

TMA 4101 med Nome - 2020

funksjon = regel

$$f: A \rightarrow B$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som $f(x) = x^2$
grafisk framstilling:



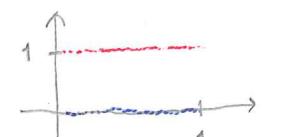
A definisjonsmengde
(domene)

B verdimengde
(ko-domene)

eks på funk med
toblate graf:

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f: \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



BOOLSK

Assosiativitet

ALGEBRA

(• er · eller +) Aksiomer:
og elementer/eigenlepper

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Kommutativitet

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Invers

$$x \cdot x = 0, \quad x/x = 1$$

Identitet

$$x+0=x, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

Tillukning

$x \cdot y$ er gyldig/er eit tal

Distributivitet

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x+(y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$$

Komplement

for x fins x' slik at

$$\text{eller } A \quad x+x'=1 \quad \text{og } x \cdot x' = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

Definert for vi teoremetene:

$$x+x=x$$

$$(y+x)x=x$$

$$xx=x$$

$$(x')'=x$$

$$x+1=1$$

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

$$x \cdot 0=0$$

$$yx+xy=x$$

$$\begin{aligned} &x(yz)=(xy)z \\ &\rightarrow (x+y)'=x'y' \\ &\rightarrow (xy)'=x'+y' \end{aligned}$$

DeMorgans lover

Sannhetstabellar

X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

+

OR

X	Y	X·Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

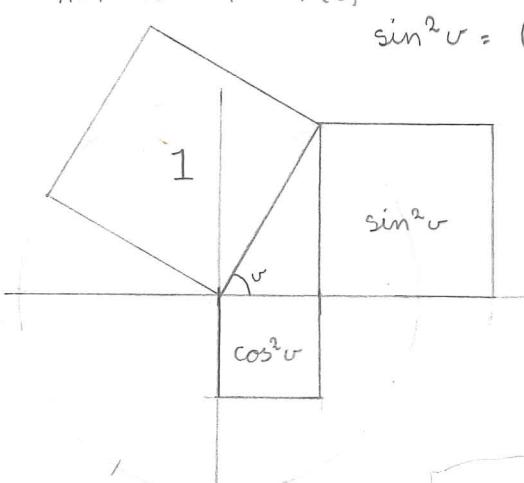
samansatt vinkel:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

Obs!

$$\sin^2 u = (\sin u)^2$$



$$\begin{aligned} \tan(u+v) &= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \\ &\text{Bob: Strength 55} \\ &\text{Agility 117} \\ &\text{Healing 150} \\ &\frac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u \\ &\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u+v) + \cos(u-v)] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 13901 & 15840 & 16262 & 14199 & 18788 & & \\ +300 & +100 & +100 & +100 & & & \\ 7876 & 8047 & 9518 & 11016 & 12471 & & \\ +200 & +100 & +100 & +100 & +100 & & \\ 1117 & 1459 & 1897 & 3191 & 4641 & & \\ +100 & +100 & +100 & +100 & +100 & & \\ 1158 & & & 5953 & & & \end{array}$$

Lær ~ AV 2021

$$\begin{array}{ccccc} 403 & 1506 & 2945 & & \\ +100 & +100 & +100 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4297 & 5844 & 7520 & 8997 & \\ +100 & +100 & +100 & +100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 10461 & 11824 & \\ & & +100 & +100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1117 & 1459 & \\ & & +100 & +100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1897 & 3191 & \\ & & +100 & +100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 4641 & 5953 & \\ & & +100 & +100 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 5953 & & \\ & & +200 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 18788 & & \\ & & +200 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 18788 & & \end{array}$$

Ett punktsformelen der a er $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$y - y_1 = a(x - x_1), \text{ altså stigningstal}$$

$$\sin u = \frac{\text{mot}}{\text{hyp}}$$

$$\text{I: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{II: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{III: } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\cos u = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}}$$

$$\tan u = \frac{\text{mot}}{\text{hos}} = \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$f(x) = a \sin(k(x-c)) + d$$

Arealsetringa:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin u$$

$$\text{fase } a > 0 \quad a < 0$$

$$\sin$$

$$\cos$$

$$\text{fase } a > 0 \quad a < 0$$

$$\sin$$

$$\cos$$

sinussetring:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

lengder:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = 1 \quad a^{-b} = \frac{1}{ab}$$

$$(xy)^b = x^b y^b \quad a^x y^y = a^{x+y}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sin(-v) = -\sin(v)$$

$$\cos(-v) = \cos(v)$$

$$\tan(-v) = -\tan(v)$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$$

$$\cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1$$

$$\tan(2u) = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \$$

med Morten Kolsto Eksamens 30 mai
6/8 pr fys + lab; rotasjonsmekanikk. 2/4 pr kjem.

Einkvar fysisk størrelse kan skrives som
 $[A] = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d$ osv

der a, b, \dots er positive/negative heiltal el. 0

Med dimensjonsanalyse kan vi vurdere om
fysiske sammenhenger er feil.

Eks.: $S = vt$

$$[L] \text{ OK} \quad [L] \quad S = \frac{1}{2} at \quad [L] \text{ feil} \quad L \cdot T$$

Dekomponere vektor.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\begin{array}{ll} a & b = a \cdot \sin \alpha \\ & c = a \cdot \cos \alpha \\ & \alpha = \arctan(b/c) \end{array}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = [A_x, A_y] + [B_x, B_y] = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j}$$

Kraft: vekselvirking mellom et legeme og et anna, eller mellom et legeme og omgivelsene.

Einheit: $[N], \text{kg m s}^{-2}$

Superposisjon av krefter
 $\vec{R} = \sum \vec{F}$ vektorsum
resultantkraft

Newton's lover

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$$

dersom $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$

$\vec{v} = \text{konstant}$ (når det ikke virker)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{kraft = motkraft}$$

Frikasjon

$$\vec{F} = N \vec{i} + f \vec{j}$$

N: normalkraft
F: ekstern kraft
f: frikasjon, μ : frik. koef.

statisk frikasjon: $f = F$
legemet beveger seg når: $F > \mu N$
da er fribeskrifta $f = \mu N$

Terminalfart $G = F_0$ (konstant fart)

Merk: når alle vektorane er parallele kan vi
droppa vektorformalismen $\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \rightarrow \Sigma F = ma$

Trikantberegning

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -\vec{G}$$

finn vinkelene (her α og 90°)

$$T_1 = G \sin \alpha$$

$$T_2 = G \cos \alpha$$

$$\rightarrow a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g$$

Bevegelseskjede (kinematikk)
bevegelsen langs rett linje
er fullstendig beskrevet av $x(t)$

$$Gjennomsnittshastighet \quad \bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$Momentan hastighet \quad v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

$$Gjennomsnittsakselerasjon: \quad \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$Akslede enh.: \quad \text{Newton, pascal osv.}$$

$$SI-grunn enh. \quad \begin{array}{ll} \text{nano} & 10^{-9} \\ \text{mu} & 10^{-6} \\ \text{milli} & 10^{-3} \\ \text{centi} & 10^{-2} \\ \text{desi} & 10^{-1} \\ \text{kilo} & 10^3 \\ \text{mega} & 10^6 \\ \text{giga} & 10^9 \end{array}$$

$$lengde: meter \quad \text{tid: sekund} \quad \text{masse: kilogram} \quad \text{temperatur: kelvin} \quad \text{stoffmengde: mol}$$

$$Vinkelhastighet \quad \omega_z = \theta'(t)$$

$$Vinkelakselerasjon \quad \ddot{\omega}_z = \Delta \omega_z / \Delta t$$

$$momentan: \quad \dot{\omega}_z = \omega'(t) = d\theta/dt^2$$

$$Begrensesiden for konst. \alpha \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad \text{osv.}$$

$$Bogelengde \rightarrow \Delta S = r \Delta \theta$$

$$Vi kan oversette mellom angulær og lineær størrelser.$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r \bar{\omega}$$

$$\Rightarrow v(t) = r \omega(t)$$

$$Tangentiell akselerasjon \quad a_{||} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha$$

$$Sentrifugalakselerasjon \quad a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = r \frac{\omega^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

$$Kinetisk energi for rotasjon \quad K = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$Forts. Arbeid og Energi \quad W = mg(y_1 - y_2)$$

$$potensiell energi i tyngdefeltet er uavh. av vekt (potensial) til å tilføre arbeid $U = mg y$$$

$$I vise enkle mekaniske modeller gjelder derfor$$

$$W = mg(y_1 - y_2) = \Delta K \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$Mer generelt kan vi sjå at $E_1 + W_{1 \rightarrow 2} = E_2$$$

$$Begrensesminkende \quad \text{kraftslot}$$

$$\vec{p} = m \vec{v} \rightarrow \Sigma \vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

$$Kraftlot \rightarrow den integrerte virkinga av en kraft$$

$$\exists x = \int_t_1^t_2 (\Sigma F)_x(t) dt = \Delta P_x \quad \vec{F} = (\Sigma \vec{F})(t_2 - t_1)$$

$$dersom det ikke virker ytre krefter er \vec{P} = konst$$

$$Kollisjon: sterk vekselvirking mellom legemer som vever i relativt kort tid.$$

$$Mekaniske arbeid. \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s} = tal$$

$$W = F_x \cdot s \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow ingen arbeid$$

$$W = \Delta E_k \quad \text{Arbeids-energi} \quad \vec{s} = høyningsvektor$$

$$Potensiell energi: $E_p = mgh = U$$$

$$Hooke's lov (hjørbrekket) $F = kx$$$

$$(y) (\Sigma F)_y: N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$(x) mg \sin \alpha - f = ma$$

$$frikjonskraft \rightarrow f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

$$\rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma$$

$$\rightarrow a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g$$

$$Kinetisk energi $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$$

$$Energiløs for fjer $\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} mu_1^2 + \frac{1}{2} kx_1^2$$$

$$Kinettisk energi $K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$$

$$Effekt av moment $P = \tau_z \cdot \omega$$$

Rotasjonskinematikk
med Morten Kolsto Eksamens 30 mai
6/8 pr fys + lab; rotasjonsmekanikk. 2/4 pr kjem.

b/bevegelse langs rett linje
er fullstendig beskrevet av $x(t)$

bevegelseskjede (kinematikk)

bevegelsen langs rett linje
er fullstendig beskrevet av $x(t)$

bevegelseskjede (kinematikk)

bevegelsen langs rett linje
er fullstendig beskrevet av $x(t)$

bevegelseskjede (kinematikk)

Kemi 2022 V

avlingsk. 9, 12, 14, 17 (2/4) fe 12-14
Christian Lauritsen

Uprisne utsagn

Hydrogen er fasdalast makro $H_2(g)$ Hydrogengas...

Hydrogen er upolart mikro H_2 Hydrogenionet...

Aggregattilstand



Fast (s)



aq: løst stoff

Reine stoff grunnstoff (H, O) forbindelse (H_2O)

Blanding homogen (jamm fordelt) heterogen (ikkje fordelt)

Atomets oppbygning

(etter Bohrs modell) Proton P^+ → Atomnummer Z

Neutron N Nukleontal A

Elektron e⁻

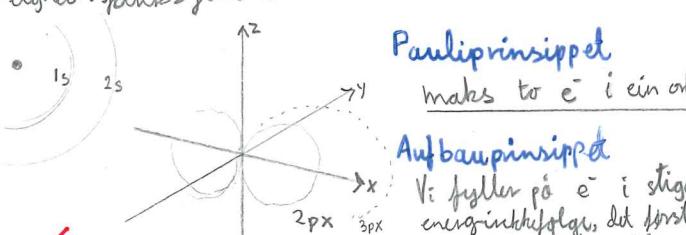
1stoppel: grunnstoffsvariant

Eks: 1H protium (vanleg)

2H deuterium

3H tritium

Sjølv om vi ofte bruker skallmodellen (Bohr) for å teikne opp atomet ser vi i dag på elektronene som ei **elektronsky**, siden det er vanskelig å finne eksakt posisjon. Vi kan derimot beskrive sannsynligheten for å finne et elektron i ein gitt posisjon. Dette sannsynlighetsfunksjonene kaller vi **orbitaler**.



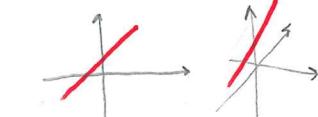
4/6 arbeidskvar: 13/9 27/9 14/10 25/10 11/11 27/11

Lineære likninger

ekspresjon

$$ax + by = c \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$



$x \rightarrow$ lineært

$x^2, x^3, \ln(x), \sin(x), e^x, \sqrt{x} \rightarrow$ ikke-lineært Værtengig av antall dimensjoner



$\begin{bmatrix} - & - \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$ Fleire uløsninger systemet er ubestort

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Ledende koeffisienter (pivot) (ledende énér)

Maksimalt redusert matrise:

1) rader med 0 er nedest

2) alle ledende koeff. er 1

3) hver reduserte 1 bør være til høyre

for den følgende

MAO. Trappetform (row echelon form)

4) alle andre elementer i kolonner

med ledende 1 er 0

Redusert trappetform (echivalent)

Linjematrise

$[a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \dots \ a_{1n}]$ linjevektor $1 \cdot n$

Søylematrise

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ søylevektor

$m \cdot 1$

I-dimension $\rightarrow I_n \rightarrow$

Enhetsmatrise (identitetsmatrise): hoveddiagonal full av 1

Lineært likningsystem

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

mogelige løsninger:
I) krysser i éith p.t. $\rightarrow 1$
II) parallele og like $\rightarrow \infty$
III) parallele og forskjellige $\rightarrow 0$

$x^2, x^3, \ln(x), \sin(x), e^x, \sqrt{x} \rightarrow$ ikke-lineært Værtengig av antall dimensjoner



Elementære rekneregler for likningssystem

- Multipliser alle ledd med konst.
- Bryte to likninger
- Multipliser en rad med en konst og legge resultat til en annen rad

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline z & 4 & & \\ 2z & 8 & & \\ xy & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline 2z & 8 & & \\ xy & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & (-3) \\ (-1) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ y-4z=-10 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-3) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-2) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (-1) & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-4z=-10 \\ 2y-7z=-17 \end{$$

Calculus, Analyse

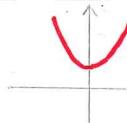
talmengder:

