IFYKJT1001 ~ Fysikk og Kjemi 2022V

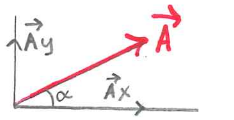
fysikk med Morten Kolstø Eksamen 30 mai
6/8 av fys + lab i rotasjonsmekanikk. 2/4 av kjem.

Einkvar fysisk størelse kan skrivast som
$$[A] = L^a \cdot M^b \cdot T^c \cdot I^d \quad \text{osv}$$
der a, b … er positive/negative heiltal el. 0

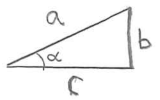
Med dimensjonsanalyse kan vi vurdere om fysiske samanhengar er feil.

eks.: $S = vt$ → $[L]$ OK $[L]$ $S = \frac{1}{2}at$ → $[L]$ feil $L \cdot T^{-1}$

Dekomponere vektor.



$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$



- $b = a \cdot \sin\alpha$
- $c = a \cdot \cos\alpha$
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{c}\right)$

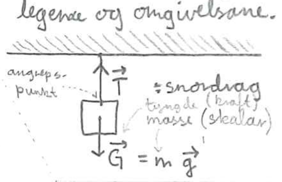
$\vec{A} + \vec{B} = [A_x, A_y] + [B_x, B_y] = [A_x + B_x,\ A_y + B_y]$

$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$

Kraft: vekselvirkning mellom eit legeme og eit anna, eller mellom eit legeme og omgivelsane.

Eining: $[N]$, $kg\frac{m}{s^2}$

Superposisjon av krefter
$\vec{R} = \Sigma\vec{F}$ ← vektorsum
resultantkraft



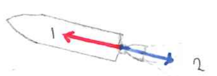
angrepspunkt; $\vec{T}$ = snordrag; tyngde (kraft); masse (skalar); $\vec{G} = m\vec{g}$

over: $\Sigma\vec{F} = \vec{G} + \vec{T} = 0$

Newtons lovar

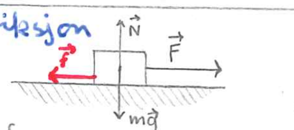
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$ tydeleggjer at akselerasjonen er konsekvensen av at det virker krefter på legemet

dersom $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow$ **$\vec{V}$ = konstant** (når det ikkje virker krefter) (jevn og rettlinja beveg.)



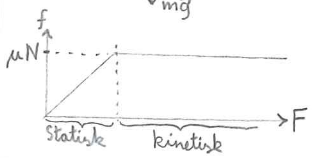
$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ kraft = motkraft

Friksjon



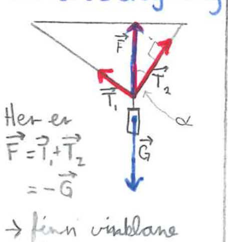
N: normalkraft
F: ekstern kraft
f: friksjon, μ: frik. koef.

statisk friksjon: $f = F$
legemet beveger seg når: $F > \mu N$
då er friksjonskrafta $f = \mu N$



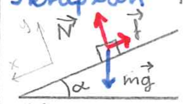
Merk: når alle vektorane er parallelle kan vi droppe vektorformalismen $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \to \Sigma F = ma$

Trekantberegning



Her er $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -\vec{G}$
→ finn vinklane (her α og 90°)
$T_1 = G\sin\alpha$
$T_2 = G\cos\alpha$

Skråplan

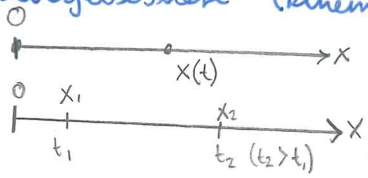


Merk, vi definerer koordinatsystemet langs $\vec{N}$-$\vec{f}$-planet sidan dekomp. vert enklare → vi får tilsvarande resultat

(y) $(\Sigma F)_y$: $N - mg\cos\alpha = 0$
$\Rightarrow N = mg\cos\alpha$

(x) $mg\sin\alpha - f = ma$
friksjonskraft → $f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$
$\to mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$
$\to a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g$

Bevegelseslære (kinematikk)

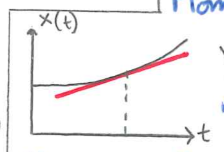


bevegelsen langs rett linje er fullstendig beskrevet av $x(t)$

Gjennomsnittshastighet

$$\bar{V}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Momentan hastighet



$$V_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

momentan akselerasj.: $a_x(t) = v'(t) = x''(t)$

Gjennomsnittsakselerasjon:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

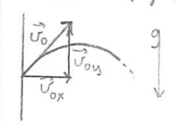
Bevegelseslikningane for konst aksel.

- $s = vt$ [for $a = 0$, v = konst]
- $v = v_0 + at$
- $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- $s = \frac{v + v_0}{2}t$
- $v^2 - v_0^2 = 2as$

s = tilbakelagt strekning
v = sluttfart
v_0 = startfart
a = akselerasjon
t = forløpt tid

Kast

$\vec{v}(t) = (v_0\cos\alpha)\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j}$
bevegelse i x- og y-retning er uavh.



$t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$ (tid til toppunkt) (liken over satt = 0)

Eks.: dekomponerte bevegels.liken for $a_y = g$, $a_x = 0$

X	Y
$S_x = v_x t$	$S_y = v_y t$
$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} + gt$
$S_x = v_{0x}t$	$S_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$
$S_x = \frac{v_x + v_{0x}}{2}t$	$S_y = \frac{v_y + v_{0y}}{2}t$
$v_x^2 - v_{0x}^2 = 0$	$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gS_y$

$v_0^2 = v_{0y}^2 + v_{0x}^2$
$v_{0x} = v_0\cos\alpha$
$v_{0y} = v_0\sin\alpha$

Sentripetalkraft

$ma = m\frac{v^2}{r}$

Luftmotstand

C = dragkoeffisient
$|\vec{F}_D| = \frac{1}{2}C\rho A v^2$ ρ = luftmotstand, A = overflateareal, v = fallhastigh.
→ for høge hast. (40 m/s +)
$|\vec{F}_D| = \frac{1}{2}C\rho A v$ (stokes lov, sedimentering og låg v)

Terminalfart

$G = F_D$ (konstant fart)

Mekanisk arbeid.

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ = tal

$W = F_x \cdot s \cdot \cos\alpha = 0$ → ingen arbeid (mekan.)
$\vec{s}$ = forflytningsvektor

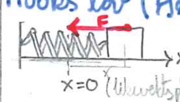
$W = \Delta E_K$ ← Arbeid-energi-setn.

Effekt $P = F_0 \cdot v \leftarrow P = \frac{dW}{dt}$

Potensiell energi $E_p = mgh = U$

Hooks lov (fjørkrefter)

$F = kx$ der fjørstivhet



$x = 0$ (likevektspkt.) $k = \frac{F}{x}$ $kx = ma$ (ukonst)

Potensiell energi i fjør $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = U$

Energilov for fjør $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$

Kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

SI-grunnenh.

lengde: meter
tid: sekund
masse: kilogram
temperatur: kelvin
stoffmengde: mol

nano	10^{-9}
mikro	10^{-6}
milli	10^{-3}
centi	10^{-2}
desi	10^{-1}
kilo	10^{3}
mega	10^{6}
giga	10^{9}

Avleda enh.: Newton, pascal osv.

$$\frac{m}{s} = \frac{10^{-3}km}{\left(\frac{1}{3600}h\right)} = 60 \cdot 60 \cdot 10^{-3}\frac{km}{h} = 3{,}6\ km/h$$

$$\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}kg}{(10^{-2}m)^3} = \frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$$

Gjeldande/signifikante siffer

$\underbrace{5{,}34001}$ $0{,}000\underline{534001}$ 6 siffer

→ ved multip./div: $3{,}94m \cdot 2{,}9m = 11{,}426m^2 \approx 11m^2$
gjeldande siffer: antal i tal med færrast siffer

→ ved add/sub: $3{,}41 + 19{,}2 = 22{,}61 \approx 22{,}6$
svaret har like mange siffer bak komma

I mellomrekn. → bruk så mange siffer som mogleg.

Forts. Arbeid og Energi

$W = mg(y_1 - y_2)$ uavh. av veg

potensiell energi i tyngdefeltet er evne (potensiale) til å utføre arbeid $U = mgy$
I våre enkle, mekaniske modellar gjelder derfor

$W = mg(y_1 - y_2) = \Delta K \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

Meir generelt kan vi sjå at $\boxed{E_1 + W_{1\to2} = E_2}$

Bevegelsesmengde og kraftstøt

$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Kraftstøt → den integrerte virkninga av ein kraft over tid

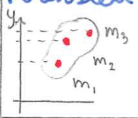
$$J_x = \int_{t_1}^{t_2}(\Sigma F)_x(t)\,dt = \boxed{\Delta p_x} \qquad \vec{J} = (\Sigma\vec{F})(t_2 - t_1)$$

dersom det ikkje virker ytre krefter er $\boxed{\vec{P} = \text{konst}}$

kollisjon: sterk vekselvirkning mellom legemer som varer i relativt kort tid.

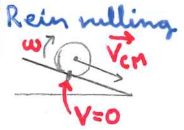
Elastisk	Uelastisk	Fullstendig uelast.
K er bevart	K er ikkje bevart	Legemene henger saman

Potensiell energi for legeme i tyngdefelt



$U = \sum_i m_i \cdot g \cdot y_i = Mgy_{cm}$
[CM: center of mass]

Rein rulling



Kontaktpunktet mellom sylinderen og underlaget er i ro når sylinderen ruller uten å gli/spinne.

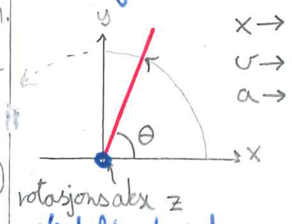
$V_{cm} = R \cdot \omega \Rightarrow \frac{dV_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{cm} = R\alpha$

Kinetisk energi for translasjon + rotasjon

$K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

Effekt av moment $P = \tau_z \cdot \omega$

Rotasjonskinematikk



$x \to \theta = \frac{s}{r}$
$v \to \omega = \frac{v}{r}$
$a \to \alpha = \frac{a}{r}$

rotasjonsakse z

Vinkelhastighet

Gjennomsnittleg: $\bar{\omega}_z = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Momentan: $\omega_z = \theta'(t)$

Vinkelakselerasjon

Gj. snittleg: $\bar{\alpha}_z = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$
momentan: $\alpha_z = \omega'(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Bevegelseslikn. for konst. α

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ osv.

Bogelengde → $\Delta S = r\,\Delta\theta$
Vi kan oversette mellom angulære og lineære størrelsar.

$\bar{V} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\bar{\omega}$
$\Rightarrow v(t) = r\omega(t)$

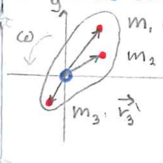
Tangentiell akselerasjon

$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r \cdot \alpha$

Sentripetalakselerasjon

$a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = r\frac{v^2}{r^2} = r \cdot \omega^2$

Kinetisk energi for rotasjon.



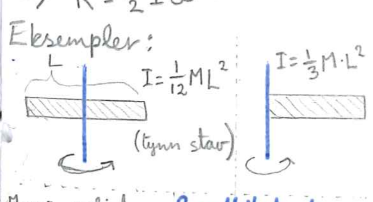
m_1 og $\vec{r}_1$, m_2 og $\vec{r}_2$, m_3, $\vec{r}_3$
egentlig $K_{tot} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$ der $v_i = r_i\omega$
Men! Alle punkter har lik vinkelhastighet

$$K = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}_{I}\omega^2$$

Treghetsmoment I

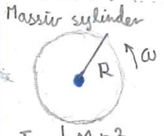
$\Rightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Eksempler:



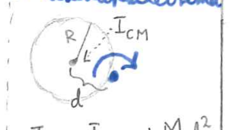
$I = \frac{1}{12}ML^2$ (tynn stav) $I = \frac{1}{3}M \cdot L^2$

Massiv sylinder



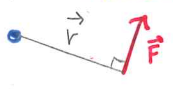
$I = \frac{1}{2}MR^2$

Parallellakseteoremet



$I = I_{CM} + M d^2$

Dreiemoment



$\tau = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$

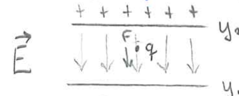
Newtons 2. lov (rotasjon)

$(\Sigma\tau_z)_{ytre} = I\alpha_z$

Arbeid frå rotasjon (generelt): $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau_z\,d\theta$

Frå konst. τ: $W = \tau(\theta_2 - \theta_1)$

Elektrisk potensiell energi



$y_2 - y_1 = d$
$\vec{F} = q\vec{E}$

$U_2 - U_1 = W_{2\to1} = F \cdot s = qEd$

Elektrisk ladning — [C] (coulomb)

- fundamental eigenskap ved materie
- det virker krefter mellom ladningar

$\leftarrow + \quad + \rightarrow$ like ladning frastøter
$- \rightarrow \ \leftarrow +$ forskjellig lad. tiltrekk

Coulombs lov

$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$ der $k = 8{,}99 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$ ← coloumb

→ krafta F er mellom to partiklar med ladning q_1, q_2 og avstand r

Elementærladning

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ [C]

Vakuumpermitivitet (elek. c.)

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]$ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (coulomb-k.)

Potensiell energi mellom punkt

$q \quad q_0$ $U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

eller for vilkårleg antal ladningar

q_1, r_1; q_2, r_2; q_3, r_3; q_0

$$U = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_0}{r_i} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

Elektrisk felt

$q_1 - - - q_2 \to \vec{F}_{12}$ $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_2}$

- dei elektriske feltlinjene peker utover i radiell retning

Størrelse på elektrisk felt:
$|\vec{E}| = E = \frac{|\vec{F}|}{q_0} = k\frac{q}{r^2}$

- Superposisjonsprinsippet gjelder

$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$

Elektrisk potensial

$V = \frac{U}{q_0}$ einhet $\frac{\text{Joule}}{\text{Couloumb}} = [V]$

Potensialforskjel (spenning)

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{-W_{a\to b}}{q_0}$$

$$\Delta V = -\int_{r_a}^{r_b}\frac{F(r)}{q_0}dr = -\int_{r_a}^{r_b}E(r)\,dr$$

altså:
potensialforskjell = integral av elektrisk felt mellom to punkter

→ OBS, V er uavhengig av q_0

Superposisjon gjelder. Eks.:
$V_{tot} = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right]$

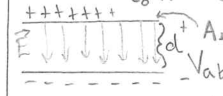
Kapasitans

(Farad)
$C = \frac{Q}{V_{ab}}$ $\frac{[C]}{[V]} = \frac{[C^2]}{[J]} = [F]$

- evne til å lagre el. energi i form av ladning

Platekondensator

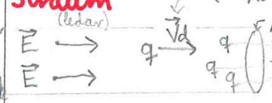
$|\vec{E}| = E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ← (ladnings-tetthet) $\sigma = \frac{Q}{A}$ lad / Areal



A = areal

$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q\varepsilon_0 A}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$

Straum



(leder) (driftshastighet)

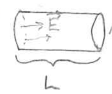
$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dQ}{dt}$ [A]

Straumtetthet (straum pr areal)

$\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{V}_d$ (antal ladn.) (driftshastighet) $J = \frac{I}{A}\left[\frac{A}{m^2}\right]$

Ohms lov

$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$ (resistivitet)

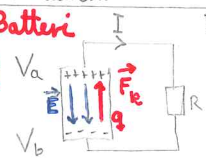


$E = \rho \cdot J = \rho \cdot \frac{I}{A}$
$V = E \cdot L = \rho\frac{I}{A}L$

$V = \frac{\rho \cdot L}{A} \cdot I \Rightarrow V = RI$ der $R = \frac{\rho L}{A}$ [Ω]

- straum skapast av elektrisk felt i ledaren.

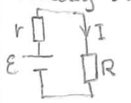
Batteri



F_k: kraft frå kjemiske reaksjonar i batteriet som flytter ladningar q til toppen av batteriet.

$\mathcal{E} = V_a - V_b$ (elektromotorisk spenning) (EMS)

- verkeleg batteri har indre motst. r



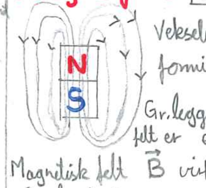
$V_{ab} = \mathcal{E} - rI$
$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$
$\mathcal{E} = (r + R)I$

Effekt levert frå dei kjem. reaksjon.
$P = \frac{dE}{dt} = \mathcal{E}\frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}I = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$

KCL: bevaringslov for el. ladningar
KVL: bevaringslov for energi

Magnetfelt

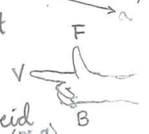
[S|N] $\vec{F}$ → ← $-\vec{F}$ [S|N]



Vekselvirk. mellom magnetar formidlast via mag. felt
Gr.leggande kjelde til mag. felt er elek. ladn. i bevegelse.

Magnetisk felt $\vec{B}$ virker med kraft $\vec{F}$ på ladning som beveger seg i rommet.

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (husk: $a \times b$)
($F = qvB\sin\theta$)
sidan kryssprodukt gjer at $\vec{F}_B \perp \vec{v}$ stemmer dette



- krafta gjer ingen arbeid (på q)
- kinetisk energi endrast ikkje, og dermed er absoluttverdi til hastighet konstant
- $F = |\vec{F}|$ er konstant

→ sirkelbevegelse dersom $\vec{v} \perp \vec{B}$
→ helikbev. dersom vi har ein hastighetskomponent parallelt med $\vec{B}$

Sirkelbevegelse

$F = |q| \cdot vB = ma = m\frac{v^2}{R}$
$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}$

Konvensjon: ⊗ ned ⊙ opp

Magnetisk kraft på straumledar

$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$

Kraftmoment på straumsløyfe

$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \vec{n}$ (mag. dipolmoment)
$\vec{\tau}_{tot} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Magnetiske feltkjelder

der $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

der $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\frac{Tm}{A}\right]$ (einhetsvekt.)
(vakuum-permeabilitet)

Biot-Savarts lov

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{ledning}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Vi kan forenkle for lang, rett ledar
$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Krefter mellom parallelle ledarar

$\vec{F} = I' \cdot \vec{l} \times \vec{B}$
$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I'}{2\pi \cdot r}\left[\frac{N}{m}\right]$

Fluks

Mengde magnetfeltlinjer som passerer eit A
Eks.: homog. felt, vinkelrett på plan
$\Phi = BA$ (tesla) $[T \cdot m^2] = [Wb]$ weber
$\Phi = BA\cos\Theta$

Den totale fluksen for ei lukka overflate er null (Gauss' lov)

Kjemi 2022 V

øvingsst 9, 12, 14, 17 (2/4) | fe 12-14
Christian Lauritsen

Upresise utsagn

Hydrogen er fargelaust	makro	$H_2(g)$	Hydrogengassen...
Hydrogen er upolart	mikro	H_2	Hydrogenionet...

Aggregattilstand

Fast (s) væske (l) gass (g)

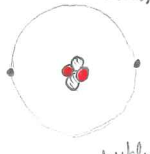
aq: laust stoff

Reine stoff grunnstoff (H, O) forbindelse (H_2O)

Blanding homogen (jamnt fordelt) heterogent (ikkje fordelt)

Atomets oppbygging

(etter Bohrs modell)



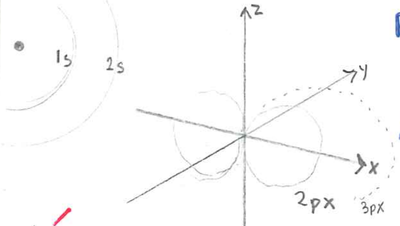
Proton p^+ } → Atomnummer Z
Nøytron N } Nukleontal A
Elektron e^-

Isotop: grunnstoffvariant

$^{4}_{2}He$ ← nukleontal (4), kjemiske symbol (He), atomnr. (2)

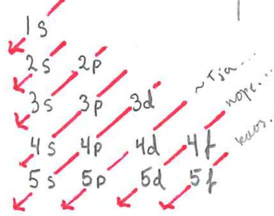
Eks: $^{1}_{1}H$ protium (vanleg)
$^{2}_{1}H$ deuterium
$^{3}_{1}H$ tritium

Sjølv om vi ofte bruker skallmodellen (Bohr) for å teikne opp atomet ser vi idag på elektronene som ei **elektronsky**, sidan det er vanskeleg å finne eksakt posisjon. Vi kan derimot beskrive sannsynligheiten for å finne eit elektron i ein gitt posisjon. Desse sannsynlighetsfunksjonane kaller vi **orbitaler**.



