Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Probabilidade e Estatística 2
1^o semestre de 2020
Gustavo L. Gilardoni

Inferência para Variância(s)

16 de Setembro de 2020

0 Introdução

Problemas que requerem inferência sobre a variância de uma população ou sobre a razão da variância de duas populações aparecem na prática com muita menor frequência do que seus análogos sobre medias ou proporções. Uma possível excepção aparece no contexto do problema de inferência para a diferença das médias de duas populações Normais, pois como vimos anteriormente o método usual nesse caso requer que as variâncias das duas populações sejam iguais, o que poderia ser testado formalmente.

Existe uma diferença fundamental entre os parâmetros *média* μ e desvio padrão σ que é transferida aos métodos inferenciais. No Capítulo anterior vimos que as inferências para a média de uma população era baseada na ideia geral que a distribuição de $\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$ não dependia dos parâmetros do modelo, de forma que, para construir por exemplo um IC para μ, podíamos achar quantidades a e b tais que

$$1-\alpha = P\left(a_I \leq \frac{\hat{\theta}-\theta}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \leq a_S\right) = P\left(\hat{\theta} - a_S\,\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + a_I\,\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}\right) . \tag{1}$$

Por exemplo, podíamos fazer $a_S = -a_I = z_{\alpha/2}$ quando a distribuição (exata ou limite) era Normal(0,1); ou $a_S = -a_I = t_{(n-1);\alpha/2}$ quando a distribuição era t de Student. Esse forma de proceder é baseada no fato que a estrutura da relação entre o estimador $\hat{\mu} = \bar{X}$ e o parâmetro μ é linear, o que é usual para um parâmetro de *locação*. Porém, o desvio padrão σ é um parâmetro de *escala*, que geralmente apresenta uma estrutura multiplicativa [essa diferença entre o parâmetro de locação μ e o de escala σ pode ser apreciada observando por exemplo que, se $X \sim$ N(μ,σ^2), então $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim$ N(0,1)]. Assim, no caso de inferência sobre a variância σ^2 de uma população, procuramos um estimador $\hat{\sigma}^2$ tal que a distribuição de $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ não dependa dos parâmetros do modelo. De forma semelhante, se quisermos fazer inferência sobre as variâncias σ_A^2 e σ_B^2 de duas populações, procuramos estimadores tais que a distribuição de $(\hat{\sigma}_A^2/\hat{\sigma}_B^2)/(\sigma_A^2/\sigma_B^2)$ tampouco dependa dos parâmetros.

Para entender a diferença entre inferência para parâmetros de locação (médias, por exemplo) e parâmetros de escala (tais como desvios padrões), suponha que para um parâmetro desconhecido θ existe um estimador $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ tal que para alguma constante c, a distribuição de

$$c\,\frac{\hat{\theta}}{\theta}$$

não depende dos parâmetros do modelo. Nesse caso, será possível achar dois valores a_I

e a_S tais que

$$1 - \alpha = P\left(a_I < \frac{c\,\hat{\theta}}{\theta} < a_S\right) = P\left(\frac{c\,\hat{\theta}}{a_S} < \theta < \frac{c\,\hat{\theta}}{a_I}\right) \tag{2}$$

[compare com a equação 1]. Assim, podemos considerar que $\frac{c\,\hat{\theta}}{a_S} < \theta < \frac{c\,\hat{\theta}}{a_I}$ é um IC de nível $100(1-\alpha)\%$ para θ.

No caso de populações normalmente distribuídas, as distribuições de probabilidade que aparecem nesse problema são chamadas de χ^2 (*qui-cuadrado*), no caso de uma amostra, e de F de Snedecor no caso de duas amostras. As Seções 1 e 2 tratam respectivamente dessas duas familias de distribuições. Depois, estas notas consideram o problema para uma única população na Seção 3 e para comparar as variâncias ou desvios padrões de duas populações na Seção 4.

