LISTA DE EXERCÍCIOS 04 DE TEORIA DOS NÚMEROS

HEMAR GODINHO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

1. Divisibilidade, MDC, MMC, Equação Diofantina Linear

(1) Calcule o $mmc(a, b)$ para os pares a, b abaixo.

$$a = 412,\ b = 32, \quad a = 780,\ b = 150, \quad a = 10672,\ b = 4147.$$

(2) Encontre todos os inteiros n tais que $\dfrac{2n-1}{n+7}$ é um inteiro.

(3) Mostre que $mdc(n! + 1,\ (n + 1)! + 1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) Mostre que em toda lista com k inteiros consecutivos sempre existirá um elemento divisível por k.

(5) Mostre que o produto de k inteiros consecutivos é divisível por $k!$.

(6) Estenda a definição de MDC para definir $mdc(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Mostre que $mdc(a_1, a_2, \dots, a_n) = mdc(a_1, a_2, \dots, mdc(a_{n-1}, a_n))$

(7) Mostre que existem $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a_1, a_2, \dots, a_n) = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n$.

(8) Mostre que não existem três primos ímpares consecutivos além de $3, 5, 7$

(9) Seja $Q_n = n! + 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Mostre que Q_n tem um divisor primo maior que n. Baseado nesse fato, conclua que existem infinitos primos.

(10) Determine todos os primos p tais que $17p + 1$ é um quadrado.

(11) Encontre um critério de divisibilidade por 8 e 16.

(12) Seja $n \in \mathbb{N}$ e escreva n na base 10 como

$$n = a_k.10^k + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

com $a_0, a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mostre que $11/n$ se, e somente se,

$$11 \text{ divide a diferença } \Big(\sum_{\text{j ímpar}} a_j\Big) - \Big(\sum_{\text{j par}} a_j\Big).$$

(13) Determine todos os pares $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $mdc(a, b) = 10$ e $mmc(a, b) = 100$.

(14) Encontre um valor de $n \in \mathbb{Z}$ tal que a equação Diofantina $10x + 11y = n$ tenha exatamente 9 soluções com $x, y \in \mathbb{N}$.

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília-DF, Brasil