정의

회전을 수로 나타날 때 직관과는 반대로 양수가 시계 반대방향이고 음수가 시계 방향이므로 유의하자.
시계 반대 방향으로 90도 회전(90°)은 다음과 같이 나타낼 수 있다: $(x, y)- > (-y, x)$ 따라서 어떤 각이 주어지면 그것을 90도로 나눌 수 있을 경우 90도 회전을 필요한 만큼 반복하면 된다. 한편 시계 방향으로 90도 회전($-90°$)할 때에는 또 다르므로 유의하자.
$(x, y)- > (y, -x)$

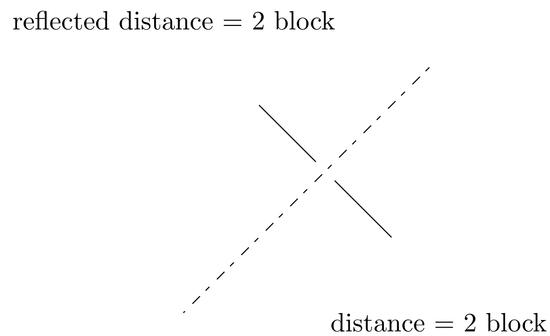
이동한 각도	원래 형태 (x, y) 에서 변한 형태
90°	$(-y, x)$
$-90°$	$(y, -x)$
180°	$(-x, -y)$

도표를 참조하면 좀더 쉽다. 헷갈릴 때 이 도표를 머릿속에 그려보자.



2.2 반사 Reflection

도형의 반사는 어렵게 생각할 것 없이 기준선이 있고, 그 기준선과의 길이만 비교하면 된다. 가로축은 유지하되 세로축만 반전시키면 된다. 만약 기준선이 기울어진 상태에서도 마찬가지다.



2.3 도형의 축소와 확대 Dilation

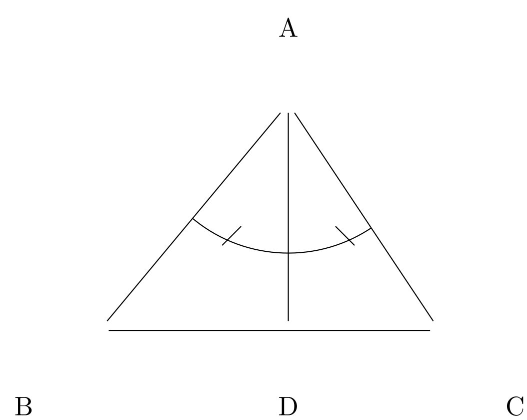
도형의 축소와 확대는 항상 기준점이 필요하다. 확대/축소 이후의 도형을 구하려면 기준점에서 도형의 각 꼭지점의 가로/세로 거리를 확대 또는 축소하는 비율로 곱하면 된다.

2.4 도형의 일치 Congruence

도형의 일치는 SSS를 외우면 된다. 삼각형의 경우 세 면(Side, Side, Side)이 일치하면 크기와 각이 모두 같은 도형이다. 그러나 ASS(Angle, Side, Side)처럼 각이 하나만 같은 도형이나 AAA처럼 각만 같은 도형은 반드시 같은 도형이 된다고 보기 어렵다.(이름이 웃겨서 외우긴 쉬울 것 같다) 왜냐면 면이 더 길수도 있기 때문이다. ASS는 마주보는 두 면이 나머지 한 면보다 모두 길 때에만 일치되고 나머지는 일치하지 않는다.
반면 SAS, ASA, AAS는 SSS와 마찬가지로 모두 일치하는데 그건 직접 그려보는 편이 더 빠르다.
유의점:어떤 도형끼리 일치한다는 것은 두 도형의 비율이 일치한다는 것임에 유의하자.
`https://www.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-congruence/modal/a/triangle-congruence-review`

일치 형태	일치 여부
AAA	X
SSS	O
SAS	O
ASA	O
AAS	O
SSA	특수한 경우에만 O

2.5 angle bisector theorem 삼각형의 각도 양분 이론



위와 같은 삼각형 ΔABC에 대해서 각도 $\widehat{ABC}$를 정확히 절반 양분하는 선 $\overline{AD}$가 있다고 할 때, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$이다. 즉 $\overline{AD}$가 아닌 나머지 면들의 길이에 대한 비율이 양측이 동일하다는것!
주의 여기서 내가 자주 헷갈렸거나 잊어버린 용어:

- perpendicular - 직각
- round - 반올림 - 반이라는 개념보다 다른 수에 가까운 수로 올림이라고 기억하면 편함. 5는 0에 가깝고, 6은 10에 가깝다!

