Prof. Günter M. Ziegler
Jorge Olarte, Hannah Sjörberg
Freie Universität Berlin

6to ECCO Barranquilla
Junio 4-15, 2018

Politopos –
Ejemplos Extremos y Parámetros Combinatóricos

Hoja de Ejercicios 1

Problema 1

Encuentre una demostración del teorema de Euler: $V - E + F = 2$.
(Euler lo intentó pero no lo pudo demostrar.)
Aquí hay 20 pruebas diferentes: `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`

Problema 2

Deduzca del teorema de Euler que todo poliedro tiene una cara triangular, o un vértice simple (es decir, un vertice de grado 3), o ambos. ¿Podría dar un cota inferior al número mínimo de caras triangulares y vértices simples?

Problema 3

Decida si los siguientes vectores son f-vectores de un 3-politopo.

(a) (8,14,8)

(b) (8,20,14)

(c) (8,18,10)

En caso afirmativo, dibuje un ejemplo. Encuentre las coordenadas.

Problema 4

Sea $P = \text{conv}\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$ un 3-politopo.

Obtenga una descripcion de P como intersección de semiespacios.

Problema 5

Sea P un politopo con vértices V. Decimos que Q es un *subpolitopo* de P si Q es la envolvente convexa de un subconjunto de V: $Q = \text{conv}(V')$ para algún $V' \subseteq V$.

(a) Clasifique todos los subpolitopos del 3-cubo regular $[0, 1]^3$.

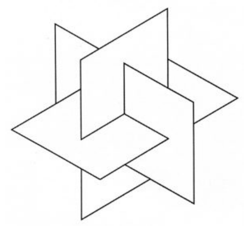
¿Cómo interpretar "clasifique"? Es decir, cuando se consideran dos subpolitopos "equivalentes" o "el mismo"?

(b) Entre otros, debería encontrar tetraedros y octaedros. ¿Son regulares?

Problema 6

(a) Construya coordenadas para el icosaedro regular.

Pista: Use el siguiente dibujo:



(b) Construya coordenadas de los vértices de un dodecaedro regular poniendo "carpas" encima de las facetas del cubo regular.

(c) Complete la clasificación de los Sólidos Platónicos, mostrando que existen coordenadas para los 5 tipos.

Problema 7

Sea P un 3-politopo vértice-transitivo, tal que todas sus facetas son regulares. Asuma que hay 4 facetas A, B, C, D encontrándose en cada vértice en ese orden. Si se asume que D es un triángulo, y que A y C no tienen el mismo número de vértices, ¿qué politopo puede ser P?

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline D & C \end{array}$$

Problema 8

Si un 3-politopo simple tiene solo pentágonos y hexágonos como facetas,

(a) ¿Cuántos pentágonos podría haber?

(b) * ¿Cuántos hexágonos podría haber?

Problema 9

El *látice de caras* de un politopo P es el conjunto de las caras de P, parcialmente ordenado por inclusión. Dibuje el látice de caras de un cubo y de un cubo con un vértice cortado.

Problema 10

(a) Demuestre que el látice de caras de un politopo 3-dimensional (o, en general, d-dimensional) es "Euleriano": es graduado, todos los intervalos tienen el mismo número de elementos de grado par y grado impar, y los intervalos de longitud >1 son conexos.

(b) * Asuma que en un látice Eureliano de longitud 5 todos los intervalos de longitud >2 son conexos, (es decir, conexos si se ignoran el máximo y el mínimo). Demuestre que esto caracteriza los látices de caras de 3-politopos.