Pauliprinsippet
maks to e^- i ein orbital

Aufbauprinsippet
Vi fyller på e^- i stigande energirekkefølge, det første e^- går inn i den lågaste energitilstanden



ORB:	s	p	d	f
e^- max	2	6	10	14

Eks.:

	Grunns.	Elektronkonfigurasjon
1	H	$1s^1$
2	He	$1s^2$
3	Li	$1s^2 2s^1 \rightarrow [He]2s^1$
4	Be	$1s^2 2s^2 \rightarrow [He]2s^2$
5	B	$1s^2 2s^2 2p^1 \rightarrow [He]2s^2 2p^1$
26	Fe	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$

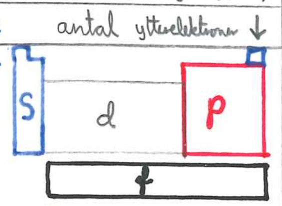
Ytterelektronkonfigurasjon har betydning for dei kjemiske eigenskapane → antal elektron i "ytterste skal"

Eks: Litium: $1s^2 2s^1$ → 1 elektron i ytterste energinivå
Magnesium: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ → 2 → gruppe 2
Fluor: $1s^2 2s^2 2p^5$ → 7 } gruppe 7
Klor: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ → 7 }
Argon: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ → 8 → gruppe 8

Eksempelvis Alkalimetallene og jordalkaliem. ønsker å gjeve frå seg eit eller to e^-, og er derm. svært reaktive. Denne effekten auker med atomradius, feks Li → Na → K

Halogenene på sin side ønsker eit e^-
Merk: aggregattilstand
Cl_2 (g)
Br_2 (l)
I_2 (s) → sterkare binding (høgare kok.)

Perioder antal energinivå →
Gruppe antal ytterelektroner ↓
Blokker



Positivt lada ion Kation
→ gitt frå seg e^- → færre e^- enn p^+
Negativt lada ion Anion
→ tatt til seg e^- → fleir e^- enn p^+

Skriver kat. før an. Na^+Cl^- → NaCl

Sterke bindinger

- Basert på elektronegativitet

$0 < \Delta EN < 0{,}4$: upolar kovalent (Cl)(Cl)
$0{,}4 < \Delta EN < 2{,}0$: polar kovalent δ^+ (H)(Cl) δ^-
$2{,}0 < \Delta EN$: ionebinding (Na^+)(Cl^-)
↳ elektroner overført permanent
met og ikkje-met alltid ionebinding

Strukturformel
$$H-\underset{H}{\overset{H}{C}}-H$$

Lewisstruktur
illustrerer kovalente bindinger

→ H_2O → H-O-H

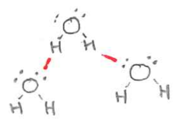
$:N{:}{:}N: \rightarrow N\equiv N$ → N_2

Svake bindingar (svakaste først)

- Dipolbinding mellom upolare molekyl → sidan e^- er i konstant bevegelse kan vi få midlertidig dipol (van der Waals-krefter)
  $\overset{\delta^+}{Cl}-\overset{\delta^-}{Cl} \cdots \overset{\delta^+}{Cl}-\overset{\delta^-}{Cl}$
- Dipolbinding mellom polare molekyl → svake tiltrekningskrefter mellom dipol – ikkje-dipol (indusert dipol)

- Dipolbinding mellom polare molekyl (permanente dipolar)
  $\overset{\delta^+}{H}-\overset{\delta^-}{Cl} \cdots \overset{\delta^+}{H}-\overset{\delta^-}{Cl}$
- Hydrogenbinding
  → mellom eit hydrogenatom som er bunde med eit svært elektronegativt atom, og eit ledig elektronpar på eit anna elektronegativt atom.

H-F···H-F (flussyre... badekar)



→ jo sterkare binding, jo høgare kokepunkt.

Kjemisk reaksjon

- Mikronivå → sterke bindinger mellom atomene i **reaktant**(ane) brytast og nye bindinger dannast i **produkt**(ene).
- Makronivå → Lukt, utfelling, temperatur, pH, lyd osv.

→ kategorisering er ikkje alltid eintydig og er meir kvalitativt

- Endoterm → krever energi $\Delta H > 0$
  A + B + energi → C
- Eksoterm → avgir energi $\Delta H < 0$
  A + B → C + energi

Reaksjonslikning

Beskriver kjemisk reaksjon

reaktantar **produkter**

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$$

indeks, koeffisient, reaksjonspil, aggregattilstand
($CO_2 + H_2O$ produkt, typisk forbrenning)

Stoffmengde $n = 1\,[mol]$

→ 1 mol $= 6{,}022 \cdot 10^{23}$ partiklar (avogadros tal, N_A) (atom, ion, molekyl)

eks $n = \frac{10^{25}\text{ vannmolekyl}}{6{,}022 \text{ vannmolekyl/mol}} \approx 17$ mol

1 mol Cl → $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Cl-atomer
1 mol Cl_2 → $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Cl_2-molekyl
$2 \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}$ Cl-atom

1 mol NaCl → $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Na^+-ion
—"— Cl^--ion

Atommasse $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,[kg]$ $(10^{-24}\,g)$

Molar masse $M = [g/mol]$

Na (11, 22,99u)

eks $M_{H_2O} = 2M_H + M_O = 18{,}016\,g/mol$ (1,008; 15,99)

eks 10 g H_2: $n = \frac{10\,g}{2 \cdot M_H} = 4{,}96$ mol

stoffmengde	n	mol
molar masse	M	g/mol
masse	m	g

$$m = M \cdot n$$

Balansering av reaksjonslikn.

→ start med atomet som inngår i færrast molekyl. Må kanskje begynne på nytt med anna atom.

$$C_2H_5OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

(bevaring av atomer)

støkiometrisk koeffisient

generelt for $aA + bB \rightarrow cC + dD$

er $\frac{n_A}{n_B} = \frac{a}{b}$ ... så $\frac{n_C}{n_A} = \frac{c}{A} \Rightarrow n_C = \frac{c}{a} n_A$

"vegen om mol"

gram A → mol A → mol C → gram C
$m_a \rightarrow n_a \rightarrow n_c \rightarrow m_c$

Begrensande reaktant

→ mengden av reaktant det er minst av og derfor stopper reaksjonen

eks:
$$2H_2(g) + O_2(g) = 2H_2O(g)$$

der det er oppgitt 10 g H_2 og 100 g O_2

- finn stoffmengdane n

$n_{H_2} = \frac{10\,g}{2{,}016\,g/mol} = 4{,}96$ mol

$n_{O_2} = \frac{100\,g}{32{,}00\,g/mol} = 3{,}12$ mol

- Om alt H_2 reagerer... tungs

$\frac{n_{O_2}}{n_{H_2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow n_{O_2} = \frac{1}{2} n_{H_2} = 2{,}48$ mol OK!

- Om alt O_2 reagerer...

$\frac{n_{H_2}}{n_{O_2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow n_{H_2} = 2 \cdot n_{O_2} = 6{,}24$ mol For lite H_2!

- H_2 er begrensande reaktant.

Tetthet (gass) $\left(\rho = \frac{m}{V}\right) \Rightarrow \frac{pm}{nRT} \Rightarrow \frac{pM}{RT}$

Reaksjonsutbytte

- Prosentvis utbytte:

$$\frac{\text{verkeleg utbytte}}{\text{teoretisk utbytte}} \cdot 100\%$$

Molekylformel **Empirisk formel**
riktig: C_6H_6 CH (kun forhold)

Eks: forbindelse med 43,64 wt% P (vektprosent) 56,36 wt% O med molar masse 283,9 g/mol

→ antar 100 g av forbindelsen

$m_P = 0{,}4364 \cdot 100\,g = 43{,}64\,g$

$m_O = 0{,}5636 \cdot 100\,g = 56{,}36\,g$

$n_P = \frac{m_P}{M_P} = \frac{43{,}64\,g}{30{,}97\,g/mol} = 1{,}4091$ mol

$n_O = \frac{m_O}{M_O} = \frac{56{,}36\,g}{16{,}00\,g/mol} = 3{,}5187$ mol

finner empirisk formel med forhold...

$\frac{n_O}{n_P} = \frac{3{,}5187}{1{,}4091} = 2{,}497... \approx 2{,}5 = \frac{5}{2}$

empirisk formel er P_2O_5

finner molar masse av denne forbind.

$M_{P_2O_5} = 141{,}94\,g/mol$. stemmer ikkje →

$\frac{283{,}9}{141{,}94} \approx 2$ → molekylformel: P_4O_{10}

Ideell gass

→ forenkla tilnærming til reelle gassar. Vi antar:
→ volum av gassmolekyl = 0
→ ingen krefter mellom gassmolekyl
vi får ideell gasslov:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

p: trykk [Pa], [atm] n: stoffmgd.
V: volum [m^3], [dm^3] (liter)
T: temperatur [K] (C + 273,15)
R: gasskonstant
→ 8,314 J/K·mol for V: m^3, p: Pa
→ 0,082057 L·atm/K·mol for V: dm^3, p: atm

Trykk $= \frac{\text{kraft}}{\text{areal}} = \frac{F}{A}$

SI: $[Pa] = \frac{N}{m^2}$ $[atm] = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
(mm kvikksølv)
$[mmHg] = 133{,}3$ Pa $[bar] = 10^5$ Pa

Boyles lov → trykk og volum er omvendt proporsjonale $V = k_1 \cdot \frac{1}{p}$
(n, T er konst)

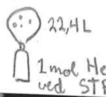
Charles' lov → volum og temperatur er proporsjonale
(n, p er konst) $V = k_2 \cdot T$

Gassen utvider seg når temp. auker. Om vi ekstrapolerer Charles' lov for ulike gassar finner vi det absolutte nullpunktet

Gay-Lussacs' lov → trykk og temp. er proporsjonale
(n, V konst) $P = k_3 \cdot T$

Avogadros' lov → volum og stoffmengde er proporsjonale
(P, T er konst) $V = k_4 \cdot n$

Molart volum



22,4L
1mol He(g) ved STP (0°C, 1atm)

$$V_m = \frac{V}{n} \left(= \frac{RT}{p}\right)$$

IMAT1001 2021H ~ Vegard Tuset   Eksamen 6/1 ~22 ?

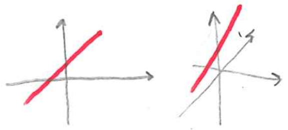
4/6 arbeidskrav: 13/9 27/9 14/10 25/10 11/11 22/11

Lineære likningar

eksempelvis

$ax + by = C \quad a, b \in \mathbb{R}$

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$



$X \rightarrow$ lineært

$x^2, x^3, \ln(x), \sin(x), e^x, \sqrt{x} \rightarrow$ ikkje lineært

Lineært likningssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

moglege løysingar:

I) kryssar i eitt pkt. $\rightarrow 1$

II) parallelle og like $\rightarrow \infty$

III parallelle og forskyve $\rightarrow 0$

Vaukengig av antal dimensjonar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} = & = \end{array}\right]$$

Fleir ukjente enn likningar systemet er ubestemt

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n \end{array}$$

m likningar (rader)

n ukjente (kolonner)

$= A = [a_{ij}]$ $\quad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$

$$4\left\{\overbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}^{6}\right.$$

Ledande koeffisientar (Pivot) (ledande einarar)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 2s - 3t \\ x_2 = s \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

$s, t \in \mathbb{R}$

løysinga er derfor eit 2D-plan i femdimensjonalt rom.

Rang: antal ledande 1

Dimensjon: fridomsgrad i løysingsrommet (her 2)

Maksimalt redusert matrise:

1) radar med 0 er nederst
2) alle ledande koeff. er 1
3) kvar ny ledande 1 kjem til høgre for den førige

MAO. **Trappeform** (Row echelon form)

4) alle andre element i kolonner med ledande 1 er 0

Redusert trappeform (eintydig)

Linjematrise $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}]$ linjevektor $1 \cdot n$

Søylematrise $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ søylevektor $m \cdot 1$

Kvadratiske matriser $m = n \rightarrow n \cdot n$

- triangulære matriser $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Nullmatrise, øvre triangulære matriser, nedre

- diagonale matriser: Alle element utanfor hoveddiagonalen er 0

I dimensjon $\rightarrow I_n \rightarrow$ **Enhetsmatrise** (identitetsmatrise): hoveddiagonal full av 1

Elementære rekneregler for likningssystem

- Multipliser alle ledd med konst.
- Bytte to likningar
- Multipliser ein rad med ein konst. og legge resultatet til ein annan rad

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \quad (-2)\ (-3)$$

Utvida koeffisientmatrise $\hat{A}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \quad (-2)\ (-3)$$

Koeffisientmatrise A $\qquad \vec{b}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \quad (\cdot \tfrac{1}{2})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ y - 4z = -10 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \quad (-3)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - 4z = -10 \\ 2y - 7z = -17 \end{cases} (-2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

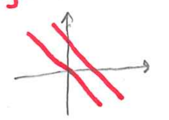
$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 & \Rightarrow x = 1 \\ y - 4z = -10 & \Rightarrow y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Gauss-eliminasjon

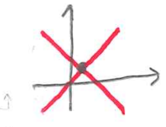
Gauss-Jordan-eliminasjon

Antal løysingar:

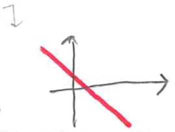
Inkonsistent

a) $\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{array}$  $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$ ingen løys.

Konsistent

b) $\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{array}$  $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \rightarrow 1$

løysinga er bestemt / ubestemt

c) $\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{array}$  $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \infty$

Homogent likningssett: alle likningar $= 0$ (med $\vec{0}$)

a) finnast 1 løysning $(x = y = z = 0)$ triviell

b) finnast uendeleg antal løysingar (omtr. $\rightarrow \infty$)

Multiplikasjon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} [1, 2] \cdot [x, y] = \\ [3, 4] \cdot [x, y] = \end{array} \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

radvektorar i A_1 med søylevektoren i A_2

$m \cdot n \cdot p \cdot q$ går opp dersom $n = p$, svaret blir $m \cdot q$

Dimensjon for matrise: $m \times n$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Addisjon: A og B må ha lik dimensjon

Subtraksjon: $A - B = A + (-B)$

Rekneregler for addisjon

- $A + O = A \rightarrow A - A = O$
- $A + B = B + A$ (kommutativ lov)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assosiativ)

Rekneregler for multiplikasjon

- $A \cdot k = B$ (med skalar)

Kommutative matriser

$K = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A \cdot B$, $n = p$

Rad 1 med Kol 1

Rad 1 med Kol 2 ...

Rad 2 med Kol 1

Rad 2 med Kol 2 ...

DIMENSJON VED MATRISEMULTIPL.

$3 \times 3 \cdot 3 \times 1$ → svar

Drøfte likn. system

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad |A| = a - 2$

likn.sys har ein løs. hvis $a \neq 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

ingen løysning for $a = 2$

Kofaktormatrise 3x3

$$\mathrm{kof}(A) = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

finne B så $BM = MA$

$BMM^{-1} = MAM^{-1}$

$B = MAM^{-1}$

$$n \cdot n^{-1} = 1$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

INVERSE MATRISER

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Determinant

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kun definert for kvadratiske matriser.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Forteikn i kolonne j og rad i er $(-1)^{ij}$

$i + j$ = partal $\rightarrow 1$

$i + j$ = oddetal $\rightarrow -1$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

$n = 1$: $|a_{11}| = a_{11}$

Determinanten er eit tal

→ determinanten vil bli den same

→ kan også utvikle langs søyle

(velger å utvikle langs rad 1, kan også velge dei andre)

$n = 2$: $\quad + a_{11} \cdot |a_{22}| - a_{12} \cdot |a_{21}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$n = 3$: $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_{11} |\cdots| - a_{12} |\cdots| + a_{13} |\cdots|$

$a_{11} \cdot |\cdots|$, $-a_{21} |\cdots|$, $+a_{31} |\cdots|$

← kofaktormatrise ($n = 2$) eller koeffisientmatrise

$|A^{-1}| = |(A)|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$

Velg rad og søyle med flest 0 $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

Cramers regel

gitt $A\vec{x} = \vec{b}$, der A er inverterbar $n \times n$-matrise, den eintydige løysninga av systemet er gitt ved

$$X_i = \frac{|A_i(\vec{b})|}{|A|} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots n$$

Mao. hiver $\vec{b}$ inn i A

eks.:

$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad |A| = 10$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -\dfrac{6}{10}$ ← $\vec{b}$ satt i kol. 1

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \dfrac{7}{10}$ ← $\vec{b}$ satt i kol 2

Transponerte matriser

$$A = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \equiv \end{bmatrix}}^{n}\right.$$

$$A^T = n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}^{m}\right.$$

Transponert matrise bytter søylene med radane.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Symmetrisk matrise: $A = A^T$

Inverse matriser

om determinanten $\neq 0$ (med inverterbar)

$A_{(n \times n)}$ er inverterbar $\Leftrightarrow$ det finnast ei matrise A^{-1} slik at

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n = I$$

$$I \cdot E_1 \cdot E_2 \ldots E_n = A^{-1}$$

$[A \mid I] \Downarrow [I \mid A^{-1}]$

- sett opp $[A \mid I]$
- Gauss-jordan-eliminasjon for å få I på venstresida

Triks for invers 2x2

determinant

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

OPERASJONAR SOM IKKJE ENDRER DETERMINANTEN

1 bytte om rad $\quad |A'| = -|A|$

2 gange med konst $\quad |A'| = k|A|$ $\quad |A| = \frac{1}{k}|A'|$

3 gange med konst og addere med ein annan rad $\quad |A'| = |A|$

$|A^T| = |A|$

Adjungerte matrise

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{kof}(A))^T$$

viser at:

A inverterbar $\Updownarrow$ $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ der A er $n \times n$-matrise har eintydig løysning.

Calculus, Analyse

talmengder:

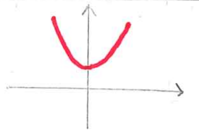
ℕ	ℤ	ℚ	ℝ	ℂ
naturlige tal	heiltal	rasjonale tal	reelle tal	komplekse tal
{1, 2, 3, 4, ...}	{...-2, -1, 0, 1, 2...}			

ØV Tir KJL1 10-12, Time Tor 10-12

FUNK $y = f(x) = x^2+4$

$x \rightarrow \boxed{x^2+4} \rightarrow y$

x	-1	0	1
y	5	4	5



konveks parabel

Definisjonsmengde

D_f: ℝ

Verdimengde

V_f: $[4, \rightarrow\rangle$

$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

Implisitt derivasjon

· brukast om det ikkje e lett å finne y som ein funksjon av x

$\rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x$

$f'(x) = g'(x)$

$x^3 + y^3 = 6xy$

$(x^3+y^3)' = (6xy)'$

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6y + 6x \cdot y'$

løyser algebraisk for å finn y'

$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$

1 $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

2 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(1) = 0$ 3 $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Logaritmisk derivasjon

Nyttig for å gjere uttrykk med faktorar over til ledd, og spesielt med potensar (pga regel 1 og 3), eks.:

- ln på begge sider
- forenkle vha. log-reglar
- deriverer implisitt
  - ↳ få over på form y' = ...
  - ↳ sett inn for y (orig uttrykk)
  - ↳ (forenkle algebraisk)

$y = x^n \rightarrow \ln(y) = \ln(x^n)$

deriverer

$\frac{1}{y}y' = n\frac{1}{x}$ (setter inn for y)

$y' = n\frac{1}{x}x^n$

$y' = n x^{(n-1)}$

Derivasjon

den deriverte i eit punkt: stigningstalet til tangenten i eit punkt (kor mykje veks funksjonen i punkt)

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(k \cdot f(x))' = k f'(x)$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

PROD $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

KVOT $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kjerner:

$\underbrace{(x+2)}_{u}{}^5 \quad e^{\overbrace{\frac{x}{x+1}}^{u}} \quad \sin(\underbrace{3x+1}_{u})$

KJERNE $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) \qquad (e^{2x})' = 2e^{2x}$

$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = a^x \ln(a)$

$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Høgare ordens deriverte

$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2 f$ (D differensialoperator)

$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$

s(t) strekning, v(t) fart, a(t) akselerasjon

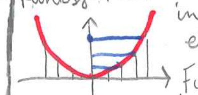
$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = v'(t) = s''(t)$

Invers funksjon

funksjon krever at eintydig $x \rightarrow y$

invers f. krever at eintydig $y \rightarrow x$



→ Funksjonen må vere strengt voksende eller strengt minkande

arcsin(x) er definert for $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$[D_{f^{-1}} = V_f$, $V_{f^{-1}} = D_f]$

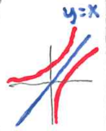
- $f^{-1}(f(x)) = x$
- $f(f^{-1}(y)) = y$

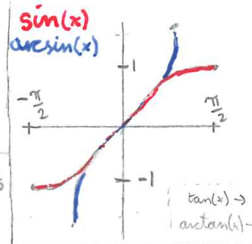
eks.: $f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$

$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x$





sin(x): $V_f = (-1, 1)$, $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

arcsin(x): $V_f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $D_f: (-1, 1)$

tan(x) → $V_f: (-\infty, \infty)$ $D_f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

arctan(x) → $V_f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $D_f: (-\infty, \infty)$

Deriverer inverse funksjonar

$y = \arctan(x)$ | tan begge sider

$\tan(y) = x$ | deriverer kjerneregel

$(1 + \tan^2 y)y' = 1$ | algebra

$y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}$ | (2) sein $\tan(y) = x$, $\tan(y)\tan(y) = x^2$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \arcsin(x)$

$\sin(y) = x$

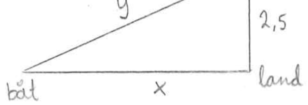
$\cos(y) \cdot y' = 1$

$y' = \frac{1}{\cos(y)}$ [trig ident]

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Koblede hastigheter



· Vinen beveger seg med 0,30 m/s dvs. $\frac{dy}{dt} = -0{,}30$

· Ønsker å finne $\frac{dx}{dt}$ når x = 6 (mao. farten mot land når båten er 6m frå land.)

