Dados do Projeto de Pesquisa	
Título do Projeto de Pesquisa:	O estudo computacional do problema da decomposição em caminhos de grafos simples
Grande área/área segundo o CNPq (https://goo.gl/JB3tAs):	Ciências Exatas e da Terra / Ciência da Computação
Grupo de Pesquisa vinculado ao projeto:	
Linha de pesquisa do grupo de pesquisa vinculado ao projeto:	
Categoria do projeto:	( ) projeto em andamento, já cadastrado na PRPI ( ) projeto não iniciado, mas aprovado previamente (X) projeto novo, ainda não avaliado
Palavras-chave:	grafo; algoritmo; complexidade; decomposição em caminhos.

1. INTRODUÇÃO

O propósito deste projeto é a investigação de problemas computacionais relacionados à decomposição em caminhos de grafos simples.

Grafos são estruturas matemáticas que podem ser usadas para representar muitos tipos de relações, conexões e processos em áreas como física, matemática, biologia, química, linguística e ciência da computação. Alguns exemplos são:

- Relações entre ruas, locais e interseções em mapas de aplicativos de navegação;
- Conexões funcionais entre partes do cérebro que interagem entre si;
- Processos de disseminação de vírus ou parasitas;
- Processo de propagação de opiniões em redes de relacionamento;
- Relações de interferência entre antenas de emissão de sinais digitais ou analógicos;
- Relações entre elementos frasais na hierarquia sintática de frases.

Formalmente, um *grafo simples* G é um par ordenado (V,E), onde V é um conjunto finito e $E \subseteq \binom{V}{2}$. Nesse caso, define-se V como o *conjunto de vértices* e E como o *conjunto de arestas* de G. Para $G=(V,E)$, defina $V(G)=V$ e $E(G)=E$. Um grafo pode ser representado por gravuras como a Figura 1, que ilustra um grafo simples com conjunto de vértices $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e de arestas $\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\},\{v_3,v_5\},\{v_4,v_5\}\}$.

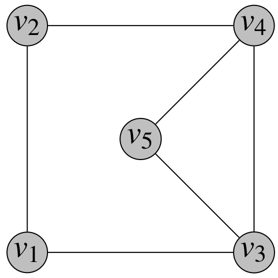

Figura 1: Representação ilustrativa de um grafo.

Dizemos ainda que dois vértices quaisquer v e w são vizinhos se existe uma aresta entre eles, ou seja, $\{v,w\}$ é uma aresta, e definimos o grau de um vértice como sendo a quantidade de vizinhos que ele possui.

O primeiro estudo relacionado a Teoria dos Grafos foi de autoria de Leonhard Euler, escrito em 1736 e publicado em 1741 (1) sobre o problema das Sete Pontes de Königsberg. O problema das Sete Pontes de Königsberg consiste em, partindo de qualquer lugar da cidade de Königsberg, ilustrada na Figura 2, determinar se existe um caminho que passe por todas as pontes, destacadas em verde na figura, exatamente uma vez. Na análise e resolução do problema, que possui resposta negativa, Euler lançou as fundações da Teoria dos Grafos.