\mathbb{N} naturlige tal
 \mathbb{Z} heittal
 \mathbb{Q} rationaletal
 \mathbb{R} reelle tal
 \mathbb{C} komplekse tal

\mathbb{Q} rationaletal
 \mathbb{R} reelle tal
 \mathbb{C} komplekse tal

$$y = f(x) = x^2 + 4$$

x	-1	0	1
y	5	4	5



Implisitt derivasjon

brukast om det ikke er lett å finne y som en funksjon av x

$$\rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x$$

$$f'(x) = g'(x)$$

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$(x^3 + y^3)' = (6xy)'$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6y + 6x \cdot y'$$

$$\text{Løsning algebraisk først for } y'$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Høyre ordens deriverte

$$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d}{dx}(dy) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2f$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad s(t) \text{ styrking} \quad v(t) \text{ hast} \quad a(t) \text{ akcelera}$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = s'(t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = s''(t)$$

Diverse inverse funksjoner

$$y = \arctan(x)$$

$$\tan(y) = x$$

$$(1 + \tan^2 y) y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Koblede hastigheter

$$\text{vinn}$$

$$2,5$$

$$\text{land}$$

$$2,5$$

$$\text{båt}$$

$$x$$

$$y$$

Substitusjon

→ setter kjenne u

$$\text{Eks: } \int e^{3x} dx \rightarrow \int e^u du$$

$$u = 3x \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad dx = \frac{du}{3}$$

Før $\int e^u \frac{du}{3} \rightarrow \frac{e^u}{3} + C$

OBS: u må være lineær, altså $u = \text{kost}$

$$\text{Eks: } \int 5x^2 \cdot e^{2x^3} dx \quad dx = \frac{du}{6x^2}$$

Ein orden høgare vil kryss ut når vi deler på kjenna derivert, dette må stemme for at subs. skal gjel.

$$\rightarrow \int 5x^2 \cdot e^{2x^3} \frac{du}{6x^2} \rightarrow \frac{5}{6} e^{2x^3} + C$$

$$\text{Eks: } \int 4e^{3x} dx \rightarrow \frac{4}{3} e^{3x}$$

$$\text{Eks: } \int \frac{5x}{x^2-3} dx \rightarrow \int \frac{5x}{2x-u} du$$

$$\text{Eks: } \int \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}} dx \quad \text{eller } u = 1+2x^2$$

$$\text{Eks: } \int \frac{\sqrt{u+x^2}}{2} du \quad \text{der } u = 1+x^2$$

$$\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u-2u+1) du \quad du$$

$$dx = (\text{kjene derivet})$$

→ finn u slik at den denklete krysser

Merk: ved substitusjon må vi bytte grensene også!

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x u^3 dx$$

$$\text{fordi } x=0 \rightarrow \sin(0)=0 \quad \text{OK}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin(\frac{\pi}{2})=1 \quad \text{bytt til 1}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Integrasjonsmetoder v/avtak

$$(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

merk at $u^2 = 9x^2$, f.eks

arczin

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(u) + C$$

$$\cos x = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\text{Odd funksjon (-)}$$

$$\int f(t) dt = 0$$

Like funksjon (+)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T}^T f(t) dt$$

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^2} dx = \int \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx \rightarrow \ln|x|$$

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$$

$$\int_a^b f(x) dx \text{ er eit sett av funksjonar der } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \text{ er eit tal (bestemt integral) om } a, b \text{ er konst}$$

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx$$

$$\cos \text{ INTEGRASJON}$$

$$- \sin \text{ DERIVASJON}$$

$$-\cos$$

$$+ \sin$$

$$- \cos$$

$$+ \sin$$

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1$$

$$z = a + i \cdot b$$

Kompleks plan
(Argand-diagram)

Komplekskonjugat

$$\bar{z} = a - i \cdot b$$

så lenge koeff. i 2nd. regnads-løsn. er velle for vi bruker konjugat par som løysning

$$\text{Add/sub}$$

Eks.: $z_1 = 2 + i \cdot 3$
 $z_2 = 1 - i \cdot 2$

$$z_1 + z_2 = (2+i \cdot 3) + (1-i \cdot 2) = 3+i$$

$$z_1 - z_2 = (2+i \cdot 3) - (1-i \cdot 2) = 1+i \cdot 5$$

Multiplikasjon

$$5z_1 = 5 \cdot 2 + i \cdot 5 \cdot 3 \quad (\text{skalar})$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+i \cdot 3) \cdot (1-i \cdot 2)$$

$$= 2 + 2(-i \cdot 2) + i \cdot 3 \cdot 1 + i \cdot 3 \cdot (-i \cdot 2)$$

$$= 2 - 4i + 3i - 6i^2$$

merk $i^2 = -1$

$$= 8 - 6i$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$

3. kvar. setn. = $a^2 + b^2$ rettelt

Divisjon

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i \cdot 3}{1-i \cdot 2} \cdot \frac{1+i \cdot 2}{1+i \cdot 2}$$

$$= \frac{(2+i \cdot 3)(1+i \cdot 2)}{1^2 - (i \cdot 2)^2} \quad \text{rettelt}$$

$$= -4 + 7i = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Z = x + yi (standardform/butikkform)

$$\text{modulen til } z = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{lengde})$$

$$|\bar{z}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{lengde})$$

$$\text{argumentet til } z = \varphi = \arctan(\frac{x}{y}) \quad (\text{kvadrant})$$

$$Z = r \angle \varphi \quad (\text{polar form})$$

$$\text{Diagram}$$

$$Z = r \cdot e^{i \varphi} \quad (\text{eksponentiell form})$$

(kan bevisast via. rekkje)

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$Z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$(kan bevisast via. rekkje)$$

$$Z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r e^{i \varphi} = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi$$

$$e^{i \pi} = -1 \quad 1 + e^{i \pi} = 1 + (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Polytom fra rotter

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p(x) \text{ har rotter } \alpha \pm \beta i$$

$$p(x) = (x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$$

Sirkeldelingslisen. (De Moivre)

$$(e^{i \varphi})^n = e^{in \varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

$$\text{Eks.: } Z^3 = -1 \rightarrow Z^3 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$$

$$Z = 1^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3})}$$

Eulers trigonometriske formular

$$\text{sidens}$$

$$e^{i \varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$e^{-i \varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

$$e^{i \varphi} + e^{-i \varphi} = 2 \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i \varphi} + e^{-i \varphi}}{2}$$

$$e^{i \varphi} - e^{-i \varphi} = 2 \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i \varphi} - e^{-i \varphi}}{2}$$

Delbrøkspalting

$$Y(s) = \frac{12s+12}{s(s+4)} \Rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \Rightarrow \frac{A(s+4) + Bs}{s(s+4)}$$

$$= 2 + 2(-i \cdot 2) + i \cdot 3 \cdot 1 + i \cdot 3 \cdot (-i \cdot 2)$$

$$= 2 - 4i + 3i - 6i^2$$

merk $i^2 = -1$

$$= 8 - 6i$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (a+bi)(a-bi)$$

3. kvar. setn. = $a^2 + b^2$ rettelt

(kompleks konjugat)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i \cdot 3}{1-i \cdot 2} \cdot \frac{1+i \cdot 2}{1+i \cdot 2}$$

$$= \frac{(2+i \cdot 3)(1+i \cdot 2)}{1^2 - (i \cdot 2)^2} \quad \text{rettelt}$$

$$= -4 + 7i = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Z = x + yi (standardform/butikkform)

$$\text{modulen til } z = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{lengde})$$

$$|\bar{z}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{lengde})$$

$$\text{argumentet til } z = \varphi = \arctan(\frac{x}{y}) \quad (\text{kvadrant})$$

$$Z = r \angle \varphi \quad (\text{polar form})$$

$$\text{Diagram}$$

$$Z = r \cdot e^{i \varphi} \quad (\text{eksponentiell form})$$

(kan bevisast via. rekkje)

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$Z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$(kan bevisast via. rekkje)$$

$$Z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Aritmetisk rekke

$$\rightarrow \text{differansen mellom ledd er lik}$$

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{(n-1)}$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d)$$

$$S_n = \frac{a + a + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{n(a + a + (n-1)d)}{2} = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

$$\text{konvergen for } |d| < 1$$

Geometrisk rekke

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{(n-1)}$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d)$$

$$S_n = \frac{a + a + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{n(a + a + (n-1)d)}{2} = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

konvergen for $|d| < 1$

Parcels tiskant

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$\dots$$

Reguleringsteknikk - IELET 2002, med Kåre Bjørnvik.

P klassisk regulator \rightarrow kjapp \rightarrow stasjonær

Åpen sløyfe (ingen regulering)

Lukket sløyfe (reguleringsløype) (med ønsker $y=r$)

R referanse
e feil, reguleringssvariabel $e=r-y$
u pådrag
z utført pådrag
x tilstand
y måling

Eks.: Cruise-control med enkel regulator

Overføringsfunksjon (transfertfunksjon)

Eks.: $D \left[\frac{N}{m_s} \right] \rightarrow u[N]$

$m \ddot{x} = u - kx - D\dot{x}$ (som RLC)

er $m\ddot{x} + Dx + kx = u$
 → sørger initialbetingelsar ikke null: $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$
 → tar tapt. $\rightarrow m\ddot{x}\{x\} + D\dot{x}\{x\} + kx\{x\} = L\{u\}$
 $m \cdot s^2 x(s) + D \cdot s x(s) + k \cdot x(s) = u(s)$
 er $x(s) \cdot (ms^2 + ds + k) = u(s)$

$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + k}$

Transferfunksjonen er ein matematisk modellering av prosessen, i s-planet.

Linearisering velger arbeidspunkt a

$\dot{x} = f(x, u, v)$
 $\Delta x = x - x_a$
 $\Delta u = u - u_a$
 $\Delta v = v - v_a$

$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_a \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_a \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_a \Delta v$

sidan vi ikke kan ta Laplace av ulineære DL (Eks. $A\dot{x} = Bu - Cv$) må me linearisere rundt arbeidspunkt. Eks. at $\dot{x}=0$ (kritisk) slik at systemet er stasjonært, og stasjonært når $x=1$

Lærebok m/ notater lar på eksamen. Og matlab. D437, kont Lab fra vele 40 (ein lab)

Øvinger: 4/6
 Eksamens 7. des., 4t 9.00-13.00
 Einkel kalkulator og matlab

Start- og sluttverditeorem

$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s)$ av lite interesse i reguleringsteknikk. Dette fortsetter at systemet er stabilt, altså alle polar i VHP plan

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$ alle polar i VHP plan

Ulineær Dr vs. lineær Dr, eks.

Standardsignal

4-20[mA] nullsignal er forbeholdt feilsignal (bort på linje, fiks.)
 1-5[V]
 0,2-1,0[bar]
 3-15[psi] Normalisert verdi: 0-100%

$h_{ux} = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{k}{Ts+1}$

Konstantregulering $r = \text{konstant}$
Følgeregulering, (servostyring) $r=r(t)$

Stasjonært avvik $e=r-y = e_{ss}$
Dynamisk avvik e_{max}

Hastighet responsiel (63% av stasjonær-verdi, ein tidskonstant T_r) eller T_r

Innstillingstid $T_i = 4T_r$ til $5T_r$

Ustabilt (returvirksomhet)

Innoveringstype (strategi for minimising)
 → forstyrrelse, areal, amplitud.

Forstyrrelsesstrop (ønsker å undstrykke)
 → periodisk, splang, stokastisk

Revers modus $e=r-y$ (standard)

Direkte modus $e=y-r$

Anti-windup stopper integratoren pådrag

Blokkskjermaskining

Serie: $x \rightarrow h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow y$

Paralell: $x \rightarrow h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow y$

Negativ tilbakekoppling:

Positiv tilbakekoppling:

Flytting av summasjonspunkt:

Flytting av forgreningspunktet:

Ziegler-Nicholsetoden

- for høg $K_p \rightarrow$ ustabil system
- senk K_p og/eller $T_i \rightarrow$ roer ned systemet
- 1. ordens prosess (Eks. tank-til integrator) med 1. ordens regulator (Eks. PI) \rightarrow andre ordens system (meir dynamiske).

Heuristikk for innstilling av PID

→ Sett regulator i P-reg.-modus
 → Øke K_p fra null til du får tilnærma stående svingning. Følg med på u (intervall)

→ Noterer oss K_p som me kaller K_K (kritisk). Merker oss periodtid T_K

→ Sett $K_p = 0,45 K_K$ os $T_i = 0,85 T_K$
 → aut. juster: reduser K_p , øke T_i for å gjøre systemet meir stabilt

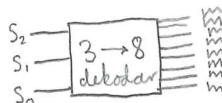
Avviksthorold:

$H_{rc} = N(s) = \frac{1}{1 + \text{sløytfunksjon}}$

matlab på eksamen? Foules 27/9 45:20

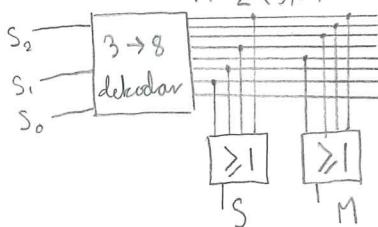
N-2^N-dekodar

Genererer alle 2^N std. prod. av N inngangsvariabler
Eks.: $N=3 \rightarrow 2^3=8$ utg.

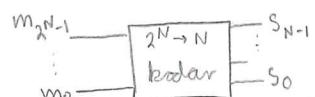


Kan bygge alle andre kombinatoriske blokker.

Eks.: FA $\Rightarrow S = \sum(1, 2, 4, 7)$
 $M = \sum(3, 5, 6, 7)$



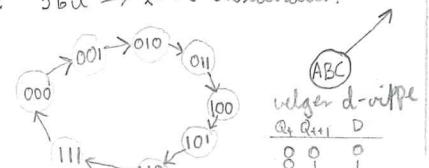
2^N-N-kodar



Tilleggskodar (enkel kodar): Kun én inngang er 1 om gongen

Binært tellerwerk (binary counter)

MOORE-logikk: Kan være uten innganger
Eks.: 3-bit $\rightarrow 2^3=8$ tilstandar.



