Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Probabilidade e Estatística 2
1^o semestre de 2020
Gustavo L. Gilardoni

Lista de Exercícios 0

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal com média $\mu = 100$ e desvio padrão $\sigma = 5$. (i) Calcule $P(X < 110)$ e $P(90 < X < 110)$. (ii) Qual é o valor z tal que $P(100 - 5z < X < 100 + 5z) = 0.98$?

2. Para uma população normalmente distribuída com desvío padrão σ conhecido, (i) Qual é o nível de confiança do intervalo $\bar{x} \pm 2.5\,\sigma/\sqrt{n}$? (ii) Por qual valor deveríamos substituir 2.5 acima para ter confiança 64% no intervalo?

3. (Devore) Suponha que a porosidade de hélio (em porcentagem) de amostras de carvão obtidas numa mina é normalmente distribuida com desvio padrão 0.75. (i) Calcule um intervalo com confiança 95% para a verdadeira média da porosidade se a porosidade média para 20 espécimes foi de 4.85. (ii) Calcule um IC com 98% para a verdadeira media da porosidade de otra mina se a porosidade media para 16 espécimes foi de 4.56. (ii) Quão grande deveria ser o tamanho amostral n para que o comprimento do IC de 95% seja .40? (iv) Qual deveria ser o tamanho amostral para estimar a verdadeira porosidade média com erro máximo de .2 com 99% de confiança?

4. Uma pesquisadora obteve uma amostra de $n = 100$ pessoas de uma certa população e, usando a fórmula $\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$ (n grande), calculou o intervalo de confiança 95% $1,63 < \mu < 1,69$ para a altura média μ (em metros) da população. (i) Ache a altura média $\bar{x}$ e o desvio padrão s da amostra. (ii) Se a pesquisadora tivesse calculado o intervalo com confiança 90%, o valor 1.70 metros estaria dentro ou fora desse intervalo? (iii) Verdadeiro ou falso? A partir desses dados é possível concluir que a maioria das pessoas da população medem entre 1.63 e 1.69 metros. Explique. (iv) Verdadeiro ou falso? Se a pesquisadora quiser um intervalo com 95% de confiança para μ cujo comprimento fosse de aproximadamente 0.03 metros, ela deveria ter tomado uma amostra de $n = 200$ indivíduos. Explique.

5. (Devore) As seguintes observações são tempos de vida (em dias) após o diagnóstico para pacientes que sofrem de um certo tipo de leucemia ("A Goodness of Fit Approach to the Class of Life Distributions with Unknown Age," Quality and Reliability Engr. Intl., 2012: 761–766):

115	181	255	418	441	461	516	739	743	789	807
865	924	983	1025	1062	1063	1165	1191	1222	1222	1251
1277	1290	1357	1369	1408	1455	1478	1519	1578	1578	1599
1603	1605	1696	1735	1799	1815	1852	1899	1925	1965	

(i) Quais supostos sobre a distribuição populacional dos tempos de vida são necessários para construir um IC para o verdadeiro tempo médio de vida? (ii) Construa um IC de nível 99% para o tempo médio de vida de todos os pacientes desse tipo de leucemia.

6. (Devore) Nos EUA, agências de publicidade enfrentam desafios crescentes para chegar a audiência de programas de televisão pelo aumento da popularidade do stream digital.

A firma de pesquisa *The Harris Poll* reportou no 13 de novembro de 2012 que 53% de uma amostra de 2343 adultos informaram assistir programas de televisão via streaming digital. (i) Calcule e interprete um IC de nível 99% para a proporção de todos os adultos americanos que assistiam programação via streaming digital nessa data. (ii) Qual deveria ser o tamanho amostral n para que o comprimento de um IC de nível 99% para $\hat{p}$ seja no máximo 0.05? Explique.

7. Seja T uma variável aleatória com distribuição t de Student com 9 graus de liberdade. (i) Calcule $P(T < 2)$ e $P(|T| < 2)$. (ii) Qual é o valor t tal que $P(|T| < t) = 0.98$? (iii) Se no enunciado o número de graus de liberdade fosse 10 ao invês de 9, o valor de t achado na parte anterior seria maior ou menor? Explique.

