

Esame Comunicazioni Numeriche

"What I hear, I forget; What I see, I remember; What I do, I understand."

Rambod Rahmani

1 aprile 2019

To my twin brother Ramtin.

Indice

Indice	i
0 Disclaimer	1
1 Introduction	2
1.1 Complex Numbers	2
1.1.1 Cartesian form	3
1.1.2 Polar form	4
1.1.3 Trigonometric form	5
1.1.4 Euler's formula	5
1.1.5 Euler's formula and Complex Numbers	6
1.1.6 Elementary operations	6
1.1.6.1 Conjugate	6
1.1.6.2 Addition and subtraction	7
1.1.6.3 Multiplication	8
1.1.6.4 Multiplying a complex number by j	8
1.2 The Field \mathbb{C} of Complex Numbers	10
1.2.1 Naive introduction to the field \mathbb{C}	10
1.2.2 Definition of the field \mathbb{C}	11
1.2.3 Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2×2 matrices	12
2 Concetti Preliminari	13
2.1 Introduzione allo studio dei segnali	13
2.1.1 Proprietà elementari dei segnali determinati	14
2.1.1.1 Esercizio 12 Marzo 2018	17
2.2 Segnali periodici a tempo continuo	21
2.2.1 Sviluppo in serie di Fourier in forma reale polare	23

2.2.2	Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa . . .	25
2.2.3	Sviluppo in serie di Fourier in forma reale rettangolare	28
2.2.4	Il criterio di Dirichlet	29
2.2.5	Spettri di ampiezza e di fase	30
2.2.5.1	Spettro di un coseno	31
2.2.5.2	Spettro di un seno	34
2.2.6	MATLAB 2.1	38
2.2.7	MATLAB 2.2	42
2.3	Segnali aperiodici a tempo continuo	48
2.3.1	Dalla serie all'integrale di Fourier	50
2.3.1.1	Esempio	55
2.3.1.2	Esempio	57
2.3.1.3	Esempio	58
2.3.2	Criteri di esistenza della Trasformata Continua di Fourier (<i>TCF</i>)	59
2.3.3	Banda	60
2.3.3.1	Larghezza di banda	60
2.3.4	Convoluzione	61
2.3.5	Sommario	63
2.4	Sistemi monodimensionali a tempo continuo	65
2.5	Segnali a tempo discreto	65
2.6	Sistemi monodimensionali a tempo discreto	65
2.7	Progetto di filtri digitali	65
2.8	Richiami di teoria della probabilità	66
2.8.1	Esperimenti deterministici e aleatori	66
2.8.2	Elementi di teoria della probabilità	68
2.8.2.1	Esperimento aleatorio, spazio di probabilità e proprietà elementari	68
2.8.2.2	Probabilità Condizionata	71
2.8.2.3	Esempi Probabilità Condizionata	73
2.8.2.4	Teorema della Probabilità Composta	74
2.8.2.5	Esempio lancio di un dado non truccato	74
2.8.2.6	Teorema della Probabilità Assoluta	77
2.8.2.7	Esperimento aleatorio composto	77
2.9	Segnali aleatori a tempo continuo e a tempo discreto	81
3	Esame Scritto	82
3.1	Compitino 2014	82