PYTHAGORAS $y^2 = (2{,}5)^2 + x^2$

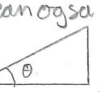
DERIVERER mhp tid

$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow$ GENERELL LØYS. $\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dt}}$ Verdi på fortida

$x = 6 \Rightarrow y = \sqrt{6^2 + (2{,}5)^2} = 6{,}5$

$\frac{dx}{dt} = \frac{6{,}5}{6} \cdot (-0{,}30) = (-0{,}325)$

Vi kan også finne **vinkelen**, generelt



$\sin(\theta) = \frac{\text{mots. kat}}{\text{hyp}} = \frac{2{,}5}{y}$

· bruk generell samanheng

· implisitt derivasjon mhp. tid

$\cos(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = 2{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dt}$

· sett inn for aktuell situasjon

→ finner av figuren at $\cos(\theta) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{x}{y} = \frac{6}{6{,}5}$

→ setter inn og finner $\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}192 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 1{,}1°/s$

Sin = ratio $\left(\frac{\text{mot}}{\text{hyp}}\right)$

arcsin = vinkel

Omegne invers

· forenkle $\cos(\tan^{-1}(x))$

$\cos(\arctan(x)) = \cos(y)$

$y = \arctan(x) \rightarrow \tan(y) = \frac{x}{1}$

$\tan = \frac{\text{mot}}{\text{hos}}$

$\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

· dermed er også $\sin(y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $y = \arctan(x)$

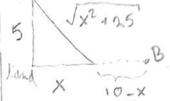
y proporsjonal med x → $y = k \cdot x$

y omvendt prop. x → $y = k \cdot \frac{1}{x}$

y prop. x omv. prop. z → $y = k\,x\,\frac{1}{z}$

Optimalisering

eks. strømkabel til øy.

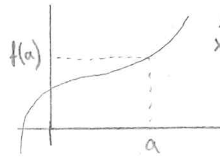


- Koster 5000/m i vann
- Koster 3000/m på land

$K(x): 5000 \cdot \sqrt{x^2+25} + 3000 \cdot (10-x)$

Billigaste kabel frå B til øy.

- deriverer og finner $K'(x) = 0$ (pass på om det er topp/bunn)
- kostnad blir $K(x)$, her $x = 3{,}75$



$\lim_{x\to a^+} f(x)$ beveger seg mot a frå positiv side (høgre)

f(x) er kontinuerlig i x = a

⇕

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

L'Hopital

prøver først:

1 $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x} = 2$

2 $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = \frac{0}{0}$

3 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

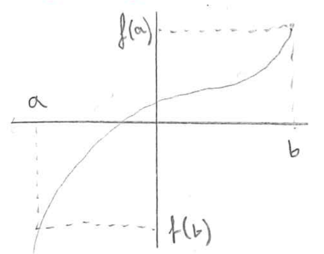
4 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}$

I 2 og 3 kan vi finne grense ved å forkorte x.

I 4 kan vi dele alle ledd med høgaste ordens x

4: $\lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

Skjæringssetningen



f er kontinuerleg på [a, b] og k ligger mellom f(a) og f(b) då finnast $c \in \langle a, b\rangle$ slik at $f(c) = k$.

Alle verdiane eksisterer, mao.

Halveringsmetoden

· vil finne nullpunkt på intervallet [a, b]

→ halverer $c = \frac{a+b}{2}$

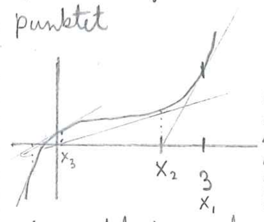
→ om f(c) er pos,

Newtons metode

· vil finne nullpunkt

→ velger x = k

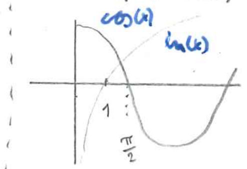
finner tangenten i punktet



stigningstal til tangent $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Eks.: $\cos(x) = \ln(x)$

setter $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$



setter x = 1,3

$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + \sin(x)$

Metode: (iterasjon) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = 1{,}3$

$x_2 = 1{,}3 - \frac{\ln(1{,}3) - \cos(1{,}3)}{\frac{1}{1{,}3} + \sin(1{,}3)} = 1{,}3029632$

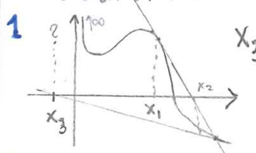
$x_3 = x_2 - \frac{\ln(x_2) - \cos(x_2)}{\frac{1}{x_2} + \sin(x_2)} = 1{,}3029640$

$x_4 = x_3 - \frac{\ln(x_3) - \cos(x_3)}{\frac{1}{x_3} + \sin(x_3)} = 1{,}3029640$

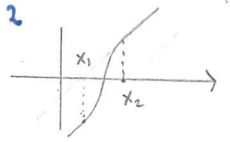
Ser at $x_3 = x_4$ for 7 desimaler, då kan vi seie at vits er x_3 for opp til 7 - 2 = 5 desimaler.

Svakheter med Newtons metode

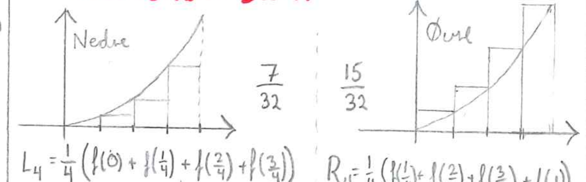
1 x_2 er udef



2 evig loop



Riemann-sum



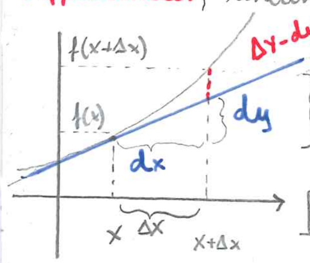
Nedre $\frac{7}{32}$ Øvre $\frac{15}{32}$

$L_4 = \frac{1}{4}\left(f(0) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{2}{4}) + f(\tfrac{3}{4})\right)$

$R_4 = \frac{1}{4}\left(f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{2}{4}) + f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right)$

vi får at $R_n = L_n + \frac{1}{n}$ for denne parabelen

Differensialer, linearisering



For funksjonsverdien gjelder:

Virkeleg aukning: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Tilnærma aukning: $dy = f'(x)dx$

$\boxed{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to dy = f'(x)dx}$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$

generelt: $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)dx$

Eks.: kva auker sin(x) med når x auker frå $\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3} + 0{,}006$

$\rightarrow y = \sin(x) \quad a = \frac{\pi}{3} \quad \Delta x = 0{,}006 = dx$

→ finner dy $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx = \cos(x)dx$

$dy = \cos(\frac{\pi}{3})\,0{,}006 = 0{,}003$ OBS. vi ser ofte etter dy

$\rightarrow \sin(\frac{\pi}{3} + 0{,}006) \approx \sin(\frac{\pi}{3}) + 0{,}003 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0{,}003$

$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)dx$

Feil: $f(x) = \underbrace{L(x)}_{\text{linearisering}} + \underbrace{E(x)}_{\text{feil}} \rightarrow E(x) = f(x) - L(x)$

Relativ feil $\frac{|\text{feil}|}{|\text{korrekt verdi}|} = \ldots \Rightarrow$ prosentverdi $\cdot 100\%$

altså $\frac{\text{berekna verdi} - \text{verkeleg verdi}}{\text{verkeleg verdi}}$

Feilestimat for s mellom a og x: $E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$

⊗ Simpsons metode

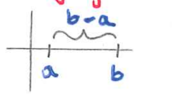
$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

- n må vere partal

[1 4 2 4 2 4 .... 2 4 2 4 1]

Numerisk integrasjon

eks. $\int_a^b f(x)\,dx$



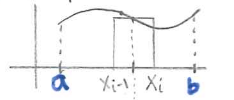
· deler [a, b] i n delar

$\rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n}$

· kaller endepunktene for intervallene $x_0 \ldots x_n$

$x_0 = a \ldots x_n = b$

⊗ midtpunktmetoden

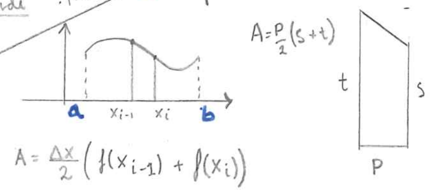


$I = f(\bar{x}_1) \cdot \Delta x + f(\bar{x}_2)\Delta x \ldots$

$I = \Delta x\left(f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \ldots + f(\bar{x}_n)\right)$

⊗ trapesmetoden

$A = \frac{p}{2}(s+t)$



$A = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$

$I = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) \ldots$

$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

Negativt bestemt integral — kan blandast

$A = \int_a^b -f(x)\,dx \qquad A = A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx$

integrasjonsgrenser: nedre a, øvre b; $\int_a^b f(x)\,dx$ med hensyn på; integrand

Definisjon av bestemt integral

$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\Delta x\right)$ dersom grenseverdien eksisterer

der x_i^* er eit vilkårleg punkt i intervall nr i

og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

→ Då seier vi at f er integrerbar på [a, b]

Analysens fundamentalteorem

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

merk: $F'(\text{konstant}) = 0$

Fundamentalsetningen for kalkulus

om f kont på [a, b] — kun om a konst og øvre = x

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$

(fordi dette (g(x)) er funk når $\int^x$ er grense, $g(x) = A(x)$)

Eks.: $g(x) = \int_2^x 2t\,dt = \left[\frac{2t^2}{2}\right]_2^x = x^2 - 4$

$g'(x) = 2x = f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)\,dt = f(x)$

Eks $g(x) = \int_0^{x^2} \sin(2t)\,dt = \int_0^u \sin(2t)\,dt \rightarrow g'(x) = \frac{d}{du}\left(\int_0^u \sin(2t)\,dt\right)\frac{du}{dx} = f(u) \cdot \frac{du}{dx} = \sin(2u)2x = \sin(2x^2) \cdot 2x$ (kjerne)

L'H seier: om vi har "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$" er

$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

NB. deriverer f og g kvar for seg

eks.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{LH}{=} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

eks2.: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

Kan bruke fleire gonger

forma $0 \cdot \infty$

$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)]$

$\rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \frac{\to 0}{\to 0}$

eller

$\rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \frac{\to \infty}{\to \infty}$

Skriv på form som er lett å derivere.

forma $\infty - \infty$

→ skriv over til fellesnemnar.

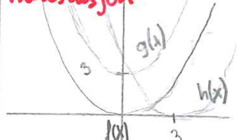
$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right) \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty$

eller

$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Translasjon



$f(x) = x^2$

$g(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

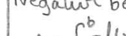
$h(x) = f(x-3) = (x-3)^2$

Eks: sirkel med sentrum i origo

$x^2 + y^2 = r^2$

sentrum i (2, 2)

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = r^2$



Substitusjon

→ setter kjerne u

Eks.: $\int e^{3x}dx \to \int e^u dx$

$u = 3x \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad dx = \frac{du}{3}$

får $\int e^u \frac{du}{3} \to \frac{e^u}{3} + C$

OBS, for eksp. u må vere lineær, altså $u' =$ konst

Eks.: $\int 5x^2 \cdot e^{2x^3} dx \quad dx = \frac{du}{6x^2}$

Ein orden høgare → vil bryssast ut når vi deler på kjerna derivert, dette må stemme for at subs. skal gå.

$\to \int 5x^2 e^u \frac{du}{6x^2} \to \frac{5}{6} e^{2x^3} + C$

Eks.: $\int \frac{5x}{x^2-3} dx \to \int \frac{5x}{2x} \frac{du}{u}$

Eks.: $\int \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$ velger $u = 1+2x^2$ eller $u = \sqrt{1+2x^2}$

Eks.: $\int \sqrt{u} \, \frac{x^2 du}{2}$ der $u = 1+x^2$, $(x^2)^2 \to (u-1)^2$

$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u^2 - 2u + 1) du$

$dx = \frac{du}{\text{(kjerne derivert)}}$

→ finn u slik at den deriverte kanselerer

Merk: ved substitusjon må vi bytte grensene også!

$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^3 x \, dx \to \int_0^1 \cos^3 x \, u^3 dx$

fordi

$x = 0 \to \sin(0) = 0$ OK

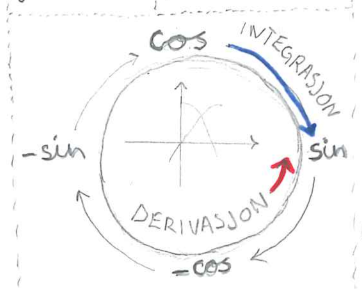
$x = \frac{\pi}{2} \to \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ bytt til 1

$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^2} = \int \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} dx$

$\int \frac{1}{x} \to \ln|x| \quad \int x^r = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$

$\int e^x \to e^x \quad \int a e^{-x} \to -a e^{-x}$



$\int 4e^{3x} \to \frac{4}{3} e^{3x}$

$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \to -\ln|\cos x|$

$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Metodar for DL

separasjon: $y' + f(x) \cdot g(y) = 0$

Integrerande faktor: $y' + p(x) \cdot y = r(x)$

Karakteristisk likn.: 1. og 2. ordens homogene DL med konstante koeffisientar. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ el. $y' + a_0 y = 0$

Ubestemte koeffisienters metode: 1. el. 2. ordens inhomogen DL med konstante koeffisientar. $y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x)$, el. $y' + a_0 y = r(x)$

basale	H.S.
$y(x)$	$y_h(x) + y_p(x)$

Integrasjonsmetodar

$\int f(x) dx$ er eit sett av funksjonar (familie) der $F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x) dx$ er eit tal (bestemt integral) om a, b er konst

OBS. vi integ. aldri u, så du kan løyse eit integ. dersom du kjenner u'

Delvis integrasjon

$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

Ofte om VS er eit vanskelig integral og HS er eit lettare integral er delvis integrasjon hensiktsm.

utgår frå produkt (uv)' = u'v + uv'

Eks.: $\int 3x e^{2x} dx$ → velger $u = 3x$, $v' = e^{2x}$, då blir $u' = 3$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ (eller $u = e^{2x}$, $v' = 3x$, → $u' = 2e^{2x}$, $v = \frac{3}{2}x^2$)

den første er enklast: $\int 3x e^{2x} dx \to 3x\frac{1}{2}e^{2x} - \int 3\frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{3}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C$

→ velg eit uttrykk som kan forenklast som u

Eks.: $\int x^2 \sin(x) dx$ → velg $x^2 = u$. Få nytt integral med $2x$, velg ny $u = 2x \to 2$

Generelt → $\int x^n e^{kx} dx$ eller $\int x^n \sin(kx) dx$ → delvis integrasjon x n

Eks.: $\int \cos(\sqrt{x}) dx$ → setter $u = \sqrt{x}$ $dx = 2\sqrt{x} du$ → får $\int \cos(u) 2u \, du$ ← delvis må.

Eks.: $\int \ln(x) dx$ → $u = \ln x$, $v' = 1$ ← OBS, $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$ → $x \ln x - \int \frac{x}{x} dx \to x \ln x - x + C$

Eks.: $\int \arctan(x) dx$ → $u = \arctan x$, $v' = 1$, $u' = \frac{1}{1+x^2}$, $v = x$ → $x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} dx$ $w = 1+x^2$, $dx = \frac{dw}{2x}$

$x \arctan x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$ ↳ $x \arctan x - \int \frac{x}{w} \frac{dw}{2x} = x \arctan x + \frac{1}{2}\ln|w|$

Eks.: $\int e^x \sin(x) dx$ → $u = \sin(x)$, $v' = e^x$, $u' = \cos(x)$, $v = e^x$ → $e^x \sin(x) - \int e^x \cos x \, dx$ → $u = \cos x$, $v' = e^x$, $u' = -\sin x$, $v = e^x$

↳ $e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx)$

$e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$ (plusser og integral)

$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \to \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$

Integrere nemnar $u/$arctan

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

så

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$

merk at $u^2 = 9x^2$, f.eks

arcsin

$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(u) + C$

$\cos x = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

Odde funksjon (−)

$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) = 0$ $\quad f(-t) = -f(t)$

sin(x)

Like funksjon (+)

$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) = 2 \cdot \int_0^{T/2} f(t)$

cos(x) $\quad x^2$

Homogene andreordens DL med konst. koeffisientar

Gitt $y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$

setter inn (metoden: vi gjetter dette) $y'' = r^2 e^{rx}$, $y' = r e^{rx}$, $y = e^{rx}$ får $(r^2 + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0$

Karakteristisk likning

Eks: $y'' - 3y' + 2y = 0$ blir $r^2 - 3r + 2 = 0$ → $(r-2)(r-1) = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

får $y_1(x) = e^{r_1 x} = e^x$, $y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{2x}$ for $y = e^{rx}$. Begge er løys.

Då vil også $y_1(x) = C_1 e^x$, $y_2(x) = C_2 e^{2x}$ for $C_1 C_2 \in \mathbb{R}$

(sidan vilkåra blir dei same for $C(y'' - 3y' + 2y) = 0$ for $C \in \mathbb{R}$)

Tilfeller (C_1 og C_2 er ∈ ℝ for alle tilf.)

1. to forskj. reelle løys. $r = r_1$, r_2 ⇒ $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
2. ein dobbelrot $r = r_1 = r_2$ (ei rot med multiplisitet 2) $(x - r)^2$ ⇒ $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 \cdot x \cdot e^{rx}$
3. to komplekse løysn. $r_{1,2} = a \pm ib$ ⇒ $y(x) = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$

Ved HS≠0 er DL inhomogen. Då må vi løyse homogen DL først og så gjette ut frå denne. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Eks: $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$

basale	HS
$r_1 = r_2 = 1$	$r_3 = r_4 = r_5 = 1$
$C_1 e^x + C_2 x e^x$	$+ Ax^2 e^x + Bx^3 e^x + Cx^4 e^x$

$x^2 e^x + 0 \cdot x e^x + 0 \cdot e^x$ → må derivere og sette inn i og. likn. på V.S.

frå før: $y' + ky = 0$, $y' = -ky$, $y(x) = Ce^{-kx}$. vi kunne prøvd $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$

$y' + ky = 0$

$r \cdot e^{rx} + k \cdot e^{rx} = 0$

$(r + k) \cdot e^{rx} = 0$ → må bli null

$r + k = 0$

$r = -k$

denne metoden kan også brukast for $r^2 + k = 0$

Dd hender vi gonger med x i den partikulære løys. for å gjere likn. lineært uavhengig.

Likningssett. ...

Første ordens lineære D.L.

på forma $y' + p(x) \cdot y = r(x)$

$r(x)$ kan vere eks. x, $\sin(x)$, e^x, 0, 3, x^5

kan ikkje vere xy, xz, z

→ sørg for at det står 1 foran y'

Homogen: $r(x) \equiv 0$ (er separabel)

Inhomogen: $r(x) \not\equiv 0$ (som regel ikkje separabel)

Bruk integrerande faktor (utgår frå produktregelen for derivasjon)

$[I(x) \cdot y]' = I(x) \cdot y' + I'(x) \cdot y$

må finne $I'(x) = I(x) \cdot p(x)$ slik at $I(x) \cdot p(x)$

vi får

$[I(x) \cdot y]' = I(x) \cdot r(x) \to I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot r(x)$

og til slutt

$y = \frac{1}{I(x)} \cdot \int I(x) \cdot r(x)$

Vi finner $I(x)$ ved å løyse DL $I'(x) = I(x) p(x)$ generell $y = Ce^{\int p(x) dx}$

Metode for integrerande faktor

→ har $[y' + p(x) \cdot y = r(x)]$

↳ mult. med int faktor $e^{\int p(x) dx}$

$I(x) = e^{\int p(x) dx}$

dvs om $p(x) = 2x$

$I(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$(e^{x^2})' = e^{x^2} 2x$

3. omskr. $[I(x) \cdot y]' = I(x) \cdot r(x)$ OBS pga prod. regel

3. integrer begge sider $I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot r(x)$

4. løyse mhp. y → $y = \frac{1}{I(x)} \cdot \int I(x) r(x) dx$

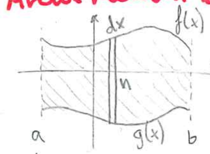
Eks $y' - 2xy = -6x$ ① $p(x)$ $r(x)$ $I(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$

② $e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = -6x e^{-x^2}$

③ $[e^{-x^2} \cdot y]' = ...$ $e^{-x^2} y = \int -6x e^{-x^2} dx$

④ $y = 3 + Ce^{x^2}$

Areal mellom kurver



$dA = h \, dx$

$h = f(x) - g(x)$

$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Like funksjon

f er kont $[-a, a]$:

f er like om $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in [-a, a]$

$\int_{-a}^{a} f(x) dx$ ⇕ $2\int_0^a f(x) dx$

symmetrisk om x-aksen

Odde funksjon

om f er kont på $[-a, a]$

f er odde om $f(-x) = -f(x)$

$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$

symmetrisk om origo

Like · Like = Like

Odde · Like = Odde

Odde · Odde = Like

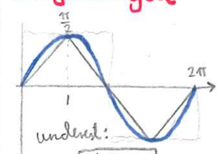
Eks.:

$\int_{-27}^{27} (-\frac{1}{3}x^5 + x \cdot \cos(5x) - x^2 \cdot \sin(x)) dx$

odde, odde, like, like, odde → odde, odde

blir 0

Bogelengde



undervd.: $4 \cdot \sqrt{(\frac{\pi}{2})^2 + 1^2} \approx 7{,}45$

overest.: $4(1 + \frac{\pi}{2}) \approx 10{,}28$

for $dx \to 0$, tilnærma rettvinkla trekant

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$L = s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Kan gjere $y \leftrightarrow x$ om uttrykket er vanskeleg, eks. $y = x^{\frac{3}{2}} \to x = y^{\frac{2}{3}}$. Bogelengden er den same.