8. (Adaptado do Devore) De acordo ao artigo *Fatigue Testing of Condoms* (Polymer Testing, 2009: 567–571), "testes usados atualmente para camisinhas são substitutos para os desafios que eles enfrentam quando usados,"incluindo testes para perfurações, de enchimento, de vedação da embalagem e de quantidade e qualidade do lubrificante (todos território apropriado para o uso de metodologia estatística!) Os pesquisadores desenvolveram um novo test que acrescenta esforço cíclico a um nível anterior à ruptura e determina o número de ciclos para romper.

Uma amostra de 20 camisinhas de um tipo particular resulto numa média de 1584 e um desvio padrão de 607 ciclos. (i) calcule e interprete um IC de nível 99% para a verdadeira média do número de ciclos até a ruptura. (ii) Quais supostos são necessários para a validade do IC anterior (Explique).

9. Com a informação da parte (i) do Exercício 3, existe informação suficiente para concluir que a verdadeira porosidade média é maior do que 4.5%? Use nível de significância $\alpha = 0.05$. Calcule o p-valor do teste.

10. Com a informação do Exercício 5, existe informação suficiente para concluir que o tempo médio de vida após o diagnostico para todos os pacientes desse tipo de leucemia é maior do que 2.5 anos? Use $\alpha = 0.10$ e calcule o p-valor.

11. Com a informação do Exercício 6, existe evidência na amostra de 2343 indivíduos para concluir que mais da metade dos adultos americanos assistem programas por streaming digital? Use $\alpha = 0.01$ e calcule o p-valor.

2 de Fevereiro de 2021

Soluções

1.(i) 0.977; (ii) 0.954; (iii) Por causa da simetría da distribuição, precisamos que $P[X \leq 100 + 5z] = 0.99$. Logo $z = 2.326$.

2.(i) 0.988; (ii) Se $Z \sim$ N(0,1), precisamos ter que $P[-z < Z < z) = 0.64$ ou que $P[Z > z] = 0.18$ ou ainda que $P[Z < z] = 0.82$. Logo $z = 0.915$.

3.(i) $(4.521; 5.179)$; (ii) Assumindo o mesmo desvio padrão, $(4.124; 4.996)$; (iii) Em geral o comprimento do intervalo é

$$2\, z_{\alpha/2}\, \sigma_0/\sqrt{n}\,.$$

Para 95% precisamos resolver então

$$2\, z_{0.025}\, 0.75/\sqrt{n} = 0.40\,,$$

o que dá

$$n = [2\, z_{0.025}\, 0.75/0.40]^2 \doteq 54.02 \approx 54$$

(que vai dar um IC com comprimento ligeiramente menor, se o enunciado fosse "*pelo menos 0.40*" usariamos $n = 55$); (iv) Se o erro máximo deve ser 0.2, significa que o comprimento do intervalo deveria ser no máximo 0.40. Portanto, na parte (iii) devemos somente mudar $z_{0.025}$ por $z_{0.005}$, o que dá $n \doteq 93.30 \approx 94$.

4.(i) O IC é simétrico com respeito a $\bar{x}$, portanto $\bar{x} = (1.63 + 1.69)/2 = 1.66$. Já o comprimento do intervalo $0.06 = 2\, z_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$. Usando $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ e $n = 100$ temos que $s \doteq 0.153$; (ii) A menor confiança, menor o intervalo. Logo 1.70 estaria fora; (iii) Falso. O IC é para a **média** da população, não diz nada sobre a frequência de pessoas num certo intervalo; (iv) Estritamente falando é impossível responder a questão pois não vamos saber o valor de s até que a nova amostra seja observada. Porém, se usamos $s = 0.153$ da primeira amostra como uma estimativa *piloto*, o tamanho amostral deveríamos ter que

$$n \approx [2\, z_{0.025}\, 0.153/0.03]^2 \approx 399.67 \approx 400$$

(o erro da pesquisadora é pensar que para diminuir o comprimento do intervalo pela metade, precisamos duplicar o tamanho amostral por 2; na verdade, como n entra *via* $\sqrt{n}$ no cálculo do IC, precisamos aumentar o tamanho amostral por um fator de $4 = 2^2$).