3.2	Compitino 2015	82
3.3	Compitino 2016	82
3.4	Compitino 2017	83
3.5	Compitino 2018	83
3.6	Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Gennaio 2018	83
3.7	Prova di Comunicazioni Numeriche - 29 Gennaio 2018	83
3.8	Prova di Comunicazioni Numeriche - 20 Febbraio 2018	83
3.9	Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Aprile 2018	83
4	Esame Orale	84
4.1	Segnali Deterministici	84
4.1.1	Relazioni tra Potenza Media P_x ed Energia E_x di un Segnale	85
4.1.1.1	Funzione a quadrato sommabile	86
4.1.1.2	Applicazioni nella Meccanica Quantistica	86
4.1.2	Relazione Potenza Media, Valore Efficace e Valore Medio: $P_x = 0 \implies x_{eff} = 0, x_m = 0$	88
4.1.2.1	Media quadratica	91
4.1.2.2	Valore Efficace	91
4.1.3	Biunivocità della trasformata serie di Fourier	92
4.1.4	Linearità della trasformata serie di Fourier	95
4.1.4.1	Esercizio	95
4.1.5	Simmetria Hermitiana della trasformata serie di Fourier	97
4.1.5.1	Simmetria pari per il modulo	98
4.1.5.2	Simmetria dispari per la fase	99
4.1.6	Trasformata di un segnale (periodico) reale e pari	100
4.1.7	Trasformata di un segnale (periodico) reale e dispari	102
4.1.8	Trasformata di un segnale (periodico) reale alternativo	104
4.1.9	Simmetrie della Trasformata Continua di Fourier (TCF)	107
4.1.9.1	Simmetrie della TCF : Simmetria Hermitiana	107
4.1.9.2	Simmetrie della TCF : Segnali reali e pari	109
4.1.9.3	Simmetrie della TCF : Segnali reali e dispari	111
4.1.10	Teoremi sulla trasformata continua di Fourier	112
4.1.10.1	Linearità della TCF	112
4.1.10.2	Dualità della TCF	113
4.1.10.3	Teorema del ritardo	114
4.1.10.4	Teorema del cambiamento di scala	115
4.1.11	Teorema della Modulazione	117

4.1.11.1	Modulazione con coseno	120
4.1.11.2	Modulazione con seno	122
4.1.11.3	Modulazione con cosinusoide generica	123
4.1.11.4	Modulazione con esponenziale complesso . .	124
4.1.12	Teorema di derivazione	125
4.1.12.1	Teorema di derivazione nel tempo (Prof. Martorella)	126
4.1.12.2	Teorema di derivazione in frequenza (Prof. Martorella)	127
4.1.13	Teorema di integrazione	128
4.1.13.1	Teorema di Integrazione nel tempo (Prof. Martorella)	129
4.1.13.2	Teorema di Integrazione in frequenza (Prof. Martorella)	130
4.1.14	Teorema del Prodotto di Convoluzione	131
4.1.14.1	Teorema del Prodotto (Prof. Martorella) . .	132
4.1.15	Teorema di Convoluzione	133
4.1.15.1	Teorema di Convoluzione (Prof. Martorella)	134
4.1.15.2	Proprietà della Convoluzione	134
4.1.16	Formule di Somma di Poisson	137
4.1.16.1	Prima Formula di somma di Poisson	138
4.1.16.2	Seconda Formula di somma di Poisson . . .	139
4.1.16.3	Applicazione delle formule di Poisson alla Delta di Dirac	139
4.1.17	Dimostrare la TCF di un segnale periodico	140
4.1.18	Dimostrare che la TSF di $x(t) = \sum_n x_0(t - nT)$ è scrivibile tramite la TCF di $x_0(t)$	142
4.1.19	Teorema di Parseval	144
4.1.19.1	Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali aperiodici	144
4.1.19.2	Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali periodici (con TSF)	144
4.1.19.3	Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali periodici (con TCF)	145
4.1.19.4	Definire e dimostrare il teorema di Parseval per le sequenze	146
4.1.20	Definire l'operazione di convoluzione ed illustrarne le proprietà	148