Uma observação importante é que todos os métodos discutidos aqui assumem que as populações sob estudo são normalmente distribuídas. A diferença do que ocorre no caso de inferência para medias, por exemplo os métodos baseados na distribuição t de Student, a inferência para variâncias é muito sensível ao suposto de normalidade, de forma que podem produzir respostas erradas quando esse suposto não vale. Portanto, devem ser usados com muita parcimônia. Existem procedimentos que podem ser usados sem o suposto de normalidade, baseados por exemplo na técnica *bootstrap* ou em métodos ditos *não-paramêtricos*, mas eles ficam fora do escopo da nossa disciplina.

1 As distribuições χ^2

Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de distribuição N(0,1), a distribuição de $U_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ é chamada distribuição χ^2 com n graus de liberdade. A sua densidade é

$$f(u) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\,u^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-u/2} \tag{3}$$

para $u > 0$, onde $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,dx$ é a função *Gama*. Como para uma variável aleatória X com distribuição Normal Padrão temos que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X^3) = 0$, $\mathrm{E}(X^2) = 1$ e $\mathrm{E}(X^4) = 3$, segue que $\mathrm{E}(U_n) = n$ e $\mathrm{Var}(U_n) = 2n$.

A diferença das distribuições Normais e t de Student, a distribuição χ^2_n é assimétrica. A Figura 1 mostra a forma da densidade (3) para vários valores dos gl n. Devido à assimetria da distribuição, percentis nas caudas direita e esquerda da distribuição devem ser calculados separadamente. Antigamente, cálculo de probabilidades e percentís da distribuição χ^2_n eram feitos com a ajuda de tabelas. Atualmente, todos os programas usados para cálculo estatístico e inclusive algumas calculadoras científicas tem rotinas que permitem esse cálculo. Na linguagem **R**, as funções `pchisq(u,n)` e `qchisq(a,n)` calculam respectivamente a função de distribuição acumulada e a sua inversa para a distribuição χ^2_n. Em geral, denotaremos por $\chi^2_{n;\alpha}$ o valor que deixa área α à direita na distribuição χ^2 com n gl. Isto é, $P(U_n < \chi^2_{n;\alpha}) = 1 - \alpha$ (veja a Figura 2).

Exemplo 1. Calcule (i) $P(U_{10} < 2.558)$; (ii) $P(U_{10} > 23.209)$; (iii) Um valor a tal que $P(U_{10} < a) = 0.10$ e (iv) Um valor b tal que $P(U_{10} > b) = 0.10$.

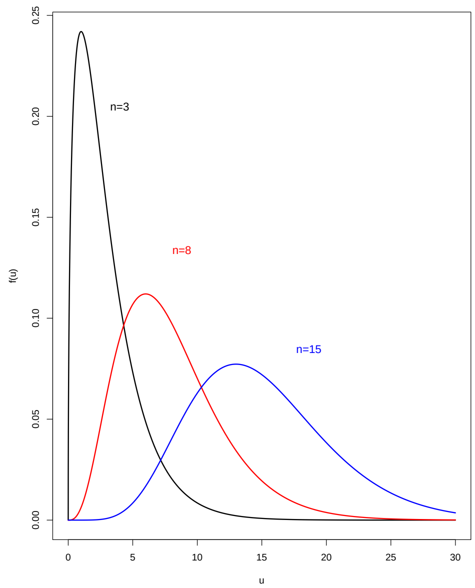

Figura 1: Densidade da distribuição χ^2_n para $n = 3$, 8 e 15 gl

No **R**, (i) e (ii) são calculados digitando respectivamente `pchisq(2.588,10)` e `1-pchisq(23.209,10)`. As respostas das partes (i) e (ii) são as duas respectivamente 0.01. Já para (iii) e (iv) usamos `qchisq(0.10,10)` e `qchisq(0.9,10)`, cujos resultados são 4.865 e 15.987. Veja que usando a notação $\chi^2_{n;\alpha}$ podemos escrever então que $\chi^2_{10;0.99} = 2.558$, $\chi^2_{10;0.99} = 23.209$ $\chi^2_{10;0.90} = 4.865$ e $\chi^2_{10;0.10} = 15.987$.