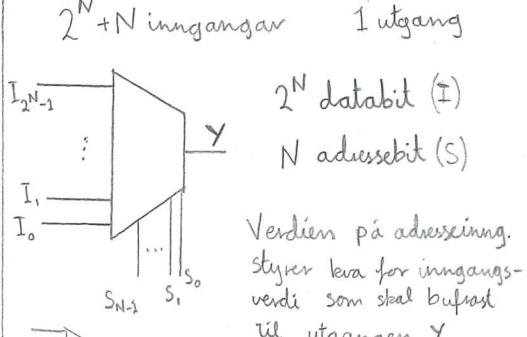
A	B	C	A _{t+1}	B _{t+1}	C _{t+1}	D _t	D _{t+1}	T _t	T _{t+1}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{forenkler} \quad \text{Karnaugh-funksjon: } \bar{D}_A(A, B, C) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} \rightarrow \text{prøver på nytto} \\ &D_A(A, B, C) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} \quad \rightarrow \text{prøver på nytto} \\ &D_B(A, B, C) = B\bar{C} + \bar{B}C + B\bar{C} = B\bar{C} \quad \text{Q} + Q_{t+1} = T \\ &D_C(A, B, C) = \bar{C} \quad \text{Q} + Q_{t+1} = T \\ &D_A(A, B, C) = \bar{A}(P \oplus Q) = A\bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

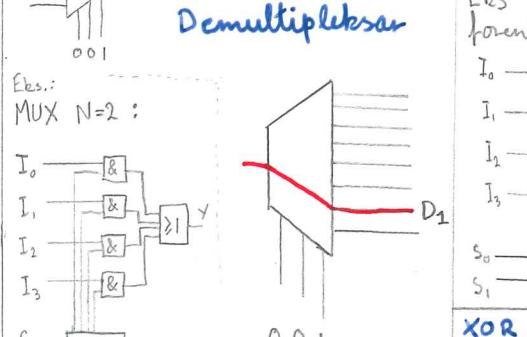
$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{forenkler forsøk 2 (T-vippe)} \quad T_A(A, B, C) = BC \quad \rightarrow \text{mye bedre} \\ &T_B(A, B, C) = C \quad \rightarrow \text{mye bedre} \\ &T_C(A, B, C) = 1 \quad \rightarrow \text{kan være sjølvstartende} \quad \rightarrow \text{sjølvstartende på vill} \quad \rightarrow \text{ikke sjølvstartende} \end{aligned}$$

X	Y	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

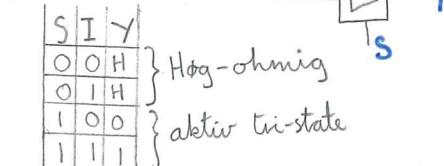
Kombinatorisk multiplexor (MUX)



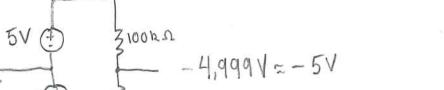
Verdien på adressering. Styrer leva for inngangsverdi som skal bufast til utgangen Y



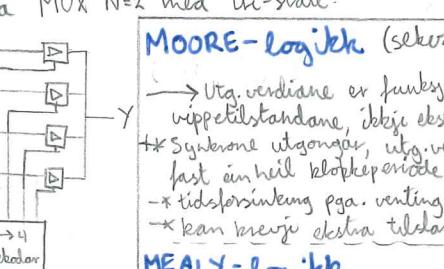
TRI-STATE I



Lågohmig utgang vil dominere over en høghemmig utgang



Eks.: forenkla MUX N=2 med tri-state.



XOR

$X \oplus Y = A \oplus B = A \oplus \bar{A} = \bar{A} \oplus \bar{A} = 0$

$A \oplus 0 = A$

$A \oplus 1 = \bar{A}$

$A \oplus A = 0$

$A \oplus \bar{A} = 1$

$$\bar{A} \oplus B = \bar{A} \oplus \bar{B} = A \oplus \bar{B}$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \quad \text{odd}$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \quad \text{even}$$

kan derfor lage partitetsbil med XOR

$$A_2 \oplus A_1 \oplus A_0 = P$$

$$(A_2 \oplus A_1 \oplus A_0) \oplus C = A_2 \oplus (A_1 \oplus A_0 \oplus C)$$

kan man tilføye på $A_2 \oplus A_1 \oplus A_0$ (X-utvalg)

Nestetilstandstabell (XOR-eksitasjons)

$$0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \quad \text{odd}$$

$$0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \quad \text{even}$$

$$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \quad \text{odd}$$

$$0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \quad \text{even}$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \quad \text{odd}$$

$$1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \quad \text{even}$$

$$1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \quad \text{even}$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \quad \text{odd}$$

finne funksjonar:

$$J_A(A, B, x) = x$$

$$J_B(A, B, x) = \bar{A} + \bar{x}$$

$$K_A(A, B, x) = \bar{x}$$

$$K_B(A, B, x) = x$$

$$y(A, B, x) = \bar{A}B$$

dette er MOORE, siden x ikke er opprettet

$$x \bar{x} = 0$$

$$A \oplus B = A \bar{B} + \bar{A}B$$

$$A \oplus B = A \oplus \bar{A}B + \bar{A}B \oplus \bar{A}B = A \oplus B$$

$$A \oplus B = A \oplus B$$

IELET 1001 ~ Elektroteknikk Eksamensvar 22 (bok: engineering circuit analysis)

LAB-GRUPPER

begynner på sving, så da på svingsime
13 svinger, 7 labbar Mån 10-12 (20. uke)

fields \leftrightarrow integrated quantities (spennin, strøm)

Q ladning (charge) - Coulumb - atomer (p_+ og e_-) $Q = it$ ($C = As$)

V spennin (voltage) - Volt - separate ladningar

I strøm (current) - Ampere - flyten av ladningar $i = \frac{dq(t)}{dt}$

E, w energi (energy) - Joule (kjemisk \rightarrow elektrisk \rightarrow termisk osv) ($J = W/S$) $J = CV$

WP effekt (power) - Watt (J/s) $P = vi = \frac{dw}{dt}$

$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ MJ}$

$1 \text{ Ah} = 1 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ kC}$

$(w = Pt)$ lineært

$w(t) = \int p(t) dt$ vanlegvis

$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C$

Tellegens teorem $P_1 + P_2 + P_3 \dots = 0$

bevarer energi

$V_{AB} = V_A - V_B$

$V_{BA} = V_B - V_A$

Resistive kretser (lineært avhengig av dei uavhengige kildene $\oplus \ominus$ (V_1, R, V_3))

• Grein (branch) to terminalar og vilkårlig antal kretselermt mellom dei

• Node, trielle og vesentlige

• Sløyfe (loop) bane av greiner gjennom kretsen

• Masker (mesh) sløyfe som ikke inneholder andre sløyfer.

OHMS LOV $V = RI$ (LINEAR RESISTOR) $[V] = [I][A]$

KVL $V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0$ $\sum v_j(l) = 0$ → om du enten fra $+ \square$ - positiv side \rightarrow pos. forteiken

om du enten fra $- \square$ + negativ side \rightarrow neg. forteiken

Kan bruke KVL for vilkårlig sløyfe

KCL $I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$ $\sum i_j(l) = 0$ $R \rightarrow \infty$ $G = \frac{1}{R}$ [S] Siemens $GV = I$

Kortslutning $R_{klev} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$ **Motstandar i serie**

Motstandar i parallel $R_{klev} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$ (summen av konduktansane)

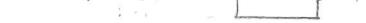
$i^2 > 0$ (motstand forbruker) $V = \sqrt{P \cdot R}$ $i = \sqrt{\frac{P}{R}}$

(Tillath spennin/strøm over motstand) $R_{klev} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ $R_{klev} < R_1 \quad \text{os} \quad R_{klev} < R_2$

(mølstand forbruker energi) $i = \sqrt{\frac{P}{R}}$

Spenningsdeling

$$U_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2} U_s$$



Single loop circuit

$R_1 > R_2 \rightarrow V_1 > V_2$

konduktans for strømdeleing

$G_1 > G_2 \rightarrow I_1 > I_2$

$i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$



Single node-pair circuit (straumdeling)

$$i_a = \frac{R_a}{R_a + R_1 + R_2} i_s$$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$

$R_2 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a}$

$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

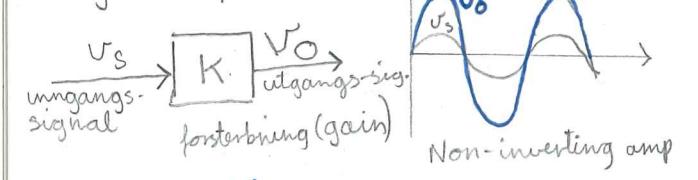
$R_b = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_c = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R$

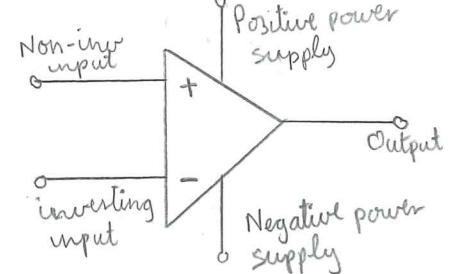
Operasjonsforsterker (op-amp)

For generell forsterker:



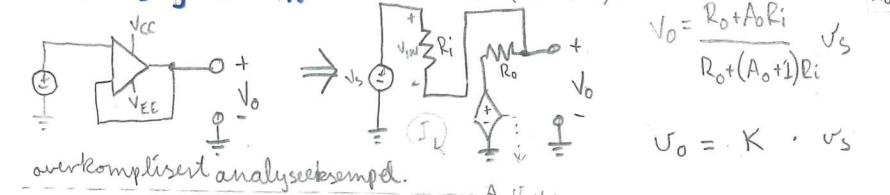
$$V_o = V_s K$$

OP-AMP:



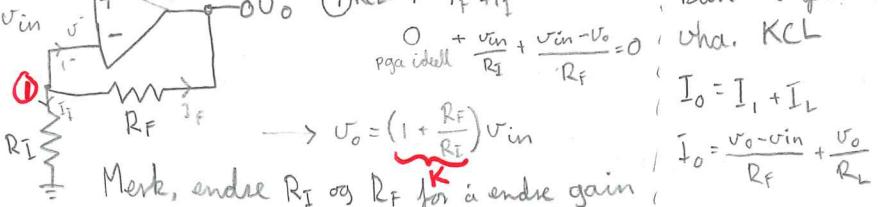
$$V_o = A(V_p - V_n)$$

Fks.: **unity gain buffer**



overkomplisert analyseeksempel.

Non-inverting amp. antar at op-ampen er ideell når vi veit V_o



Merk, endre R_I og R_F for å endre gain!

Eles. oppgåve: vil finne

i_o og v_o i op-amp

→ finn noder

→ finn spenninger

→ KCL i alle noder

untatt output-nodene

uttrykk v_o ved dei

andre parametra.

Klart!

1. merke

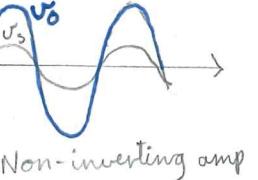
2. merke

3. merke

4. merke

Non-inverting amp.

For generell forsterker:



$$K > 0$$

$$K < 0$$

$$E_o > E_i$$

$$P_o > P_i$$

$$V_o > V_s$$

Ideell op-amp

- bruk nodeanalyse i krets med ideell op-amp
- bruk KCL i inputnodene

Kondensator

kondensator kan lagre energi, bruk nodeanalyse i krets med ideell op-amp
Vi får n-ordens differentialekvninger for n energilagrende elementer.
Kond. energilagring i elektrisk felt

$q = \text{charge (lading)}$

$q = C v$ (lineær, men)

Kapasitans [F]

$(C = \frac{\epsilon A}{d}) \epsilon: \text{permittivitet}$

$A: \text{areal}$

$d: \text{distans}$

$i = \frac{dq}{dt}$

$i = \frac{dv}{dt}$

$i = \frac{d}{dt}(Cv) \quad i = C \frac{dv}{dt}$

$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$

$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$

(skriv ut $v(t_0)$ med denne)

(historie for t)

→ strømmen inn/ut av kondensator kan hoppe

→ spenninga over kondensator kan ikke hoppe

$i_c(t_0^-)$ ikke nøyaktig $i_c(t_0^+)$, $v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$

$p(t) = v(t)i(t)$

$w(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t p(t) dt$

$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$

$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$

$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$

→ spenning kan hoppe

→ strøm er kontinuert

energi: strøm igjennom inductoren leverer

→ inductør i DC-krets. Ingen endring i

topologi (ingen brytar): $\frac{di}{dt} = 0$

→ kondensator fungerer som OC (→ →)

\rightarrow $\text{Kondensator i parallelle: } C_1 + C_2 + \dots + C_n$

$\text{Kondensator i serie: } \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

RC-krets (Tidss: brukt theoremen etter $t=0^-$)

→ bruk KCL og KVL

→ bruk ohms lov for motstandar og $i = C \frac{dv}{dt}$ for kondensatorar.