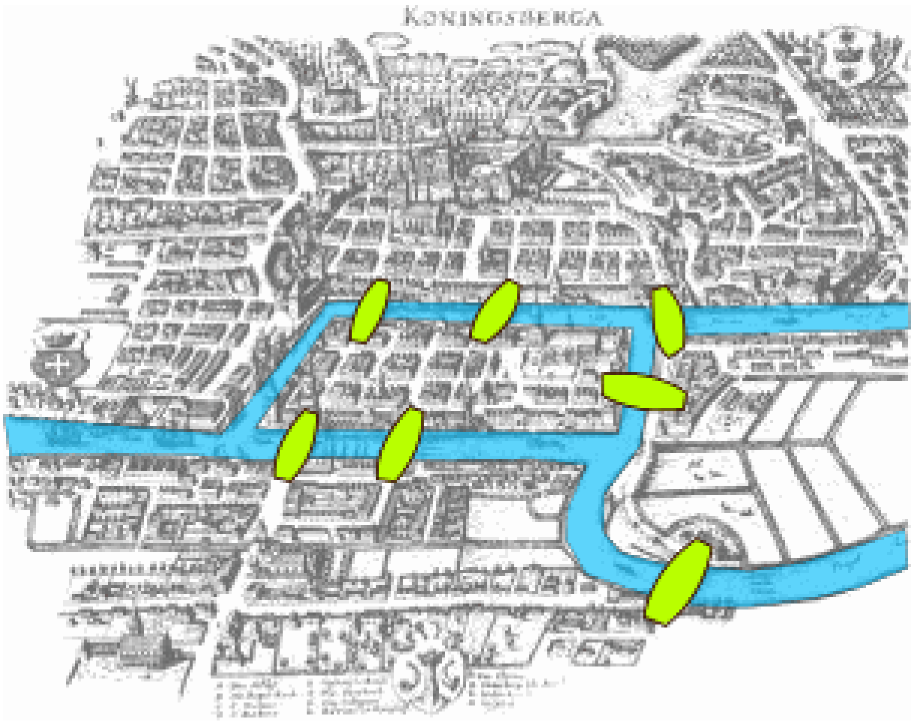

Figura 2: Ilustração da cidade de Königsberg e suas sete pontes.

Na segunda metade do século passado, a facilidade de se modelar relações e processos de natureza prática reais com grafos despertou o interesse de muitos cientistas da computação. Assim, deu-se início ao estudo algorítmico e de complexidade de problemas envolvendo grafos.

Atualmente, a Teoria dos Grafos e os algoritmos em grafos são assuntos bastante explorados nas áreas da matemática e da ciência da computação. Um dos diversos problemas estudados em grafos, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista algorítmico, é o problema de se decompor grafos em vários subgrafos, o qual é objeto de extensivo estudo sendo o assunto principal de muitos livros e artigos (2–8).

Um grafo $H = (V',E')$ é *subgrafo* de um grafo $G = (V,E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Uma *decomposição* D de um grafo G é um conjunto de subgrafos de G onde cada aresta de G aparece em exatamente um dos subgrafos. O tamanho de uma decomposição é a sua cardinalidade. Na Figura 3, temos um exemplo de decomposição.

O estudo sobre a decomposição de grafos é importante, pois decomposições com determinadas propriedades podem auxiliar no projeto de algoritmos para problemas computacionais em grafos e também na prova de resultados matemáticos relacionados a grafos.

