Øving 11

IELET1001 - Elektroteknikk

Gunnar Myhre, BIELEKTRO

27. mars 2022

Oppgåve 1

Eg tar utgongspunkt i spenningene v_a og v_d som er definert på standardform (med positiv side nærast prikken). Straumane i_1 og i_2 er allereie definert på standardform (inn mot prikken).

$$\vec{v} = L\vec{i} \rightarrow \begin{bmatrix} v_a \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1, & M \\ M, & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \tag{1}$$

spenningene er altså

- $v_a(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$
- $v_d(t) = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$
- $v_b(t) = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$
- $v_c(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

Oppgåve 2

Vi kan finne den gjensidige induktansen M frå sjølvinduktansane og koplingskoeffisienten

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \rightarrow M = 0{,}6 \cdot \sqrt{10^{-6}} = 6 \cdot 10^{-3}[H] \tag{2}$$

Velger meg spenninger og straumar for spolene på standardform og oversetter til frekvensdomenet

- $v_1(t) = 10cos(\omega t) \rightarrow V_1 = 10\angle 0°$

- $i_2(t) = 2sin(\omega t) = 2cos(\omega t - 90°) \rightarrow I_1 = 2\angle - 90°$
- $V_1 = V_a = 10$
- $I_1 = -I_b = -2j$

setter opp V-I–forhold for spolene

- $V_a = j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b$
- $V_b = j\omega M I_a + j\omega L_2 I_b$

løyser likningssettet og finner dei ukjente mengdene

$$I_a = \frac{V_a - j\omega M I_b}{j\omega L_1} \rightarrow I_a = I_1 = \frac{10 - 24j^2}{40j} = -0{,}85j = 0{,}85\angle - 90° \tag{3}$$

$$V_2 = -V_b = -j12 \cdot (-0.85j) - 20j^2 = 9{,}8 = 9{,}8\angle 0° \tag{4}$$

Oppgåve 3

Vi kan sjå på spenningskjelda at vinkelfrekvensen $\omega = 4$. Oversetter mengdene til frekvensdomenet og setter opp spenningslikningene for den gjensidige induktansen

- $V_a = j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b = 16jI_a + 4jI_b$
- $V_b = j\omega M I_a + j\omega L_2 I_b = 4jI_a + 8jI_b$

vi ønsker å finne v_0, denne kan vi finne om vi veit straumen i denne greina. Setter opp maskestraumslikninger

- $KVL_a \rightarrow 2I_a + j16I_a + j4I_b = 12$
- $KVL_b \rightarrow j4I_a + j8I_b - jI_b + jI_c = 0$
- $KVL_c \rightarrow I_c - jI_c + jI_b = 0$

som vi kan løyse som matrise

$$Z\vec{i} = \vec{v} \rightarrow \begin{bmatrix} 2+16j, & 4j, & 0 \\ 4j, & 7j, & j \\ 0, & j, & 1-j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Finner $I_c = \frac{V_c}{1\Omega} = 0{,}322\angle 57.6°$, vi kan gå tilbake til tidsplanet $v_0(t) = 0{,}32cos(4t + 57.6°)$[V].

Oppgåve 4

Setter opp spenningslikninger for den gjensidige induktansen

- $V_a = 6jI_a + jI_b$
- $V_b = jI_a + 3jI_b$

substituerer for $I_a = I_1$ og $I_b = -I_2$

- $V_a = 6jI_1 - jI_2$
- $V_b = jI_1 - 3jI_2$

setter opp maskestraumslikninger

- $KVL_1 \to 5I_1 + V_a + 2I_1 - 2I_2 = 36\angle 30°$
- $KVL_2 \to 2I_2 - 2I_1 - V_b - j4I_2 + 4I_2 = 0$

løyser likningssettet og finner straumane

- $I_1 = 4{,}21 - 0{,}63j = 4{,}25\angle - 8.51°$
- $I_2 = 1{,}39 - 0{,}72j = 1{,}56\angle 27.5°$

Oppgåve 5

For å maksimere effektoverføringa må vi kompansere med kondensatoren slik at reaktansen går mot null. For å finne impedansen i kretsen sett frå V_s kan vi finne uttrykk $Z = \frac{V_s}{I_a}$. Finner først V-I–forholda over dei magnetisk kopla spolene.