Observação. A distribuição χ^2_n é um caso particular da distribuição *Gama*. Uma v.a. Y tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se a sua densidade $f(x) = \beta^\alpha\, x^{\alpha-1}\, e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha)$ para $x > 0$. Comparando com a equação (3), vemos que χ^2_n nada mais é do que a distribuição Gama com parâmetros $\alpha = \frac{n}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

2 As distribuições F de Snedecor

Se U_n e U_m são variáveis aleatórias independentes tendo distribuições χ^2 com n e m graus de liberdade respectivamente, a distribuição de $W_{n,m} = \frac{U_n/n}{U_m/m} = \frac{m}{n}\,\frac{U_n}{U_m}$ é chamada distribuição F de Snedecor com n graus de liberdade no numerador e m graus de liberdade no denominador. Como as distribuições χ^2_n, as distribuições $F_{n,m}$ também são assimétricas e tem suporte nos reais positivos. Por esse motivo,, percentis à direita e a esquerda da distribuição devem ser calculados separadamente. Em geral, usamos a notação $F_{n,m;\alpha}$ para o valor que deixa área α à direita da distribuição, i.e. $P(W_{n,m} > F_{n,m;\alpha}) = \alpha$. Na linguagem **R**, as funções `pf(w,n,m)` e `qchisq(a,n,m)` calculam respectivamente a função de distribuição acumulada da distribuição $F_{n,m}$ e a sua inversa.

Exemplo 2. Calcule (i) $P(W_{6,10} < 0.098)$; (ii) $P(W_{6,10} > 6.545)$; (iii) Um valor a tal

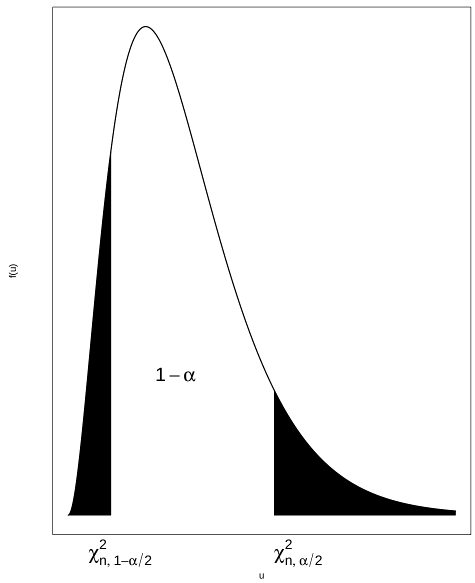

Figura 2: Percentis $\chi^2_{n;1-\alpha/2}$ e $\chi^2_{n;\alpha/2}$ deixam probabilidade $(1-\alpha)$ no centro da distribuição.

que $P(W_{6,10} < a) = 0.025$ e (iv) Um valor b tal que $P(W_{6,10} > b) = 0.975$.

No **R**, (i) e (ii) são calculados digitando respectivamente `pf(0.098,6,10)` e `1-pchisq(6.545,6,10)`. As respostas das partes (i) e (ii) são as duas respectivamente 0.005. Já para (iii) e (iv) usamos `qchisq(0.025,6,10)` e `qf(0.975,6,10)`, cujos resultados são 0.183 e 4.072. Veja que usando a notação $F_{n,m;\alpha}$ podemos escrever então que $\chi^2_{6,10;0.995} = 0.098$, $\chi^2_{10;0.005} = 6.545$ $\chi^2_{6,10;0.975} = 0.183$ e $\chi^2_{6,10;0.025} = 4.072$.

Observação. Uma v.a. V que toma valores no intervalo $(0,1)$ segue uma distribuição *Beta* com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se a sua densidade é dada por $f(v) = \Gamma(\alpha+\beta)\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/[\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)]$. A distribuição $F_{n,m}$ é relacionada com a distribuição Beta pela seguinte propriedade: Se $W_{n,m} \sim F_{n,m}$, então a v.a. $V = \frac{n\,W_{n,m}}{m+n\,W_{n,m}}$ segue uma distribuição Beta com parâmetros $\alpha = n/2$ e $\beta = m/2$.

3 Inferência para a variância de uma distribuição Normal

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de uma distribuição Normal com média μ conhecida e variância σ^2. Embora seja pouco realista, vamos considerar primeiro o caso que a média $\mu = \mu_0$ é conhecida. O desenvolvimento desse caso vai ajudar a entender melhor como proceder quando μ é desconhecida.