→ finner forsteordens difflikning for v_c

→ løyser (krevr av vi veit initialverdiar)

Eles.: dette er DC-krets

$V(t=0) = 0V$

så

$KVL: R_i + V_c = V_s$

$i = C \frac{dv}{dt}$

$\{ RC \frac{dv}{dt} + V_c = V_s \}$

$\{ V_c(t=0) = V_c(0) = 0 \}$

$\{ V_c(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}} \}$

$\{ V_c(t) = V_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ for } t > 0 \}$

$K_1 = \frac{A}{(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$

$K_2 = V_c(0) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$

Praktisk metode:

for $v_c(0)$ og $v_c(\infty)$

$V_c = V_\infty + (V_0 - V_\infty) e^{-\frac{t}{RC}}$

Utladning

brytaen lukkes seg i $t=0$

Vi har ein DC-krets:

$\{ \frac{dx}{dt} + ax = A \}$

finnes K_2 med init. ver. X_0 (eller $K_2 = (X_0 - A)/a$)

generelt: $x(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$

Om vi kjerner $x(\infty)$, $x(0^+)$ og

tidsskonst τ kan vi finne $x(t)$

$t \rightarrow \infty \times K_1$

$t = 0^+ x(0^+) = K_1 + K_2$

for $x(t) = K_1 + K_2 e^{-at}$ der $a = \frac{1}{\tau}$

Diffligninger i elektr

$\{ \frac{dx}{dt} + ax = A \}$

$X(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} = X_0$

finnes K_2 med init. ver. X_0 (eller $K_2 = (X_0 - A)/a$)

generelt: $x(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$

Om vi kjerner $x(\infty)$, $x(0^+)$ og

tidsskonst τ kan vi finne $x(t)$

$t \rightarrow \infty \times K_1$

$t = 0^+ x(0^+) = K_1 + K_2$

for $x(t) = K_1 + K_2 e^{-at}$ der $a = \frac{1}{\tau}$

Større kretsar med Wissone den

Induktør → finn I_L igjennom

induktøren for $t=0^-$

Kontinuitet gjer at $I_L(0^-) = I_L(0^+)$

→ derfor kan vi sette induktøren

som ein → for $I_L(0^+)$

→ finn så verdien da er ute etter (fiks en spenning i kretsen)

→ finn så verdien ved $t \rightarrow \infty$ (da er induktøren kortslutta)

→ finn R_{th} , dermed avg. elementer, bruk

V_T og I_T (utgangspunkt i term. overl)

→ finner $\tau = \frac{L}{R_{th}}$

→ verdien over motstanden e.l.:

$V_o(t) = V_o(0) + (V_o(0^+) - V_o(0)) e^{-\frac{t}{\tau}}$

Fleire energilagrende elem. i krets

→ finn P_{th} (KVL, KCL, V-I-forhold)

→ finn initialverdiar ($v(0)$, $\frac{dv}{dt}(0)$)

$v(0^-) = v(0^+)$

$i(0^-) = i(0^+)$

Eks Parallel RLC

KCL: $i_R + i_L + i_C = 0$

$i_R = \frac{V_o(t)}{R}$ OHMS lov

sett inn dei tre karakteristiske lign.

i KCL ①, derivere $i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t i(t) dt$

$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \frac{di_L}{dt} = i_C(t)$

vi veit at $i(0^-) = i(0^+)$

siden strøm i spole ikke kan hoppe

→ initialverdi: for switch

$A = V_s \quad a = \frac{R}{L} \quad$ for generell 1nd DL

$i(0^+) = \frac{V_s}{R} + K_2 = 0 \rightarrow K_2 = -\frac{V_s}{R}$

$i(t) = \frac{V_s}{R} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ for } t > 0$

$\tau = \frac{L}{R}$ Evt. finn $i(\infty)$, $i(0)$ og $i(t)$

$i(\infty) \rightarrow L \rightarrow \text{short circuit}$

$i(0) \rightarrow \frac{V_s}{R} \text{ og } i(0) = 0$

det er gjort at $v(0^-) = V_0$ og $i(0^-) = I_0$

Då spiller ingen rolle om vi går ut fra L eller C , koefisientane var dei same

$V'' + \frac{1}{RC} V' + \frac{1}{LC} V = \frac{1}{C} i_s$

AC steady-state-analyse fasvinkel

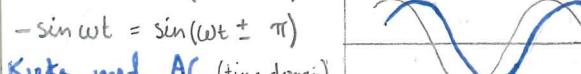
sinusoid: $X(t) = X_m \cos(\omega t + \theta)$
(cos er standardform) **amplitude** **vinkeleffekten**

er periodiske med periode T så $x(t+T) = x(t)$

Frekvensen $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (Norge: 50 Hz)
 $\omega = 100\pi$ rad/s
(USA: 60 Hz)
 $\omega = 120\pi$ rad/s

$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
 $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
 $-\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm \pi)$
 $-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm \pi)$

Krets med AC (time domain)



v_1 leads v_2 by 45°
 v_2 lags v_1 by 45°

arbeidskretsen og feilbølgen
→ men! Frekvensen er kjent
→ kun V_m og ϕ er ukjent

$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$
 θ_2

"This is now up to you if you want to make 10 pages of calculations in time domain or if you want to make half a page or a paragraph calculations in complex domain."

Phasor (fasvektor)
om $U(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

$$= R \{ V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} \}$$

så er $V = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$

fasvektoren (phasor) til $v(t)$
tidsdomene → phasor domain
sinusoid → phasor (kompl. tall)
DL → algebraiske lik.

Komponent	Resistor	Kondensator	Induktør
Tidsdomenet	$v(t) = R i(t)$	$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$v(t) = L \frac{di}{dt}$
Kompleks plan	$V = RI$	$I = j\omega C V$	$V = j\omega L I$

Impedans (ratio av spenningsfasvektor over strømfasvektor)

$$Z = \frac{V}{I} = R(\omega) + jX(\omega)$$

resistans **reaktans**

i passive kretser er den ohmske motstanden positiv.

Om reaktansen er positiv → dominert av induktans

negativ → dominert av kapasitans

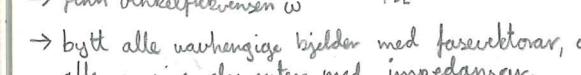
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{j\omega C} = Z \angle -90^\circ$$

Summen av impedans fungerer som med motstandar.

Vi har også admittans $\gamma = \frac{1}{Z}$

Phasordiagram (visardiagram/fasvektordiagram)

generell, $I_s = I_R + I_L + I_C$



→ finn vinkelfrekvensen ω

→ bytt alle variablene med fasvektorer, og alle passive elementer med impedansar,

→ bruk KVL, KCL og utvidde Ohms lov $V=ZI$ for å finne alle strøm- og spenningsfasvektorer.

→ dette inkl. nedspenning, maskestraum osv.

Eks.: Maskestraum sett opp matrise på form $Ax=b$

$$S = V_{rms} I_{rms}^* = I_{rms}^2 Z$$

$$= V_{rms} I_{rms} \angle \theta_v - \theta_i = P + jQ$$

aktiv effekt [VA]

$$P = Re\{S\} = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

reaktiv effekt [VAR]

$$Q = Im\{S\} = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

Merk:

$$\frac{j}{1+j} 3L30^\circ = \frac{1L90}{\sqrt{2}L45} 3L30^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}} L90^\circ + 30^\circ - 45^\circ$$

$$\text{og } V/Z \rightarrow \angle V = \angle Z + \angle I \quad \text{og } \angle V - \angle I = \angle Z$$

$$\text{Effekt } p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

på standardform er mengdene

$$\cdot v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad \text{bruker trig.ID}$$

$$\cdot i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(A+B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ \cos(A-B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \end{array} \right.$$

for formel for **momentaneffekt** (tidsavh.)

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)]$$

For resistor:

$$V \quad V \quad \text{Voltage gain} \quad G_v(j\omega)$$

$$I \quad V \quad \text{Transimpedans} \quad Z(j\omega) [\Omega]$$

$$I \quad I \quad \text{Current gain} \quad G_i(j\omega)$$

$$V \quad I \quad \text{Transadmittans} \quad Y(j\omega) [S]$$

Frekvensavhengige kretsar

$|Z_L| \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$ $\omega L \angle 90^\circ$

vak. akt. konst

I ELET2003 - Elektroteknikk 2, med Herman Ranes, Øvinger (50% oblig), lab fra oktober

Ettak 1: lineare modellar, eksempel svært.
Ettak 2: ikke-lineare modellar, val mellom ulike modellar, resultat er tilnærming.

Halvleirfysikk

[Merk nytta Bohrs modell som er mer konkret]

²⁸Silisium, $Z=14$ er vanlegste isotope

→ elektrisk nøytralt: 4 valenseleksjon

→ kjemisk stabilt: 8 valenseleksjon (4 par)

Løsning: Si: Si; valensbinding

Kvart Si-atom har valensbinding med 4 andre Si

→ isofall "innsilek" ved ope nitt silisium

→ ved 0°C ligg alle elektronpar fast, og materialet fungerer som isolator.

→ med økende temperatur vil ein del elektron rives løs og flyte i materiald (lett som et metall), men med moderat konduktivitet.

→ ved spenningspåtrykk vil det oppstå ein driftstraum, men den er liten.

Ved ope nitt silisium (nord krysstallisk).

N-dopa halvleir overkod av fri elektron.

Eks.: Forstør som dopematerialer Si: Ph: Si

(forstør har 5 valenseleksjon)

Si: \bullet doppert

→ kan leia straum som i metall

→ framleis elektrisk nøytralt

→ fri elektron kan diffundere i alle retninger, som molekyl i gass

P-dopa halvleir underkod av fri elektron

Eks.: Bor som dopematerialer Si: B: Si

(bor har 3 valenseleksjon)

Si: \bullet elektron "hol"

→ netto elektronflyt Si: \bullet

→ blyndalende flyt av "hol" og elektronstraum i N-mat.

holstraum i P-mat. } straum av majoritetsberørar

PN-overgang

PN-junction.

hol seleksjon

temp 0°C

diffusjon

symmetri N-P

P-dopa og N-dopa materiale smelta sammen i grenseflate.

Majoritetsberørar: ladningsberopoliteten det er mest av

→ generere majoritetsberørar tek litt tid

→ grenseområdet ved PN-overgang vil få form

majoritetsberørar (utarmingsområde/depletion zone) som fungerer som ein isolator,

her dannast det eit elektrisk felt.

Analyse med fleire diodar: må etter kontroller om dioden spenner eller leier straum

→ gå ut ifra at diodane leier. Analysen.

→ dersom me får inkonsistens (straum mot spenninga): gå ut ifra at dioden

spenner og analysér på nytt.

→ alle diodar vil få samanbrot og leia straum i speneretning når spenninga er høg nok.

Zenerdiode → har kontrollert samanbrot

→ spenningsskifte ved

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_{ZM} = U_{ZM} / I_{ZM} (\approx 1W)$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$



Diode
P-Pos på N:
→ PN-overgang er fortsatt isolator
→ utarmingsområdet veks
→ dioden er forsøpt i speneretning

II. pos på P-terminal
→ dd på trykk +
→ dd på trykk -

e-feltet motverkar det naturlege.
→ svakare krefter på majoritetsberørar
→ ved høg nok påtrykk spenning til utarmingsområdet skrumpet til 0
→ dioden er forsøpt i leiretning

straum i leiretning
straum i speneretning
Vlineær komponent → ohms lov gjelder ikke

Diodelikninga: $I_D(U_D) = I_S \cdot (e^{\frac{U_D}{U_F}} - 1)$

I_s: driftstraum, komponentavh. konstant
U_f: temperaturavh. konstant

$k = 1,381 \cdot 10^{-23} [J/K]$
 $T \approx 300[K]$ (lett over rom)

U_f → termisk spenning, (sid tiln. U_f = 25[mV])

I praksis utgår "-1" sidan I_s ≈ 0

Det skal bare ein moderat spenningsavh til for at dioden får overlast og brenn opp.

Den praktiske diodemodellen:

$U_f \approx 0,7[V]$ og ingen andre resistans.

→ dersom dioden fører straum modelleres me den som spenningkjelde

→ i praksis alltid kopla med seriemotstand for å begrense straum og dimed effekt.

Ideell diodemodell:

$I_D = U_D / U_f$

Lineær diodemodell: $U_D = U_f + I_D \cdot r_d$

$r_d = \frac{U_f}{I_D}$

Analysen viser at straumet følger en linje med steile ender.

→ Zener-området er det interessante, så me seier at med dette området i første kvadrant. Her er sammenhengen tilnærma lineær.

$I_{ZM} = U_{ZM} / I_{ZM} (\approx 1W)$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

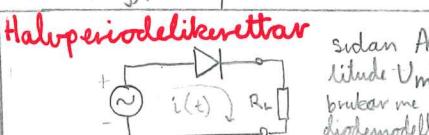
→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$



Halfwave-likrettar
siden AC-amp
tilde $U_m \gg U_f$
brukar me ideell diodemodell $U_f = 0$

Patrykk:
I. pos på N:
→ PN-overgang er fortsatt isolator
→ utarmingsområdet veks
→ dioden er forsøpt i speneretning

II. pos på P-terminal
→ dd på trykk +
→ dd på trykk -

e-feltet motverkar det naturlege.
→ svakare krefter på majoritetsberørar
→ ved høg nok påtrykk spenning til utarmingsområdet skrumpet til 0
→ dioden er forsøpt i leiretning

straum i leiretning
straum i speneretning
Vlineær komponent → ohms lov gjelder ikke

Heilveide-likretta
vekselstraum
for å minimere variasjon i amplituden koplar me ein kondensator i parallel med lasta

rippel
dioden leiar

$U_L(t) = U_m \cdot e^{-\frac{t}{R_C}}$
denne kan me lage linearsitet modell

$U_L(t) = U_m (1 - \frac{t}{R_C})$
som me nytta for heile T

rippelspenninga $\Delta U = U_m \cdot f \cdot R_C \cdot C$
tilnærma middelverdi = $U_m \cdot (1 - \frac{1}{2fR_C})$

Heilveide-likretta med 4-diodebun

(Full wave rectifier)

I_s: driftstraum, komponentavh. konstant

$U_D(I_D) = U_T \cdot \ln(\frac{I_D}{I_S} + 1)$
 $U_T = \frac{k}{q} \cdot T$ q → elementarlad. $1,602 \cdot 10^{-19} [C]$

T ≈ 300[K] (lett over rom)

U_f → termisk spenning, (sid tiln. U_f = 25[mV])

I praksis utgår "-1" sidan I_s ≈ 0

Det skal bare ein moderat spenningsavh til for at dioden får overlast og brenn opp.

Den praktiske diodemodellen:

$U_f \approx 0,7[V]$ og ingen andre resistans.

→ dersom dioden fører straum modelleres me den som spenningkjelde

→ i praksis alltid kopla med seriemotstand for å begrense straum og dimed effekt.

Ideell diodemodell:

$I_D = U_D / U_f$

Lineær diodemodell: $U_D = U_f + I_D \cdot r_d$

$r_d = \frac{U_f}{I_D}$

Analysen viser at straumet følger en linje med steile ender.

→ Zener-området er det interessante, så me seier at med dette området i første kvadrant. Her er sammenhengen tilnærma lineær.

$I_{ZM} = U_{ZM} / I_{ZM} (\approx 1W)$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ typisk verdi → nominell zenerspenning

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

→ $I_Z = \frac{U_{ZK}}{U_{ZM}}$

Optiske diodar: LED

(Light emitting diode)
Anna halvleirmaterials enn Si.

