Øving 10

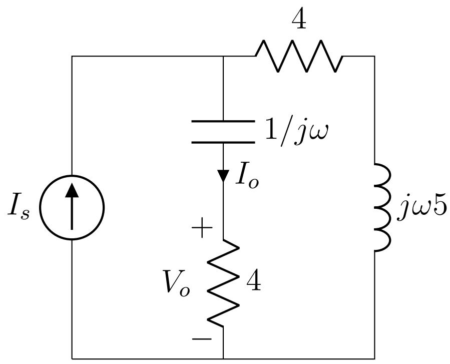
IELET1001 - Elektroteknikk

Gunnar Myhre, BIELEKTRO

4. mars 2022

Oppgåve 1

Oversetter verdiane til det komplekse domenet



Finner I_o vha. straumdeling

$$I_o = \frac{4 + j\omega 5}{8 + j\left(\omega 5 - \frac{1}{\omega}\right)} I_s \tag{1}$$

finner V_o vha. Ohms lov

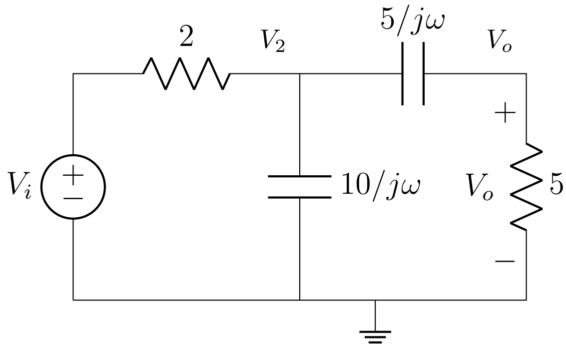
$$V_o = 4I_o \tag{2}$$

setter saman likningene og vinner uttrykk for transimpedansen $Z(j\omega)$

$$Z(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{I_s(j\omega)} \rightarrow Z(j\omega) = \frac{16 + j\omega 20}{8 + j\left(\omega 5 - \frac{1}{\omega}\right)} \tag{3}$$

Oppgåve 2

Oversetter verdiane til det komplekse domenet



Vi er ute etter transferfunksjonen $G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Bruker nodespenning for å finne uttrykk for V_o og V_i

$$KCL_{V_o} : \frac{V_o - V_2}{5} j\omega + \frac{V_o}{5} = 0 \rightarrow V_2 = V_o + \frac{V_o}{j\omega} \tag{4}$$

$$KCL_{V_2} : \frac{V_2 - V_i}{2} + \frac{V_2}{10/j\omega} + \frac{V_2 - V_o}{5/j\omega} = 0 \rightarrow V_2 = \frac{5V_i + 2V_o j\omega}{5 + 3j\omega} \tag{5}$$

setter saman likningene

$$\left(V_o + \frac{V_o}{j\omega}\right)(5 + 3j\omega) = 5V_i + 2V_o j\omega \tag{6}$$

forenkler algebraisk

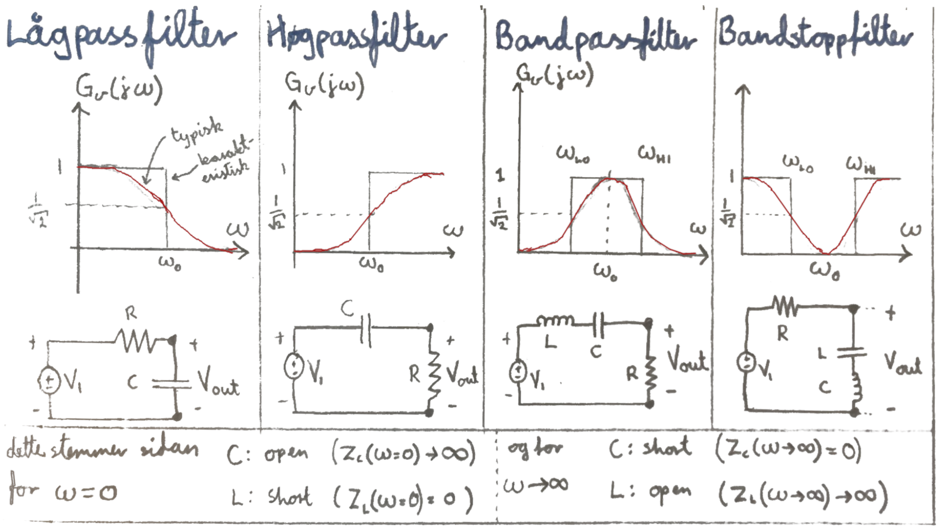
$$5V_o + \frac{5V_o}{j\omega} + 3V_o j\omega + 3V_o - 2V_o j\omega = 5V_i \tag{7}$$