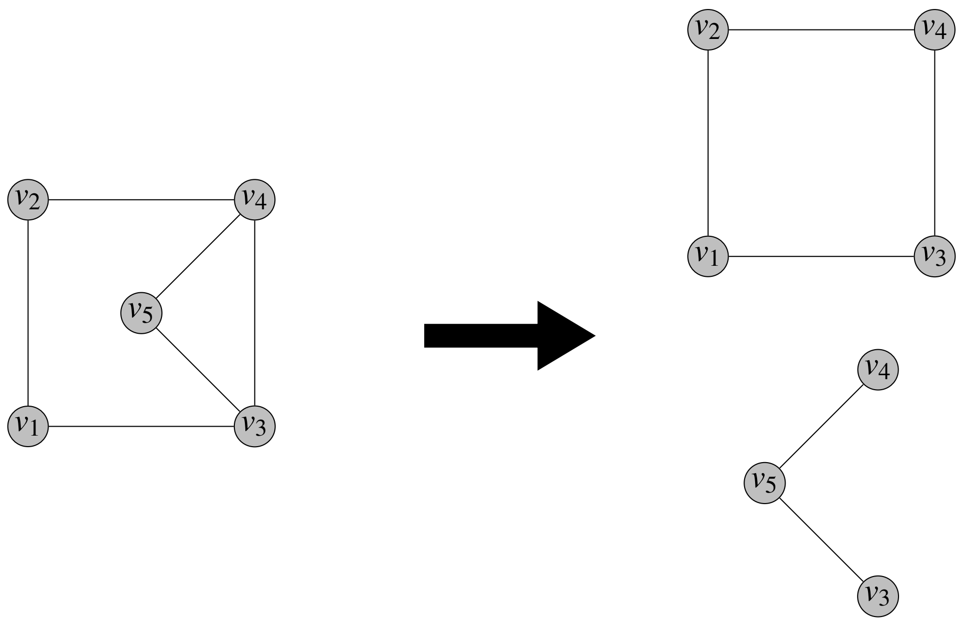

Figura 3: Exemplo de decomposição à direita para o grafo à esquerda.

Dizemos que uma decomposição D de um grafo G é uma *decomposição em caminhos* se todos os subgrafos de G em D são caminhos, onde caminhos são grafos cujos vértices podem ser permutados de forma que dois vértices são vizinhos se e somente se eles aparecem em posições consecutivas na sequência, por exemplo, o grafo na Figura 3 com vértices $\{v_4, v_5, v_3\}$ é um caminho, porém o grafo com vértices $\{v_1, v_2, v_4, v_3\}$ não é.

Erdös propôs a seguinte pergunta: Qual o menor inteiro k para o qual podemos afirmar que todo grafo conexo possui uma decomposição em caminhos de tamanho k? Em 1968, Tibor Gallai então concebeu a seguinte conjectura:

Conjectura 1 (Conjectura de Gallai)**.** *Todo grafo possui uma decomposição em caminhos de tamanho $\lceil n/2 \rceil$, onde n é o número de vértices do grafo.*

De fato, se a Conjectura de Gallai for verdadeira, temos então a resposta da pergunta feita por Erdös, já que conhecemos grafos cujo todas as decomposições por caminhos têm tamanho maior ou igual a $\lceil n/2 \rceil$, por exemplo, o grafo G de n vértices, que possui aresta entre todos os pares de vértices, pois G possui $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ arestas e cada caminho subgrafo de G tem no máximo $n-1$ arestas e, portanto, toda decomposição em caminhos de G terá tamanho no mínimo $\lceil n/2 \rceil$.

Em 1968, Lovász (9) dá um passo na direção da prova da Conjectura de Gallai e mostra que todo grafo G possui uma decomposição em caminhos e ciclos de tamanho menor ou igual a $\lfloor n/2 \rfloor$, onde ciclos são grafos cujos vértices podem ser permutados de forma que dois vértices são vizinhos se e somente se eles aparecem em posições consecutivas na sequência ou são o primeiro e último vértices, por exemplo, o grafo na Figura 3 com vértices $\{v_1, v_2, v_4, v_3\}$ é um ciclo.

Desde então, foram apresentados vários resultados provando a Conjectura de Gallai para várias classes específicas de grafos como:

- Grafos com no máximo um vértice de grau par (9);

- Grafos em que todos os seus ciclos possuem pelo menos um vértice com o grau ímpar (10);

- Grafos eulerianos de grau máximo 4 (11);
- Grafos com no máximo $4 \cdot \lceil n/2 \rceil$ arestas(12);
- Grafos $2k$-regulares com cintura pelo menos $2k-2$ que admitem um par de emparelhamentos perfeitos disjuntos(13);
- Grafos outerplanares maximais e grafos outerplanares 2-conexos (14);
- Grafos densos quasialeatórios (15).