Effekten i ein vanleg Si-diode $P=UI$ vil vere om til varme. For LED vert opp til 25% av denne omgjort til elektromagnetisk stråling

1. pos på N:
→ PN-overgang er fortsatt isolator
→ utarmingsområdet veks
→ dioden er forsøpt i speneretning

II. pos på P-terminal
→ dd på trykk +
→ dd på trykk -

e-feltet motverkar det naturlege.
→ svakare krefter på majoritetsberørar
→ ved høg nok påtrykk spenning til utarmingsområdet skrumpet til 0
→ dioden er forsøpt i leiretning

straum i leiretning
straum i speneretning
Vlineær komponent → ohms lov gjelder ikke

Heilveide-likretta
vekselstraum
for å minimere variasjon i amplituden koplar me ein kondensator i parallel med lasta

rippel
dioden leiar

$U_L(t) = U_m \cdot e^{-\frac{t}{R_C}}$
denne kan me lage linearsitet modell

$U_L(t) = U_m (1 - \frac{t}{R_C})$
som me nytta for heile T

rippelspenninga $\Delta U = U_m \cdot f \cdot R_C \cdot C$
tilnærma middelverdi = $U_m \cdot (1 - \frac{1}{2fR_C})$

Heilveide-likretta med 4-diodebun

(Full wave rectifier)

I_s: driftstraum, komponentavh. konstant

$U_D(I_D) = U_T \cdot \ln(\frac{I_D}{I_S} + 1)$
 $U_T = \frac{k}{q} \cdot T$ q → elementarlad. $1,602 \cdot 10^{-19} [C]$

T ≈ 300[K] (lett over rom)

U_f → termisk spenning, (sid tiln. U_f = 25[mV])

I praksis utgår "-1" sidan I_s ≈ 0

Det skal bare ein moderat spenningsavh til for at dioden får overlast og brenn opp.

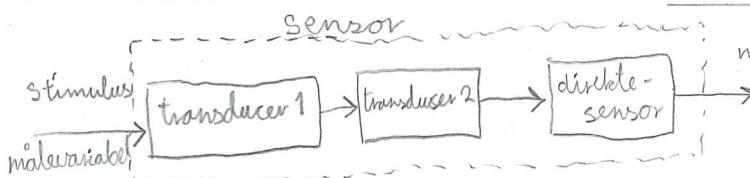
Den praktiske diodemodellen:

$U_f \approx 0,7[V]$ og ingen andre resistans.

→ dersom

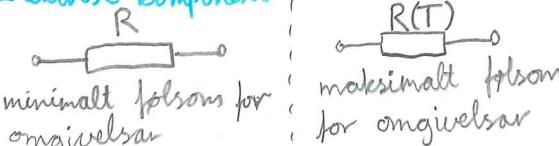
IELET 2112 Anvendt Instrumentering

(Dominik Osinski/Dag Roar Hjelme)

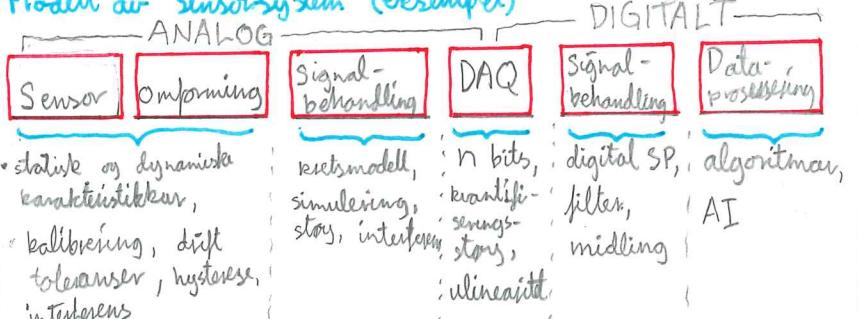


"Measurement and Instrumentation, Theory and Application" Morris/Langari

Elektrisk komponent



Modell av sensorysystem (eksempel)



Spenningsdelar for resistiv sensor

$$\Delta V_{ut} = V_0 \frac{RAR_s}{(R_s + R)^2}$$

• størst sensitivitet for $R = R_s$

$$\Delta V_{ut} = V_0 \frac{R^2}{4R}$$

$$V(T) = V_r \frac{R(T)}{R_s + R(T)} = f(T)$$

$$T(V) = f^{-1}(V)$$

Omfangsretts for resistiv sensor Wheatstone Bridge

$$V_{ut} = \frac{R_{sensor}}{R_{sensor} + R} V_r$$

- lite følsom for støy i spenningskilde
- kan kompensere for effekt av temperatur ved å velge motstandar med like temp. koefisient som sensoren

Sensitivitet $S = \frac{dy}{dx}$ (størrelse på respons)

$$x \rightarrow \text{Sensor} \rightarrow y = f(x)$$

Statisk sensorkarakteristikk $y = f(x)$

Dynamisk karakteristikk $H(f)$

Støy og interferens → resultater i måleverdien

Kompleks relasjon → mer omfattende signalprosessering (eks.: bildebehandl)

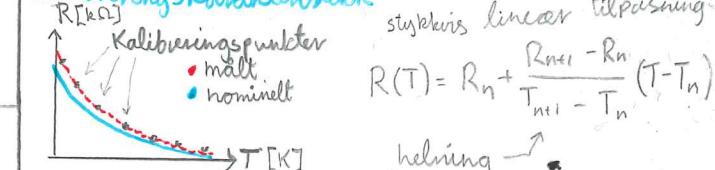
Signal ↔ Støy: tilpasse bandbreddet i sensor-systemet til bandbreddet i målestørrelse

Referansekarakteristikk: modell basert på fysiske tilhøringar.

$$\text{Eks.: } R(T) = R_0 \exp \left[B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

• tøffig valgt termistor

Kalibreringskarakteristikk



Precision (precision) (accuracy)

Nøyaktighet (accuracy)

Sann måleverdi

utgongsværdi

unøyaktighet (systemic error/bias)

heling

• Høg presisjon viser at måleverdien er reproducibel, men viser ikke at den er nøyaktig.

• Reproducerbarhet: spreidning i utgongssignal for like inngangssignaler, identiske målebetingelsar over kort tid

• Reproducerbarhet: spreidning i utgongssignal for like inngangssignaler, ulike målebetingelsar, ulike tider

Opplösung (resolution) (ext. discrimination)

→ minste endring i målestørrelse som vil produsere endring i utgongssignal

Toleranse

→ største feil som kan forventast i ein verdi

→ strengt tatt ikkje ein statisk karakteristikk, men av og til er instrumentnøyaktighet angitt som tolerans

Måleområde (range)

Eks. [-10, 100] → intervall mellom nedre og øvre målegrense

Måleomfang (span)

Eks. 110 → algebraisk forskjell mellom øvre og nedre målegrense

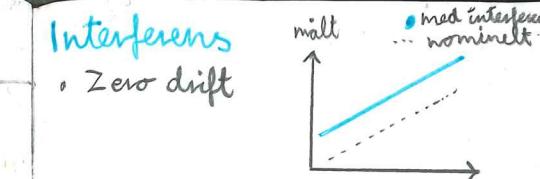
Sensitivitet

→ forhold mellom endring i utgongssignal og endring i målestørrelse → stigningstal for transformasjonen

Linear: $S = ax + b$ (er lineær med avvik) $S = \frac{dy}{dx}$

Interferens

• Zero drift



• Sensitivitet drift



• Xd (desired) $\rightarrow F_d \rightarrow \Delta m F_d$

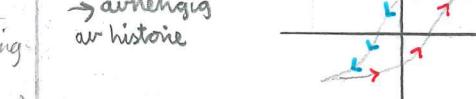
• Xm (modified) $\rightarrow F_m \rightarrow \Delta m F_m$

• Xi (interference) $\rightarrow F_i \rightarrow \Delta m F_i$

$$y = \sum \Delta m F_i$$

Hysterese

→ avhengig av historie



Dynamisk sensorkarakteristikk

$$q_i(t) \rightarrow q_o(t)$$

→ kan ofte forenkle til (i verste fall) androddens system.

Analoge signalkarakteristikkar

→ kontinuerleg s

→ frekvensanhold/bandbredd

→ min/maks spennin

→ "rate of change"

Digitale signalkarakteristikkar

→ logisk høg/ låg

→ bitlengde T0

→ NRZ (non-return-to-zero) eller RZ (return-to-zero)

→ frekvensanhold

SENDAR \rightarrow MOTTAKAR parallel

SENDAR \rightarrow MOTTAKAR serielt genk. snitt

Differensiell, ulinear feil (DNL)

Digitalt ut \rightarrow Analog inn

ADC \rightarrow Error

Samplingfeil: nedfolding

→ Tilpass bandbreddet for innsignalet for å unngå nedfolding. I praksis, bruk filter

$$X(t) \xrightarrow{\text{NLF}} X^*(t)$$

Eks. 20 kHz

Eks. 40 kHz

Implementasjonar:

Flash Delta-sigma

Dual slope Successive approximation (elektralisering)

ADC (analog til digital konvertering)

→ sampling

→ kvantisering

Dei fleste transduksjonar og sensorar er analoge av natur. MCU og prosessor bruker digital representasjon

Sampling $X(t) \rightarrow X^*(t)$

Kvantisering $X^*(t) \rightarrow X(n)$

Samplingrate $f_s = \frac{1}{T}$

nøyaktighet $\Delta L = \frac{1}{2} f_s T$

høyaktighet avtar med avstand

→ målelement: Posisjonsensitiv detektor (PSD)

Eks. Sharp $\angle \in [84,3, 89,2]$ grader

GP2Y0A02... $L_B = 2 \text{ cm } L_0 \in [20, 150] \text{ cm}$

Avstandsmåling → triangulering

(optisk sensor)

$L_1 = L_B \tan \alpha$

$L_2 = L_B \tan \beta$

• objektet må ha diffus refleksjon

$$x(L) = \frac{L_B f}{L}$$

nøyaktighet $\Delta L = \frac{1}{2} \frac{f}{x}$

høyaktighet avtar med avstand

→ Time-of-Flight (TOF)

$$t = \frac{2L}{v}$$

offset $\pm \frac{1}{2} \text{ LSB}$

→ Ultralyd: $v = v_s \approx 330 \text{ m/s}$

$L = 1 \text{ m} \Rightarrow t = 6 \text{ ms}$

→ lys: $v = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$L = 1 \text{ m} \Rightarrow t = 6,7 \text{ ns}$

→ Temperaturavhengig lydfart

$$v_s = [331,6 + 0,6 \cdot T[C]] \text{ m/s}$$

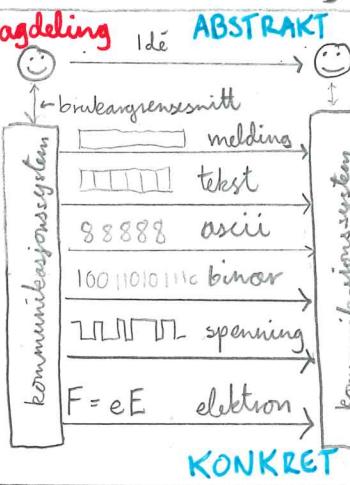
→ variasjon som følge av luftfuktighet er mindre, men vil også påvirke nøyaktigheten

IELET 2001 - Datakommunikasjon

To delar: o teoretisk grunnlag - innføring i datakommunikasjon (med Herman Ranes) o gruppeprosjekt IoT med Are Hollandsvik (SINTEF) og Arne Midjo (fra 5. del)

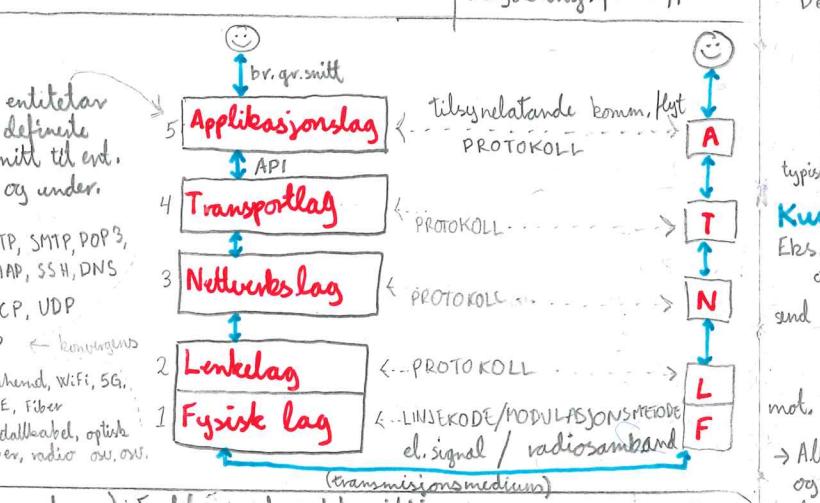
Hovedlærer: Kurose/Ross 8. utgåve, "Computer Networking"
Erl.: Skundberg/Klestad - "Innføring i datakommunikasjon" 2008

Lagdeling



Eit kommunikasjonssystem er komplisert. Ulike fagmiljø kan konsekvenser seg om sitt felt. Definerte grensesnitt mellom leverandørgjengen og arbeidsfelt.

ISO-OSI Open Systems Interconnection.
→ Fem-lags forenla
OSI-modell (godt sammensett med TCP/IP).



Protokoll - regelsett for arbeidsligning av data mellom to entitetar på det same laget. Protokollen overfører tilleggsinformasjon som ent. treng for å utføre kommun. oppgåvene.

Tilsynelatende kommunikasjonsflkt
→ horisontalt mellom entitetar

TCP/IP og Ethernet/WiFi er økterorienterte. **oktet ↔ byte**

Pakkesortering - data (binær sekvens) skal delast inn i "postasjer" med ein definert start og ein definert slutt. Et slik datapakke kan ha fast eller variabel lengd.

- Lag 5: **melding** message
Lag 4: **segment/datagram**
Lag 3: **pakke** packet
Lag 2: **ramme** frame
Lag 1: **(signal)**

Fordel med pakkesortering:
→ fleksibel bruk av overføringskapasitet
→ samtal: Flat
→ karakteristikk, samme mellomom.

HTTP - hypertext transfer protocol. (Applikasjonslags protokoll)
→ protokollheader er alltid tekstformatert.
→ mytedata kan vera tekst- eller binærfomatert.