$y = C + a \cdot \cosh(\frac{x}{a})$

for $C = 0$, $a = 1$, $b = 2$:

$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx$

$L = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (e^x + e^{-x}) dx \to e^2 - e^{-2}$ ...

Tyngdepunkt

sidan statisk moment: $m_i x_i$ osv.

$M_y = x_1 A_1 + x_2 A_2$, $\bar{x} = \frac{M_y}{A}$ og likeins $\bar{y}$

her har vi rektangler (...)

Eks.: Finn tyngdepunkt $f(x) = x$, $dM_y = x \, dA \to x(x \, dx)$

$M_y = \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}$, $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{8}{3}$

$M_x = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 dx = \frac{32}{3}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{4}{3}$

massesenter: $(\bar{x}, \bar{y})$

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$; $dM_y = x \, dA - x \, dA$

$x(f(x) dx) - x(g(x) dx)$

$\Rightarrow (x^{\frac{3}{2}} - x^4) dx$ $M_y = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^4) dx$

som blir $\frac{64}{15}$

Tilsvarande for $dM_x = x \, dA - x \, dA$

$\int \frac{1}{2} f(x)... $

$M_x = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^3)^2 - (x^2)^2 dx = \frac{256}{21}$

finn $A = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = 4$

$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{16}{15}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{64}{21}$

Tyngdepunktet: $(1{,}06, 3{,}04)$

Pappus' teorem

Om F er ei flate som i sin heilhet ligger på ei side av ein akse, og A er arealet av F

→ Volumet om F roterast 360° rundt l er

$V = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot A = 2\pi M_l$ (moment)

der $\bar{r}$ er avstand frå aksen til tyngdepunktet i F

Eks.: $V = 2\pi(2 - \bar{x}) \cdot 4$, $\bar{x} = \frac{14}{15}$, $V = \frac{112\pi}{15} \approx 23{,}46$

Eks.: Vortorus $\bar{r} = 5$, $r = 3$

$V = 2\pi 5 \cdot \pi \cdot 3^2$

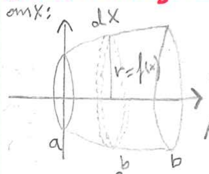
$V = 90\pi^2$

Volum $dV = A(x) dx$

$V = \int_a^b A(x) dx$

Omdreiingslegeme

om x:



$dx \to 0$

$A(x) \to \pi r^2$

$A(x) = \pi(f(x))^2$

$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

→ avgrensa av grafar:

$V = V_1 - V_2$

$V = \pi \int_a^b (f(x)^2) - (g(x)^2) dx$

→ forskyven akse (∥x)

$f(x) - b$, $g(x) - b$

hugs: $V = V_{størst} - V_{minst}$

Sylinderskalmetoden

$dV = 2\pi r h \, dx$

$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$

Eks.: kule → $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

sylinderskal: $4\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx$

omdreiing: $2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$

Arbeid

$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$

$F[N = kg \, m/s^2]$

om akselerasjon → konst er $W = F \cdot d$ = kraft·avst.

Eks 25kg 1,5m opp:

$F = mg = 25kg \cdot 9{,}8 \, m/s^2 = 245N$

$W = Fd = 245N \cdot 1{,}5m = $

Men om krafta varierer...

$W = \int_a^b dW$

Uegentlige integral

Eks: Gabrielshorn

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad A = \int_1^\infty f(x) dx$

$= \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} [\ln(x)]_1^t$

$= \lim_{t \to \infty} (\ln t - \ln 1) = \infty$

$S = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \infty$

men...

$V = \pi \int_1^\infty (f(x))^2 dx = \pi \lim_{t \to \infty} [\frac{x^{-1}}{-1}]_1^t$

$V = \pi$ $\quad A = \infty$ $\quad S = \infty$??

Integral som blir ∞ divergerer, altså dei eksisterer ikkje

$V = \pi$ konvergerer mot ei grense, då er det eit gyldig integral

Eks. 2: vi veit $\frac{1}{x^2} \geq 0$ for alle x der $\frac{1}{x^2}$ er definert.

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ Integralet bør bli ... $\to [\frac{x^{-1}}{-1}]_{-1}^{1} = -2$

Blir feil sidan $f(x)$ udef for $x = 0$

Må dele opp:

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int ... + \lim_{s \to 0^+} \int ...$

setter inn for s og t, finner at begge integral divergerer

$\lim_{x \to \infty} ((x + K) - x) = K$

divergent + konvergent = diver.

Bruker grenseverdiar som sagt, fordi då kan vi sekre alge-braisk.

Eks 3: $\int_0^\infty \sin(x) dx$ divergerer, sidan ...

Eks 4: $\int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} [e^x]_t^1 = e$

Metodar så langt (MA)

y ulineær → separasjon (y^2, $\sin(y)$, e^y, $\sqrt{y}$ osv)

y' første-orden → få y'; y'' andre-orden el. y'' alene

Homog. / inhomog.: kar. likn. / ubest. koeff

Homog. / inhomog. ein

$f(x)$ konst / $f(x)$ ukonst → kar. likn. / separasj.

$f(x)$ konst / $f(x)$ ukonst → separasjon / int. faktor

Differensiallikninger

Inneholder differensialer, dvs y', y, x → førsteorden; y'', y', y, x → andre orden

→ finner ein samanheng mellom ein funksjon og dens deriverte

Eks: (løyse) velger $y = x^2$, $y' = 2x$ (har også $x = 1$, $y = 1$, $y(1) = 1$) har då $xy' = x2x \Rightarrow 2x^2 = 2y \Rightarrow x \cdot y' = 2y$

Å løyse DL er ofte det motsatte, å finne $y(x)$

→ kan lage DL: $y \cdot y'' = y' \cdot x \Rightarrow x^2 \cdot 2 = 2x \cdot x \Rightarrow 2x^2 = 2x^2$ (stemmer)

eller $xy' = 2y \to xy' - 2y = 0$

Dette er DL for alle funksjoner $y(x) = C \cdot x^2$, $C \in \mathbb{R}$

Om vi er ute etter spesifikke funksjon må vi ha initialbetingelse, eks.: $y(1) = 1$

Eks.: vil lage DL som har $f(x) = e^{3x}$ som løysning

$y = e^{3x}$, $y' = 3e^{3x}$. Kan lage $y' - 3y = 0$

Separabel difflikning

kan omskrivast til $y' = f(x) \cdot g(y)$

Eks: $xy' = 2y$, $y(1) = 1$ → bestem $y(x)$

→ bestem alle funk som oppfyller difflikninga

$x\frac{dy}{dx} = 2y$ Separerer $y \to xdy = 2ydx \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} dx$

→ integrerer $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx \to \ln|y| = 2\ln|x| + C$

→ fjerner ln $e^{\ln|y|} = e^{2\ln|x| + C} \to |y| = e^{2\ln|x|} e^C$

$|y| = e^{\ln|x^2|} \cdot e^C \to |y| = |x^2| e^C \to y = \pm e^C x^2$ konstant, så C

→ derfor $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ [generell]

→ for $y(1) = 1$: $y(1) = C \cdot 1^2 \to C = 1 \to y = x^2$ [spesiell]

Uoppstilte DL.

om proporsjonal: $y = kx$; d. omvendt propor.: $y = k\frac{1}{x}$

les teksten, og...

→ finn størrelsen vi er ute etter, dvs $y(t)$, og kva for t

→ sett opp DL ved informasjon om proporsjonalitet.

Eks.: $y'(t) = k \cdot y$

→ løyser generelt → $\int \frac{1}{y} dy = \int k \, dt \to \ln|y| = kt + C$

$e^{\ln|y|} = |y| = e^{kt + C} = e^C e^{kt} \to y = \pm e^C e^{kt} = Ce^{kt}$

→ bruker opplysninger for å finne spesifikk løys

$y(0) = Ce^0 = C$ og $C = 50000$

for $y(10)$: $60000 = 50000 e^{kt}$, $y(t) = 50000 e^{kt}$

$e^{kt} = 1{,}2$ $\quad y(10) = 60000$ (oppgitt)

$kt = \ln(1{,}2)$

for $t = 10 \to k = \frac{\ln(1{,}2)}{10} \to y(t) = 50000 e^{\frac{\ln(1{,}2)}{10} \cdot t}$

$y(t) = 50000 \cdot 1{,}2^{\frac{t}{10}}$

→ med spesifikk løys kan vi gjere prediksjoner

$y(20) = 50000 \cdot 1{,}2^{\frac{20}{10}} = 72000$

Eks C_{14}: $\tau = 5570 = \frac{\ln(2)}{k} \to k = \frac{\ln(2)}{5570}$ $\quad m(t) = m_0 e^{-kt}$

→ oppgitt, 83% C_{14} etter tid t.

setter opp $0{,}83 m_0 = m_0 e^{-kt} \to \ln(0{,}83) = e^{-kt}$

$t = \frac{\ln(0{,}83)}{\ln(2)} 5570 \approx 1497$

Om ingen uttrykk $y' = y$ finst, finn v/geometri el. eks $V' = -ky$, men $V = Ah$, og i dette tilf. er $y = h$

Eulers metode

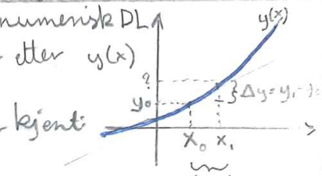
for numerisk DL

Vi har $y' = f(x, y)$, leiter etter $y(x)$

→ vi veit $y(x_0) = y_0$

→ stigning for tangent er kjent

$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$



1. $y'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

2. $y'(x_1) \approx f(x_1, y_1) = \frac{y_2 - y_1}{h} \Rightarrow y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$

generelt $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \approx y(x_{n+1})$ (konstant, $y(0) = y_0$)

Får ut punkt, ikkje funksjon

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Trivielt eksempel. $y' = y$ $\quad y(0) = 1$ $\quad h = 0{,}1$

vil tilnærme oss $y(1)$

$y_{n+1} = y_n + h y_n$

$y_0 = 1$ (oppgitt)

$y_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 1 = 1{,}1 = 1{,}1^1$

$y_2 = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot 1{,}1 = \ ... = 1{,}1^2$

$y_3 = 1{,}2 + 0{,}1 \cdot 1{,}2 = \ ... = 1{,}1^3$

$y_{10} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}59$

eksakt $\int \frac{1}{y} dy = \int dx$

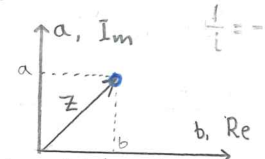
$\ln|y| = x + C$

setter $y(0) = 1$: $C = 1$, $y(1) = e$

IMAT 2011 2022 Vår m/ Kåre Bjørvik

$i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$

$z = a + i \cdot b$ $\frac{1}{i} = -i$



Komplekst plan (Argand-diagram)

Kompleks konjugert

$\bar{z} = a - ib$

Så lenge koeff. i andregradslikn. er reelle får vi komplekskonjugerte par som løsning

Add/sub

Eks.: $z_1 = 2 + i3$, $z_2 = 1 - i2$

$z_1 + z_2 = (2+1) + i(3-2) = 3 + i$

$z_1 - z_2 = (2-1) + i(3-(-2)) = 1 + i5$

Multiplikasjon

$5z_1 = 5 \cdot 2 + i5 \cdot 3$ (skalar)

$z_1 \cdot z_2 = (2+i3)\cdot(1-i2)$

$= 2 + 2(-i2) + i3 \cdot 1 + i3(-i2)$

$= 2 - 4i + 3i - 6i^2$

merk $i^2 = -1$

$= 8 - 6i$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)$

3.kv. setn. $= a^2 + b^2$ reell

Divisjon

(kompleks konjugert av nevner)

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i3}{1-i2} \cdot \frac{1+i2}{1+i2}$

$= \frac{(2+i3)(1+i2)}{1^2 - (i2)^2}$ ← reell

$= \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

$z = x + yi$ (standardform/kartesisk form)

modulen til z

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (lengde)

argumentet til z

$\angle z = \varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ OBS KVADRANT

$\boxed{z = r\angle\varphi}$ (polar form)

$\boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$ (eksponentiell form)

(kan bevisast vha. rekker)

$x = r\cos\varphi$ $z = r\cos\varphi + i r\sin\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$re^{i\varphi} = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi$

$e^{i\pi} = -1$ $1 + e^{i\pi} = 1 + (\cos\pi + i\sin\pi)$

Polynom frå røtter

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$p(x)$ har røtter $\alpha \pm \beta i$

$p(x) = (x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$

Sirkeldelingslikn. (DeMoivre)

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

$\Rightarrow \boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Eks.: $z^3 = -1 \rightarrow z^3 = 1e^{i(\pi + 2\pi n)}$

$z = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n\right)}$

Eulers trigonometriske formlar

sidan: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$

$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2\sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$

Delbrøkoppspalting

$Y(s) = \frac{12s + 12}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} \Rightarrow \frac{A(s+4) + Bs}{s(s+4)}$

$\Rightarrow A(s+4) + Bs = 12s + 12 \Rightarrow (A+B)s + 4A = 12s + 12$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 12 \\ 4A = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 9 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{9}{s+4}$

$\frac{2s+3}{(s+1)^2 + 4^2} = \frac{2(s+1) + 1}{(s+1)^2 + 4^2} \Rightarrow 2\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4^2} + \frac{1}{4}\frac{4}{(s+1)^2 + 4^2}$

Triks (kun ved lineære faktorar)

$\frac{7s - 4}{(s+1)(s+2)}$ $A = \left[\frac{7s-4}{s+2}\right]_{s=-1} = -11$ $B = \left[\frac{7s-4}{s+1}\right]_{s=-2} = 18$

Repeterande lineære faktorar

Eks.:

$F(s) = \frac{2s^2 - 1}{(s+1)^2 \cdot s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}$

$+C = 2s^2 - 1$

$\Rightarrow A(s+1)s + Bs + C(s+1)^2 = 2s^2 - 1 \Rightarrow (A+C)s^2 + (A + B + 2C)s$

$\begin{matrix} A + C = 2 \\ A + B + 2C = 0 \\ C = -1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} A = 3 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{matrix}$ $F(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s}$

$f(t) = 3e^{-t} - te^{-t} - 1$

Kvadratiske faktorar

$F(s) = \frac{10}{(s^2+9)(s+2)} \Rightarrow \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{C}{s+2}$

$(As + B)(s+2) + C(s^2+9) = 10 \Rightarrow (A+C)s^2 + (2A+B)s + (2B + 9C) = 10$

$\begin{matrix} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B + 9C = 10 \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} A = -\frac{10}{13} \\ B = \frac{20}{13} \\ C = \frac{10}{13} \end{matrix}$ $F(s) = \frac{-\frac{10}{13}s + \frac{20}{13}}{s^2 + 3^2} + \frac{\frac{10}{13}}{s+2}$

del opp i cos og sinus

$F(s) = -\frac{10}{13}\frac{s}{s^2 + 3^2} + \frac{20}{39}\frac{3^2}{s^2+3^2} + \frac{10}{13}\frac{1}{s+2}$

$f(t) = -\frac{10}{13}\cos 3t + \frac{20}{29}\sin 3t + \frac{10}{13}e^{-2t}$

Uekte brøk

(grad i teljar ≥ grad i nemnar) Eks.:

$F(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 13}$ · gjer polynomdiv. $2s^2 : (s^2 + 4s + 13) = 2 - \frac{8s + 26}{s^2 + 4s + 13}$

· finner fullstendig kvadrat $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 3^2$

$F(s) = 2 - \frac{8(s+2) + 10}{(s+2)^2 + 3^2} \Rightarrow 2 - 8\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} - \frac{10}{3}\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$

$f(t) = 2\delta(t) - 8e^{-2t}\cos 3t - \frac{10}{3}e^{-2t}\sin 3t$

Aritmetisk rekke

→ differansen mellom ledd er lik

$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots (a + (n-1)d)$

$S_n = \frac{først + sist}{2} = \frac{a + (a + (n-1)d)}{2}, \frac{2a + (n-1)d}{2}n$

Geometrisk rekke

$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{(n-1)}$

$S_n = \frac{k^{n-1}}{k-1}a$ om $n \to \infty$ er $S_n = \frac{a}{1-k}$

konvergerer for $|k| < 1$

Pascals trekant

Merk, summen av eksponentane i kvart ledd er lik.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ← her 3

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Binomialkoeffisient

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ eks $\binom{4}{2}$ → ABCD, → velg 2 $= 6$

AB AC AD BC BD CD

Spesielt $0! \stackrel{def}{=} 1$ $\binom{N}{0} \stackrel{def}{=} 1$

kalkulator: nCr

Binomialformel

$[n \in \mathbb{N}]$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Eks.: $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}$

meir generelt, for $r \in \mathbb{Q}$

$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \ldots$ uendeleg rekke som konverg. for $|x| < 1$

vi kan eksempelvis rekkeutvikle

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}x^3 + \ldots$

og vi kan gå vidare til å rekkeutvikle

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2}(-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}(-x^2)^3 + \ldots$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{6}x^6 + \ldots$

og sidan vi kjenner $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kan vi integrere

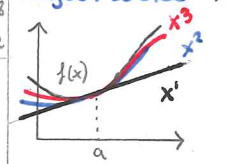
$\arcsin(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{6}x^6 + \ldots\right)dx$

$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots$, $|x| < 1$

Taylorrekke

→ ein vilkårleg funksjon $f(x)$ kan utvidast til uendeleg potensrekke

→ vi må velge oss arbeidspunkt a



$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3$

$f(a) = C_0 \Rightarrow C_0 = f(a)$

$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots$

↳ $f'(a) = C_1 \Rightarrow C_1 = f'(a)$

$f''(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + \ldots$

↳ $f''(a) = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2!}f''(a)$

$f'''(x) = 3 \cdot 2C_3 + \ldots$

↳ $f'''(a) = 3 \cdot 2C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{3!}f'''(a)$

MacLaurin

→ vi bruker ofte spesialtilfellet når $a = 0$ sidan det forenkler mykje.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2$

Funksjon	Derivater	Rekkeutvikling
e^x	$e^x \to e^x \to e^x \to e^x$	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \ldots$
$\cos(x)$	$-\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \ldots$
$\sin(x)$	$\cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \ldots$

Med dette kan vi utlede Eulers formel, setter $x = i\varphi$

$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \ldots$ $[i^2 = -1]$

$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - i\frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \ldots$ [på form $a + bi$]

$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \ldots\right)}_{\sin\varphi}$

Differensiallikningssystemer

· dynamiske systemer kan seg modellere med ODE

· dette er fordi endring = f(tilstand) ← innput

$\dot{x} = f(x)$ $\dot{x} = f(x, u)$

definerer stabilitet (lineære systemer) definerer endring

Tilstandsromsmodellering

oversetter DL av høgare orden til eit sett av førsteordens ODE

→ for kontinuerleg, lineær, tidsinvariant form har vi:

endring i tilstandsvektor Systemmatrise Pådragsmatrise

$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ ← dynamikk

tilstandsvektorar pådragsvektorar

$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$ ← måling

"output" eller målinger målematrise (kombinasjon) direkteoverføringsmatrise

Trivielt: $u(t)$ —▷ gain, $y(t)$ $y(t) = gain \cdot u(t) \to A = B = C = 0$

Tilstandsvariablane/tilstandsvektorane er det minste settet av variablar som fullt ut beskriver systemet → nok informasjon til å gjere prediksjon

→ n tilstandsvariablar ⇔ n energilagrande komponent

Eks.:

$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + 2u_1$

$\dot{x}_2 = 17x_1 - 4x_2 + u_1 - u_2$

$y_1 = 2x_1$

$y_2 = x_1 - x_2 + u_2$

$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1 \\ 17 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \\ u_2\end{bmatrix}$

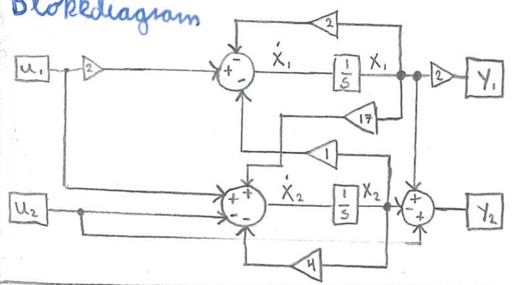
$\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \\ u_2\end{bmatrix}$

Eigenverdi av system → $(-2-\lambda)(-4-\lambda) - (-17) \to \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$

$\lambda = -3 \pm 4i \rightarrow Re\{\lambda\} < 0 \Longrightarrow$ stabilt system.