$$8V_o + j\omega V_o + \frac{5}{j\omega} V_o = 5V_i \tag{8}$$

$$G_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} = \frac{5}{8 + j\omega + \frac{5}{j\omega}} \tag{9}$$

her kan vi fjerne brøken i nemnaren ved å gonge med $\frac{j\omega}{j\omega}$

Oppgåve 3



I figuren over har eg teikna amplitudediagram og implementasjonseksempel for dei fire hovedtypane filter. Amplitudediagramma (øverste rad) er uttrykt ved transferfunksjonen for spenningsauke, $G_v(j\omega)$, langs y-aksa og vinkelfrekvensen ω langs x-aksa. Den raude grafen representerer den typiske amplituden for eit filter av lågaste orden (første orden for låg- og høgpass, og andre orden for bandpass og bandstopp). Den grå, firkanta grafen representerer det karakteristiske eller *ideelle* filteret.

- ω_o er resonansfrekvensen, og er å finne for alle filterkarakteristikkane. Denne er bestemt som frekvensen der den totale reaktansen i filteret er null.

- ω_{LO} og ω_{HI} er knekkfrekvensar, eller *cutoff*-frekvensar. For alle filtertypene stemmer det at knekkfrekvensen er den/dei frekvensen/ane der halve effekten er overført frå innsignalet til utsignalet. For spenningsverdiar vert dette $\frac{1}{\sqrt{2}}G_v(j\omega)$. For lågpassfilter og høgpassfilter samanfaller knekkfrekvensen med resonansfrekvensen.

- Bandbredden er definert som intervallet mellom ω_{LO} og ω_{HI}.

- Stoppbandet er frekvensintervallet der filteret stopper frekvensar, altså der $G_v(j\omega) \to 0$

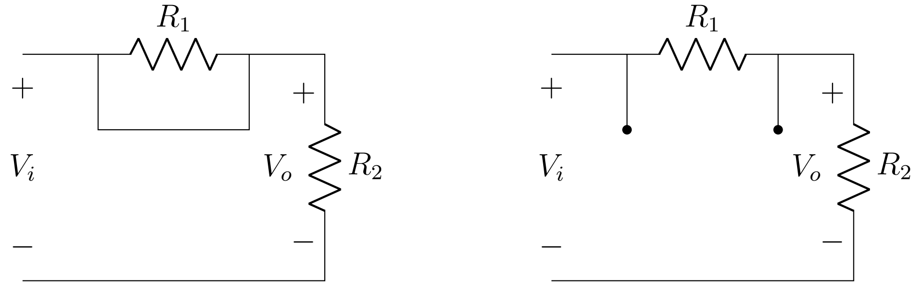
- Passbandet er frekvensintervallet der filteret slepper igjennom frekvensar, altså der $G_v(j\omega) \to 1$

Oppgåve 4

a)

Vi kan sjå på formelen for impedans i spole i dei to ekstremtilfella

- $Z_L = j\omega L$
- $Z_L(\omega \to 0) \to 0$
- $Z_L(\omega \to \infty) \to \infty$



- $\omega \to 0 \longrightarrow V_1 = V_o$
- $\omega \to \infty \longrightarrow V_o = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_i$

Sidan $R_1 >> R_2$ vil kretsen for $\omega \to \infty$ gjere at $G_v(j\omega) \to 0$. Det er med andre ord snakk om eit lågpassfilter.

b)

Vi kan sette opp transferfunksjonen $G_v(j\omega)$ vha. formel for spenningsdeling.