3.1 Média μ conhecida

Quando a média μ_0 é conhecida, o estimador da variância σ^2 é $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$. Defina as v.a.'s $Z_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$ que tem distribuição Normal(0,1). Então

$$\frac{n\,S_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2\,, \tag{4}$$

pois sabemos da definição da distribuição χ_n^2 que ela é a soma dos quadrados de n v.a.'s independentes com distribuição Normal Padrão. Logo, S_0^2 é um estimador não-viesado para σ^2, pois $E(S_0^2) = \frac{\sigma^2}{n}\,E(\chi_n^2) = \sigma^2$. Também segue da equação 4 que

$$1 - \alpha = P\left(\chi^2_{n;1-\alpha/2} < \frac{n\,S_0^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n;\alpha/2}\right) = P\left(\frac{n\,S_0^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{n\,S_0^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\right)\,,$$

de forma que um IC de nível $100(1-\alpha)$ para a variância σ^2 será

$$\frac{n\,s_0^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{n\,s_0^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}\,,$$

ou, se for desejado um IC para o desvio padrão σ, tomamos simplesmente a raíz quadrada na equação acima para obter

$$\sqrt{\frac{n\,s_0^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{n\,s_0^2}{\chi^2_{n;1-\alpha/2}}}\,.$$

A equação (4) pode ser usada também para construir regiões críticas para testes sobre σ ou equivalentemente sobre σ^2. O estatístico do teste será

$$\chi^2_{obs} = \frac{n\,s_0^2}{\sigma_0^2}$$

e, para testar por exemplo a $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$, a região de rejeição deverá ser da forma $\chi^2_{obs} > c$, onde para ter nível de significância α (i.e. probabilidade de rejeição quando $\sigma^2 = \sigma_0^2$ igual a α), segue da equação (4) que devemos tomar $c = \chi^2_{n;\alpha}$, o percentil $(1-\alpha)$ da distribuição de referência χ_n^2. Usualmente consideramos três casos (veja a Figura 3):

- Para testar $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} > \chi^2_{n;\alpha}$. O p-valor é $P[\chi^2_n > \chi^2_{obs}]$;
- Para testar $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n;1-\alpha}$. O p-valor é $P[\chi^2_n < \chi^2_{obs}]$ e
- Para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n;1-\alpha/2}$ ou $\chi^2_{obs} > \chi^2_{n;\alpha/2}$ O cálculo do p-valor é mais complicado devido à falta de simetria da distribuição χ^2_n. Usualmente calcula-se a área à direita e à esquerda de χ^2_{obs} e multiplica-se por 2 a menor delas, i.e. o p-valor é $2\,\min\{P[\chi^2_n > \chi^2_{obs}], P[\chi^2_n < \chi^2_{obs}]\}$.