Får vi vite at systemet er stasjonært er $\dot{x} = 0$, då kan vi rekne ut x_1 og x_2 med verdiar av u_1 og u_2 og omvendt.

Blokkdiagram



$\tau_{1,2} = \left|\frac{1}{Re\{\lambda\}}\right|$

For simulering brukes vi ca.:

Step: $h = \frac{\tau_{min}}{100}$

simuleringstid: $t_{maks} = 5(\tau_1 + \tau_2)$

Fourier-rekker

→ teknikk for å rekkeutvikle periodiske funksjonar til rekker av sin- og cos-funk

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$

der $\frac{a_0}{2}$ er gj.snitt (likevekt) og a_n og b_n Fourierkoeff.

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$

Eks. firkantpulstog: vi ser at likevekt er 0 og symmetri → $a_0 = 0$

Odde funk → $a_n = 0$

Integranden til b_n er lik $[f(t) \cdot \sin(t)]$ så vi forenkler

$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = -\frac{2A}{\pi n}(\cos(\pi n) - 1)$

$= \begin{cases} \frac{4A}{\pi n}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$ $\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{4A}{\pi}\frac{1}{n}\sin(\ldots)$

→ sjå etter forenklinger på grunnlag av symmetri

→ berenge koeffisientar, om du vil → sett T til noko greit

→ typisk deler integrasjon

Eks. på likn. utan analytisk løys.

→ bruk grafisk eller numeriske

$A = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$

Visualisering av lineær algebra

matrisa $\hat{x}\ \hat{y}$ er det implisitt at vi ganger med basisvektorane $\hat{\imath}$ og $\hat{\jmath}$

$A = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$ $(\hat{x}, \hat{y})$ dette er ein **transformasjon**

$A = 1$ $A = 1 \cdot \det(A) = 2$

Lineært → linjer forblir linjer → origo kan ikkje flyttast

Lineært (u) avhengig for $B = \begin{bmatrix}4 & -2 \\ 2 & -1\end{bmatrix}$ er $\begin{bmatrix}4 \\ 2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-2 \\ -1\end{bmatrix}$ lin. avh. fordi $= k_1$

→ avh.: du mister ein dimensjon, to av den same likninga. planet blir 1D

Determinant: bestemmer (for 2×2) kor mykje areal skalerer. Eks. $\det(A) = 2$. Om $\det(B) = 0 \to$ lin.av.

Eigenvektor $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

· finn λ: $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$

karakteristisk likn. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Eigenverdi · finn $\vec{v}$: $(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix}1-1 & 1 \\ 0 & 2-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ingen eintydig, men os løys $y = 0, x = x \to \vec{v}_1 = a\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$

→ 2×2 kan ha 0, 1, 2, ∞ eigenverdiar (?)

→ eigenvektorar er rotasjonsakser for trafo.

$\begin{bmatrix}1-2 & 1 \\ 0 & 2-2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}x = y \\ y = y\end{matrix} \rightarrow a\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

Eigenmatrisa til A. $P = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Diagonalisering

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix} = D$ $A = PDP^{-1}$ $A^2 = PD^2P^{-1}$ $A^k = PD^kP^{-1}$ $D^k = \begin{bmatrix}\lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix}$

Laplacetransformasjon

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}dt$

Eks.: $f(t) = 1 \rightarrow$

$F(s) = \int_0^\infty 1e^{-st}dt \to \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty$

$F(s) = -\frac{1}{s}e^{-s\cdot\infty} + \frac{1}{s}e^0 = \frac{1}{s}$

→ krever lineære/lineariserte system

→ derivasjon og integrasjon går over til multiplikasjon og divisjon.

X → [S] → Ẋ (derivator) Ẋ → [1/s] → X (integrator)

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ initialkrav

$aF(s) + bG(s)$

linearitet $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

Eks.: $y' + 4y = 12$, $y(0) = 12$ | Laplace

$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{12}{s}$ | finner $Y(s)$, sett inn $y(0)$

(dette er løys i s-planet)

$Y(s)(s+4) = \frac{12}{s} + 12 \Rightarrow Y(s) = \frac{12s + 12}{s(s+4)}$ | delbrøk

$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{9}{s+4}$ invers Laplace $\Rightarrow y(t) = 3 + 9e^{-4t}$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
A	$\frac{A}{s}$		for $(s) \geq 0$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	· finn $F(s)$ frå $f(t)$ · sett $s+a$	
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$u(t-d)$	$\frac{1}{s}e^{-ds}$
$\delta(t)$	1	$\delta(t-d)$	e^{-ds}

Heaviside, unit step function (einhetsprang)

$u(t) = \begin{cases}1, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0\end{cases}$ $u(t-d) = \begin{cases}1, & t \geq d \\ 0 & t < d\end{cases}$

Eks.:

$f(t) = 2u(t) - 1u(t-3) - 1u(t-5)$

grunnivå trekker på ved t=3

$F(s) = 2\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s}e^{-5s}$

$f(t-d)u(t-d)$ ← passer på at f-verdi er 0 før d

$\mathcal{L}\{f(t-d)u(t-d)\} = F(s)e^{-ds}$

Eks.:

$g(t) = 5t - 5(t-10)u(t-10)$

$G(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^2}e^{-10s}$ $f(t) = 5t$, $F(s) = \frac{5}{s^2}$

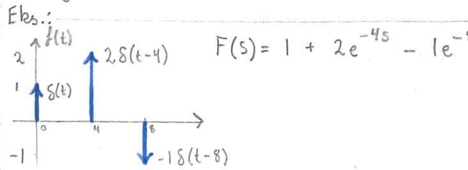
Dirac-puls

$A = 1$ $\varepsilon \Rightarrow 0$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

$\mathcal{L}\{\delta(t-d)\} = 1e^{-ds}$

Eks.:



$F(s) = 1 + 2e^{-4s} - 1e^{-8s}$

IELET1002 DATATEKNIKK: DIGITALTEKNIKK

3t i veka, 4 skriftlege øvingar (3 obl.), 2t øving/veka m/studass.

10 jan 2t semesterprøve 2 labøvingar (obl.) Digital design 6. utgåve

Del 1: Digitalteknikk

kontinuerleg — diskret

analogt — separate verdiar, digitalt system

Posisjonstalsystem, desimalt $r = 10$ (radix)(grunntal)

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{10}$

Binary digit → bit

Multiplikasjon

$0\cdot 0 = 0$
$0\cdot 1 = 0$
$1\cdot 0 = 0$
$1\cdot 1 = 1$

eks
```
   1101
 ·  101
   1101
  0000
+1101
1000001
```

194 : 2	= 97 + 0/2
97 : 2	= 48 + 1/2
48 : 2	= 24 + 0/2
24 : 2	= 12 + 0/2
12 : 2	= 6 + 0/2
6 : 2	= 3 + 0/2
3 : 2	= 1 + 1/2
1 : 2	= 0 + 1/2

$11000010_2 = 194_{10}$

Blokk-konvertering

Hex: 6 8 B 4 — 0110 1000 1011 0100

oktal → Hex

2 4 7 — 000 010 100 111 — 0 A 7 ($r=8$, $r=2$, $r=16$)

MSB most significant bit

LSB least significant bit

Fraksjonstal

$0{,}6875_{10} = 0{,}1011_2$

$0{,}6875 \cdot 2 = 1{,}375$
$0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75$
$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$
$0{,}5 \cdot 2 = 1{,}0$

Komplement

mål: effektiv og ryddig metode for substraksjon og negative tal.

r → radix
n → ordlengde (kor mange bit)
N, M → talverdi (utgangspkt)

(r − 1)-komplement

$(r^n - 1) - N$ (mao. flipp bits)

r-komplement (2-kompliment for r=2)

$r^n - N$ OBS: $= (r^n - 1) - N + 1$

TRIKS: eks N = 1011 0000
r-komp: 0101 0000
set nullar tom første 1 forblir uendra, deretter flipp (inverter)

Gyldig talområde (range) for 2-kompliment-representasjon

$\{-2^{n-1} \dots 0 \dots 2^{n-1}-1\}$

Eks:

NIBBLE	$n=4$	{-8...7}
CHAR	$n=8$	{-128...127}
INT SHORTINT	$n=16$	{-32768...32767}
INT LONG	$n=32$	{-2147483648...2147483647}

Ved operasjonar må både operandane og resultatet ligge i det gyldige talområdet, om ikkje får ein overflyt. Altså, ordlengden må vere stor nok.

Med n bit kan 2^n bitkombinasjonar definerast.

		1-komp	2-komp	
0	0000	1111	0000	0
1	0001	1110	1111	-1
2	0010	1101	1110	-2
3	0011	1100	1101	-3
4	0100	1011	1100	-4
5	0101	1010	1011	-5
6	0110	1001	1010	-6
7	0111	1000	1001	-7
8	1000	0111	1000	-8
9	1001	0110	0111	7
A 10	1010	0101	0110	6
B 11	1011	0100	0101	5
C 12	1100	0011	0100	4
D 13	1101	0010	0011	3
E 14	1110	0001	0010	2
F 15	1111	0000	0001	1

Eksempel med 2-komplement

N=6: 0000 0110
1111 1010 ← 2-komplement

M=13: 0000 1101
1111 0011

M−N:
```
  0000 1101   13
+ 1111 1010   -6
1 0000 0111    7
```

4-bit kodeord:

NBCD → 1001 0110 1000 = 9 6 8
Natural Binary Coded Decimal

Aikenkode (sjølv-komplimenterande)

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
	Ubrukte kodeord
5	1011
6	1100
7	1101
8	1110
9	1111

1110 0001 = 8 1

Gray kode — Kun ein bit endrer verdi — Spegling

0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
A	1111
B	1110
C	1010
D	1011
E	1001
F	1000

Bitfeil kan oppstå spontant

0110 1001
↓↓↓↓↓↓↓↓
0110 0001

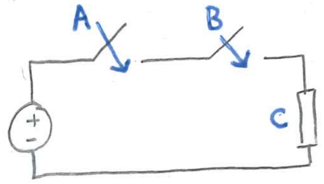
ASCII 95 skrivbare teikn A..Z a..z 0..9 ...
7 bit kodeord 33 kontrollsymbol <CR> <LF>

Odde paritetskode

1 011 — Paritetsbit, dataord — Kodeord — må ha odde antal 1 for å vere gyldig

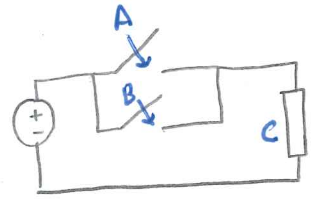
1000
0001
0010
1011
0100
1101
1110
0111

Utsegnslogikk/påstandslogikk



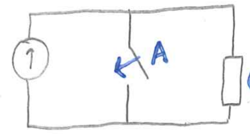
A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

· OG (AND) $C = AB$



A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

+ ELLER (OR) $C = A+B$



A	C
0	1
1	0

NEGASJON (NOT) $C = A' = \bar{A}$

Invertert funksjon

1) finn den duale
2) snu om på alle inverteringane

$f(A,B,C) = A + \bar{B}C$

$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A+\bar{B}C} = \bar{A}\cdot\overline{\bar{B}C}$
$= \bar{A}\cdot(\bar{\bar{B}}+\bar{C}) = \bar{A}\cdot(B+\bar{C})$

Boolsk algebra og logikk

boolsk variabel → påstand, kan ha verdi 0 eller 1

Dualitet → alle rekneeglane framstår i par, a og b

· bytt ut + → ·, · → +
· bytt ut 0 → 1, 1 → 0 (og invert. not!)

Postulat og teorem

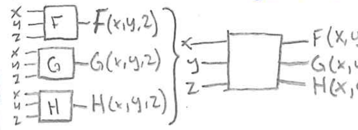
	a (OR)	b (AND)	
P2	$X+0=X$	$X\cdot 1 = X$	
P5	$X+\bar{X}=1$	$\bar{X}\cdot X = 0$	
T1	$X+X=X$	$X\cdot X = X$	
T2	$X+1=1$	$X\cdot 0 = 0$	
T3	$\bar{\bar{X}}=X$		
P4	$X\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$	$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$	
T4	$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$	Assosiativ lov
P3	$x+y = y+x$	$x\cdot y = y\cdot x$	Kommutativ lov
T6	$x+(x\cdot y)=x$	$x\cdot(x+y)=x$	Absorbsjonsregel
T5	$\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$	DeMorgans teorem

OPERATORHIERARKI
1) invertering av variabel
2) AND
3) OR
4) invertering av alt under strek

$F(x,y,z) \rightarrow$ x y z / 2 1 0 INDEKSERINGS-SEKVENS

N var → 2^N funk.-verdiar

Kombinatorisk logikk (boolske funksjonar)

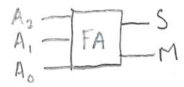


1 problemstilling må vere formulert presist og fullstendig
2 inngang og utg. var
3 namngje var og funk
4 sett opp funksjonstabell
5 finn funksjonsuttrykk for kvar av utg-kolonnene
6 evt teikne det log. skjemaet.

eks.: fulladdesar (FA)

1. Tre bit (2 operandbit og 1 mentebit) skal adderast bin.

3.



4.

A_2	A_1	A_0	M	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

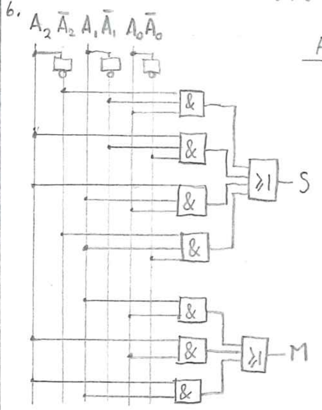
5. M:

A_2 \ A_1A_0	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

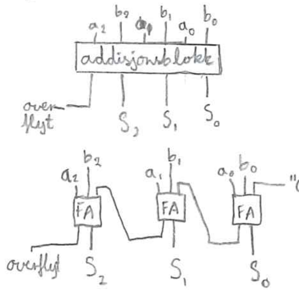
$M = A_1A_0 + A_2A_0 + A_2A_1$

$S = \bar{A}_2\bar{A}_1A_0 + A_2\bar{A}_1\bar{A}_0 + A_2A_1A_0 + \bar{A}_2A_1\bar{A}_0$

6. $A_2\ \bar{A}_2\ A_1\ \bar{A}_1\ A_0\ \bar{A}_0$



Addisjon av n-bit a + b

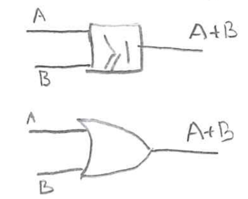


0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

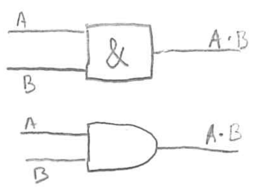
· Algebraisk framstilling (bruke rekneeglar)
· Tabellframstilling funksjonstabell
Likeverdig.

Grafisk framstilling

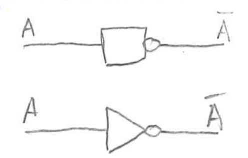
OR ISO: / ANSI: A+B



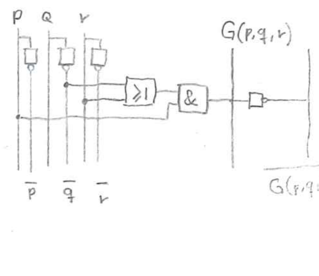
AND ISO: / ANSI: A·B



NOT ISO: / ANSI: $\bar{A}$



eks $G(p,q,r) = p(\bar{q}+r)$



Kanonisk form

x	y	z	minterm	maksterm
0	0	0	$m_0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$M_0 = x+y+z$
0	0	1	$m_1 = \bar{x}\bar{y}z$	$M_1 = x+y+\bar{z}$
0	1	0	$m_2 = \bar{x}y\bar{z}$	$M_2 = x+\bar{y}+z$
0	1	1	$m_3 = \bar{x}yz$	$M_3 = x+\bar{y}+\bar{z}$
1	0	0	$m_4 = x\bar{y}\bar{z}$	$M_4 = \bar{x}+y+z$
1	0	1	$m_5 = x\bar{y}z$	$M_5 = \bar{x}+y+\bar{z}$
1	1	0	$m_6 = xy\bar{z}$	$M_6 = \bar{x}+\bar{y}+z$
1	1	1	$m_7 = xyz$	$M_7 = \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

• Produkt av makstermar $\Pi(0,3,5)$
eks.: $F = (x+y+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{x}+y+\bar{z})$

• Sum av mintermar $\Sigma(0,3,5)$
eks.: $F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z$

Merk, desse formene er inverse/komplimentær av kvarandre. Bytt + med · og endre $\bar{x} \leftrightarrow x$

eksempelvis:

	SaSP (SUM AV STD.-PRODUKT)	PaSS (PRODUKT AV STANDARD-SUMMAR)
$F(x,y,z)$	$\Sigma(1,3,4)$	$\Pi(0,2,5,6,7)$
$\overline{F(x,y,z)}$	$\Sigma(0,2,5,6,7)$	$\Pi(1,3,4)$

Kanonisk form er ryddig, men har store uttrykk men ein algebraisk forenkla form har
○ færre bokstavar, færre operasjonar
○ færre portar → mindre effektbruk
↳ raskare, mindre feil

PaS vert å finne "0"-konstellasjonar. $\Pi(3,5,6,7 \dots)$

$F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,11,12,13,14)$
· sett opp K-diagram
· finn og marker 8-konstellasjonar
· — " — 4-kons. — " —
· — " — 2-kons — " —
· finn frittstående std. produkt

STORE KONSTEL. BRA (FÆRRE FAKT.)

32x8.com

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 (0)	1 (1)	(3)	1 (2)
01	1 (4)	1 (5)	(7)	1 (6)
11	1 (12)	1 (13)	(15)	1 (14)
10	1 (8)	1 (9)	1 (11)	(10)

$\bar{C} + \bar{A}\bar{D} + B\bar{D} + A\bar{B}D$

$F(A,B,C) = \Sigma(0,1,2,4,5,7)$ er

A \ BC	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (1)	0 (3)	1 (2)
1	1 (4)	1 (5)	1 (7)	0 (6)

Indeksverdiane tilsvarer SaSP

Karnaugh-diagram

x \ y	0	1
0	1	0
1	1	0

· fulle rader/kol. kan forenklast
$g(x,y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} = \bar{y}$

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

· frittstående std. produkt kan ikkje forenklast
$g(x,y) = xy$

$S(x,y) = \bar{y} + xy$

x \ y	0	1
0	1	0
1	1	1

· enklaste form sum av produkt (degenerert produkt)
$S(x,y) = x + \bar{y}$

$f(x,y,z)$ $y=0 \rightarrow \bar{y}$ OBS, gray

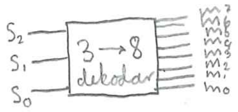
x \ yz	00	01	11	10
0				
1				

Z=1
Z=0
$x=1 \rightarrow x$

$N-2^N$-dekodar

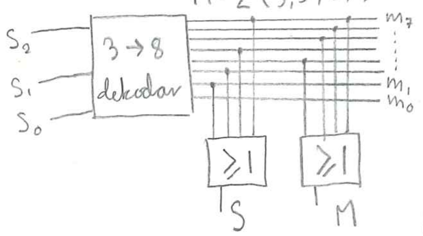
genererer alle 2^N std. prod. av N inngangsvariablar

Eks.: $N=3 \rightarrow 2^3=8$ utg.

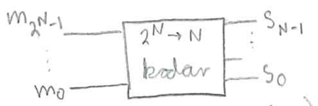


Kan bygge alle andre kombinatoriske 'blokker'.