- $V_a = j12I_a + j10I_b$
- $V_b = j10I_b + j15I_b$

setter opp maskestraum

- $8I_a - jXI_a + V_a = V_s \to 8I_a ijXI_a + j12I_a + j10I_b = V_s$
- $-V_b - 20I_b = 0 \to -j10I_a - j15I_b - 20I_b = 0$

setter inn for I_b og finner impedansen

$$\frac{V_s}{I_a} = 8 - jX + j12 + j10\frac{j10}{20 - j15} \tag{6}$$

forenkler algebraisk og setter den imaginære delen lik null

$$jX = j12 - \frac{12}{5}j \to X = 9{,}6\Omega \tag{7}$$

Oppgåve 7

For ein ideell transformator veit vi at koplingskoeffisienten $k = 1$, altså ein ideell kopling der $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Det er også gitt at motstanden på begge sidene er 0 og induktansane går mot uendeleg. Frå dette har vi utleda i forelesning at $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$ frå Amperes lov, og frå dette utgår det to karakteristiske forhold:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{8}$$

og

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{N_1}{N_2} \tag{9}$$

Setter opp maskestraum med straum inn i spolene og spenninger over spolene (standardform)

- $KVL_a : 50I_a - jI_a + V_a = 80$
- $KVL_b : 2I_b + j20I_b + V_b = 0$

sidan dette er ein ideel transformator er straumane og spenningene lineært proporsjonale

- $V_b = 2V_a$
- $I_a = -2I_b$

løyser likningssettet og finner $I_b = -I_2$

$$I_b = -I_2 = \frac{-80}{101 - 8j} \to I_2 = \frac{80}{101 - 8j} = 0{,}79\angle 4.52^\circ \tag{10}$$

nå kan vi finne effekten over lastmotstanden

$$P = I_m^2 R \to P = 0{,}79^2 \cdot 2 = 1{,}24[W] \tag{11}$$

Oppgåve 8

Kjeldetransformerer og slår saman straumkjeldene som nå står i parallell

$$I_s = \frac{36}{2} + 6 = 24[A] \tag{12}$$

Setter opp maskestraumslikninger og forenkler med dei kjente forholda for ideell transformator med viklingsforhold $[2:1] \rightarrow I_b = -2I_a$, $V_a = 2V_b$

- $KVL_2 : (2 - j2)I_a - I_s \cdot 2 + V_a = 0$
- $KVL_3 : -j4I_3 + j4I_4 - V_b = 0 \rightarrow V_a = -j8I_3 + j8I_4$
- $KVL_4 : (4 - j4 + j4)I_4 + j4I_3 = 0 \rightarrow I_4 = -jI_3$

samskriver KVL_2 og KVL_3

$$(2 - j2)I_a - 48 = j8I_3 - j8I_4 \rightarrow (2 - j2)\frac{1}{2}I_3 - 48 = j8I_3 + j^2 8I_3 \tag{13}$$

forenkler algebraisk og setter inn for KVL_4

$$I_3 = \frac{48}{9 - 9j} \rightarrow I_4 = \frac{48}{j(9 - 9j)} \rightarrow I_4 = \frac{48}{9 + 9j} \tag{14}$$

finner V_0

$$V_0 = RI_4 \rightarrow V_0 = 4\frac{48}{9 + 9j} = 15{,}08\angle - 45°[\mathrm{V}] \tag{15}$$

Oppgåve 9

Setter opp maskestraumslikninger med straumane inn mot riktig side av spolene (standardform)

- $KVL_1 : (9 - j)I_1 + V_1 + 8I_2 = 34$
- $KVL_2 : (12 - j3)I_2 + V_2 + 8I_1 = 0$

sidan det er ein ideell transistor med viklingsforhold $[1:1]$ stemmer det at

- $V_2 = V_1$
- $I_1 = -I_2$

uttrykker som V_1 og slår saman KVL_1 og KVL_2

$$34 - 8I_2 - (9 - j)I_1 = -8I_1 - (12 - j3)I_2 \tag{16}$$

setter inn for $I_2 = -I_1$ og finner $I_0 = -I_2$

$$34 - 16I_2 + 9I_2 - jI_2 + 12I_2 - j3I_2 = 0 \rightarrow I_0 = -I_2 = \frac{34}{5 - j4} \tag{17}$$

finner V_0

$$V_0 = RI_0 \rightarrow V_0 I4 \cdot \frac{34}{5 - j4} = 21{,}24\angle 38.7°[\mathrm{V}] \tag{18}$$

Oppgåve 10

Definerer impedansane i kvar maske algebraisk

- $Z_1 = -j$
- $Z_2 = 1 + j$
- $Z_3 = 68 - j36$

setter opp maskestraumslikninger (med klokka)