2.6 special right triangles 유용한 정삼각형들

2.6.1 45°-45°-90° 삼각형

제일 평범한 유형의 정삼각형. 빗변을 제외한 양 변의 길이가 같으므로 빗변만 알아도 양 변의 길이를 알 수 있다. 빗변의 길이로 양변의 길이 구하기, 또는 양변의 길이로 빗변을 구하는 식의 유도 과정은 아래와 같다.
*c는 빗변(hypoteneuse)이고, a와 b가 나머지 변이다. 여기서 a와 b는 길이가 동일하므로 바꿔 읽어도 된다.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 + b^2 = c^2$$

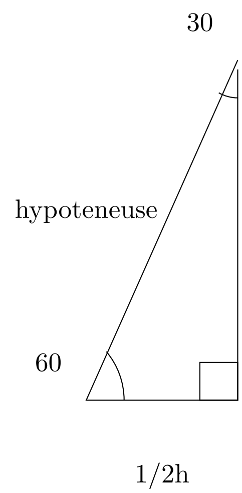
$$2b^2 = c^2$$

$$b^2 = \frac{c^2}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

2.6.2 30°-60°-90° 삼각형

이것도 마찬가지로 한 변의 길이만 알아도 나머지를 추적할 수 있다. 60°-90°의 각도를 가진 변은 빗변h의 $\frac{1}{2}$이다.



이 $h\frac{1}{2}$변을 기준으로 알려지지 않은 변 x의 길이를 구하는 수식은 아래와 같이 유도한다.

$$\frac{1}{2}h^{2} + x^2 = h^2$$

$$\frac{h^2}{4} + x^2 = h^2$$

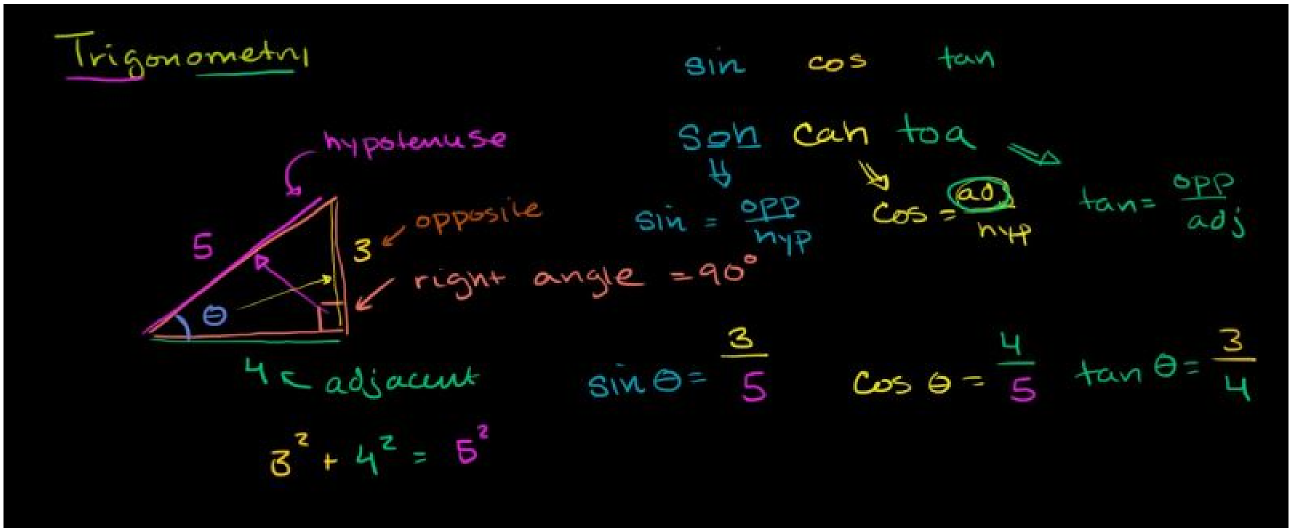
$$x^2 = h^2(1 - \frac{1}{4})$$

$$x^2 = \frac{3}{4}h^{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

2.7 basics of trigonometry - trigonometric ratios 삼각법 기본 - 삼각률

삼각법은 정삼각형을 기준으로 사용하며, 하나의 각을 대상으로 한다.



θ를 기준 각으로 봤을 때, $\sin \cos \tan$은 해당 각의 상대적 위치를 가지고 다른 변 길이들의 비율을 알려준다. 비율의 내용을 빨리 외우기 위해 soh, cah, toa로 외운다. 이는 아래의 내용을 나타낸다

$$\sin\theta(\text{S.O.H}) = \frac{\text{Opposite (side)of } \theta}{\text{Hypoteneuse of } \theta}$$

$$\cos\theta(\text{C.A.H}) = \frac{\text{Adjecent of } \theta}{\text{Hypoteneuse of } \theta}$$

$$\tan\theta(\text{T.O.A}) = \frac{\text{Opposite of } \theta}{\text{Adjecent of } \theta}$$

위의 그림으로 예를 들자면 sin은 θ로부터 반대편의 변 길이인 3을 빗변의 길이 5로 나눈 $\frac{3}{5}$가 된다.