Soluções de alguns exercícios das Listas 1 e 2.

Lista 1:

(3) Mostre que $mdc(a,b) = mdc(a+cb, b)$.

Sejam $d = mdc(a,b)$ e $D = mdc(a+cb,b)$. Logo $a = da^*$, $b = db^*$, $a+cb = D.A$ e $b = DB$. Assim temos que $a+cb = d(a^* + cb^*) \Rightarrow d/a+cb$, logo d/D (pelo Corolário), pois d/b.

Por outro lado, $DA = a+cb = a+cDB \Rightarrow a = D(A-cB) \Rightarrow D/a$.

Como D/b segue que D/d (pelo corolário). Como $d, D \in \mathbb{N} \Rightarrow d = D$.

(4) $mdc(a,b) = 1 \Rightarrow mdc(a+b, ab) = 1$.

Solução 1 Seja $d = mdc(a+b, ab) \Rightarrow a+b = dA$ e $ab = dB \Rightarrow$ $dAa = a^2 + ab$ e $dBb = ab + b^2 \Rightarrow a^2 = d(Aa - B)$ e $b^2 = d(Bb - B)$ pois $ab = dB$. Logo temos que d/a^2 e d/b^2.

Por hipótese, $1 = ra + sb$ (lema 3), logo $a = ra^2 + sab$ e $b = rab + sb^2$. Como d/a^2, d/b^2 e d/ab, pelo lema 2, segue que d/a e d/b $\Rightarrow$ $d/1$ (Corolário) $\Rightarrow d = 1$.

Solução 2 (Colega de sala)

Seja $d = mdc(a+b, ab) \Rightarrow a+b = dA$ e $ab = dB$.

$\Rightarrow a = dA - b$. Pelo lema 6 (pois escrevi $a = dq + r$ e não preciso da hipótese de $0 \le r < d$) temos que

$$mdc(a,d) = mdc(d,b) = c \quad . \quad \text{Logo } c/a,\ c/b \text{ e } c/d$$

$\Rightarrow$ (pelo Corolário) $c/1$ $(1 = mdc(a,b))$ $\Rightarrow c = 1$.

Agora d/ab e $mdc(d,a) = 1 \Rightarrow d/b$, e d/ab e $mdc(d,b) = 1$

$\Rightarrow d/a \Rightarrow d/mdc(a,b) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$.

(5) Mostre que $mdc(3m+2, 5m+3) = 1$

Seja $d = mdc(3m+2, 5m+3) \Rightarrow d/3m+2$ e $d/5m+3$

$\Rightarrow d$ divide $(3m+2)\times 5 + (5m+3)\times(-3) = 1$ pelo lema 2

$\Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1.$

Lista 02: (Parte I)

Ex 2.) Determine as soluções inteiras de $1257x + 108y = 54$

(i) Cálculo do mdc

$1257 = 108\times 11 + 69 \Rightarrow 69 = 1257 - 108\times 11$

$108 = 69\times 1 + 39 \Rightarrow 39 = 108 - 69 = 108 - (1257 - 108\times 11) = 108\times 12 - 1257$

$69 = 39\times 1 + 30 \Rightarrow 30 = 69 - 39 = (1257 - 108\times 11) - (108\times 12 - 1257)$

$39 = 30\times 1 + 9 \qquad = 1257\times 2 - 108\times 23$

$30 = 9\times 3 + 3 \qquad 9 = 39 - 30 = 108\times 35 - 1257\times 3$

$9 = 3\times 2 + 0$

Logo $mdc(1257, 108) = 3$. Como $3/54$ temos que essa equação possui infinitas soluções. Como $3 = 30 - 9\times 3$, segue dos cálculos acima que

$$3 = (1257\times 2 - 108\times 23) - 3\times(108\times 35 - 1257\times 3)$$
$$= 1257\times 11 + 108\times(-128)$$

(ii) Soluções da Equação: Como $54 = 3\times 18$ temos que

$$54 = 1257\times(11\times 18) + 108\times(-128\times 18) = 1257\times 198 + 108\times(-2304)$$

(ii.1) <u>solução inicial</u>: $x_0 = 198$ e $y_0 = -2304$

(ii.2) <u>Demais soluções</u>:

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \frac{108}{3}t = 198 + 36t \\ y_t = y_0 - \frac{1257}{3}t = -2304 - 419t \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

(2) (Parte II) Moste que $1^2+2^2+3^2+\dots+K^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

(i) Casos Particulares:

$K=1 \qquad 1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ ✓

$K=2 \qquad 1^2+2^2 = \frac{2.3.5}{6}$ ✓

$K=3 \qquad 1^2+2^2+3^2 = \frac{3.4.7}{6}$ ✓

(ii) Hipótese de Indução:

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Considere a expressão

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$, pela hip. de indução

Como

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Como as hipóteses do teorema de indução estão satisfeitas concluímos que o resultado é sempre verdadeiro.