

Politopos – Ejemplos Extremos y Parámetros Combinatóricos

Hoja de Ejercicios 2

Problema 1

- (a) Demuestre que se puede teselar el plano con copias congruentes de un triángulo, cuadrilátero, o hexágono regular.
- (b) Demuestre que no se puede teselar el plano con copias congruentes de un pentágono regular.

Problema 2

Demuestre que si un pentágono tiene dos lados paralelos, entonces se puede teselar el plano con copias congruentes.

Problema 3

¿Por qué no se puede teselar el plano con copias de un n -ágono fijo, para $n > 6$?

Problema 4

Un *politopo de Hanner* se construye empezando con el intervalo $I := [-1, +1]$ y formando productos y sumas directas (equivalentemente: productos y dualidad).

- (a) Demuestre que todo politopo de Hanner tiene $3^d - 1$ caras no triviales.
- (b) ¿Será cierto que todo politopo de Hanner es un prisma o una bipirámide?

Problema 5

Clasifique los (tipos combinatorios de) politopos de Hanner en dimensiones 2, 3, 4, 5, 6, ...

Problema 6

Analice el politopo centralmente simétrico obtenido como la envolvente convexa de 10 vectores $\pm e_1, \dots, \pm e_4, \pm(e_1 + \dots + e_4)$ in \mathbb{R}^4 .

- (a) Demuestre que es “centralmente-simétrico-neighborly”, es decir, cuales quiera dos vértices excepto los opuestos son vecinos.
- (b) Demuestre que es simplicial.

(c) Calcule su f -vector.

Problema 7

La célula-24 se puede construir de dos maneras:

- Tomando la envolvente convexa de los puntos medios de las 2-caras de un 4-cubo, es decir, todos los vectores $v \in \{-1, 0, +1\}^4$ con dos ceros,
- Tomando la envolvente convexa del cubo $\text{conv}\{-1, +1\}^4$ y el politopo de cruce $\text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_4\}$.

Analícelos ambos. Muestre que de verdad son “el mismo” politopo. Demuestre que sus facetas son 24 octaedros regulares. Demuestre que este politopo es auto-dual. Calcule su f -vector.

Problema 8

Analice $\text{conv}((Q \times 2Q) \cup (2Q \times Q))$ para $Q = [-1, 1]^2$:

- (a) Demuestre que este es un 4-politopo con el grafo de un 5 cubo.
- (b) Demuestre que todas sus facetas son combinatoriamente cubos.
- (c) Use esto para calcular su f -vector.