Eks.: FA ⇒ $S=\Sigma(1,2,4,7)$, $M=\Sigma(3,5,6,7)$



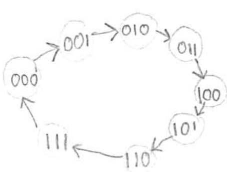
2^N-N-kodar



tilleggskrav (enkel kodar): kun éin inngang er 1 om gongen

Binært teljeverk (binary counter)

MOORE-logikk, kan vere uten inngongar.
Eks.: 3bit → $2^3=8$ tilstandar.



velger d-vippe

Q_t	Q_{t+1}	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

	A	B	C	A_{t+1}	B_{t+1}	C_{t+1}	D_A	D_B	D_C	T_A	T_B	T_C
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
4	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
5	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1

→ forenkler — KAN FORENKLE XOR

$D_A(A,B,C) = A\bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}BC$ → prøver på nytt med

$D_B(A,B,C) = B\bar{C} + \bar{B}C = B \oplus C$

$D_C(A,B,C) = \bar{C}$

→ forenkler forsøk 2 (T-vippe)

Q_t	Q_{t+1}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$T_A(A,B,C) = BC$ → mykje betre

$T_B(A,B,C) = C$

$T_C(A,B,C) = 1$

→ kan vere sjølvstartande
→ sjølvstartande på vilkår
→ ikkje sjølvstartande

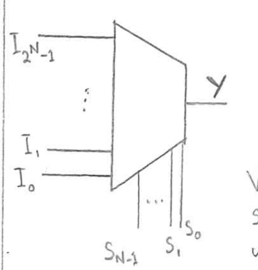
X	Y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			AND					XOR	OR	NOR						NAND	

Kombinatorisk multipleksar (MUX)

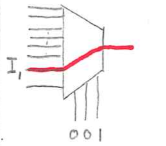
2^N+N inngangar, 1 utgang

2^N databit (I)

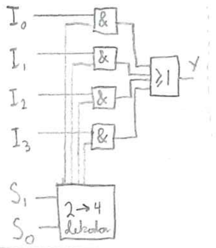
N adressebit (S)



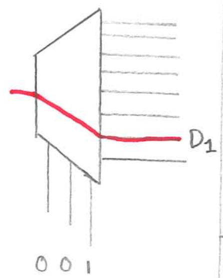
Verdien på adressering styrer kva for inngangsverdi som skal bufrast til utgangen Y



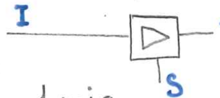
Eks.: MUX N=2 :



Demultipleksar

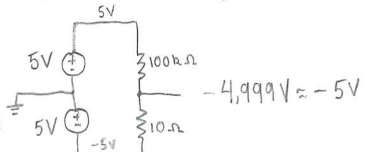


TRI-STATE

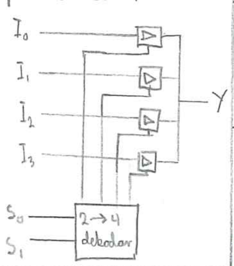


S	I	Y	
0	0	H	Høg-ohmig
0	1	H	
1	0	0	aktiv tri-state
1	1	1	

Låg ohmig utgang vil dominere over ein høgohmig utgang



Eks forenkla MUX N=2 med tri-state



XOR

$X \oplus Y$

$A \oplus 0 = A$

$A \oplus 1 = \bar{A}$

$A \oplus A = 0$

$A \oplus \bar{A} = 1$

$\overline{A \oplus B} = \bar{A} \oplus B = A \oplus \bar{B}$

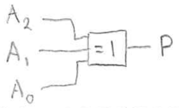
$A \oplus B = B \oplus A$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$ odde

$1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$ jamn

kan derfor lage paritetsbit med XOR



$\bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$

$A(\overline{P \oplus Q}) = \bar{A}(P \oplus Q) = A \oplus P \oplus Q$

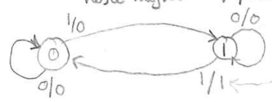
MOORE-logikk (sekv. log. undergruppe)

→ Utg. verdiane er funksjonar av vippetilstandane, ikkje eksterne inng.
+* Synkrone utgongar, utg.verdien ligg fast éin heil klokkeperiode
−* tidsforsinking pga. venting på trig.
−* kan kreve ekstra tilstandar

MEALY-logikk

→ utg. verdiane kan vere funksjon av både vippetilstandar og eksterne inng. variablar.
+* kan reagere straks på endring av inng. variabel
−* utg.verdi kan ha levetid som er mindre enn klokkeperioden
+* kan oppnå færre tilstandar enn ved tilsv. MOORE-løysing

Eks.: Brusautomat (MEALY)
Tilst. 1 ingen mynt
Tilst. 2 første mynt
neste mynt → flaske ut
asynkront (straks)



Eksitasjonstabell (hjelpemiddel for syntese)

Q_t	Q_{t+1}	D	T	JK
0	0	0	uendra 0	reset 01, uendra 00 } 0X
0	1	1	toggle 1	set 10, toggle 11 } 1X
1	0	0	toggle 1	reset 01, toggle 11 } X1
1	1	1	uendra 0	set 10, uendra 00 } X0

kva må til for å få Q_{t+1} (X er valgfri)

Nestetilstandstabell (vha. eksitasjonst.)

I	A	B	x	A_{t+1}	B_{t+1}	Y	J_A	K_A	J_B	K_B
0	0	0	0	0	1	0	0	X	1	X
1	0	0	1	1	1	0	1	X	1	X
2	0	1	0	0	1	1	0	X	X	0
3	0	1	1	1	0	1	1	X	X	1
4	1	0	0	1	1	0	X	0	1	X
5	1	0	1	0	0	0	X	1	0	X
6	1	1	0	1	1	0	X	0	X	0
7	1	1	1	0	0	0	X	1	X	1

finne funksjonar:

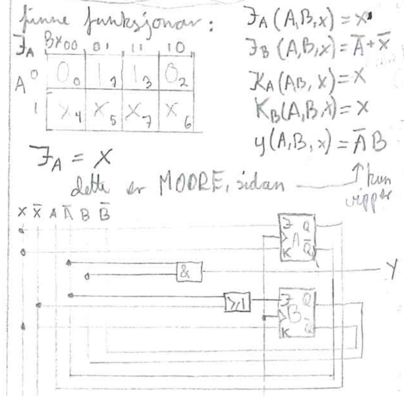
$J_A(A,B,x) = x$

$J_B(A,B,x) = \bar{A} + \bar{x}$

$K_A(A,B,x) = x$

$K_B(A,B,x) = x$

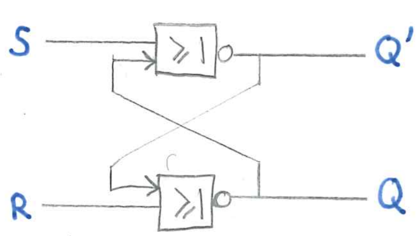
$y(A,B,x) = \bar{A}B$



$J_A = X$

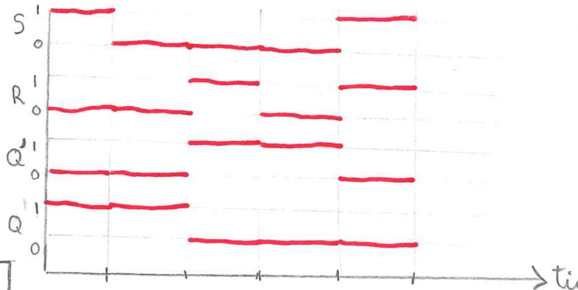
dette er MOORE, sidan → kun vipper

Sekvenslogikk



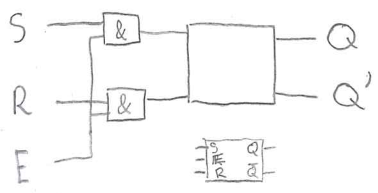
S	R	Q	Q'	
1	0	1	0	
0	0	1	0	←
0	1	0	1	
0	0	0	1	←
1	1	0	0	← ulovleg påtrykk dersom $Q' = \bar{Q}$ er målet

ikkje kombinatorisk logikk

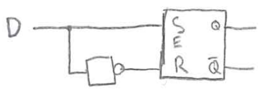


SR-lås SR-Latch

Eksempel med styreinngang:

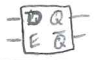


D-lås: (S=R=1 er umogleg)



kopierer D til Q, kun når E=1

"D" er data. 1-bit dataminne.
eller delay → tidsforsinking til neste positive flanke i E



Analyse av sekvens logikk

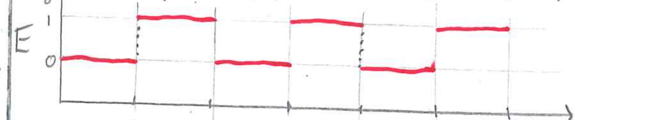
Eksterne inngangar, Vippeutgangar (tilstandsvariablar), Eksterne utgangar, Vippeinngangar

Alle blokker i parallell: synkron sekvens logikk.

Inngangssida
0,1,2 ... Eksterne inn
1,2 ... Vippe ut

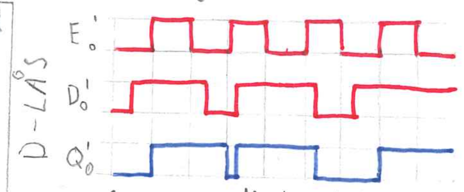
Utgangssida
1,2 ... Eksterne ut
1,2 ... D,T } Vippe inn
2,4 ... J,K }

firkantpulstog, klokkesignal, C, Ck



positiv flanke, negativ flanke (edge)

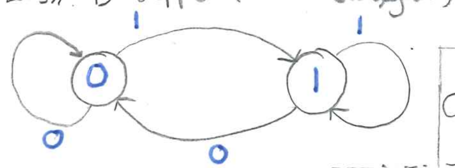
Eksterne utg. angar kan endrast pga.
• Endring av ekstern inn (på vilkårleg tidspkt)
• Vippa endrar tilstand (på triggetidspunkt)



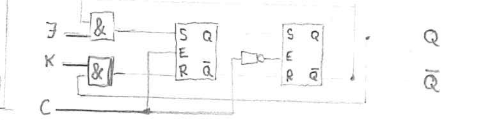
ingen garanti for at Q endrar verdi berre på flanketidspunkt

Eks.:
Utgangspunkt → Logisk koplingsskjema med kombinatorikk og vipper
Hjelpemiddel → Vippekarakteristikk (D, T, JK), Nestetilstandstabell
Mål: → Grafisk tilstandsdiagram

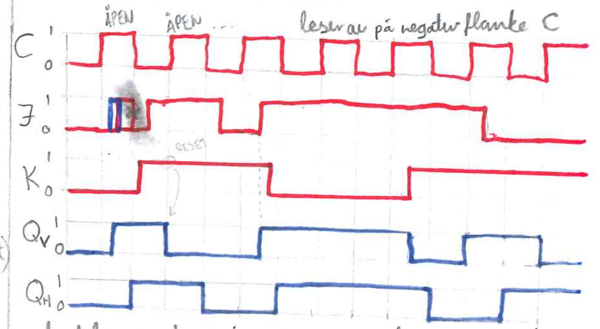
Eks.: D-vippe (tilstandsdiagram)



VIPPE (flip-flop) Q kan endre verdi kun på flanke.
konstruere MS-JK-vippe med 2 SR-lås



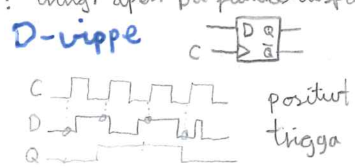
ÅPEN ÅPEN lesar av på negativ flanke C



fordel: synkronisme, endrer verdi på neg. flanke
ulempe: inngangen kan påverkast av støy i heile den positive klokkeperioden

Vi har også andre triggemønster:
MS: inng. åpen i positiv klokkeperiode
Flanke: inng. åpen på flanketidspunkt

Eks.: D-vippe



positiv flanke-trigga D-vippe

Vippekarakteristikk → Q_t er før, Q_{t+1} etter trigging

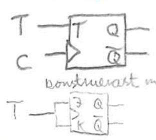
D	Q_{t+1}
0	0
1	1

(triviell)

T	Q_{t+1}
0	Q_t
1	$\bar{Q}_t$

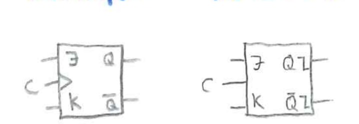
(toggle)

T-vippe



J	K	Q_{t+1}	
0	0	Q_t	uendra
0	1	0	RESET
1	0	1	SET
1	1	$\bar{Q}_t$	TOGGLE

JK-vippe MS-JK-vippe



Konstruksjon (syntese) av sekv. logikk

→ utg.pkt: tilstandsdiagram → mål: log. skjema

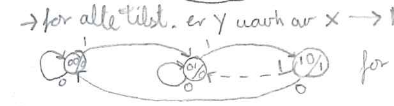
Eks.: brusautomat: mynt → 0000100 1000
1 flaske for 2 mynt flaske → 0000000 0100

3 tilstandar: ingen mynt, éin mynt, to mynt + flaske

For å handtere 3 tilstandar bruker vi 2 vipper
$2^2 > 3$ (1 forblir utnytta)

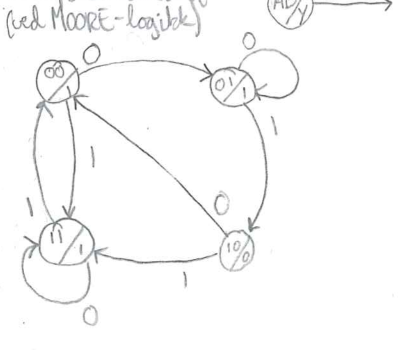
→ to tilstandsvar. AB (to vipper)
utgangsvar. Y (flaskeutkast)
inngangsvar. X (myntdetektor)

→ for alle tilst. er Y uavh. av X → MOORE



→ bruk nestetilstandstabell som utg.pkt for tilstandsdiagram
→ Eksitasjonstabell for å finne vippe-inngangsfunksjonar
→ forenkla boolske funksjonar for vippeinngangsfunksjonar (Karnaugh)
→ teikne logisk skjema (om det står)

Kompakt variant (ved MOORE-logikk)



Prosedyre for analyse

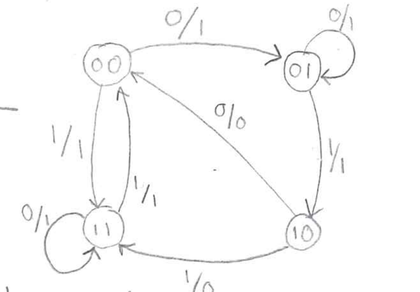
• Finn og namngje eksterne inngongar og utgongar, og vipper
• Lag tilstandstabell (enn ... utg.punkt)
• Lag nestetilstandstabell
→ Hjelpemiddel: karakteristisk tabell for vippe

Eks.: Nestetilstand

A	B	x	T_A	T_B	y	A_{t+1}	B_{t+1}
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

(innført før trigging)

• Tilstandsdiagram Eks.: AB x/y



→ observerer at ekstern utgang Y er uavhengig av x. Då er kretsen MOORE
→ tilstand AB er vippeverdiane, dei kan berre endrast på triggetidspunktet
→ Y er avhengig av AB, ikkje X
→ y kan endre verdi berre på triggetidspunkt

IELET 1001 ~ Elektroteknikk   Eksamen vår 22 (bok: engineering circuit analysis)

LAB-GRUPPER · 13 øvingar, 7 labbar Mån 10-12 (20. sept)

beggynn på øving, så dra på øvingstime

fields ⟷ integrated quantities (spenning, strøm)

Q ladning (charge) – Coulumb – atomer (p_+ og e_-) $Q = it$ ($C = As$)

v spenning (voltage) – Volt – separerte ladningar $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(x)\,dx$

I strøm (current) – Ampere – flyten av ladningar $i = \frac{dq(t)}{dt}$

E, w energi (energy) – Joule (kjemisk → elektrisk → termisk osv) ($J = Ws$) $E = Qv$, $J = CV$

~~W~~ P effekt (power) – Watt (J/s) $p = vi = \frac{dw}{dt}$

$\xrightarrow{i}$ + v – $P > 0$ (om $i>0$, $v>0$)

---

1 kWh = 1000 W · 3600 s = 3,6 MJ

1 Ah = 1 A · 3600 s = 3,6 kC

($w = Pt$) dersom lineært

$w(t) = \int p(t)\,dt$ ← vanlegvis

$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt = \int_{t_1}^{t_2} vi\,dt$

$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + C$

Passiv forteiknskonvensjon PSC

$vi > 0$: forbruker effekt

$vi < 0$: leverer effekt

Tellegens teorem

$P_1 + P_2 + P_3 \ldots = 0$

↳ bevarer energi

Spenning er potensiale i.ft. eit referansepkt, som jord ⏚

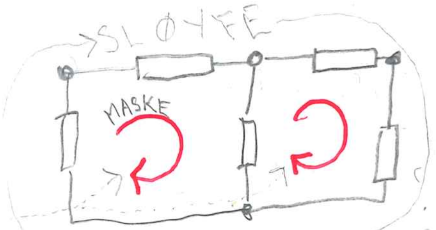
$V_{AB} = V_A - V_B$

$V_{BA} = V_B - V_A$

Resistive kretsar

(lineært avhengig av dei uavhengige kildene ⊕ ⊕) ($V_1 = k \cdot V_{s1}$)

- Grein (branch) to terminalar og vilkårleg antal kretselement mellom dei
- Node, triviell og vesentlige
- Sløyfe (loop) bane av greiner gjennom kretsen
- Maske (mesh) sløyfe som ikkje inneheld andre sløyfer.



OHMS LOV

$v = Ri$

(LINEÆR RESISTOR)

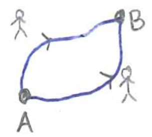
$[V] = [\Omega][A]$

KVL

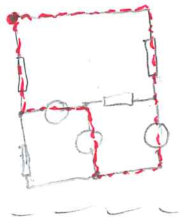
$V_1 + V_2 + \ldots V_n = 0$ $\sum_{j=1}^{N} v_j(t) = 0$

→ om du entrer frå + ▭ – positiv side → pos. forteikn

om du entrer frå – ▭ + negativ side → neg. forteikn



Kan bruke KVL for vilkårlig sløyfe



$P = vi$

$P = Ri^2$

$P = \frac{v^2}{R}$

$i^2 > 0$ (motstand forbruker energi)

KCL

$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I$ $\sum_{j=1}^{N} i_j(t) = 0$

i node: straum inn = straum ut (charge conservation)

Tillatt spenning/straum over motstand

$V = \sqrt{P \cdot R}$ $i = \sqrt{\frac{P}{R}}$

Åpen krets

$R \to \infty$

Kortslutning

$R \to 0$

Konduktans

$G = \frac{1}{R}$ [S] siemens

$GV = I$

Motstandar i serie

$R_{ekv} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots R_n$

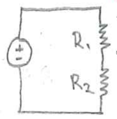
Motstandar i parallell

$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \frac{1}{R_n}$ (summen av konduktansane)

$R_{ekv} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ $R_{ekv} < R_1$ og $R_{ekv} < R_2$

Spenningsdeling

$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$

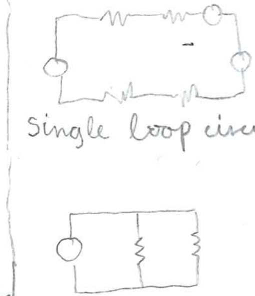


$R_1 > R_2 \to V_1 > V_2$

konduktans for straumdeling

$G_1 > G_2 \to I_1 > I_2$

$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$



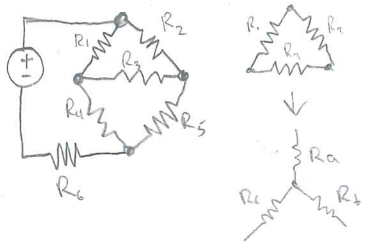
Single loop circuit

Single node-pair circuit (straumdeling)

$i_a = \frac{R_{eq}}{R_a} i_s$

Kan slå saman:
- spennings kilder i serie
- straumkilder i parallell (sjølv med motstandar i mellom)

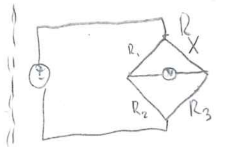
Delta-y (ΔY)



$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$

Wheatstone bridge



$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3$

Systematiske analysemetodar:

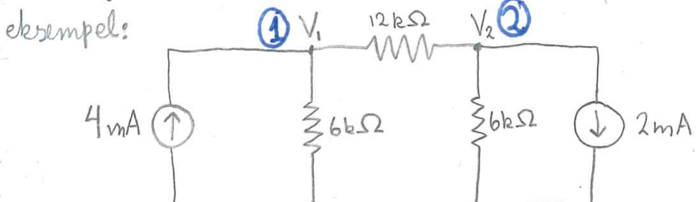
Nodespenning

(node-analyse): alle kretsvariablar er kjent dersom spenninga i alle noder er kjent

- **N** noder i kretsen → **N-1** likninger, navngje nodene.
- éi node er jord ⏚ (referansespenning)
- skriv **KCL** i alle N-1 noder → kan bruke G

→ står igjen med N-1 likninger med N-1 variablar

eksempel:



KCL 1: $-4mA + \frac{V_1 - V_2}{12k\Omega} + \frac{V_1}{6k\Omega} = 0$

"current going OUT of the node"

OBS!

KCL 2: $2mA + \frac{V_2}{6k\Omega} + \frac{V_2 - V_1}{12k\Omega} = 0$

Herifrå kan vi gjere litt algebraisk forenkling, feks. gonge med 12kΩ (får alle ledd over på spenninger sidan $v = Ri$).

1: $3V_1 - V_2 = 48$

2: $-V_1 + 3V_2 = -24$

som matrise vert dette $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 48 \\ -1 & 3 & -24 \end{array}\right]$

Ville brukt Cramers regel og finne $V_1 = 15V$ $V_2 = -3V$

Nodespenning v/spenningskilder → straumen er ukjent.
- Bruk KCL i alle noder som ikkje er kopla til sp. kilder
→ står spenningskilden rett på jord får vi færre likninger sidan spenninga allereie er kjent.
- Dersom sp. kilden derimot står mellom to vanlige noder:
→ vi må bruke **supernode**   KCL(1+2)
↳ hå har vi éi likn. med to ukjende. Men vi veit også at $V_1 - V_2 = 1V$ og kan løyse

Linearitet

I ein krets med kun lineære kretselementer er alle nodespenningene og greinstraumane proporsjonale til dei uavhengige kildene.