5.(i) Se aceitamos que $n = 43$ é (moderadamente) grande, precisamos assumir somente que a distribuição dos tempos de vida tem variância finita; (ii) Calculamos primeiro $\bar{x} \doteq 1191.628$ e $s \doteq 506.635$. Logo o IC é $(992.62; 1390.64)$ (veja que se usarmos o intervalo t, o resultado sería $(983.17; 1400.08)$, muito parecido, embora os supostos são diferentes—nesse caso precisaríamos assumir normalidade da distribuição dos tempos de vida).

6.(i) Usamos o IC para proporções

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})/n}\,,$$

onde $\hat{p} = 0.53$, $n = 2343$ e $z_{\alpha/2} = z_{0.005} \doteq 2.576$. Logo o IC é $(0.503; 0.557)$ ou entre 50.3% e 55.7%. (ii) Resolvemos

$$2\, z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})/n} = 0.05\,,$$

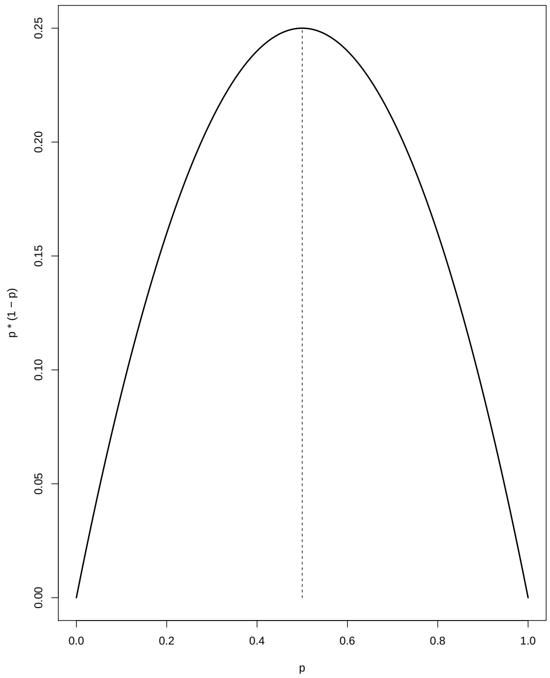

Figura 1: A função $f(p) = p(1-p)$ atinge um máximo quando $p = 0.5$ e $f(0.5) = 0.25$.

onde $z_{\alpha/2} = z_{0.005} \doteq 2.576$ e usamos como aproximação para $\hat{p}$ o valor 0.53 obtido na primeira amostra. Isso dá $n \doteq 2644.40 \approx 2645$. Alternativamente, se quisermos garantir o comprimento máximo do intervalo, poderíamos usar $\hat{p} = 0.5$, pois $\hat{p}\,(1-\hat{p}) \leq (0.5) * (0.5) = 0.25$, mas neste caso não faria muita diferença (veja a Figura 1 e verifique!)

7.(i) 0.962 e 0.923; (ii) 2.821; (iii) menor, pois a dispersão da distribuição t de Student decresce ao aumentar os gl. Em particular, quando os gl tendem a ∞, a distribuição t de Student converge para a Normal padrão, de forma que se na parte (ii) tivéssemos por exemplo 100 gl, a resposta seria muito próxima a 2.326, que é o percentil da N(0,1) (veja a Figura 2 e verifique!)