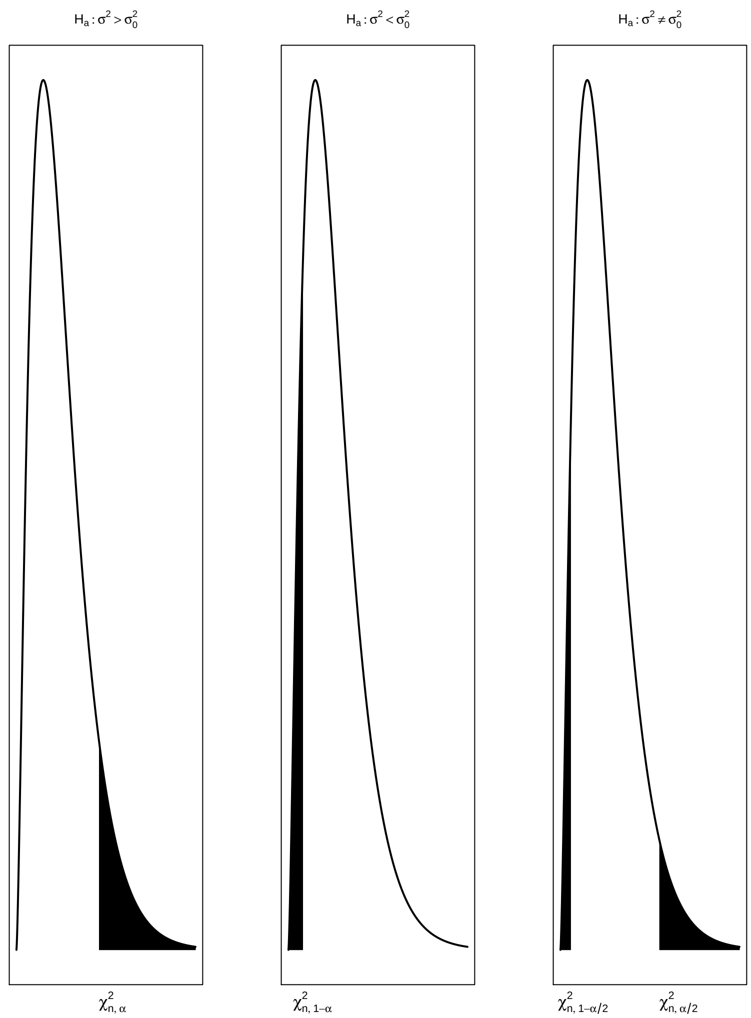

Figura 3: Regiões críticas para testes sobre a variância, média conhecida.

3.2 Média μ desconhecida

Quando a média μ é desconhecida, o estimador da variância populacional σ^2 é $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Para estender os resultados anteriores, o problema fundamental é achar a distribuição de S^2/σ^2. É relativamente fácil ver que essa distribuição não depende dos parâmetros desconhecidos μ e σ^2. Com efeito, defina como antes $Z_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$ que formam uma amostra da N(0,1). Como $X_i = \mu + \sigma\, Z_i$ e portanto $\bar{X} = \mu + \sigma\, \bar{Z}$, segue que

$$\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2\,,$$

e, como a distribuição dos Z_i's não depende de μ nem de σ^2, o mesmo deve valer para $(n-1)\, S^2/\sigma^2$. Porém, derivar a distribuição não é trivial, pois as v.a.'s $(Z_i - \bar{Z})$ são correlacionadas. Em cursos avançados de Probabilidade mostra-se que

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}\,. \tag{5}$$

Uma vez que temos esse resultado, o problema é muito semelhante ao que estudamos na Subseção anterior: só precisa substituir S_0^2 por S^2 e ajustar os graus de liberdade para o novo valor $(n-1)$. Como a distribuição χ^2_{n-1} é mais dispersa que a χ^2_n, isso fará com que tenhamos por exemplo IC mais largos que no caso anterior, o que era de se esperar, pois ao não conhecer μ devemos ter maior incerteza na precisão das nossas inferências sobre σ^2.

Resumindo, neste caso o IC de nível $100(1-\alpha)\%$ para a variância σ^2 é

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \tag{6}$$

(para um IC para o desvio padrão σ simplesmente tome a raiz quadrada do IC acima). Para realizar testes de hipóteses sobre σ^2 o estatístico é

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$$

- Para testar $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} > \chi^2_{n-1;\alpha}$. O p-valor é $P[\chi^2_{n-1} > \chi^2_{obs}]$;
- Para testar $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n-1;1-\alpha}$. O p-valor é $P[\chi^2_{n-1} < \chi^2_{obs}]$ e
- Para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contra a $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ ou $\chi^2_{obs} > \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ Para achar o p-valor calcula-se a área à direita e à esquerda de χ^2_{obs} e multiplica-se por 2 a menor delas, i.e. o p-valor é $2\,\min\{P[\chi^2_{n-1} > \chi^2_{obs}], P[\chi^2_{n-1} < \chi^2_{obs}]\}$.

Exemplo 3. Um laboratório está considerando comprar uma nova balança. Sabe-se que essa balança fornece leituras não-viesadas e normais, no sentido que ao pesar um objeto cujo peso verdadeiro é μ (desconhecido!), retorna uma variável aleatória $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Para aferir o valor do desvio padrão σ, um mesmo objeto foi pesado $n = 10$ vezes retornando valores (em gramas)

30.224 29.974 29.954 30.082 30.465 29.886 29.888 30.067 29.802 29.960

O desvio padrão da balança usada atualmente no laboratório é 0.3g. A nova balança será comprada somente se o seu desvio padrão σ for inferior a esse valor.