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_2}{\frac{R_1 j\omega L}{R_1 + j\omega L} + R_2} \tag{10}$$

finner fellesnemnar for brøkane i nemnaren

$$\frac{R_2(R_1 + j\omega L)}{R_1 j\omega L + R_2(R_1 + j\omega L)} \to \frac{R_1 R_2 + R_2 j\omega L}{R_1 R_2 + R_1 j\omega L + R_2 j\omega L} \tag{11}$$

finner magnituden til G_v ved å rekne modulen for begge dei komplekse tala

$$|G_v(j\omega)| = \frac{\sqrt{(R_1R_2)^2 + (R_2\omega L)^2}}{\sqrt{(R_1R_2)^2 + (R_1\omega L + R_2\omega L)^2}} \tag{12}$$

Om vi setter inn for $\omega \to 0$ og $\omega \to \infty$ ser vi at denne modellen stemmer overeins med den kvalitative modellen i oppg. **a**.

Oppgåve 5

a)

Impedansen til ein spole er gitt som

$$Z_L = j\omega L \tag{13}$$

derfor vil impedansen gå mot null for $\omega \to 0$. I dette tilfellet vil $V_i = V_o$.

b)

I tilfellet $\omega \to \infty$ vil impedansen til spolen gå mot uendeleg, altså som ein åpen krets. Dermed vil utgongsspenninga gå mot $0V$

c)

Ut ifrå denne karakteristikken kan vi slå fast at kretsen er eit lågpassfilter.

d)

Finner fasevektorverdiar av dei oppgitte komponentverdiane

- $250mH \to Z_L = j\omega L = j\omega 250 \cdot 10^{-3}[\Omega]$
- $1,5\text{k}\Omega \to Z_R = 1500[\Omega]$

Finner V_o vha. spenningsdeling

$$V_o = \frac{R}{R + Z_L} V_i \to V_o = \frac{1500}{1500 + j\omega 0,25} V_i \tag{14}$$

finner transferfunksjonen

$$G_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} = \frac{1500}{1500 + j\omega 0,25} \to G_v(j\omega) = \frac{6000}{6000 + j\omega} \tag{15}$$

e)

For å finne knekkfrekvensen finner vi først magnituden til transferfunksjonen

$$|G_v(j\omega)| = \frac{\sqrt{6000^2}}{\sqrt{6000^2 + \omega^2}} \tag{16}$$

knekkfrekvensen finner vi når G overfører halv effekt (merk at dette forholdet er $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sidan vi snakker om spenning og ikkje effekt $P = \frac{V^2}{Z}$).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6000^2}}{\sqrt{6000^2 + \omega^2}} \to 6000^2 + \omega^2 = 6000^2 \cdot 2 \to \omega = 6000[rad/s] \tag{17}$$

f)

Setter inn for oppgitte verdiar

- Knekkfrekvensen $\omega_c = 6000[rad/s]$
- $|G_v(j\omega)| = \frac{\sqrt{6000^2}}{\sqrt{6000^2+\omega^2}}$
- $|G_v(0,3\omega_c)| = 0,9486$
- $|G_v(\omega_c)| = 0,7071$
- $|G_v(3\omega_c)| = 0,5$

Desse kalkulasjonane viser at for lågare frekvensar vil overføringsfunksjonen mellom V_i og V_o gå mot 1, og for høgare frekvensar vil den gå mot 0. Dette stemmer overeins med antakelsen at kretsen er eit lågpassfilter.

Oppgåve 6

a)

Komponentverdiane som fasevektorar er $Z_L = j\omega 0,05$ og $Z_R = 1000$. Vi kan finne V_o vha. spenningsdeling.

$$V_o = \frac{j\omega 0,05}{1000 + j\omega 0,05} V_i \tag{18}$$

som igjen lar oss finne overføringsfunksjonen

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega 0,05}{1000 + j\omega 0,05} \tag{19}$$

vi kan se at for høge ω vil $G_v \to 1$, for låge ω vil $G_v \to 0$. Kretsen er eit høgpassfilter.

b)

Finner først magnituden til G_v

$$|G_v(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\omega 0,05)^2}}{\sqrt{1000^2 + (\omega 0,05)^2}} \tag{20}$$

setter lik magnituden til knekkfrekvensen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ og løyser for ω

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\omega 0,05)^2}}{\sqrt{1000^2 + (\omega 0,05)^2}} \to \omega^2(2\cdot 0,05^2 - 0,05^2) = 1000^2 \to \omega = 20000[rad/s] \tag{21}$$

c)

Setter inn for oppgitte komponentverdiar

- $|G_v(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\omega 0{,}05)^2}}{\sqrt{1000^2+(\omega 0{,}05)^2}}$
- $\omega_c = 20000[rad/s]$
- $|G_v(0,1\omega_c)| = 0,0995$
- $|G_v(\omega_c)| = 0,7071$
- $|G_v(10\omega_c)| = 0,9950$

Desse kalkulasjonane stemmer overeins med at kretsen er eit høgpassfilter. For låge frekvensar er magnituden til overføringsfunksjonen liten, for høge frekvensar er den stor.