Apesar da grande atenção dada à Conjectura de Gallai, até a presente data, ela permanece aberta no caso geral. De fato, existem muitos trabalhos relacionados a decomposição em caminhos do ponto de vista da Teoria dos Grafos, porém não existem muitos trabalhos que abordem esse assunto do ponto de vista algorítmico. De fato, até a presente data, os únicos trabalhos encontrados que possuem resultados algorítmicos relacionados a mínima decomposição em caminhos de grafos são:

- Em (16), é mostrado que o problema computacional determinar se existe uma decomposição em caminhos de tamanho dois é **NP**-completo mesmo para grafos de grau máximo 4;
- Em (17), é apresentado um algoritmo polinomial para computar a menor decomposição em caminhos de alguns tipos de grafos bipartidos completos;
- Em (18), são apresentadas caracterizações estruturais que implicam em um algoritmo polinomial para computar a menor decomposição em caminhos de grafos completos com um número par de vértices;
- Em (19), são apresentadas caracterizações estruturais que implicam em um algoritmo polinomial para computar a menor decomposição em caminhos de grafos completos com um número ímpar de vértices.

Como não existem muitos trabalhos que investigam a complexidade computacional de se achar decomposições em caminhos de grafos, existe uma grande quantidade de problemas em aberto nessa área. A investigação será focada nos cinco problemas computacionais a seguir.

Problema 1
Entrada: Um grafo bipartido G e um inteiro k.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a k?

Problema 2
Entrada: Um grafo planar G e um inteiro k.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a k?

Problema 3
Entrada: Uma grade parcial G e um inteiro k.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a k?

Problema 4
Entrada: Um grafo G e um inteiro k.
Parâmetro: A largura em árvore de G.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a k?

Problema 5
Entrada: Um grafo planar G e um inteiro k.
Parâmetro: k.
Questão: G possui uma decomposição em caminhos de tamanho menor ou igual a k?

O alvo do projeto é obter algoritmos eficientes para encontrar a menor decomposição em caminhos ou prover indícios de que tais algoritmos não existem para os problemas computacionais acima, tanto no paradigma da complexidade clássica, no caso dos três primeiros problemas, quanto no paradigma da complexidade parametrizada, no caso dos dois últimos.

As classes de grafos bipartidos, planares e grades parciais foram escolhidas, principalmente, pela sua importância e aplicabilidade visto que muitos problemas práticos são modelados por grafos nessas classes.

Este projeto possui mais quatro seções. Na Seção 2, são apresentados os objetivos geral e específicos do projeto. Na Seção 3, são apresentadas as técnicas que serão usadas para solução dos problemas. Na Seção 4, são apresentadas as contribuições provenientes dos resultados alcançados. Finalmente, na Seção 5, é apresentado o cronograma das atividades.

2. OBJETIVOS

Como dito na seção anterior, as pesquisas serão focadas na investigação algorítmica do problema de se encontrar a menor decomposição de caminhos de grafos.

Assim, o objetivo geral da pesquisa é encontrar, para os problemas 1, 2 e 3, algoritmos polinomiais ou indícios de que tais algoritmos não existem e, para os problemas 4 e 5, algoritmos tratáveis em parâmetro fixo ou indícios de que tais algoritmos não existem.

Uma vez que, em (16), foi demonstrado que o problema de decisão se achar uma decomposição em caminhos de um grafo G menor ou igual a dois, dado G como entrada, é **NP**-completo mesmo para grafos de grau máximo 4, escolheu-se os grafos bipartidos, planares e subgrafos de grades para os problemas 1, 2 e 3 por serem classes mais restritas do que a classe de grafos de grau máximo 4 e, portanto, é possível que sejam obtidos algoritmos polinomiais para os problemas trabalhados. A abordagem parametrizada para os problemas 4 e 5 para grafos gerais foi escolhida também como forma de lidar com a **NP**-completude do problema.

Uma caracterização estrutural é a demonstração da equivalência de duas propriedades e/ou caracterizações em uma estrutura matemática. É possível que haja duas propriedades equivalentes de uma estrutura matemática onde seja difícil de se derivar um algoritmo eficiente para se verificar diretamente a primeira e seja fácil para a segunda. Muitas vezes os resultados algorítmicos de um trabalho são produtos de caracterizações estruturais que podem ser computadas de forma eficiente. Assim, um dos objetivos específicos da pesquisa será a demonstração de caracterizações estruturais para grafos que possuem decomposições em caminho de tamanho no máximo k.