Klient/Tenammmodell for HTTP:



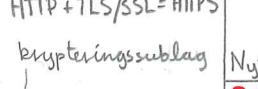
Lokal buffering av data

For repetert visning av ressurs
→ GET inneholder lokalt bufferingtidspunkt
→ tenaren samanlikner tidspunkt med datostempel på ressursen

Uttall: I ressursen er nyare → responskode 200 og ressursdata
II ressursen er eldre → responskode 304 og ingenressursdata

HTTPS

Kryptert ressursdata, hindring av innrygn/manipulasjon mellom klient og tenar



Nytelast; ressursdata

HTTP + TLS/SSL = HTTPS

Fysisk lag → overføring av binære data vha. elektriske eller elektromagnetiske signal. Implementert både i maskinvare og programvare.

Kanalbinding → sekvens av symbol må omformast til et signal som egnar seg til overføring på et medium

Transmisjonsmedium → kan ha ulike bandbredder, signal-/støy-bit.

Basisbånd → Eks. sp. pulsar på metallekabel → parkabel (eks. Cat5e) → koaksialkabel (kabelfjernsyn)

Modulert transmisjon → koaksialkabel Bandbredder $B = f_2 - f_1$ barebitige gjenstrekker

→ optiske fiber → trådløst mellom antenner

Symbol → et tidsrom der signalet har en definert verdi/parameter.

Eks.: Bipolar 2-nivå linjekode T: symbolintervall

Eks.: H-nivå linjekode (B10)

Additiv støy desjonsnivå

mange symbolnivå → mindre avstand mellom desjonsnivå → oftere bitfeil ved ein viss støy effekt.

Optisk fiber → høg frekvens, kan modulerast med høg symbolrate → høg bitrate

• Multimodus-fiber (MM). Fordel: enkelt å

Ulempa (PM): ulike ganglengder skaper moduldispersion

• Monomodusfiber (SM [single mode])

Ulempa (SM): må skjært og terminast med spesialutstyr

Amplitudemodulasjon (ASK), amplitude shift keying.

Frekvensmodulasjon (FSK)

Fasemodulasjon (PSK)

Barebølgengeranse 0°

QAM → quadratic amplitude modulation

→ kombinasjon av ASK+PSK

→ 4 bit per symbol

→ 16 ulike symbol ($2^4=16$)

magnituden er amplituden til signalet argumentet (vinkel) er fasen

Bilrate: [bps] Bit/s

Symbolrate [baud] symbol/s

Shannon/Hartleys kapasitetsformel

B: bandbreide, kanal

S/N: signal-/støyforhold

C: maks bitrate

Eks.: $B = 100 \text{ kHz}$

$\frac{S}{N} = 50 \text{ dB} \Rightarrow 10^{\frac{50}{10}} = 10^5$

$C = 100 \cdot 10^3 [\text{Hz}] \cdot \log_2(1 + 10^5) = 1,66 [\text{Mbps}]$

Egenskapar med linjekode-/modulasjonsmetale

→ Effektivitet: Kan bruke manganivåkode

for å redusere bandbreide

→ Robustheit: 2-Nivåkode mindre påverka

av støy enn 4-nivå (først bitfeil,

redusert bitrate).

→ Synchronisering: sender må vere

synkroniserte start/slutt på symbolintervall

Eks.: Bipolar 2-nivå linjekode T: symbolintervall

Eks.: H-nivå linjekode (B10)

2 bit per symbol

gray-kode → blir feil

i først bit ved

bitfeil

DSBFC double sideband, full carrier

$\frac{1}{2}P$ i bærebølde

$\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P$ i SB

$f_{c1} - f_c$ to $f_{c2} + f_c$

→ 1 bit per 2 symbol

(interval av symbol = 0)

→ alltid flanke mellom to symbol

→ kan overførast gjennom galvanisk skille

(gjennom transformator)

Effektivitet: Dobbel bandbrede samfor enkelt

2-nivåkode → mest bruk over korte avstandar.

→ enkelt å filtrere ut blokkesignal.

→ spesiell bølgelengde

ulike modus {50μm}

skjøle og terminere

barebølge

3125 μm

send motte

Ulempa (PM): ulike ganglengder skaper moduldispersion

• Monomodusfiber (SM [single mode])

Ulempa (SM): må skjært og terminast med spesialutstyr

Mobilnettverk

GSM: T-GSM 380

T-GSM 410

GSM-450

GSM-480

GSM-710

GSM-750

T-GSM-810

GSM-850

P-GSM-900

E-GSM-900

R-GSM-900

T-GSM-900

DCS-1800

PCS-1900

380

410

450

480

710

750

810

850

900

900

900

900

1800

1900

1900

MHz

10.0.0.8 80

10.0.0.4 2519

10.0.0.4 2519

10.0.0.5 3150

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

10.0.0.5 3150

10.0.0.5 3150

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

260.15.98.16 80

200.15.98.16 80

10.0.0.8 80

200.15.98.16 80

141.41.63.2 2612

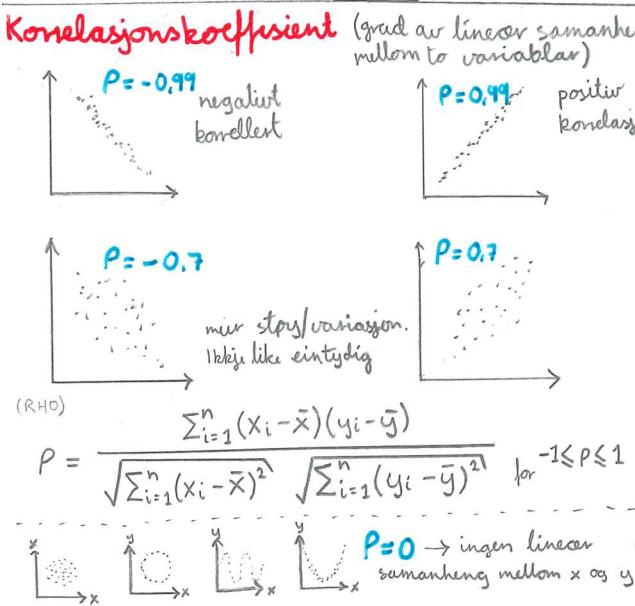
Statistikk - ISTAT1002, med Thea Bjørnland (9 veker felles), 6/9 gikk av i Stavanger. 3-4 lemavideoer
del 1: sannsynlighetsregning og statistikk (16. desember 2010 (langs med calculator) digitalt campus) Lærverk: statistikk for høgsk. og uni.

del 2: sikkerhet og støy i målinger (30%, gruppeproj)

Minste kvaratsums metode

→ kvar prikk på dette **kryspunktet** er en **punkt observasjon**
→ metode i regresjonsanalyse for å lage ein lineær modell $y = a + bx$

Korelasjonskoefisient (grad av lineær sammenheng mellom to variablar)



Kategoriske data - kan delast i kategoriar. Eks.: drivstofftypar i personbils. Kan plotte virking over tid.

Diskrete data - observasjonar som kan ta diskrete verdiar. F.eks. antal barn pr. vokesen. Her får me naturlig sortering langs x-axes og kan ta sentralmål og spreidingsmål og sentralmål.

Kontinuerlige data - observasjonar på kontin. skala
Eks.: snødobbde per dag.

Hendelser	Komplementar	Snitt	Union
S	A'	$A \cap B$	$A \cup B$

Utfallsmønnet S er mengden av alle enkeltutfall i et stokastisk forsøk

Ein hendelse er ein delmengde av utfallsmønnet
Eks.: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{1, 3, 5\}$ $C = \{1\}$

A **C** Her er A og C disjunkte, $A \cup C = \emptyset$
Sannsynligheten for den tomme mengden $P(\emptyset) = 0$

Addisjonsregelen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Uniform sannsynlighetsmodell $P(A) = \frac{\text{gjennige utfall for } A}{m}$
→ alle enkeltutfall like sannsynlege

Produktregelen $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_k$
Eks.: 7 adjektiver og 4 substantiver → 28 sambiningar

Antal rekkefølger n objekter kan sorteras i $n!$ rekkeføljer

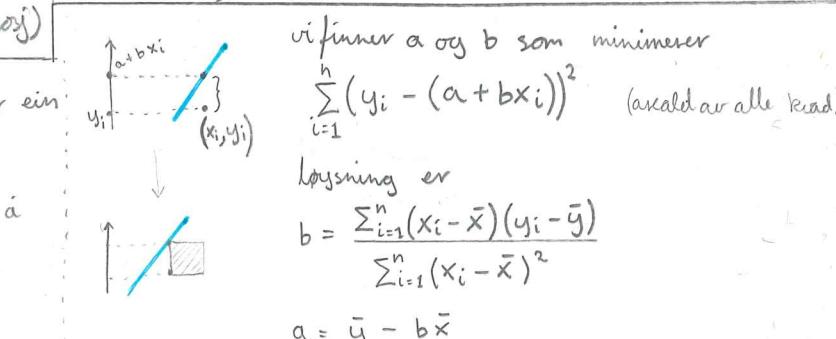
Uinemodell → me tekke r kuler fra urne med n nummererte kuler

Potensregel: $m = n^r$ [dersom me legg tilbake kulan]

Antal permutasjoner $m = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r$ [uten tilbakelegging]

→ desse to situasjonane er **ordna utvalg**, der rekkefølgen registreres. Alternativt har me ikke ordna utvalg;

Antal kombinasjoner $m = r!(n-r)! = C_r = \binom{n}{r}$ [utan tilbakelegging]



Vi finner a og b som minimerer $\sum_{i=1}^n (y_i - (a + b*x_i))^2$ (avslad av alle kaud)

Løsning er $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

Sentralmål gjennomsnitt $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

→ sensitiv til ekstreme observasjonar

median → gjennomsnitt av to midste mnl.

→ robust mot uteliggjarar

typetal/modus → mest hyppige observasjon

→ sensitiv til ekstreme observasjonar

→ sensitiv til ekstremverdiar

kvartilbreddde: deler dd sorterte dataseret i fire a b

→ robust

→ onest hyppige observasjon

→ sensitiv til ekstreme observasjonar

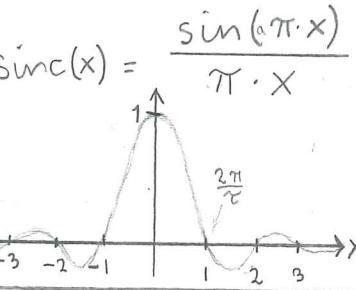
→ sensitiv til ekstremverdiar

→ sensitiv til ekstreme observasjonar

</

IELET 2110 Signalbehandling (Herman Ranes og Arild Moldsvor)

	amplitude	Tid
Analog	kontinuerlig	kontinuerlig
Tidsdiskret	kontinuerlig	samplet
Kvantisert	samplet	kontinuerlig
Digitalt	samplet	samplet

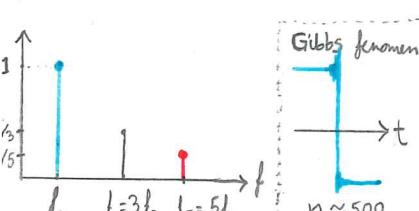
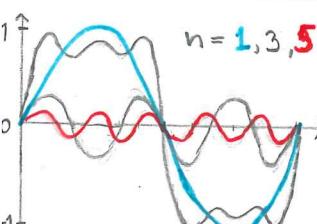


Tidsskifte

$$\cos(w_0(t-t_0)) \rightarrow \cos(w_0 t + \varphi)$$

for negativ (lagging) fase $\varphi = -w_0 t_0$,

$$G \cdot x(t-t_0)$$



Dirichletvitkår for Fourierserie

- Et periodisk signal $x(t)$ må...
- ein verdi for alle argument t
 - endelig antal diskontinuitetar på kvar periode
 - endelig antal maksima og minima på kvar periode
 - absolutt integrerbar for ein periode
 - alltså må $\int_0^T |x(t)| dt < \infty$

→ Postulerer at Fourier-serien til $x(t)$ eksisterer.

a_n :→ gonger alle ledd med $\cos(n\omega_0 t)$

→ integrerer alle ledd for ein periode T

→ alle ledd der $m \neq n$ vert null, ledd der $m=n$ vert integral $\frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

→ tilsvarende for b_n ved å gonge med sin

→ alle ledd unntatt DC-komponent har integral 0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$Z = \sqrt{R^2 + 1m^2} \angle \arctan\left(\frac{1m}{R}\right)$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{rad}] = [\text{deg}] \frac{\pi}{180} \quad [\text{rad/s}] = 2\pi [\text{Hz}]$$

$$z(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + j A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{sincwt} \quad \tan(\omega t) = \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

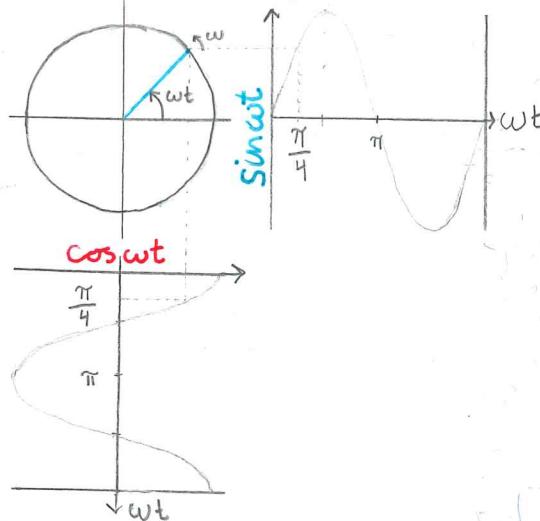
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2} [1 - \cos 2A]$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2} [1 + \cos 2A]$$

$$\text{Re}\{z_1 z_2\} = \text{Re}\{z_1\} \text{Re}\{z_2\} - \text{Im}\{z_1\} \text{Im}\{z_2\}$$

$$\text{Im}\{z_1 z_2\} = \text{Re}\{z_1\} \text{Im}\{z_2\} + \text{Im}\{z_1\} \text{Re}\{z_2\}$$



Kompleks frekvens

Eit reelt tidsharmonisk signal kan skrivast som summen av to komplekse signal.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (U + U^*) = \text{Re}\{U\}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (U - U^*) = j \cdot \text{Im}\{U\}$$

Fourierserie

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Der Fourier-koeffisientane a_n og b_n viser kor sterkt delsignala er til stades i signalet $x(t)$ → et mål på likhet/korrelasjon.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\text{og konstantledd (DC-komponent) (gjennomsnitt)} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Forenking vha. symmetri: (jevne/odde funksjon)

$$00 = \mathbb{E} \mathbb{E} = \mathbb{E} \rightarrow \text{kun } a_n \text{ og cos, alle } b_n = 0$$

$$30 = 0 \mathbb{E} = 0 \rightarrow \text{kun } b_n \text{ og sin, alle } a_n = 0$$