Com base na informação apresentada, (i) deve-se comprar a nova balança? Use nível de significância $\alpha = 0.05$. (ii) Apresente também o p-valor do teste e um IC de nível 95% para o desvio padrão da nova balança.

Como o valor de μ (o peso do objeto pesado) é desconhecido, usamos o estimador $S^2 = \sum_{i=1}^{1}(X_i - \bar{X})^2$ e a distribuição (5). A estimativa baseada na amostra acima é $s^2 \doteq (0.1937)^2$ e o estatístico do teste é $\chi^2_{obs} \doteq 9(0.1937)^2/(0.3^2) \doteq 3.751$. Considerando que a H_a é $\sigma^2 < (0.3)^2$, esse valor deve ser comparado com $\chi^2_{9;0.95} \doteq 3.325$, o que leva a não rejeitar a $H_0 : \sigma^2 \leq (0.3)^2$. O p-valor do teste é $P(\chi^2_9 < 3.751) \doteq 0.073$ (veja que a decisão teria sido a contrária se $\alpha = 0.10$, por exemplo). Finalmente, segue da equação (6) que o IC para σ é

$$\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{9;0.025}}} \doteq \sqrt{\frac{9\,(0.1937)^2}{19.023}} \doteq 0.133 < \sigma < 0.354 \doteq \sqrt{\frac{9\,(0.1937)^2}{2.700}} \doteq \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{9;0.975}}}\,.$$

4 Inferência para comparar duas variâncias

Consideramos aqui somente o caso que as médias populacionais são desconhecidas [Quando as médias são conhecidas, basta mudar abaixo S^2_A e S^2_B pelos respectivos estimadores usando essas médias (análogos ao S^2_0 da Subseção 3.1) e os graus de liberdade $(n-1)$ e $(m-1)$ por n e m].

Suponha que temos duas amostras independentes $X_{A,1}, \ldots, X_{A,n_A} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(\mu_A,\sigma^2_A)$ e $X_{B,1}, \ldots, X_{B,n_B} \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(\mu_B,\sigma^2_B)$, onde os parâmetros ($\mu_A$, σ^2_A) e (μ_B e σ^2_B) são todos desconhecidos. O nosso objetivo é fazer inferência sobre a razão de variâncias σ^2_B/σ^2_A.

Como antes, defina $\bar{X}_A = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_{A,i}$, $\bar{X}_B = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} X_{B,i}$, $S^2_A = \frac{1}{n_A-1}\sum_{i=1}^{n_A}(X_{A,i} - \bar{X}_A)^2$ e $S^2_B = \frac{1}{n_B-1}\sum_{i=1}^{n_B}(X_{B,i} - \bar{X}_B)^2$. Sabemos da Seção anterior que $(n_A - 1)\,S^2_A/\sigma^2_A \sim \chi^2_{n_A-1}$ e $(n_B-1)\,S^2_B/\sigma^2_B \sim \chi^2_{n_B-1}$ e portanto, lembrando que as amostras são independentes, segue da Seção 2 que

$$\frac{n_A-1}{n_B-1}\,\frac{(n_B-1)\,S^2_B/\sigma^2_B}{(n_A-1)\,S^2_A/\sigma^2_A} = \frac{S^2_B/S^2_A}{\sigma^2_B/\sigma^2_A} \sim F_{n_B-1,n_A-1}\,. \tag{7}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha/2} < \frac{S^2_B/S^2_A}{\sigma^2_B/\sigma^2_A} < F_{n_B-1,n_A-1;\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\frac{S^2_B/S^2_A}{F_{n_B-1,n_A-1;\alpha/2}} < \frac{\sigma^2_B}{\sigma^2_A} < \frac{S^2_B/S^2_A}{F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha/2}}\right)\,, \end{aligned}$$

de forma que um IC de nível $100(1-\alpha)\%$ para σ^2_B/σ^2_A é

$$\frac{S^2_B/S^2_A}{F_{n_B-1,n_A-1;\alpha/2}} < \frac{\sigma^2_B}{\sigma^2_A} < \frac{S^2_B/S^2_A}{F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha/2}} \tag{8}$$

(para um IC para a razão dos desvios padrões σ_B/σ_A, tome a raiz quadrada desse intervalo).

