

## LISTA DE EXERCÍCIOS 07 DE TEORIA DOS NÚMEROS

HEMAR GODINHO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

### 1. CONGRUÊNCIAS MÓDULO $m$

- (1) Mostre que  $3n^2 - 1$  nunca é um quadrado para qualquer inteiro  $n$ .
- (2) Mostre que  $n^{99} + 4 \not\equiv 0 \pmod{37}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3) Seja  $d = \text{mdc}(2^m + 1, 2^n + 1)$ . Mostre que se  $m, n$  são ímpares então  $3/d$ , e dê exemplos de valores pares de  $m, n$  tais que  $d$  assumam valores diferentes, não divisíveis por 3.
- (4) Mostre que  $4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 0 \pmod{13}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (5) Determine o último dígito da representação decimal de  $2^{400}$ .
- (6) Seja  $p$  um primo. Mostre que

$$\left[ \left( \frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 \equiv -1 \pmod{p}, \quad \text{se } p \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\left[ \left( \frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{se } p \equiv 3 \pmod{4}$$

### 2. TEOREMA DO RESTO CHINÊS E LEMA DE HENSEL

- (1) Encontre o menor número natural  $m$ ,  $m \neq 1$ , tal que  $m$  satisfaz simultaneamente as três congruências:  $m \equiv 1 \pmod{11}$ ,  $m \equiv 1 \pmod{13}$  e  $m \equiv 1 \pmod{17}$ .
- (2) Encontre a solução de

$$\begin{cases} 7x & \equiv 10 \pmod{8} \\ 9x & \equiv 5 \pmod{11} \\ 10x & \equiv 8 \pmod{13} \end{cases}$$

- (3) Encontre a solução de

$$\begin{cases} 4x & \equiv 3 \pmod{7} \\ 2x & \equiv 7 \pmod{9} \\ 3x & \equiv 5 \pmod{11} \\ 5x & \equiv 7 \pmod{13} \end{cases}$$

- (4) Encontre uma raiz módulo  $3^4$  do polinômio  $f(x) = 2x^2 + x + 6$ .
- (5) Encontre uma raiz módulo  $5^3$  do polinômio  $f(x) = x^3 + x + 57$ .
- (6) Encontre uma solução para a congruência  $x^4 + x + 7 \equiv 0 \pmod{675}$ .
- (7) Encontre uma solução para a congruência  $x^4 + x^3 + 8 \equiv 0 \pmod{21025}$ .

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, BRASÍLIA-DF, BRASIL