Alternativ form

$$X(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \alpha_n) \quad \text{for } A_0 = a_0 \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Kompleks form

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_0 = a_0$$

$$\text{for bokstaben} \quad c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

$$c_{-n} = c_n^*$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Roterande visar → Multiplikasjon av komplekse tal; multipliser magnituden (lengden) og adder vinklene (arg)

Fouriertransform

For signalet $x(t)$ som oppfyller Dirichletvitkåra, gjelder

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

og på invers form

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(w)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{j\omega t} dw$$

Konvolusjon (folding)

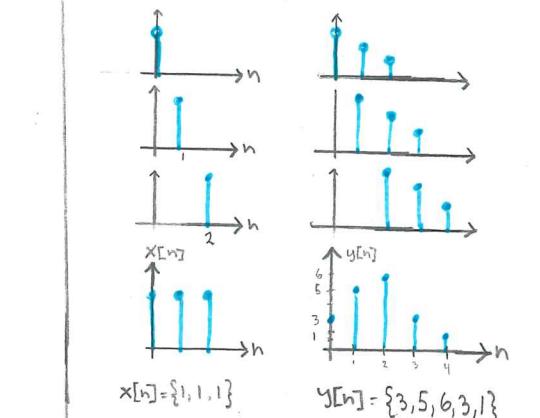
$$x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = X(t) * h(t)$$

$$\delta(t) \rightarrow h(t) \rightarrow h(t)$$

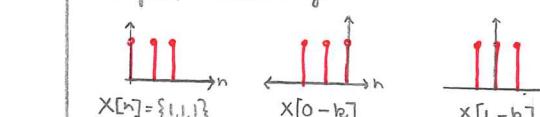
Matematisk metode for å beregne utgangssignalet i et LTI-system med $h(t)$ eller $h[n]$



Vi har linearitet:



Grafisk konvolusjon



$$y[n] = \{3, 5, 6, 3, 1\} = \sum_{k=0}^2 h[n-k] \cdot x[n-k]$$

$$y[n] = X[n] * H[n] = h[n] * x[n]$$

- Kommutativitet
- Assosiativitet $(f * (g * h)) = (f * g) * h$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$

Analog konvolusjon

$$x(t) \rightarrow \text{impulsrespons } S(t) \rightarrow h(t) \rightarrow \delta(t - \tau_i) \rightarrow h(t - \tau_i)$$

$$\sum_i (x_i \cdot \Delta t) \delta(t - \tau_i) \rightarrow \sum_i (x_i \cdot \Delta t) h(t - \tau_i)$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Konvolusjonsintegral

Eks.: RC-lagpass

$$y(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad 0 < t < 2$$

$$y(t) = \int_{-2}^t h(\tau) d\tau \quad t > 2$$

Heaviside-funksjoner

$$u(w) = \begin{cases} 1 & w > 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

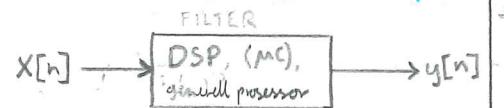
Eks.: Firkantpuls

$$u(w+2\pi) - u(w-2\pi)$$

Denne $H(iw)$ er et ideelt LP-filter med knutefrekvens 2π

Digital signalbehandling (Herman Ranes)

Tidsdiskrete filter / FIR-filter



→ et digitalt filter som omformer den tidsdiskrete sekvensen $x[n]$ til ein ny sekvens $y[n]$ vha. reknemaskin.

I: $y[n] = (x[n])^2 \leftarrow$ ikke lineært!

II: $y[n] = n \cdot x[n] \leftarrow$ ikke tidsinvariant!

III: $y[n] = 2 \cdot x[n] + x[n-1] \leftarrow$ LTI!

Finite Impulse Response → endelig lang i tid.

Generelt

$$\sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot x[n-k]$$

for filterordenen M
filterkoeffisientane b_k

Eks.: III: $y[n] = 2 \cdot x[n] + x[n-1]$
er et 1. ordens FIR-filter
 $b_0 = 2, b_1 = 1$

→ denne framstillinga er ei differenslikning for $x[n] \rightarrow y[n]$ ved diskrete heiltalstidspunkt ne \mathbb{Z}

→ FIR-filteret er einzeitig definert av koeffisientane b_0, b_1, b_2 osv

→ med einhetspulse

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

FIR-filteret "omper" ut den første inngangspulsen $x[0]$ til ein sekvens av pulsar, og etter det kjem responsen av $x[1], x[2], x[3]$... → sum av tidsforsinkte, skalerte sekvensar.

Dersom inngangsekvensen til FIR-filteret er et diskret, sinusforma signal $x[n]$ vil utgangsekvensen også vere et diskret, sinusforma signal → men typisk med endra amplitude og fase

Eks.: $x[n] = \cos(0,1\pi \cdot n)$
 $h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n]$
(første ordens FIR-middlingsfilter)

$$y[n] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2} x[n-1]$$

$$= \frac{1}{2} \cos(0,1\pi \cdot n) + \frac{1}{2} \cos(0,1\pi \cdot (n-1))$$

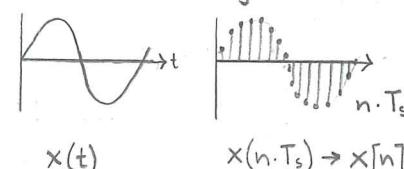
→ trigonometri (vanskeleg), bruk kompleks

$$y[n] = \frac{1}{2} e^{j\omega n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega(n-1)}$$

$$\frac{1}{2} e^{j\omega n} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega(n-1)} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})$$

Generelt om digital signalbehandling

→ punktprøvefrekvensen f_s eller punktpunktintervallset T_s knytter det analoge domenet til det digitale.



$$\text{med den digitale frekvensen } \hat{\omega} = \frac{f}{T_s}$$

$$\hat{\omega} = \pi \text{ tilsvarende nyquistfrekvensen } f = \frac{f_s}{2}$$

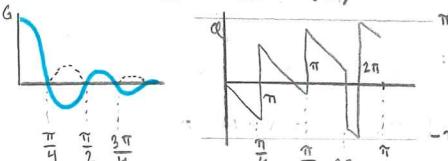
Finite Impulse Response → endelig lang i tid.

Generelt

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad |e^A e^{-A}| = 1$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad |A|^2 = A \cdot A^*$$

"å endre forteilen er som å endre fasevinkel med 180° (π)"



→ forteilenskift i $R(\hat{\omega})$ kan komponert med π -sprang i fasefunksjonen

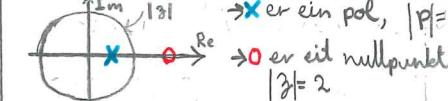
$$\begin{array}{l} b_0 = 1 \quad \text{odd point lang} \\ b_1 = b_{-1} = 2 \quad \text{filter, symmetrisk} \\ b_2 = b_{-2} = 1 \end{array}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=-2}^2 b_k e^{-jk\hat{\omega}} = b_0 + \sum_{k=1}^2 (b_k e^{jk\hat{\omega}} + b_{-k} e^{-jk\hat{\omega}})$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^2 2 \cos(\hat{\omega}k)$$

• symmetrisk impulseresp. → reit null fekk, resp.

FIR er spesialtilfelle av IIR der $A(z) \equiv 1$



for et IIR er polene tilknyttet stabiliteten og tilbakekopling, mens nullpunktene tilknyttet harmonikkoppling (FIR) og ikke avgjørende for stabiliteten til filteret

$$\text{Geometrisk sum} \rightarrow \text{ofte } \alpha^k = e^{-j\hat{\omega}k}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$\rightarrow (e^{j\frac{1}{2}\hat{\omega}} + e^{-j\frac{1}{2}\hat{\omega}}) \frac{1}{2} e^{j\hat{\omega}(n-\frac{1}{2})}$$

$$(2 \cos \frac{1}{2} \hat{\omega}) \frac{1}{2} e^{j\hat{\omega}(n-\frac{1}{2})}$$

$$y[n] = e^{j\hat{\omega}(n-\frac{1}{2})} \cos(\frac{1}{2} \hat{\omega})$$

$$= \cos(\hat{\omega}(n-\frac{1}{2})) \cos(\frac{1}{2} \hat{\omega})$$

$$\text{Realisering av tidsdiskret filter med 5} \uparrow \quad * \delta[n-2] = \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$$

$$\frac{1}{2} e^{j\omega n} (e^{j\frac{1}{2}\hat{\omega}} - e^{-j\frac{1}{2}\hat{\omega}}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega(n-1)} (e^{j\frac{1}{2}\hat{\omega}} - e^{-j\frac{1}{2}\hat{\omega}})$$

Einhetspuls $\delta[n]$

→ tilsvarende Dirac-puls $\delta(t)$ i det kontinuerlige domenet til det digitale.

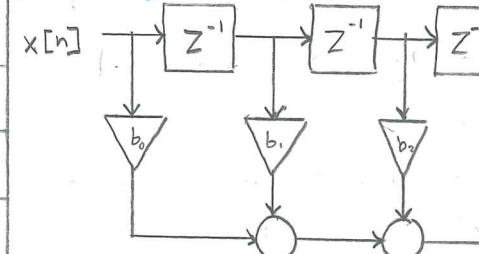
$$\begin{array}{c} 1 \uparrow \delta[n] \quad 1 \uparrow \delta[n-2] \quad 2 \uparrow \delta[n] \\ \text{symmetrisk} \quad \text{ideig-kausalt} \quad \text{tidsforsinking} \\ \delta[n-k] \end{array}$$

Tidsforsinking

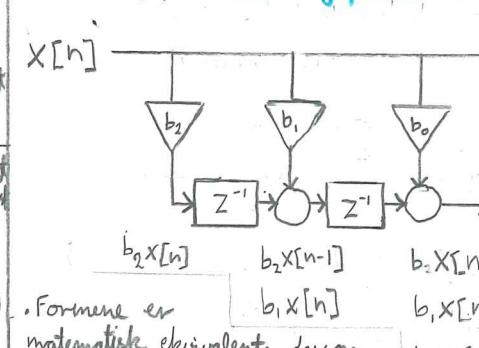
$$x[n] \rightarrow z^{-1} \rightarrow x[n-1]$$

$$X(z) \rightarrow X(z) z^{-1}$$

FIR-implementeringform 1

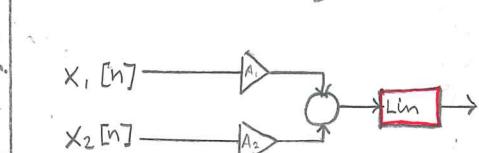
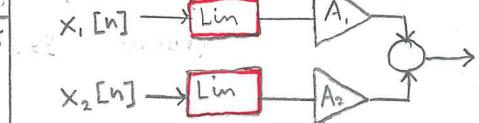


FIR-implementeringform 2



• Formene er matematisk ekvivalente dersom punktverdiar og koeffisientar er reelle tal og uendelig punktprøvefrekvens, har elles litt forskjellig støykarakteristikk

Lineariitet



• Dersom skalering og summasjon kan gjøres før eller etter operasjonen med like resultat $y[n]$ er operasjonen lineær.

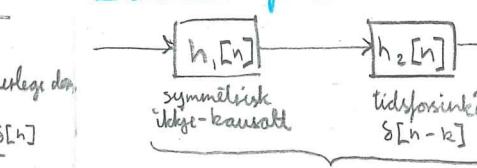
• Et vilkår for bruk av superposisjon:

Kausalitet for $y[n] = x[n+2] + 2x[n+1] + \dots$ i framtida

→ om utgangsverdien ved tidspkt. 0 vil vere avg. av inngangsverdiene ved tidspkt 1 og 2 har vi et ikke-kausalt filter. Umogleg å konstruere i samtid med "feste" punktprøver.

→ kan brukast på signal som er lagra → butnings/tidsforsinking

Linear fase



Eks.: kausalt filter

Frekvensrespons til h_2

$$H_2(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_k s[n-k] e^{-jk\hat{\omega}}$$

Magnituden er alltid 1 → ein fasevinkelfunksjon $e^{j\varphi(\hat{\omega})}$, her er $\varphi(\hat{\omega}) = -2\hat{\omega}$ → dette er ein linear fase. Steigungstalt er følger $h_2[n]$ har linear fase.

→ hele baskaden $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$ har linear fase

Symmetri → linear fase (men prisn er ein hoy filterorden)

Summatorfilter

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] = x[n] + x[n-1] + \dots$$

Midlingsfilter (gjennomsnitt)

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

$$M \cdot R(\hat{\omega}) = D_M(\hat{\omega}) = \frac{\sin \frac{1}{2} M \hat{\omega}}{\sin \frac{1}{2} \hat{\omega}}$$

også kalt: Dirichlet-formfunksjon orden M

IIR-filter (infinite impulse response)

→ har tilbakekopling av utgangssignalet → kan bli ustabil

→ både polar og nullar kan ligge utenfor origo

→ $H(z)$ er ein rasjonal funksjon

$$y[n] = \sum_{l=0}^N a_l \cdot y[n-l] + \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k]$$

bakover hamover (FIR)

→ startverdiar $y[n]$ for $n < 0$ er null

→ etter påtrykket $x[n]$ er slutt faller $y[n]$ asymptotisk mot null

→ IIR er LTI-system (superposisjon OK)

Einheitspulsrespons

$$n \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$x[n] \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$h[n] = \begin{cases} a^n b_0 & n > 0 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

Geometrisk talskewens

→ førsteordens IIR konvergerer til 0 for $a < 1$ og $|a| < 1$ for stabilitet

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$Y(z) = a_1 Y(z) z^{-1} + b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Tidsdomene

$$h[n] = \sum_{k=0}^M h[k] \delta[n-k]$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-jk\hat{\omega}}$$

Z-transform

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k X(z) \cdot z^{-k}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot z^{-k} \right) X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Mult. av z-transformerte \Leftrightarrow konvolusjon i tidsdomene

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - 6x[n-2]$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - 6\delta[n-2]$$

$$H(z) = z^0 + z^{-1} - 6z^{-2}$$

→ algebraiske manipulasjon

$$H(z) = \frac{z^2 + z - 6}{z^2} = \frac{(z+3)(z-2)}{z^2}$$

→ 2. ord

→ 1. ord

→ 1. ord

→ dette uttrykket har 2 nullpunkt $z=3$ og $z=2$ og to polar $z=0$

→ FIR-filter har alltid polar i origo (i praktis uinteressante)

→ vi ønsker ikke komplekse rotter, og kan ende opp med ein baskade der deluttrykket ikke kan faktorisert vidare

Z-domene

$$(systemfunksjon) H(z) = \sum_k h[k] z^{-k}$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_k h[k] e^{-jk\hat{\omega}}$$

Kjeglesnitt

- Sirkel
- Ellipse
- Parabel
- Hyperbel

$x^2 + y^2 = r^2$ standardform, standardstilling

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = ax^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$

$x^2 + y^2 = r^2$; $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

$F(x, y)$ implisitt form

Standardstilling: senter i origo

$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$

st  ende hyp: $-1 < \frac{y-b}{a} < 1$

liggende hyp: $1 > \frac{y-b}{a} > -1$

$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$ forsikrings ellipse

Kvadratisk kurver generelt (kjeglesnitt)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

rotasjonsell

Vektorrekning

• Vektor \vec{a} i rommet, \mathbb{R}^3

• Med basisvektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ent. til i, j, k

• $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$

• $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

• $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

• $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Parametrisering

P_0 : b  ent punkt

P : v  k  rlig punkt

$OP_0 = \vec{v}_0$

$OP = \vec{v}$

og \vec{v} langs l

$\vec{v} = \vec{v}_0 + t(\vec{v} - \vec{v}_0)$

eller

$\vec{v} = \vec{v}_0 + t(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$

i.e. topunktets formel.