Oppgåve 7

Vi har lært at resonansfrekvensen til eit bandpass-/bandstoppfilter kan finnast på denne måten dersom vi kjenner knekkfrekvensane:

$$\omega_{LO} \cdot \omega_{HI} = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_{LO}\omega_{HI}} = 189,7[rad/s] \tag{22}$$

bandbredda er intervallet mellom dei to knekkfrekvensane

$$\omega_{HI} - \omega_{LO} = 20[rad/s] \tag{23}$$

kvalitetsfaktoren kan vi finne på denne måten

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = 3\sqrt{10} \approx 9,5 \tag{24}$$

Oppgåve 8

a)

Oppførselen ved ekstremverdiane kan vi finne i formlane for impedans i spole og kondensator

- $Z_L = j\omega L, Z_L(\omega \rightarrow 0) \rightarrow 0, Z_L(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$
- $Z_C = \frac{1}{j\omega C}, Z_C(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \infty, Z_C(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

b)

Impedansen til parallellkoplinga er gitt som

$$Z = \frac{j\omega L / j\omega C}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{L/C}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \tag{25}$$

c)

Vi ser at dersom nemnaren går mot null vil impedansen skyte i været. Dette er resonansfrekvensen. Denne kan vi finne slik:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{26}$$

vi kan sette inn for resonanfrekvensen ω_0 i formelen for impedansen i parallell

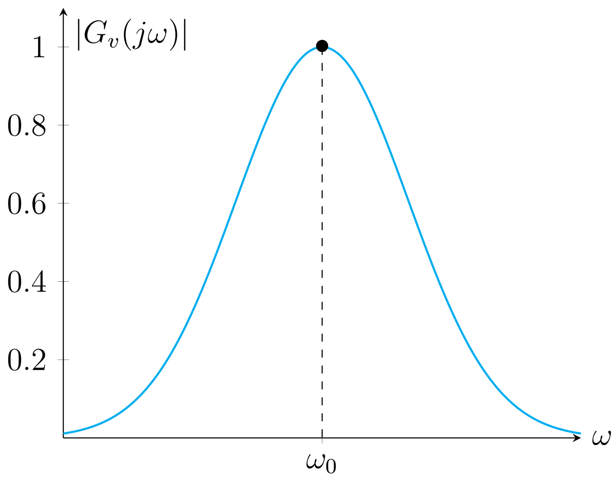
$$Z_{max} = \frac{L/C}{j(\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C})} = \frac{L/C}{\frac{LC}{\sqrt{LC}C} - \frac{LC}{\sqrt{LC}C}} = 0 \tag{27}$$

utgongsspenninga i resonanstilfellet vert

$$V_o = \frac{R}{R + Z_{max}} V_i \longrightarrow V_o = \frac{R}{R} V_i = V_i \tag{28}$$

d)

For høge eller låge frekvensar vil impedansen i parallellkoplinga gå mot null, og dermed vil $V_i = V_o$. Det er dermed snakk om eit bandpassfilter.



Oppgåve 9

a)

Setter opp KCL i inputnodene til OP-ampen. Vi veit at spenninga desse nodene er lik, og kaller den V_1

- $(V_1 - V_s)j\omega C + \frac{V_1}{9000} = 0 \to V_1 = \frac{V_s j\omega C}{j\omega C + 9000^{-1}}$
- $\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_o}{R_2} = 0 \to V_1 = \frac{V_o R_1}{R_1 + R_2}$

setter saman for V_1

$$\frac{V_s j\omega C}{j\omega C + 9000^{-1}} = \frac{V_o R_1}{R_1 + R_2} \to \frac{V_o}{V_s} = \frac{j\omega C(R_1 + R_2)}{R_1(j\omega C + 9000^{-1})} \tag{29}$$

b)

