Øving 7

IELET1001 - Elektroteknikk

Gunnar Myhre, BIELEKTRO

23. januar 2022

Oppgåve 1

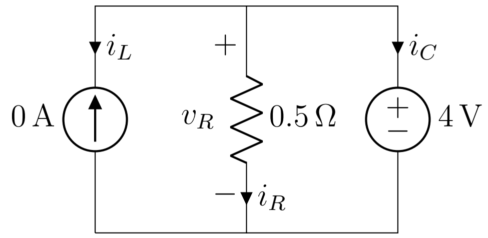
a)

Eg tolker oppgåveteksten til at nodespenninga $v(t)$ er gitt i noda som binder RLC-elementene saman (merka med 2 på teikninga).

Når brytaren lukkast ved $t = 0$ står vi igjen med ein parallell RLC. Ved $t = 0^-$ vil spenninga over kondensatoren vere $4V$. Sidan spenninga over kondensatoren er kontinuerleg vil

$$v(0^+) = v(0^-) = 4V \tag{1}$$

Ved $t = 0^+$ vil dei energilagrande elementene oppføre seg som kjelder.



frå straum-/spenningsforholdet for kondensator kjenner vi at

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C} \tag{2}$$

KCL i den øverste noda gjev oss

$$i_L + i_R + i_C = 0 \rightarrow 0A + \frac{4V}{0,5\Omega} + C\frac{dv_c}{dt} = 0 \tag{3}$$

som gjev oss

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -8V/s \tag{4}$$

b)

Finner uttrykk for straumane

- $i_R = \frac{v(t)}{R}$
- $i_L = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt$
- $i_C = C\frac{dv_c}{dt}$

setter inn i KCL

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + C\frac{dv(t)}{dt} = 0 \tag{5}$$

deriverer med hensyn på t

$$C\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}v(t) \tag{6}$$

får høgaste deriverte aleine

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0 \tag{7}$$

setter inn for $R = 0,5$, $L = 0,25$ og $C = 1$ og finner karakteristisk likning

$$v'' + 2v' + 4v = 0 \rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0 \tag{8}$$

finner røttene til karakteristisk likning

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}j \tag{9}$$

Sidan røttene til den karakteristiske likninga er eit komplekskonjugert par vil transienten til spenninga $v(t)$ vere av underdempa karakter. Frå matematikken kjenner vi den generelle løysninga på ei slik differensiallikning som

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \rightarrow y(x) = e^{\alpha x}\left[A_1 cos(\beta x) + A_2 sin(\beta x)\right] \tag{10}$$

For å finne koeffisientane A_1 og A_2 finner vi først $v(t)$ og $v'(t)$

- $v(t) = A_1 cos(\sqrt{3}t)e^{-t} + A_2 sin(\sqrt{3}t)e^{-t}$
- $v'(t) = -A_1 e^{-t}\left[cos(\sqrt{3}t) + sin(\sqrt{3}t)\sqrt{3}\right] + A_2 e^{-t}\left[cos(\sqrt{3}t)\sqrt{3} - sin(\sqrt{3}t)\right]$

setter inn for initialbetingelsane $v(0) = 4V$ og $v'(0) = -8V/s$

- $4 = A_1$
- $-8 = -A_1 + \sqrt{3}A_2$

Løyser likningssettet og får $A_1 = 4$, $A_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx -2,31$

$$v(t) = 4cos(\sqrt{3}t)e^{-t} - 2,31 sin(\sqrt{3}t)e^{-t} \tag{11}$$

Oppgåve 2

Denne oppgåva er også ein parallell RLC-krets og vi kan derfor bruke delar av utrekninga frå oppgåve 1. Likninga er på forma

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0 \tag{12}$$

setter inn for $R = 5$, $L = 2$ og $C = \frac{1}{40}$ og finner karakteristisk likning

$$v'' + 8v' + 20v = 0 \rightarrow r^2 + 8r + 20 = 0 \tag{13}$$

vi finner røttene til den karakteristiske likninga vha. andregradsformelen og finner den generelle differensiallikninga for $v(t)$

$$r_{1,2} = -4 \pm 2j \rightarrow v(t) = A_1 cos(2t)e^{-4t} + A_2 sin(2t)e^{-4t} \tag{14}$$

vi deriverer $v(t)$

$$v'(t) = -A_1 e^{-4t}\left[4cos(2t) + sin(2t)2\right] + A_2 e^{-4t}\left[cos(2t)2 - 4sin(2t)\right] \tag{15}$$

koeffisientane A_1 og A_2 kan vi utlede frå initialbetingelsane. Vi kjenner $v(0) = 10V$ og $\frac{dv(0)}{dt}$ kan vi finne frå straum-/spenningsforholdet til kondensatoren

$$KCL : i_L + i_R + i_C = 0 \rightarrow 1A + \frac{10V}{5\Omega} = -i_C \rightarrow i_C = -3A \tag{16}$$

$$i_C = C\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{-3A}{1/40F} = -120V/s \tag{17}$$