Para realizar testes de hipóteses sobre a razão σ_B^2/σ_A^2 basta usar (7) e notar que valores grandes de σ_B^2/σ_A^2 devem resultar em que observemos também valores grandes de S_B^2/S_A^2. Assim, o estatístico do teste será

$$F_{obs} = \frac{S_B^2/S_A^2}{\sigma_B^2/\sigma_A^2}\,.$$

Como usual, consideramos três casos:

- Para testar a $H_0 : \sigma_B^2/\sigma_A^2 \leq r_0$ contra a $H_a : \sigma_B^2/\sigma_A^2 > r_0$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $F_{obs} > F_{n_B-1,n_A-1;\alpha}$. O p-valor é $P[F_{n_B-1,n_A-1} > F_{obs}]$;
- Para testar a $H_0 : \sigma_B^2/\sigma_A^2 \geq r_0$ contra a $H_a : \sigma_B^2/\sigma_A^2 < r_0$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $F_{obs} < F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha}$. O p-valor é $P[F_{n_B-1,n_A-1} < F_{obs}]$ e
- Para testar a $H_0 : \sigma_B^2/\sigma_A^2 = r_0$ contra a $H_a : \sigma_B^2/\sigma_A^2 \neq r_0$ ao nível de significância $100\alpha\%$, rejeite H_0 se $F_{obs} < F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha/2}$ ou $F_{obs} > F_{n_B-1,n_A-1;\alpha/2}$. Para achar o p-valor usualmente compara-se a área da distribuição F_{n_B-1,n_A-1} à direita e à esquerda de F_{obs} e multiplica-se por 2 a menor delas, i.e. o p-valor é $2\min\{P[F_{n_B-1,n_A-1} < F_{obs}], P[F_{n_B-1,n_A-1} > F_{obs}]\}$.

Exemplo 3. (Continuação). O laboratório suspeita que o erro (desvio) padrão da nova balança pode depender do peso do objeto, de forma que para objetos mais pesados o erro é maior. Para verificar essa conjectura, tomou dois objetos iguais ao pesado anteriormente e os pesou simultaneamente na balança. As 12 medições obtidas são mostradas abaixo.

59.676 60.583 60.010 60.345 60.123 60.297 59.951 59.602 59.714 60.208 60.109 59.863

Com base nos dois conjuntos de pesadas, existe evidência que o erro da balança aumenta ao pesar objetos mais pesados? Use $\alpha = 0.05$. Calcule o p-valor e construa um IC de nível 95% para a razão dos desvios padrões quando se pesam os dois objetos e quando se pesa somente um deles.

As variâncias estimadas são respectivamente $s_A^2 \doteq (0.1937)^2$ e $s_B^2 \doteq (0.2961)^2$. A H_a é que $\sigma_B^2 > \sigma_A^2$ ou, equivalentemente, que $\sigma_B^2/\sigma_A^2 > 1$. Logo, tomamos acima $r_0 = 1$. O estatístico do teste é $F_{obs} \doteq (0.2961/0.1937)^2/1 \doteq 2.337$. Na cauda a direita da distribuição $F_{11,9}$ temos que $F_{11,9;0.05} \doteq 3.102$, portando não rejeitamos a H_0 que as duas variâncias são iguais. Alternativamente, poderíamos calcular o p-valor $P(F_{11,9} > 2.337) \doteq 0.106$ ou 10.6%, que sendo maior do que 5% também leva a não rejeitar H_0. Finalmente, para calcular o IC usamos a equação (8) que dá

$$\frac{S_B^2/S_A^2}{F_{n_B-1,n_A-1;\alpha/2}} \doteq \frac{(0.2961)^2/(0.1937)^2}{3.912} \doteq 0.597 < \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} < 8.386 \doteq \frac{(0.2961)^2/(0.1937)^2}{0.279} \doteq \frac{S_B^2/S_A^2}{F_{n_B-1,n_A-1;1-\alpha/2}}\,,$$

ou, equivalentemente,

$$0.773 < \frac{\sigma_B}{\sigma_A} < 2.896\,.$$