Finner først magnituden til G_v

$$|G_v(j\omega)| = \frac{R_1\omega C + R_2\omega C}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{9000}\right)^2 + (R_1\omega C)^2}} \tag{30}$$

Vi ønsker at forsterkinga skal vere 4 for høge frekvensar. For høge frekvensar er alle ledda uten ω irrelevante.

$$4 = \frac{R_1\omega C + R_2\omega C}{R_1\omega C} \tag{31}$$

vi har opplyst at $R_1 = 10\text{k}\Omega$

$$4 = \frac{10^4 + R_2}{10^4} \to R_2 = 30\text{k}\Omega \tag{32}$$

Det er også spesifisert ein knekkfrekvens $f_c = 4kHz \to \omega_c = 8000\pi[rad/s]$. Vi veit at knekkfrekvensen opptrer når den overførte effekten er halvparten av maksimumnivået. Dette kan vi formulere slik:

$$|G_v(j\omega_c)| = \frac{4}{\sqrt{2}} \tag{33}$$

Setter inn for dei kjente mengdene i $|G_v|$ og finner C

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{(10^4 \cdot 8000\pi + 3 \cdot 10^4 \cdot 8000\pi)C}{\sqrt{\frac{100}{81} + 6,4 \cdot 10^{15}\pi^2 C}} \to C^2 = \frac{800/81}{10,24 \cdot 10^{10}\pi^2 - 8 \cdot 6,4 \cdot 10^{15}\pi^2} \tag{34}$$

Finner $C = j4,421 \cdot 10^{-9} \to C = 4,421[\text{nF}]$. Eg forventa ikkje å få eit imaginært svar så eg er ikkje sikker på kva dette skyldast, men det har nok å gjere med at transferfunksjonen tar in ein imaginær verdi $G_v(\mathbf{j}\omega)$.

Oppgåve 10

Setter opp KCL i inputnoda til OP-ampen. Her er spenninga $0V$ sidan den eine noda er kopla til jord.

$$\frac{-V_i}{R_1 + 1/j\omega C_1} + \frac{-V_o}{\frac{R_2 \cdot 1/j\omega C_2}{R_2 + 1/j\omega C_2}} = 0 \rightarrow \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2 \cdot 1/j\omega C_1}{\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)} \quad (35)$$

Amplitudekarakteristikken kan vi antyde slik: Når vinkelfrekvensen går mot null oppfører C_1 seg som ein åpen krets og V_i er derfor avkopla kretsen. Når vinkelfrekvensen går mot uendeleg oppfører C_2 seg som ein kortslutning, dermed er det spenninga frå inngongen på OP-ampen ($0V$) som står på V_o.

vinkelfrekvens	overføringsfunksjon $\vert G_v(j\omega)\vert$
$\omega \rightarrow 0$	0
$\omega \rightarrow \infty$	0

For å finne resonansfrekvensen separerer eg den reelle og imaginære delen av overføringsfunksjonen

$$G_v(j\omega) = -\frac{R_2 \cdot 1/j\omega C_1}{R_1 R_2 - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} + \frac{R_1}{j\omega C_2} + \frac{R_2}{j\omega C_1}} \rightarrow G_v(j\omega) = -\left[\frac{1}{j\omega C_1 R_1} + \frac{R_2}{R_1}\frac{C_2}{C_1} + 1 + jR_2\omega C_2\right] \quad (36)$$

resonansfrekvensen opptrer når den totale reaktansen er null, så vi setter den imaginære delen av likninga over lik null

$$\frac{1}{j\omega C_1 R_1} + jR_2\omega C_2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (37)$$

finner først magnituden til G_v

$$|G_v(j\omega)| = -\left[\frac{R_2 \cdot \frac{1}{\omega C_1}}{\sqrt{\left(R_1 R_2 - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{\omega C_2} + \frac{R_2}{\omega C_1}\right)^2}}\right] \quad (38)$$

setter vi inn for $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ i dette uttrykket finner vi forsterkinga ved resonansfrekvensen.

Filteret er eit invertert bandpassfilter, sidan låge og høge frekvensar vert attenuert og eit område i midten har negativ forsterking.