Para auxiliar na derivação de algoritmos eficientes, sejam polinomiais ou tratáveis em parâmetro fixo, para problemas computacionais, muitas vezes é necessário a redução do espaço de busca de soluções ou a restrição de parâmetros por outros parâmetros mais fáceis de se trabalhar. Para isso, a derivação de desigualdades que relacionam as propriedades do grafo aos seus parâmetros tem um papel importante. Portanto, outro objetivo específico da pesquisa será a demonstração de desigualdades que relacionam o tamanho de decomposições por caminho mínimo e máximo aos mais diversos parâmetros do grafo como número de vértices e arestas, grau dos vértices e cintura do grafo.

3. METODOLOGIA

Algoritmos polinomiais são considerados eficientes na teoria da complexidade clássica e, ainda que alguns não sejam eficientes na prática, eles abrem possibilidades para a derivação de outros algoritmos polinomiais mais eficientes usando-se as técnicas usadas nos mesmos. Dizemos que um algoritmo é polinomial se a sua complexidade de tempo for $O(n^c)$ para alguma constante c, onde n é o tamanho da entrada.

A prova de que um problema de decisão se encontra na classe **NP**-completo dá indícios de que tal problema não possui algoritmo polinomial ou, se existe, ele não pode ser obtido facilmente, pois, até os dias atuais, apesar do intenso estudo nessa área, nunca se encontrou um problema computacional, dentre os muitos conhecidos, que estivesse simultaneamente nas classes **NP**-completo e **P**, onde **P** é a classe de problemas de decisão que possuem algoritmos polinomiais.

Quando se estabelece que um determinado problema está na classe **NP**-completo, uma das abordagens para se contornar a sua intratabilidade é se isolando parâmetros nos quais a dificuldade se encontra. Assim, nesse caso, procuramos achar um algoritmo tratável em parâmetro fixo, ou seja, uma algoritmo possui complexidade de tempo $O(f(p) \cdot n^c)$ para alguma constante c e função computável f, onde n é o tamanho da entrada e p é o parâmetro em questão.

Da mesma forma, a prova de que um problema parametrizado se encontra na classe $\mathbf{W}[\mathbf{1}]$-difícil ou $\mathbf{W}[\mathbf{2}]$-difícil dá indícios de que tal problema não possui algoritmo tratável em parâmetro fixo, pois, por motivos análogos, acredita-se que as classes $\mathbf{W}[\mathbf{1}]$-difícil e $\mathbf{W}[\mathbf{2}]$-difícil são disjuntas da classe **FPT**, onde **FPT** é a classe de problemas parametrizados que possuem algoritmos tratáveis em parâmetro fixo.

Sendo assim, para cada um dos cinco problemas, serão aplicadas as técnicas conhecidas para derivação de algoritmos eficientes: para os problemas 1, 2 e 3, as técnicas para derivação de algoritmos polinomiais, e para os problemas 4 e 5, as técnicas para derivação de algoritmos tratáveis em parâmetro fixo.

Caso haja dificuldades na derivação de algoritmos de algum dos problemas acima, será então feita a tentativa de prover indícios de que tais algoritmos não existem. Isso será feito, provando-se que o problema está na classe de complexidade **NP**-completo, nos casos dos problemas 1, 2 e 3, ou está na classe de complexidade $\mathbf{W}[\mathbf{1}]$-difícil ou $\mathbf{W}[\mathbf{2}]$-difícil, nos casos dos problemas 4 e 5.

4. PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS DO PROJETO

Os resultados provenientes da pesquisa avançarão o estado da arte atual na área de algoritmos e complexidade para o problema da decomposição em caminhos mínima de grafos visto que nenhum dos resultados algorítmicos conhecidos ou focam apenas em achar decomposições em caminhos de tamanho no máximo $\lceil n/2 \rceil$ ou não tratam o problema de forma tão geral. Da mesma forma, as caracterizações estruturais e desigualdades demonstradas avançarão o estado da arte atual do problema do ponto de vista da Teoria dos Grafos.