setter inn for initialbetingelsane i $v(t)$ og $v'(t)$

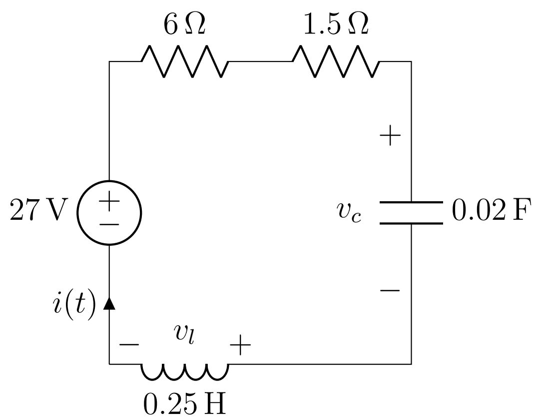
- $A_1 = 10$
- $2A_2 - 4A_1 = -120$

løyser og finner $A_1 = 10$, $A_2 = -40$. Setter inn og finner den partikulære løysninga for $v(t)$

$$v(t) = 10cos(2t)e^{-4t} - 40sin(2t)e^{-4t} \tag{18}$$

Oppgåve 3

Dette er kretsen for $t \geq 0$



setter opp KVL i maska

$$v_r + v_c + v_l = 27V \tag{19}$$

finner uttrykk for spenningene

- $v_r = 7,5i(t)$
- $v_l = L\frac{di(t)}{dt}$
- $v_c = v_c(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

setter inn i KVL

$$7,5i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = 27V \tag{20}$$

setter høgaste deriverte aleine, deriverer med hensyn på t

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{21}$$

fyller inn for $R = 7,5$, $L = 0,25$ og $C = 0,02$ og finner karakteristisk likning

$$r^2 + 30r + 200 = 0 \tag{22}$$

finner røttene $r = -20$ og $r = -10$. Dette gjev oss den generelle differensiallikninga

$$i(t) = K_1e^{-20t} + K_2e^{-10t} \tag{23}$$

deriverer $i(t)$

$$i'(t) = -20K_1e^{-20t} - 10K_2e^{-10t} \tag{24}$$

vi finner initialbetingelsane for $t = 0^+$. På tidspunktet $t = 0^-$ er kretsen stasjonær. Kondensatoren er ein åpen krets og spolen er ein kortslutning. Derfor er straumen i heile kretsen gitt ved

$$i(0^-) = \frac{v}{R} = \frac{33}{6} = 5,5 \tag{25}$$

sidan straumen i spolen er kontinuerleg er også $i(0^+) = 5,5$. KVL i kretsen ved $t = 0^+$ er gitt ved

$$-27 + 7,5 \cdot 5,5 - 6 + v_l = 0 \tag{26}$$

ved straum-/spenningsforholdet til spole får vi at

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_l(0^+)}{L} = -33 \tag{27}$$

setter inn i $i(t)$ og $i'(t)$ for å finne A_1 og A_2

- $i(0^+) = 5,5 = K_1 + K_2$
- $i'(0^+) = -33 = -20K_1 + -10K_2$

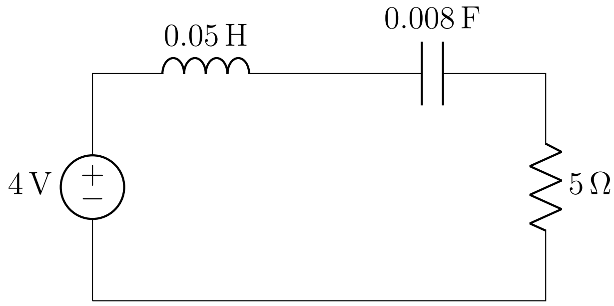
løyser likningssettet og finner $K_1 = -2,2$, $K_2 = 7,7$. Dette kan vi sette inn i $i(t)$ og finner den partikulære løysninga

$$i(t) = -2,2e^{-20t} + 7,7e^{-10t} \tag{28}$$

Oppgåve 4

Om vi forenkler kretsen til éi maske og finner eit uttrykk for $i(t)$ i denne eine maska kan vi til slutt finne eit uttrykk for $v_0(t)$ over motstanden vha. ohms lov. Med andre ord er vi ikkje opptatt av anna enn éin motstand, éin spole og éin kondensator i serie med ein energikjelde.

For å skrive kretsen vår om på denne måten bruker eg kjeldetransformasjon av straumkjelda ein rekke gonger, og står til slutt igjen med ein spenningskjelde $v_s = 4V$ og ein motstand $r = 4\Omega$ i serie. Denne motstanden slår eg saman med motstanden r_0 på høgre sida. For $t \geq 0$ ser kretsen slik ut



KVL i maska gjev oss

$$v_R + v_L + v_C = 4V \tag{29}$$

desse spenningene kan vi beskrive ved straum-/spenningsforhold

- $v_R = Ri(t)$
- $v_L = L\frac{di(t)}{dt}$
- $v_C = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

vi veit at spenninga over kondensatoren i $t = 0^-$ er $0V$. Setter opp generell differensiallikning