Eks:

$V_1 = k_1 V_{s1} + k_2 \cdot I_{s2}$

med kun éin kilde er alle spenningene og greinstraumane proporsjonale med denne kilden. Og alle effekter proporsjonale med A^2.

Superposisjon

Kun for lineære kretsar

→ analyser kretsen med éin kilde om gongen, og legg saman bidraga

Merk, $P \neq P_1 + P_2$, brukast kun til straum og spenninger.

→ ikkje bruk ved ◇ (avhengig kilde)

0V   0A

Maskestraum

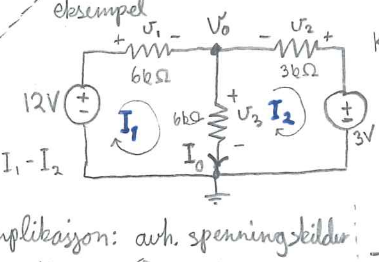
(sløyfe-analyse)

Alle kretsvariablar er kjent om vi veit alle straumane i alle uavhengige sløyfer (dvs. i alle masker)

- **N** masker gjev **N** likninger
- bruk **KVL** i alle masker

→ skriv over frå $v \to Ri$ slik $i_A(R_1 + R \ldots) - i_B(R_1 \ldots)$

eksempel



$I_0 = I_1 - I_2$

KVL 1: $6k\Omega \cdot I_1 + \overbrace{6k\Omega(I_1 - I_2)}^{v_3} - 12 = 0$

$\div 6k\Omega \to$ $I_1 + I_1 - I_2 = 2mA$

KVL 2: $3k\Omega \cdot I_2 + 3 + \overbrace{6k\Omega(I_2 - I_1)}^{-v_3} = 0$

$\div 3k\Omega \to$ $I_2 + 2I_2 - 2I_1 = -1mA$

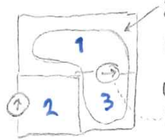
$\to I_1 = 1{,}25mA$ $I_2 = 0{,}5mA$ $I_0 = 0{,}75mA$

Komplikasjon: avh. spenningskilder

finn uttrykk ◇avh = i_n (må fjerne x)

straumkilder i ytre grein → reduserer antal likn.

↳ men straumkilde mellom to masker krever **supermaske**



Supermaske 1+3

KVL supermaske = KVL 1 + KVL 3

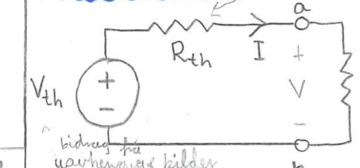
v over straumkilden kansellerer

$\to i_{str.kilde} = i_3 - i_1$

Ekvivalente lineære kretsar

Thevenin

bidrag frå resistansar, avhengige kilder, kretsens topologi



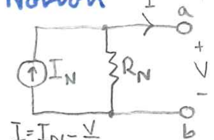
bidrag frå uavhengige kilder

$V = V_{th} - R_{th} I$

→ finn ekv. motstand R_{th} ved å nulle ut kildene (som ved superposisjon), og fjern R_L

→ finn $V_{oc} = V_{th}$ om $I = 0$ (fordi R_L er vekk)

Norton



$I = I_N - \frac{V}{R_N}$

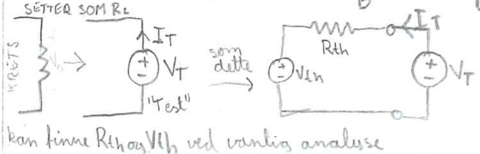
→ finn I_N ved å rekne ut når a og b er kortslutta ($I_N = I_{sc}$)

→ finn R_N (null ut kilder)

Merk at $I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$ ($R_{th} = R_N$)

Generell metode

$I_T = A + BV_T$ $I_N = -A$ $R_{th} = \frac{1}{B}$ $V_{th} = -\frac{A}{B}$



kan finne R_{th} og V_{th} ved vanlig analyse

Kildetransformasjon

Maksimal effektoverføring

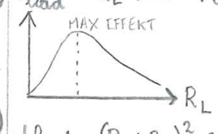
→ finn Thevenin-ekvivalent

$I = \frac{V_{th}}{R_L + R_{th}}$

$P_{load} = I^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_L + R_{th}}\right)^2 \cdot R_L$

for $R_L = 0$ $P_{load} \to 0$

$R_L \to \infty$ $P_{load} \to 0$



$\frac{dP_{load}}{dR_L} = 0$ ↓ $R_L = R_{th}$

$\frac{dP_{load}}{dR_L} = \frac{(R_L + R_{th})^2 - 2R_L(R_L + R_{th})}{(R_L + R_{th})^4} V_{th}^2$

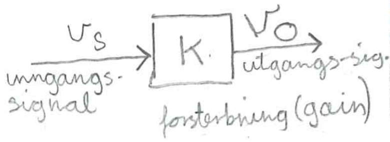
$P_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$

$V_T = R_{th} \cdot I_T + V_{th}$

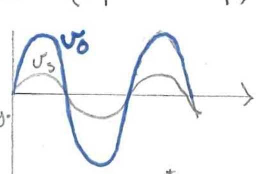
$I_T = \frac{1}{R_{th}} V_T - \frac{V_{th}}{R_{th}}$

Operasjons forsterkar (op-amp)

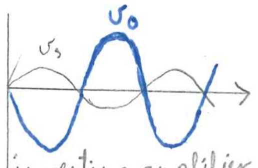
For generell forsterkar:



$v_o = v_s K$



Non-inverting amp $K > 0$



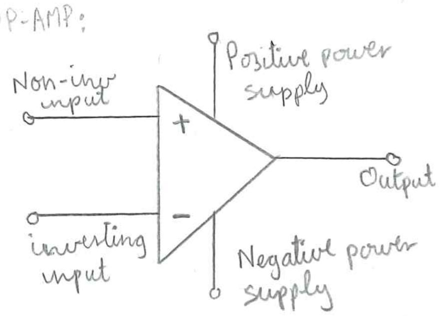
inverting amplifier $K < 0$

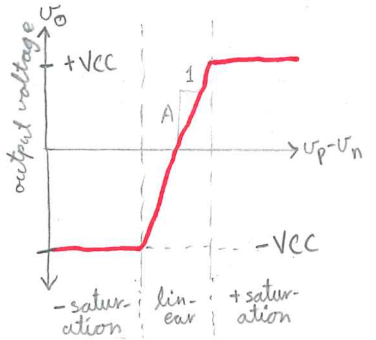
Ofte tilfellet at: $\mathcal{E}_o > \mathcal{E}_i$, $P_o > P_i$, $v_o > v_s$

Ideell op-amp

- bruk nodeanalyse i krets med ideell op-amp
- bruk KCL i inputnodene

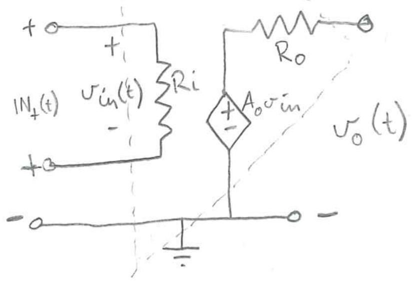
OP-AMP:





$v_o = A(\underbrace{v_p - v_n}_{v_s})$ gain

Non-ideal op-amp circuit model.



$v_{in} = \frac{v_o}{A} \to 0$

$A \to \infty$

$R_i \to \infty$

$R_o \to 0$

$i_{in} = \frac{v_{in}}{R_i} \to 0$

$v^+ = v^-$

$i^+ = i^- = 0$

KVL: $-v_s + v_{IN} + R_o I + A_o v_{IN} = 0$

MASKE-STRAUM $[(A_o+1)R_i + R_o] I = V_s$

$V_o = (R_o + A_o R_i) I$

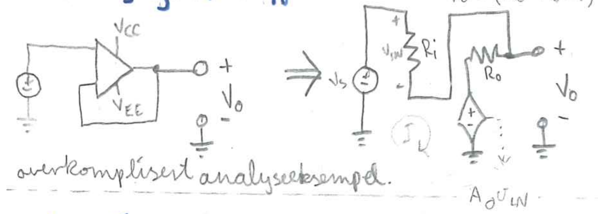
$A_o \gg 1 \to A_o + 1 = 0$

$R_i \gg R_o \to A_o R_i + R_o \approx A_o R_i$ $\to v_o \approx v_s$

$V_o = \frac{R_o + A_o R_i}{R_o + (A_o+1)R_i} v_s$

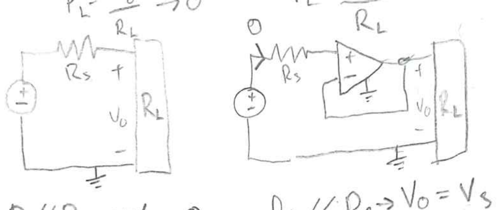
$v_o = K \cdot v_s$

Eks.: **unity gain buffer**



overkomplisert analyseeksempel.

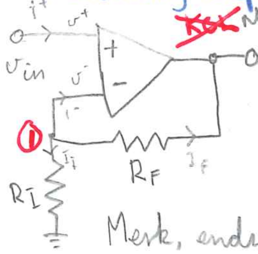
Eksempel på bruk av unity gain buffer



$P_L = \frac{V_o^2}{R_L} \to 0$ $\quad$ $P_L = \frac{V_o^2}{R_L}$

$R_L \ll R_s \to V_o \to 0$ $\quad$ $R_L \ll R_s \to V_o = V_s$

Non inverting amp. antar at op-ampen er ideell



① KCL: $i^- + i_F + i_I$

$0 + \frac{v_{in}}{R_I} + \frac{v_{in} - v_o}{R_F} = 0$ (pga ideell)

$\to v_o = \underbrace{\left(1 + \frac{R_F}{R_I}\right)}_{K} v_{in}$

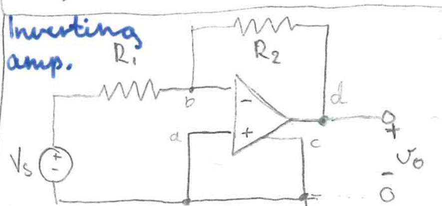
Merk, endre R_I og R_F for å endre gain

når vi veit v_o kan vi finne I_o vha. KCL

$I_o = I_1 + I_L$

$I_o = \frac{v_o - v_{in}}{R_F} + \frac{v_o}{R_L}$

Inverting amp.



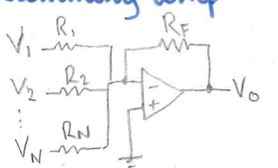
frå KCL: $V_o = -\frac{R_2}{R_1} v_s$

sjå også: Differential amp. amplifies difference between two inputs.

Eks.oppgåve: vil finne i_o og v_o i op-amp

- → finn noder
- → finn spenninger } skriv opp
- → KCL i alle noder untatt output-nodene
- uttrykk v_o ved dei andre parametra.

Summing amp



$V_o = -\left(V_1 \frac{R_F}{R_1} + V_2 \frac{R_F}{R_2} + \dots\right)$

Unit step function

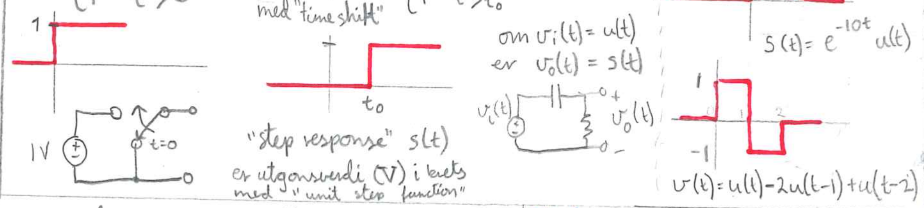
$u(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ $\quad$ $u(t - t_0) \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$ med "time shift"

om $v_i(t) = u(t)$ er $v_o(t) = s(t)$

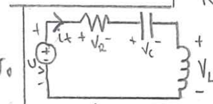
"step response" s(t) er utgongsverdi (V) i krets med "unit step function"

$s(t) = e^{-10t} u(t)$

$v(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$



RLC i serie



KVL: $v_R + v_L + v_C = v_S$

$v_R = Ri(t)$

$v_L = L\frac{di(t)}{dt}$ $\quad$ $v_C = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt$

setter inn i KVL og får DL for v_s, deriverer:

$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L}\frac{dv_S}{dt}$

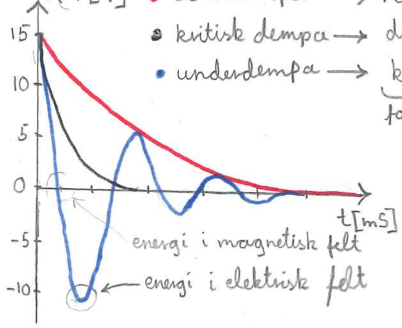
finner init: $i(t_0)$ og $\frac{di(t_0)}{dt}$

→ $i(t_0^+) = I_0$

→ KVL, omskriv: $\frac{di(t_0^+)}{dt} = \frac{1}{L}(v_s(t) - v_R(t_0^+) - \dots)$

$v_R(t_0^+) + v_L(t_0^+) + v_C(t_0^+) = v_S(t_0^+)$

$RI_0 + L\frac{di}{dt}(t_0^+) + V_0 = v_S(t_0^+)$



- overdempa → reelle, ulike røtter
- kritisk dempa → dobbelrot
- underdempa → kompleks rot

for karakteristisk likn.

$a_1 = 2\alpha$

$a_2 = (\omega_0)^2$

$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

$v(t) = v_C(t) + v_p(t)$ partikulær, $v_p = \frac{A}{\dots}$

$\alpha^2 > \omega_0^2 \to s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \to v_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

$\alpha^2 = (\omega_0)^2 \to s_1 = s_2 = -\alpha \to v_C(t) = B_1 e^{s_1 t} + B_2 t e^{s_2 t}$

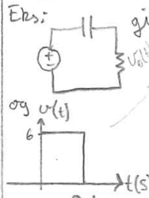
$\alpha^2 < \omega_0^2 \to \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \to v_C(t) = A_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + A_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$

Løys for koffisientane vha. initialverdiane.

Pulsrespons

utg. verdi dersom inng. verdi er puls

Eks.: gitt $s(t) = e^{-10t} u(t)$

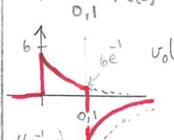


$v(t) = 6[u(t) - u(t - 0,1)]$

$v_o(t) = 6[s(t) - s(t - 0,1)]$

$v_o(t) = 6[e^{-10t} u(t) - e^{-10(t-0,1)} u(t-0,1)]$

$v_o(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 6e^{-10t} & t \in (0, 0,1) \\ 6(e^{-10t} - e^{-10(t-0,1)}) & t > 0,1 \end{cases}$



Eks.:

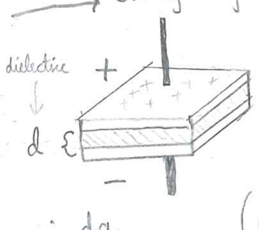
Ikkje skriv KCL i output-noder.

Kondensator

kondensator og induktor kan lagre energi.

Vi får n-ordens differensiallikninger for n energilagrande kretselement.

Kond. → energilagring i elektrisk felt

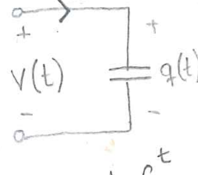


q = charge (ladning)

$q = Cv$ (lineært, mens q)

kapasitans [F]

$\left(C = \frac{\varepsilon A}{d}\right)$ ε: permitivitet, A: areal



$i = \frac{dq}{dt}$ $\quad$ $i = \frac{d}{dt}(Cv)$ $\quad$ $i = C\frac{dv}{dt}$

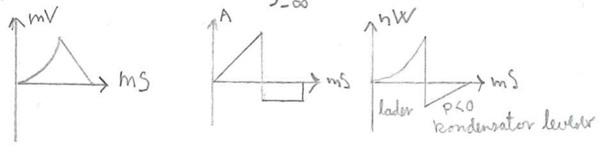
$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$ (historie for t)

$\boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt}$ (skriver $v(t_0)$ med denne)

- → straumen inn/ut av kondensator kan hoppe
- → spenninga over kondensator kan ikkje hoppe

$i_c(t_0^-)$ ikkje naudsynt $i_c(t_0^+)$, $v_c(t_0^-) = v_c(t_0^+)$

$p(t) = v(t)i(t)$ $\quad$ $w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)$ $\quad$ $\boxed{w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)}$



Kondensator i DC-krets. Ingen endring i topologi (ingen brytar): → $\frac{dv}{dt} = 0$

→ kondis fungerer som OC

Kondensator i parallell: $C_1 + C_2 + \dots C_n$

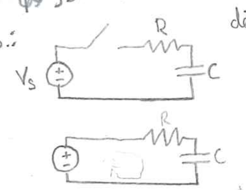
Kondensator i serie: $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_N}$

RC-krets

[Tips: bruk Thevenin etter $t = 0$]

- → bruk KCL og KVL
- → bruk ohms lov for motstandar og $i = C\frac{dv_c}{dt}$ for kondensatorar.
- → finner førsteordens difflikning for v_c
- → løyser (krever at vi veit initialverdiar)

Eks.:



dette er DC-krets

$v(t=0) = 0V$

så

KVL: $Ri + v_c = V_s$

$i = C\frac{dv_c}{dt}$

$\begin{cases} RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_s \\ v(t=0^+) = v(t=0^-) = 0 \end{cases}$

$v_c(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$v_c(t) = V_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ for $t > 0$

$K_1 = A$ (V_s) eller

K_2: $v_c(0) = K_1 + K_2 e^{0} \to K_2 = -K_1 = -V_s$

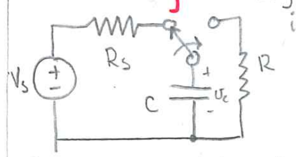
$\boxed{\tau = RC}$

Praktisk metode: for $v(0)$ og $v(\infty)$

$v_c = V_\infty + (V_0 - V_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$

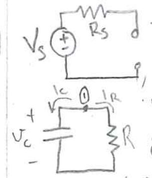
Utladning

brytaren lukker seg i $t = 0$



$\frac{di}{dt} = 0$

for $t = 0$, vi har ein DC-krets:



$v_c(t=0_-) = V_s$ men for $t > 0$:

KCL: $i_R + i_C = 0$

$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_c}{R}$ $\quad$ $i_c = C\frac{dv_c}{dt}$

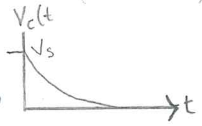
$v_c(0_-) = v_c(0_+) = V_s$ for $t = 0$

$\left\{C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} = 0\right.$ for $t > 0$ $\quad$ $\tau = RC$ (Tidskonstant) Ω·F = sekund

generelt $v_c(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ (her er $K_1 = 0$)

svaret: $v_c(t) = V_s e^{-\frac{t}{RC}}$

indt $t = 0^+$, tenker på cap som V_s ① og induktor som I_L ①

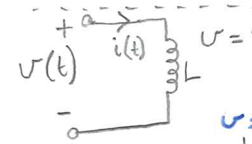


Induktor

lagrer energi i magnetiske felt.

Straum igjennom induktor danner magnetiske felt.

$\Phi = Li$ flux [Wb] → Sjølvinduktans [Henry]



$v = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt}$

$v = L\frac{di}{dt}$

for store endringar vil i finne $I_L(0^+)$ sidan $I_L(0^-) = I_L(0^+)$

$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

- → spenning kan hoppe
- → straum er kontinuerleg

energi: $\boxed{w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)}$

Induktor i DC-krets: fungerer som kortslutn.

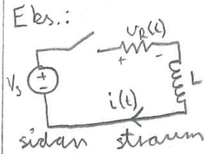
- → induktor i serie: $L_1 + L_2 + \dots L_N$
- → induktor i parallell: $\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \frac{1}{L_N}$

RL-krets

→ likt som RC → finn førsteordens DL for straumen igjennom induktoren.