Eks.: parametrisere linje fra $(1, 2, 3)$ til $(4, 5, 6)$

$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{v}$, velger $\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t \\ 2+3t \\ 3+3t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= 1+3t \\ y &= 2+3t \\ z &= 3+3t \end{aligned}$

Glatte kurver

• Singul  re punkt (spiss/knekk) der farten er null.

• har ikke tangent

• for glatte kurver er $x'(t)$ og $y'(t)$ kontinuerlige

• for glatte kurver er ikke $x'(t)=0$ og $y'(t)=0$ for nokon t

Eks.: $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{bmatrix}$ er kurva $x'(t) = 3t^2 - 3$ kontinuerlig, OK!

$x'(t)=0 \rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \rightarrow t = \pm 1$ Ulike nullpunkt, OK!

$y'(t)=0 \rightarrow 2t = 0 \rightarrow t = 0$ Glatt kurve

Eks.: $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$ kontinuerlig der deriverte, OK

$x'(t) = 1 - \cos t$

$y'(t) = \sin t$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^4 \end{bmatrix}$

$x'(t) = 2t$

$y'(t) = 4t^3$

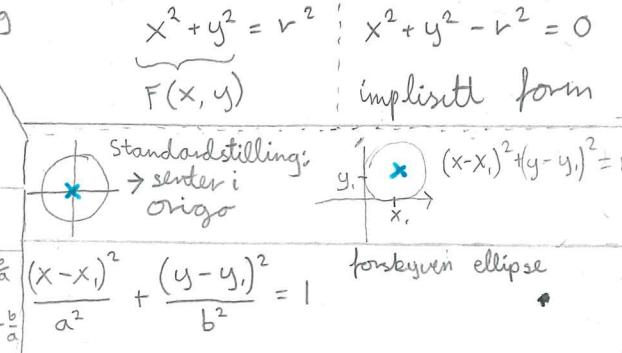
$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$

$x'(t) = 1$

$y'(t) = 2t$

kontinuerlig felles nullpunkt, men ikke felles nullpunkt.

(Parabel)



Fullfor kvadrat $ax^2 + bx + c$ for $a=1$

dessom $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$ har vi fullst  ndig kv.

Eks.: $x^2 + 2x + y^2 = 2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2+1$

$(x+1)^2 + y^2 = 3$

$(x-(-1))^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2$

Parametrisk rett linje i plan

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

rett linje parameter- vektor

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t^2-1 \\ t^2 \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Denne parametriseringa gir oss den samme linja!

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Parametrisering av sirkel (kjeglesnitt)

$x^2 + y^2 = 1^2$ (einringssirkel) $t \in [0, 2\pi]$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

Ellipse

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{bmatrix}$

Parabel (st  ende)

$y = -2x^2 + 3$ $t \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t^2 + 3 \end{bmatrix}$

Parabel (liggende)

$x = y^2 + 1$ $t \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ t \end{bmatrix}$

Tangentar

Eks.: $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{bmatrix}$

$x'(t) = 0$ for $t = k2\pi$, $k \in \mathbb{N}$ felles nullpunkt, OK!

$y'(t) = 0$ for $t = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ nullpunkt, ikke felles nullpunkt, men kan fortsatt vere gatt.. k  rpelte param.

Eks.: $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$ sykloide som er stykkvis gatt

$x'(t) = 0$ for $t = 0$ felles nullpunkt, men ikke felles nullpunkt, men kan fortsatt vere gatt.. k  rpelte param.

Eks.: $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^4 \end{bmatrix}$

$x'(t) = 2t$

$y'(t) = 4t^3$

Eks.: $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$

$x'(t) = 1$

$y'(t) = 2t$

Eks.: $r = f(\theta) = 4 \cos \theta \rightarrow r^2 = 4r \cos \theta$

$\rightarrow r^2 = 4x \rightarrow x^2 + y^2 = 4x$

$\rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2$

Bestrekelse av bevegelse

$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

$\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{r}''(t) = \vec{v}'(t) = \vec{a}(t)$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$

$\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ fast

$v = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

vektorvaluet funksjon $\vec{v} = \vec{v}(t)$

$S = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

kan legges til flere dimensjoner $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}'(t)| dt$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}(t)| dt \rightarrow S = vt$

Eks.: $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ $\vec{r}'(t) = \vec{v} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dt = [\vec{t}]_{\alpha}^{\beta} = 2\pi$

Eks.: spiral $r = f(\theta) = \theta$

skinnest formel for polar form, men for eks.: $x = r \cos \theta \rightarrow \theta \cos \theta$

$y = r \sin \theta \rightarrow \theta \sin \theta$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cos \theta \\ \theta \sin \theta \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta - \theta \sin \theta \\ \sin \theta + \theta \cos \theta \end{bmatrix}$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cos \theta \\ \theta \sin \theta \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta - \theta \sin \theta \\ \sin \theta + \theta \cos \theta \end{bmatrix}$

Eks.: $r = f(\theta) = -\frac{2}{3 \cos \theta}$ $\rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\rightarrow r(\theta) = \frac{1}{\sin \theta - 2 \cos \theta}$

Eks.: $r = f(\theta) = 4 \cos \theta \rightarrow r^2 = 4r \cos \theta$

$\rightarrow r^2 = 4x \rightarrow x^2 + y^2 = 4x$

$\rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2$

$s = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$s = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

et ved   r gange $\left(\frac{dy}{dx}\right)$:

$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy$

parametrisk (m.h.p. t)

$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$

$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$ ($ds = |\vec{v}| dt$)

$S = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

kan legges til flere dimensjoner $(\frac{dz}{dt})^2$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}'(t)| dt$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}(t)| dt \rightarrow S = vt$

Eks.: med massetetthet:

$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ p   t $\in [0, \pi]$

for konstant rho $\rho = 1$

$m = \int_C \rho ds = \int_C ds \rightarrow \pi r$ (ser pga symmetri)

$\bar{y} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^r \sin t dt = \frac{2}{\pi} r$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

$S = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dt = [\vec{t}]_{\alpha}^{\beta} = 2\pi$

Eks.: spiral $r = f(\theta) = \theta$

Dette integratet l  sers vi numerisk

$S \approx 21,26$

(for lengden $\theta \in (0, 2\pi)$ p   kurva C)

Eks.: $\vec{r} \times \vec{a} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$

$|\vec{r}| = \sqrt{1 + \sin^2 t}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$\vec{r} \times \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$

To typer:

1 et skalarfelt

2 et vektorfelt

$\int_C f(x, y) ds = \int_{t=t_1}^{t=t_2} f(x(t), y(t)) \cdot |\vec{v}(t)| dt$

spesialtilfelle for $f(x, y) = 1$ (bogelengde)

Arealer er bogelengde

Eks.: bestem linjeintegral $\int_C y ds$ der

c er gitt ved

$x = t^2$ p   t $\in [0, 2]$ $\rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow v = |\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2}$

$\rightarrow \int_C y ds = \int_{t=0}^2 y \cdot |\vec{v}| dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt \approx 5,76$

Vi er egentlig i rommet, $\int_C ds$ er i praksis et areal.

Eks.: $\int_C (x^2 + 3y) ds$

der C er rett linje $(0, 0)$ til $(1, 2)$

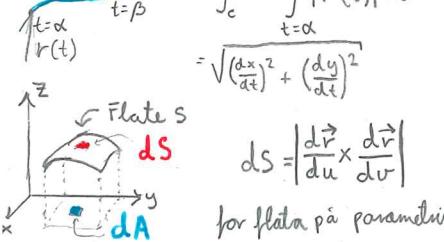
$\vec{v} = \vec{v}_0 + t \vec{v} = \vec{v}_0 + t(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad t \in [0, 1] \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$

Flateareal, overflateintegral

Def. linjeintegral og bølgelengde

$$S = \int_C ds = \int_{t=a}^b |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$$



$$dS = \left| \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} \right| du dv$$

for flata på parametrisk form $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left| \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} \right| du dv$$

der u og v er generelle. Kan vere (x, y)

Eks.: gitt planet $3x + 2y + 6z = 6$
→ første oktant for enkel skisseering, få "1" på HS → $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \frac{d\vec{r}}{dy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} \right| = \sqrt{(-fx)^2 + (-fy)^2 + 1}$$

for uttrykket $z = f(x, y)$

$$A(S) = \iint_S dS = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{2-\frac{1}{3}x+3} \sqrt{(-fx)^2 + (-fy)^2 + 1} dy dx = \frac{21}{6}$$

Evt. tides:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d\vec{r}}{dy} \right| = \sqrt{(-fx)^2 + (-fy)^2 + 1}$$

for uttrykket $z = f(x, y)$

Vektorfelt

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$(1, 1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ styrke } \sqrt{2}$$

$$(2, 0) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ styrke } 2$$

$$(1, -1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ styrke } \sqrt{2}$$

→ Gradientvektorfelt: grad. til skalarfelt

Eks.: $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Eks.: $f(x, y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

→ Generelt

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

→ praksis bestemmer vi målt feltstykke

Eks. Hastighetsfelt, rasteare over vinge

(accelerationsfelt)

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \end{bmatrix}$

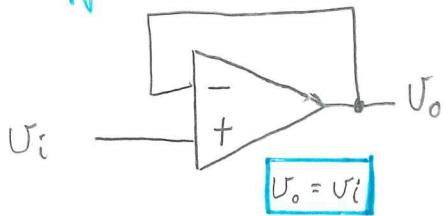
Fordas tyngdefelt (statisk felt)

$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(eut)

For ideell OP-Amp:

Buffer (follower)



Ideell opamp

$$U_- = U_+$$

$$R_{in} = \infty$$

$$R_o = 0$$

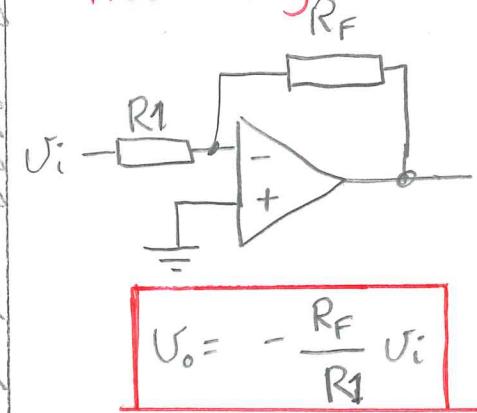
magisk fjord

$$\beta = \frac{I_c}{I_B} = h_{FE}$$

$$\alpha = \frac{I_c}{I_E} = \frac{I_c}{I_c + I_B}$$

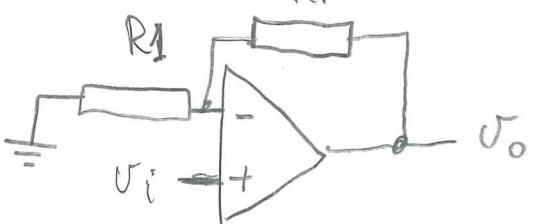
$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \frac{I_c}{I_E} = \frac{I_c}{I_c + I_B}$$

Inverting



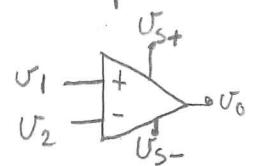
$$U_o = -\frac{R_F}{R_1} U_i$$

Non-inverting



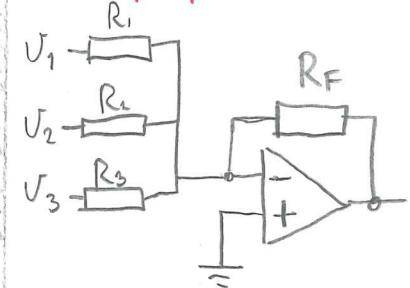
$$U_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right) U_i$$

Komparator



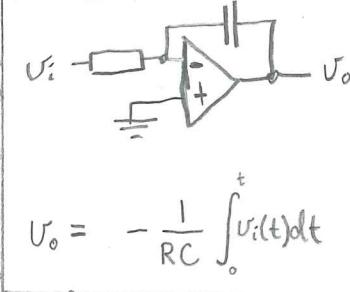
$$U_o = \begin{cases} U_{S+}, & U_1 > U_2 \\ U_{S-}, & U_1 < U_2 \end{cases}$$

Inverting summing amplifier



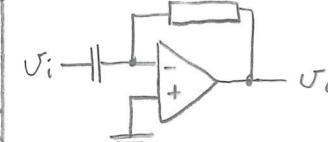
$$U_o = -R_F \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \right)$$

Integrator



$$U_o = -\frac{1}{RC} \int U_i(t) dt$$

Derivator



$$U_o = -RC \cdot \frac{dU_i(t)}{dt}$$