8.(i) Assumindo que a distribuição do número de ciclos até a ruptura é normal, o intervalo é $\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$ onde $n = 20$ (gl = 19!), $\alpha = 0.01$ e $t_{19;0.005} \doteq 2.861$, $\bar{x} = 1584$ e $s = 607$. Logo o IC desejado é $(1319.17; 1848.83)$. A interpretação é que sob os supostos do modelo (normalidade!), ao construir esse tipo de IC repetidamente, muitas vezes, aproximadamente 99% dos ICs conteriam a verdadeira média μ. (ii) Normalidade da distribuição do número de ciclos até a ruptura e, obviamente, independência das observações. Veja que os IC e testes de hipóteses baseados na t de Student são bastante *robustos* (i.e. pouco sensíveis) a desvios do modelo.

9.Queremos testar $H_0 : \mu \leq 4.5$ contra $H_a : \mu > 4.5$ (i.e. $\mu_0 = 4.5$, hipótese alternativa unilateral à direita). O estatístico do teste é $z_{obs} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} = \sqrt{20}\,\frac{4.85-4.5}{0.75} \doteq 2.087$. O valor crítico é $z_{0.05} \doteq 1.645$, de forma que a H_0 é rejeitada (i.e. existe evidência suficiente

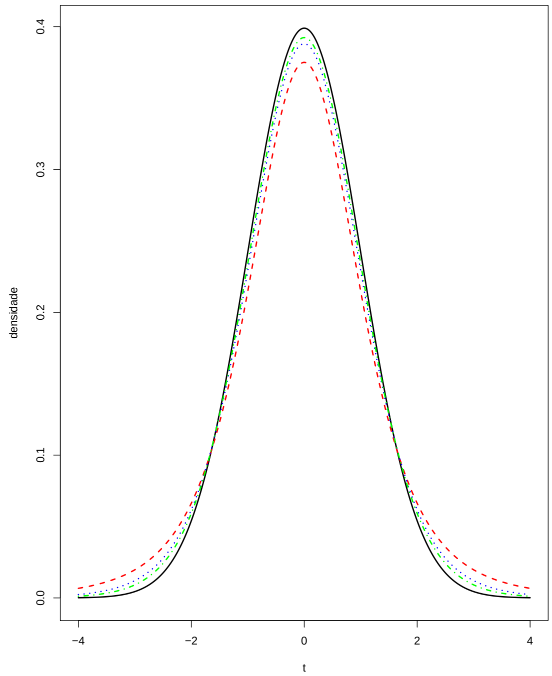

Figura 2: Densidades da distribuição Normal padrão (preto, sólido), t de Student com 4 gl (vermelho, tracejado), com 9 gl (azul, pontilhada) e com 15 gl (verde, traço-ponto-traço).

para concluir que $\mu > 4.5$). O p-valor é $P[N(0,1) > z_{obs} = 2.087] \doteq 0.018$ ou 1.8%.

10.Para a resolução consideramos que um ano tem em média 365.25 dias. Assim, 2.5 anos equivale a 913.125 dias. Assim, queremos testar que $H_0 : \mu \leq 913.125$ contra $H_a : \mu > 913.125$ anos. O estatístico do teste é $z_{obs} = \sqrt{n}\, \frac{\bar{x}-\mu_0}{s} = \sqrt{43}\, \frac{1191.628-913.25}{506.635} \doteq 3.605$. O valor crítico é $z_{0.05} \doteq 1.645$, de forma que a H_0 é rejeitada (i.e. existe evidência suficiente para concluir que $\mu > 2.5$ anos). O p-valor é $P[N(0,1) > z_{obs} = 3.605] \doteq 0.00016$ ou 0.016%.

11.Queremos testar que $H_0 : p \leq 0.5$ contra $H_a : p > 0.5$. O estatístico do teste é $z_{obs} = \sqrt{n}\, \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \sqrt{2343}\, \frac{0.53-0.5}{\sqrt{(0.53)(0.47)}} \doteq 2.910$. O valor crítico é $z_{0.01} \doteq 2.326$, de forma que a H_0 é rejeitada (i.e. existe evidência suficiente para concluir que $p > 0.5$ anos). O p-valor é $P[N(0,1) > z_{obs} = 2.910] \doteq 0.0018$ ou 0.18%.