$v_R = Ri_R$, $\quad$ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

Eks.:



KVL: $-V_s + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$

vi veit at $i(0^-) = i(0^+)$ sidan straum i spole ikkje kan hoppe

→ initialverdi: for switch

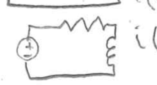
→ $A = V_s$ $\quad$ $a = \frac{R}{L}$ for generell 1ord DL

$i(0^+) = \frac{V_s}{R} + K_2 = 0 \to K_2 = -\frac{V_s}{R}$

$i(t) = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ for $t > 0$

$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ Evt. finn $i(\infty)$, $i(0)$ og dermed $i(t)$

$i(\infty) \to L \to$ short circuit



$i(\infty) \to \frac{V_s}{R}$ og $i(0) = 0$

$i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

finn $i(\infty)$, $i(0^+)$, τ

$i(t) = \frac{V_s}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$ for $t > 0$

Difflikninger i elektro

DC-eksitasjon

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + ax = A \\ \text{init:} \\ x(t_0) = A_0 \ (X_0) \end{cases}$

$X(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} = X_0$

finner K_2 med init.ver. X_0 (ofte $K_2 = (X_0 - \frac{A}{a})$ destaisjon)

generelt: $x(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$

om vi kjenner $x(\infty)$, $x(0^+)$ og tidskonst τ kan vi finne $x(t)$

$t \to \infty$ $\quad$ x $\quad$ K_1

$t = 0^+$ $\quad$ $x(0^+) = K_1 + K_2$

for $x(t) = K_1 + K_2 e^{-at}$ der $a = \frac{1}{\tau}$

Større kretsar med lineære elem

Induktor → finn I_L igjennom induktoren for $t = 0^-$

kontinuitet gjer at $I_L(0^-) = I_L(0^+)$

→ derfor kan vi sette induktoren som ein straumkjelde for $I_L(0^+)$

→ finn så verdien du er ute etter (f.eks. ein spenning i kretsen)

→ finn så verdien ved $t \to \infty$ (då er induktoren kortslutta)

→ finn Rth. Dersom ark. elementer, bruk V_T og I_T (utgongspkt i term. over L)

→ finner $\tau = \frac{L}{R_{th}}$

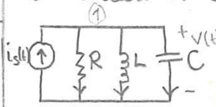
→ verdien over motstanden e.l.:

$v_o(t) = v_o(\infty) + (v_o(0^+) - v_o(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$

Fleire energilagrande elem. i krets

- → finn DL for $t > 0$ (KVL, KCL, V-I-forhold)
- → finn initialverdiar $(v(0), \frac{dv(0)}{dt})$ $\quad$ $v_c(0^-) = v_c(0^+)$, $i_L(0^-) = i_L(0^+)$
- → løys DL

Eks Parallell RLC



KCL①: $i_R + i_L + i_C = i_s$

$i_R = \frac{v(t)}{R}$ OHMS LOV

$i_C = \frac{dv(t)}{dt}C$

$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

setter inn dei tre karakteristiske likn. i KCL ①, deriverer

$\frac{v(t)}{R} + i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + C\frac{dv(t)}{dt} = i_s(t)$ for $t > t_0$

deriverer $\frac{d}{dt}$

$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{C}\frac{di_s}{dt}$

finner init. → $v(t_0^+) = v_C(t_0^+) = V_0$ over kondensatoren, og med KCL i t_0^+: $i_S(t_0^+) = i_R(t_0^+) + i_L(t_0^+) + i_C(t_0^+)$

$\begin{cases} i_C(t_0^+) = i_S(t_0^+) - i_L(t_0^+) - i_R(t_0^+) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ I_0 \qquad\ \ \frac{V_0}{R} \\ i_C = C\frac{dv(t)}{dt} \end{cases}$

Løyser → $\frac{dv(t_0^+)}{dt} = \frac{1}{C}\left[i_S(t_0^+) - I_0 - \frac{V_0}{R}\right]$

det er gitt at $v(t_0^-) = V_0$ og $i(t_0^-) = I_0$

Det speler ingen rolle om vi går ut ifrå L eller C, koeffisientane vert dei same

$v'' + \frac{1}{RC}v' + \frac{1}{LC} = \frac{1}{C}i_s'$

andre orden: to initialverdiar

AC steady-state-analyse

sinusoide: $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$ — fasevinkel
(cos er standardform) — amplitude — vinkelfrekvens

er periodiske med periode T så $x(t+T) = x(t)$

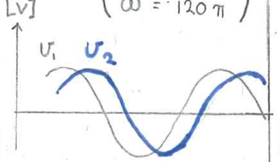
Frekvensen $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (Noreg: 50 Hz, $\omega = 100\pi$, 314 rad/s) (USA: 60 Hz, $\omega = 120\pi$)

$\cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$\sin \omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

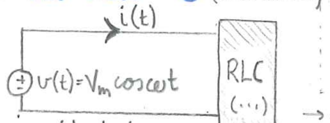
$-\cos \omega t = \cos(\omega t \pm \pi)$

$-\sin \omega t = \sin(\omega t \pm \pi)$



v_1 leads v_2 by 45° C
v_2 lags v_1 by 45° L

Krets med AC (time domain)



sinusoid eksitasjon $v(t)$ → lineær krets → får DL $i(t) = i_p(t) + i_h(t)$

→ arbeidskrevande og feilbarleg
→ men! Frekvensen er kjent
→ kun V_m og φ er ukjent

Phasor (fasevektor)

om $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$
$= Re\{V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\}$

så er $\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi} = V_m \angle \varphi$

fasevektoren (phasor) til $v(t)$

"This is now up to you if you want to make 10 pages of calculations in time domain or if you want to make half a page or a paragraph calculations in complex domain."

tidsdomene → phasor domain
sinusoide → phasor (kompl. tal)
DL → algebraiske likn.

Komponent	Resistor	Kondensator	Induktor
Tidsdomene	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
Komplekst plan	$V = RI$	$I = j\omega CV$	$V = j\omega LI$

Impedans (ratio av spenningas fasevektor over straumens)

$Z = \frac{V}{I}$ [V = ZI] $Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ — resistans — reaktans

i passive kretsar er den ohmske motstanden positiv.

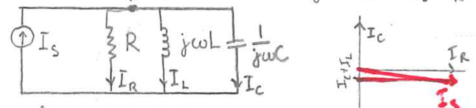
Om reaktansen er positiv → dominert av induktans
negativ → dominert av kapasitans

$Z = R$	$Z = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$Z = j\omega L$

Summering av impedans fungerer som med motstandar. Vi har også admittans $Y = \frac{1}{Z}$

Phasor diagram (visardiagram/fasevektordiagram)

generelt. $I_S = I_R + I_L + I_C$

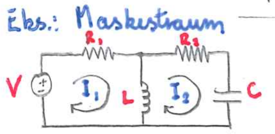


→ finn vinkelfrekvensen ω

→ bytt alle uavhengige kjelder med fasevektorar, og alle passive elementer med impedansar,

→ bruk KVL, KCL og utvida Ohms lov $V = ZI$ for å finne alle straum- og spenningsfasevektorar.
→ dette inkl. nodespenning, maskestraum osv.

Eks.: Maskestraum



setter opp matrise på form $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R_2 + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

Merk:

$$\frac{j}{1+j} 3\angle 30° = \frac{1\angle 90}{\sqrt{2}\angle 45} 3\angle 30° = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle 90° + 30° - 45°$$

og $V = ZI \rightarrow \angle V = \angle Z + \angle I$ og $\angle V - \angle I = \angle Z$

Effekt $p(t) = v(t) \cdot i(t)$

på standardform er mengdene

- $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$
- $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$

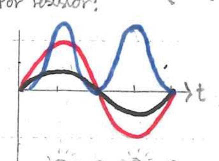
} bruker trig. id $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

får formel for **momentaneffekt** (tidsavh.)

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right]$$

(konstant) (periodisk funksjon med 2x frekvens)

For resistor:



Mao. 50 Hz spenning → 100 Hz effekt

For å finne den gjennomsnittlege effekten må vi vanlegvis integrere $P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt$, men den periodiske komponenten vert null, og vi får formel for **gjennomsnittleg effekt**

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\underbrace{\theta_v - \theta_i}_{\theta_z})$$

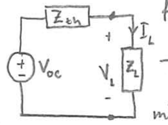
→ $\theta_z = 90°$ → reint induktiv → $P = 0$ (lag)

→ $\theta_z = 0°$ → reint resistiv → $P = \frac{1}{2}V_m I_m$

→ $\theta_z = -90°$ → reint kapasitiv → $P = 0$ (lead)

Maksimal gj.snittleg effektoverføring

→ for den theveninekvivalente kretsen



fyller inn for I_L og V_L

$$\rightarrow P_L = \frac{1}{2}\frac{V_{oc}^2 R_L}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}$$

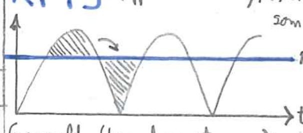
mål: design Z_L (eller kretsen) for maks P

Vi har to scenario for kretsen: komp.-konj.

- resistiv og reaktiv: $Z_L = R_{th} - jX_{th} = Z_{th}^*$
- kun resistiv: $R_L = \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}$

Eks.: om Z_{th} er $1 - j$ bude $Z_L = 1 + j$

RMS (effektivverdi) ...er ein likestraum som gjer like effekt som vekselstraumen gjer i gjennomsn.



Generelt (her for straum): (men likt for V)

$$I_{eff} = I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,dt} \quad [A_{RMS}]$$

For sinusoid:

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$ (der I_M er maks, altså amplituden)

Gjennomsnittleg effekt for AC som RMS:

"Aktiv" $P = V_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta_v - \theta_i)$

"Real Power" [W] — "Apparent Power" (S) [VA] — "Power factor"

Kompleks effekt

$pf = \frac{P}{S}$

$S\,[VA] = V_{RMS} I_{RMS}^* = I_{RMS}^2 Z$

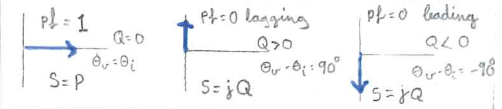
$= V_{RMS} I_{RMS} \angle \theta_v - \theta_i = P + jQ$

aktiv effekt [W]

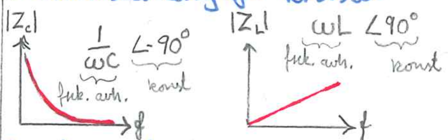
$P = Re\{S\} = V_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta_v - \theta_i)$

reaktiv effekt [VAR]

$Q = Im\{S\} = V_{RMS} I_{RMS} \sin(\theta_v - \theta_i)$



Frekvensavhengige kretsar

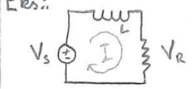


Overføringsfunksjon (transfer/network func.)

INN	UT		
V	V	Voltage gain	$G_v(j\omega)$
I	V	Transimpedans	$Z(j\omega)$ [Ω]
I	I	Current gain	$G_i(j\omega)$
V	I	Transadmittans	$Y(j\omega)$ [S]

→ ratio av fasevektoren mellom inngongssignalet og utgongssignalet.

Eks.:



$\rightarrow G_v(j\omega) = \frac{V_R}{V_S} = \frac{R}{R + j\omega L}$

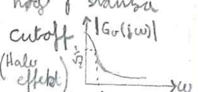
og magnitude: $|G_v(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

og fasevinkel: $\angle G_v(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

Ut ifrå dette kan vi finne info om eit filter:

	$\lvert G_v(j\omega)\rvert$	$\angle G_v(j\omega)$
$\omega = 0$	1	0°
$\omega \to \infty$	0	−90°
$\omega = \frac{R}{L}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	−45°

låge f sleppar igjennom
høge f stansa
cutoff (Halv effekt)



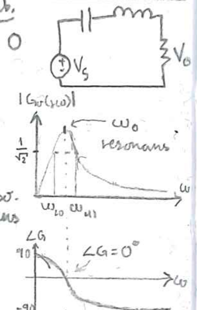
→ for cutoff-frekvensen er halve effekten overført, dermed $\frac{maks}{\sqrt{2}}$ (knekkfrekvens)

Resonans av overføringsfunk.

→ den imaginære delen er 0

Eks.: RLC-bandpassfilter

	$\lvert G_v(j\omega)\rvert$	$\angle G_v(j\omega)$
$\omega = 0$	0	90°
$\omega = \infty$	0	−90°
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	1	0°
ω_{LO}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	45°
ω_{HI}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	−45°

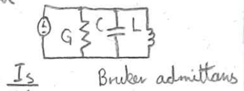


annotert som ω_0 → resonansfrekvens.

Kvalitetsfaktor $Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\text{spenningsfall reaktiv}}{\text{spenningsfall aktiv}}$

der BW er bandbredde $= \omega_{HI} - \omega_{LO}$, her $\frac{R}{L}$

Eks.: RLC i parallell

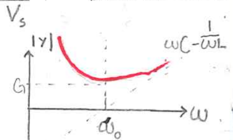


$I_S = I_G + I_C + I_L$

Ønsker å finne $Y(j\omega) = \frac{I_S}{V_S}$ — Bruker admittans

$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$

$|Y(j\omega)| = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$

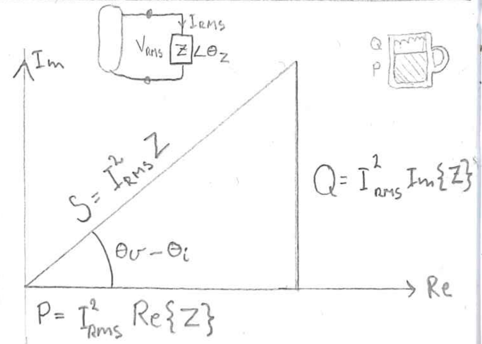


$\omega_{LO} \cdot \omega_{HI} = \omega_0^2$

$H = \frac{ut}{inn}$

Kvalitetsfaktor $Q = \frac{\omega_0}{BW}$

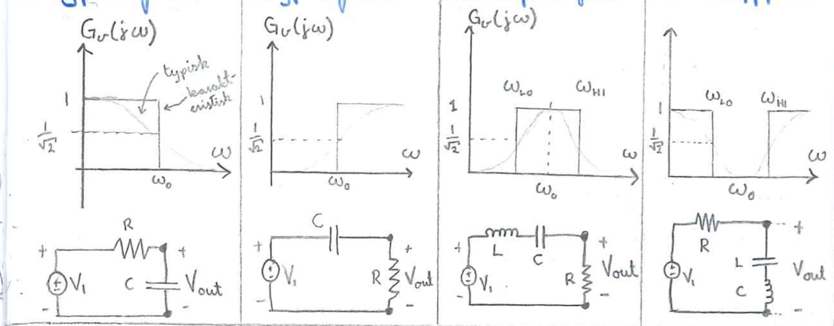
Knekkfrekvens $|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega_0)|}{\sqrt{2}}$
(finner ofte 2.gr.ligning) $ax^2 + bx + c = 0$



$Q = I_{RMS}^2\, Im\{Z\}$

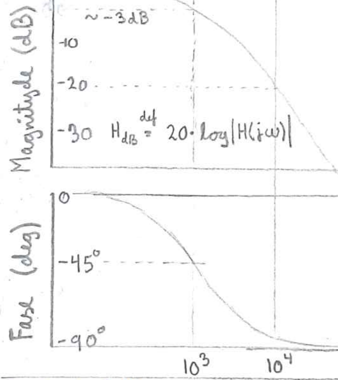
$P = I_{RMS}^2\, Re\{Z\}$

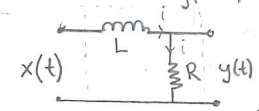
Lågpassfilter — Høgpassfilter — Bandpassfilter — Bandstoppfilter



dette stemmer sidan for $\omega = 0$: C: open ($Z_C(\omega=0) \to \infty$), L: short ($Z_L(\omega=0) = 0$)
og for $\omega \to \infty$: C: short ($Z_C(\omega\to\infty) \to 0$), L: open ($Z_L(\omega\to\infty) \to \infty$)

Bode-diagram (med eksempel som 1.ordens lågpassfilter $\omega_k = 1000$ rad/s)





- $X(s) - sL \cdot I(s) - RI(s) = 0$
- $Y(s) = RI(s)$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{R + sL}$

$H(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R}}$

Polar (= λ)
→ $s + \frac{R}{L} = 0$
→ $s = -\frac{R}{L}$

knekkfrekvensen ω_k: $|pol| = \frac{R}{L}$

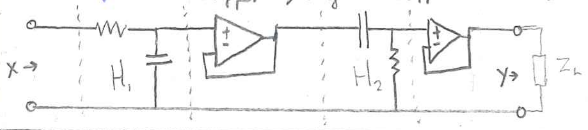
tidskonstanten $\frac{1}{|pol|} = \frac{L}{R}$

$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{1}{\omega_k}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)}$

$\angle H(j\omega) = 0° - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$

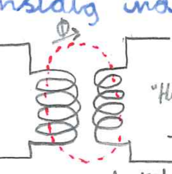
Aktivt filter

Buffer → ingen lasteffekt over Z_L



$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$

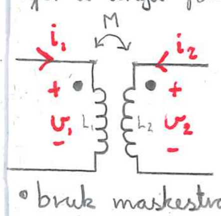
Gjensidig induktans (M) utgår frå Faradays induksjonslov



$\lambda = N\Phi$ ("turns") → $\lambda = Li$
"flux linkage" "magnetic flux"

→ $v = \frac{d\lambda}{dt}$ → $v = L\frac{di}{dt}$

- for å unngå forteiknsfeil har vi standardisert: (då vert M-leddet positivt)



$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$

$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$

- bruk maskestraum (og KVL), hvis ikkje må du transformere $I = \frac{1}{j\omega L}L^{-1}V$
- oversett frå straum/spenning inn i spolene først som sist

Effekt $p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$

Energi $w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2(t)^2 \pm M i_1(t) i_2(t)$

M-leddet er...
→ positivt, store energilagringskapasitet
→ negativt, mindre energilagringskap.

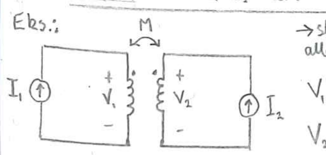
Koplingskoeffisient → sidan vi ikkje kan ha negativ energi, stemmer $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

vi beskriver kop.koeff $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ for $0 \leq k \leq 1$

Serie $L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M$ — $L_{ekv} = L_1 + L_2 - 2M$

Parallell $L_{ekv} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$ — $L_{ekv} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

Eks.:

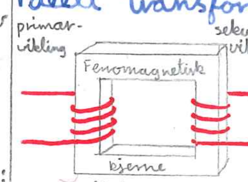


→ straum og spenning er allereie på std. form.

$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$

$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$

Ideell transformator



bruksområder:
- endre spenning
- endre impedans

utgår frå Amperes lov $\oint H\,dl = i = N_1 i_1 + N_2 i_2$

For ideell transformator gjelder følgande forhold: viklingsforhold: $N_1 : N_2$

$k = 1$ $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$

$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$ → ingen lagra energi → effekt inn = effekt ut

Vi kan utlede:

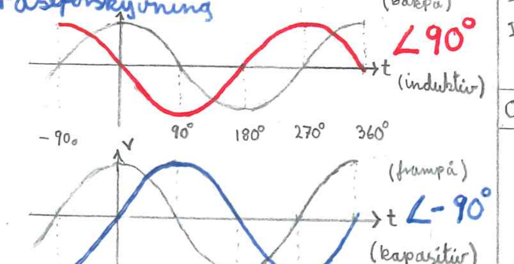
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$ og $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2}$

OBS.: her er det innforstått at vi velger standardform.

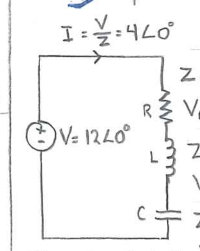
Vi kan også utlede formel for **Impedansrefleksjon**

$Z_{inn} = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$ ...som lar oss finne max eff.

Faseforskyvning



$I = \frac{V}{Z} = 4\angle 0°$



$Z_R = 3\angle 0°$, $V_R = 12\angle 0°$

$Z_L = 3\angle 90°$, $V_L = 12\angle 90°$

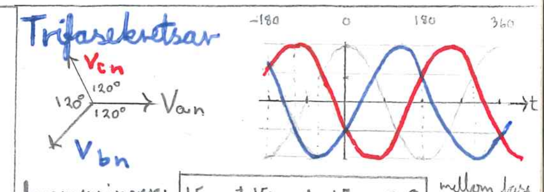
$Z_C = 3\angle -90°$, $V_C = 12\angle -90°$

$Z_{total} = 3\angle 0°$

Komponent	t-plan	jω-plan	s-plan
Motstand	$v = Ri$	$Z = R$	$Z = R$
Kondensator	$i = C\frac{dv}{dt}$	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Z = \frac{1}{sC}$
Spole	$v = L\frac{di}{dt}$	$Z = j\omega L$	$Z = sL$

- t-plan → Generelt, gjelder for alle typer signal
- jω-plan (frekvensplan) → kun for sinusforma signal, kun stasjonære løys.
- s-plan → Generelt, vi kan bruke Laplace for å gå $t \leftrightarrow s$ uten tap av informasjon. Mindre utrekning, spesielt dersom vi ikkje må tilbake til tidsplanet.
  → finn s-plan-uttrykk for mengdene direkte vha. f.eks. maskestraum ved å bruke s-avhengige impedansar
  → finn evt. tidsplansløysning ved algebraisk omforming til kjente former, og bruk tabell til å finne t-løysning.

Trifasekretsar



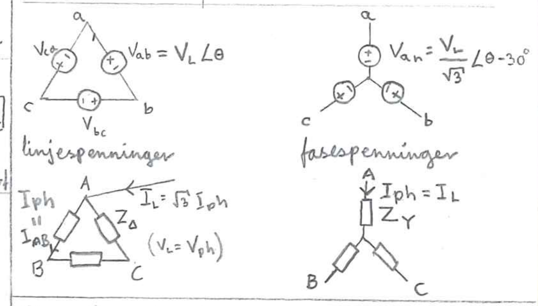
fasespenninger: $V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$ mellom fase og jord

→ vi ønsker å analysere på stjerneform (Y-Y).

$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta$ $V_{ph} = \frac{V_L}{\sqrt{3}}\angle -30°$ (linjespenning)

Eks.: $V_{ab} = 5\angle 10°$ $V_{an} = \frac{5}{\sqrt{3}}\angle -20°$

$I_{ph} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}\angle +30°$



Obs. V_{ph}, V_L, I_{ph} og I_L er ofte gitt som RMS