- $KVL_3 : Z_3 I_3 + V_d = 0$
- $KVL_2 : Z_2 I_2 + V_c - V_b = 0$
- $KVL_1 : Z_1 I_1 + V_a = V_i$

substituerer for transformatorforholda: $V_a = 2V_b$, $V_d = 4V_c$, $I_2 = -I_b = 2I_1$ og $I_3 = -\frac{1}{4}I_2$

- $KVL_3 : -Z_3 I_3 = 4V_c$
- $KVL_{2+3} : V_b = Z_2 I_2 - \frac{Z_3 I_3}{4}$
- $KVL_1 : 2V_b = V_i - Z_1 I_1$

slår saman for V_b

$$2Z_2 I_2 - \frac{Z_3 I_3}{2} + Z_1 I_1 = V_i \rightarrow I_1 = \frac{V_i}{4Z_2 + \frac{Z_3}{4} + Z_1} \tag{19}$$

vi har nå eit uttrykk $I = V/Z$ som er Ohms lov. Vi har funne Z_{ekv}

$$Z_{ekv} = 4Z_2 + \frac{Z_3}{4} + Z_1 = 21 - j6[\Omega] \tag{20}$$

Oppgåve 11

Definerer impedansane i kvar maske algebraisk

$$Z = Z_1 = Z_2 = (1 + j) \tag{21}$$

Setter opp maskestraumslikninger og substituerer for $I_1 = -2I_2$ og $V_2 = 2V_1$

- $ZI_1 + V_1 + V_s = 0 \rightarrow -2ZI_2 + V_1 + V_s = 0$
- $ZI_2 + V_2 = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{ZI_2}{2}$

slår saman likningene for V_1

$$V_s = 2ZI_2 + \frac{ZI_2}{2} \rightarrow V_s = \left(2Z + \frac{Z}{2}\right) I_2 \tag{22}$$

vi kjenner $I_2 = -\frac{V_o}{j}$

$$V_s = -2{,}5Z\frac{V_o}{j} = 10\sqrt{2}\angle 165^\circ \tag{23}$$

Oppgåve 12

Forenkler høgresida av kretsen vha. impedansrefleksjon

$$Z_{reflektert} = \frac{V_c}{I_c} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L \rightarrow Z_{reflektert} = \frac{1}{4}(8 - j4)[\Omega] \tag{24}$$

Definerer impedansane i dei tri maskene algebraisk

- $Z_a = 4$
- $Z_b = -j$
- $Z_c = Z_{reflektert} + 2 = 4 - j$

setter opp forhold for den ideelle transformatoren mellom maske a og b

- $\frac{V_b}{V_a} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{1}{2} \rightarrow V_b = \frac{1}{2}V_a \rightarrow V_a = 2V_b$
- $\frac{I_b}{I_a} = -\frac{N_1}{N_2} \rightarrow \frac{I_b}{I_a} = -\frac{2}{1} \rightarrow I_b = -2I_a \rightarrow I_a = -\frac{1}{2}I_b$

setter opp maskestraumslikninger og forenkler med forholdet $I_1 = I_b - I_c$

- $KVL_a : Z_aI_a + V_a = V_s$
- $KVL_b : Z_bI_b + V_b + I_b - I_c = 0 \rightarrow Z_bI_b + I_1 = 0$
- $KVL_c : Z_cI_c + I_c - I_b = 0 \rightarrow Z_cI_c = I_1$

forenkler vha. forholda for den ideelle transformatoren

- $KVL_a : -\frac{1}{2}Z_aI_b + 2V_b = V_s$
- $KVL_b : V_b = -Z_bI_b - I_1$
- $KVL_c : I_c = \frac{I_1}{Z_c} \rightarrow I_b = I_1 + \frac{I_1}{Z_c} \rightarrow I_b = (1 + \frac{1}{Z_c})I_1$

slår saman a og b for den ukjente verdien V_b

$$KVL_{a+b} : -\frac{1}{2}Z_aI_b - 2Z_bI_b - 2I_1 = V_s \tag{25}$$

setter inn for I_b

$$KVL_{a+b+c} : -\frac{1}{2}Z_a(1 + \frac{1}{Z_c})I_1 - 2Z_b(1 + \frac{1}{Z_c})I_1 - 2I_1 = V_s \tag{26}$$

forenkler algebraisk

$$V_s = \left[-\frac{1}{2}Z_a(1 + \frac{1}{Z_c}) - 2Z_b(1 + \frac{1}{Z_c}) - 2\right] I_1 = 30{,}9\angle 152.8^\circ[\text{V}] \tag{27}$$