Os algoritmos desenvolvidos, desigualdades e caracterizações estruturais apresentadas auxiliarão na busca da demonstração ou refutação da Conjectura de Gallai, seja para demonstrar a conjectura para grafos até um determinado tamanho, o que é útil em demonstrações que utilizam auxílio de computador, ou na busca de contra-exemplos para a conjectura.

5. CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO DO PROJETO

A duração do projeto será de 24 meses. As atividades a serem realizadas são:

- **ago/19 – nov/19**: Levantamento bibliográfico e revisão da literatura;
- **dez/19 – mai/20**: Investigação da solução dos problemas 1, 2 e 3;
- **jun/20 – set/20**: Escrita e submissão de artigo com os resultados obtidos;
- **out/20 – mar/21**: Investigação da solução dos problemas 4 e 5;
- **abril/21 – jul/21**: Escrita e submissão de artigo com os resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

1 EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, v. 8, p. 128 – 140, 1741.

2 ABUEIDA, A. A.; DEVAN, M. Multidecompositions of the complete graph. *Ars Combinatoria*, v. 72, p. 17 – 22, 2004.

3 BOSáK, J. *Decomposition of graphs*. Heidelberg: Springer, 1990. 248 p.

4 ERDE, J. Decomposing the cube into paths. *Discrete Mathematics*, v. 336, p. 41 – 45, 2014.

5 JüNGER, M.; REINELT, G.; PULLEYBLANK, W. R. On partitioning the edges of graphs into connected subgraphs. *Journal of Graph Theory*, v. 9, n. 4, p. 539 – 549, 1985.

6 JACOBSON, M. S.; TRUSZCZYNSKI, M.; TUZA, Z. Decompositions of regular bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, v. 89, n. 1, p. 17 – 27, 1991.

7 FAVARON, O.; GENEST, F.; KOUIDER, M. Regular path decompositions of odd regular graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 63, n. 2, p. 114 – 128, 2010.

8 HEINRICH, K. Path-decompositions. *Le Matematiche*, v. 47, n. 2, p. 241 – 258, 1993.

9 LOVáSZ, L. On covering of graphs. In: THEORY OF GRAPHS, 1966, Tihany, Hungria. *Anais...* New York, 1968. p. 231 – 236.

10 PYBER, L. Covering the edges of a connected graph by paths. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, v. 66, p. 152 – 159, 1996.

11 FAVARON, O.; KOUIDER, M. Path partitions and cycle partitions of eulerian graphs of maximum degree 4. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, v. 23, p. 237 – 244, 1988.

12 JIMéNEZ, A.; WAKABAYASHI, Y. On path-cycle decompositions of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, v. 19, n. 3, 2017.

13 BOTLER, F.; JIMéNEZ, A. On path decompositions of 2k-regular graphs. *Discrete Mathematics*, v. 340, p. 1405 – 1411, 2017.

14 GENG, X.; FANG, M.; LI, D. Gallai's conjecture for outerplanar graphs. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, v. 18, p. 593 – 598, 2015.

15 GLOCK, S.; KüHN, D.; OSTHUS, D. Optimal path and cycle decompositions of dense quasirandom graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, v. 118, p. 88 – 108, 2016.

16 PéROCHE, B. Np-completeness of some problems of partitioning and covering in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 8, p. 195 – 208, 1984.

17 CONSTANTINOU, C. K.; ELLINAS, G. Minimal path decomposition of complete bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 35, p. 684 – 702, 2018.

18 ALSPACH, B. The wonderful walecki construction. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, v. 52, p. 7 – 20, 2008.

19 BRYANT, D. Packing paths in complete graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, v. 100, p. 206 – 215, 2010.