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = 4 \tag{30}$$

setter høgaste ordens deriverte aleine og deriverer dt

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0 \tag{31}$$

om vi løyser den karakteristiske likninga ser vi at vi får ei dobbelrot

$$r^2 + 100r + 2500 = 0 \rightarrow r = -50 \tag{32}$$

det er dermed snakk om ein transient av kritisk dempa karakter. Den generelle differensiallikninga for dette kjenner vi som

$$i(t) = B_1 e^{-50t} + B_2 t e^{-50t} \tag{33}$$

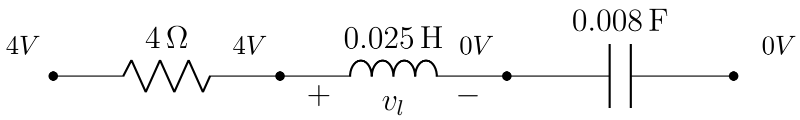
deriverer $i(t)$

$$i'(t) = -50B_1 e^{-50t} + B_2 t e^{-50t} - 50B_2 e^{-50t} \tag{34}$$

for å finne koeffisientane må vi finne initialbetingelsane $i(0^+)$ og $i'(0^+)$. Pga. at straum i spolar er kontinuerleg vil

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \tag{35}$$

for å finne $i'(0^+)$ må vi finne $v_l(0^+)$ i den originale teikninga. Sidan spenninga i kondensatoren er kontinuerleg vil den fortsatt vere $0V$ i $t = 0^+$.



straumen $i(0^+)$ er som kjent 0 så det er ingen spenningsfall over motstanden, dermed er $v_l = 4V$. Nå kan vi finne $i'(0^+)$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_l}{L} = \frac{4}{1/20} = 80 \tag{36}$$

nå som vi kjenner to initialbetingelsar kan vi sette inn i $i(t)$ og $i'(t)$

- $B_1 = 0$
- $-50B_1 + B_2 = 80$

den partikulære løysninga av $i(t)$ er derfor

$$i(t) = 80te^{-50t} \tag{37}$$

vi finner spenninga $v_0(t)$ vha. ohms lov

$$v(t) = R \cdot i(t) \rightarrow v_0(t) = 80te^{-50t} \tag{38}$$

Oppgåve 5

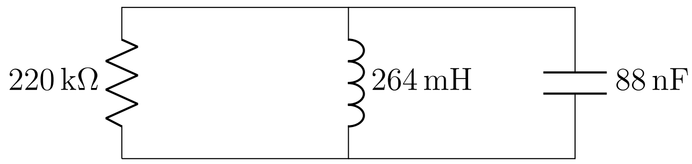
I oppgåve 1 utleda eg formelen for ein parallell RLC-krets

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0 \tag{39}$$

Eg velger meg $R = 220\text{k}\Omega$

- $4 \cdot 10^7 = \frac{1}{220 \cdot 10^3 C} \Rightarrow C = 88 \cdot 10^{-9}$
- $3 \cdot 10^{14} = \frac{1}{88 \cdot 10^{-9} L} \Rightarrow L = 264 \cdot 10^{-3}$

denne kretsen oppfyller kriteriene



Oppgåve 6

a)

Sidan L og C står i parallell stemmer dette forholdet:

$$v_c = v_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{40}$$

KVL i kretsen for $t > 0$ gjev oss

$$V_s = v_c + R(i_L + i_c) \tag{41}$$

i_l og i_c er gitt ved straum-/spenningsforhold for spole og kondensator

- $i_c = C\frac{dv_c}{dt}$
- $i_L = \frac{1}{C}\int_0^t v_c(t)dt$

i eitt uttrykk vert dette

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c + \frac{R}{L}\int_0^t v_c(t)dt = V_s \tag{42}$$

setter høgaste ordens deriverte for seg sjølv og deriverer dt

$$v_c'' + \frac{1}{RC}v_c' + \frac{1}{LC}v_c = 0 \tag{43}$$

b)

Vi kan ta utgongspunkt i denne formelen frå oppgåve **a**

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c + \frac{R}{L}\int_0^t v_c(t)dt = V_s \tag{44}$$

målet er å lage ein formel som er avhengig av $i(t)$, så vi substituerer $v_c = L\frac{di_L}{dt}$

$$LRC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + L\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}\int_0^t L\frac{di_L}{dt}dt = V_s \tag{45}$$

integralet av ein konstant forenklast til

$$LRC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + L\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}Li_L = V_s \tag{46}$$

setter høgaste ordens deriverte aleine og forenkler leibnizformalismen

$$i_L'' + \frac{1}{RC}i_L' + \frac{1}{LC}i_L = \frac{V_s}{RLC} \tag{47}$$

eg merker meg at koeffisientane til differensiallikninga er like, uavhengig av om vi går ut ifrå i_L eller v_c

- $i_L'' + \frac{1}{RC}i_L' + \frac{1}{LC}i_L = \frac{V_s}{RLC}$
- $v_c'' + \frac{1}{RC}v_c' + \frac{1}{LC}v_c = 0$