4.1.21	Dimostrare che la TFS di $x[n] = x(nT)$ è scrivibile tramite la TCF di $x(t)$	148
4.1.22	Definire l'operazione di autocorrelazione per segnali aperiodici ed illustrarne le proprietà	148
4.1.23	Definire la cross-correlazione e la convoluzione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$	149
4.1.24	Dimostrare che la cross-correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ è scrivibile in termini di convoluzione tra i due segnali .	150
4.1.25	Dimostrare che la TFS di $x[n] = x(nT)$ è periodica di periodo $1/T$	151
4.1.26	Dare la definizione di Densità spettrale di Energia e dimostrare che $S_x(f) = X(f) ^2$	151
4.1.27	Definire la funzione delta di Dirac e illustrare le sue proprietà	151
4.1.28	Dimostrare la condizione sufficiente per l'esistenza della TFS	151
4.2	Segnali Aleatori	152
4.2.1	Teorema di Bayes	153
4.2.1.1	Esempio Teorema di Bayes	154
4.2.2	Teorema della Probabilità Totale	157
4.2.2.1	Esempio Teorema di Bayes & Teorema della Probabilità Totale	158
4.2.3	Legame tra Varianza σ_X^2 e Valor quadratico medio m_X^2	162
4.2.4	Teorema Fondamentale della Probabilità	165
4.2.5	Dimostrare il teorema Fondamentale della Probabili- tà per funzioni monotone	165
4.2.6	Dimostrare il teorema dell'Aspettazione per variabili discrete X e $Y = g(X)$	165
4.2.7	Teorema del Limite Centrale	165
4.2.8	Dimostrare che due variabili aleatorie gaussiane in- correlate sono anche indipendenti	165
4.2.9	Dare la definizione di Funzione di distribuzione e le sue proprietà, specificare come è fatta nel caso di variabili aleatorie discrete e continue	165
4.2.10	Definire Valore Medio, Varianza, Momento Ordinario di Ordine r e Valore Quadratico Medio	165
4.2.10.1	Valore Medio	165
4.2.10.2	Varianza	165

4.2.11	Momento Ordinario di Ordine r	165
4.2.11.1	Valore Quadratico Medio	165
4.2.12	Modelli per Variabili Aleatorie: DDP, FDd, Valor Medio, Valore Quadratico Medio, Varianza	165
4.2.12.1	Modello Uniforme	165
4.2.12.2	Modello Gaussiano	165
4.2.12.3	Modello Esponenziale Negativo	165
4.2.13	Definire la correlazione e la covarianza fra variabili aleatorie e dire quando sono incorrelate e indipendenti	165
4.2.14	Proprietà della funzione di autocorrelazione per processi aleatori	165
4.2.15	Definizione e proprietà della DSP per processi aleatori	165
4.3	Sistemi Monodimensionali	167
4.3.1	Dare la definizione di sistema e illustrarne le proprietà	167
4.3.2	Si dimostri che, per un SLS, il segnale di uscita è scrivibile come la convoluzione del segnale di ingresso per la risposta impulsiva	167
4.3.3	Definire quando un SLS è causale e stabile BIBO e dimostrarlo	167
4.3.4	Dare la definizione di replica fedele e specificare quando un filtro non introduce distorsioni lineari	167
4.3.5	Dimostrare che l'uscita $y(t)$ da un interpolatore, con funzione interpolatrice $p(t)$ e in ingresso la sequenza $x[n]$, è scrivibile come $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{X}(f) \cdot P(f)\}$, dove $\bar{X}(f) = TFS\{x[n]\}$ e $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$	167
4.3.6	Spiegare il concetto di stazionarietà in senso lato e in senso stretto di un processo aleatorio	167
4.3.7	Definire l'efficienza spettrale e calcolarla per una PAM binaria	167
4.3.8	Definire l'ISI e la condizione di Nyquist	167
4.3.9	Dimostrare che, per una modulazione PAM in banda passante, che la condizione di Nyquist nel tempo garantisce l'assenza di ISI	167
4.3.10	A partire dalla condizione di Nyquist per l'assenza di ISI per una PAM in banda base, dimostrare la condizione di Nyquist in Frequenza	167
4.3.11	Dimostrare che, se si rispetta la condizione di Nyquist, non si ha ISI per un sistema PAM binario	167

4.3.12	Definizione di Processo Indipendente	167
4.3.13	Definizione di Processo SSL e SSS	167
4.3.14	Dimostrare che se un processo gaussiano è SSL allora è anche SSS	167
4.3.15	L'uso della codifica Grey invece della codificare natu- rale in un sistema numerico di comunicazione con- sente la riduzione della BER (Bit Error Rate) a pa- rità di rapporto segnale/rumore E_b/N_0 in ricezione? Giustificare la risposta.	167
4.3.16	Si spieghi il funzionamento del filtro adattato ed il modo in cui questo sistema minimizza la $P(e)$ in ri- cezione per un sistema di comunicazione binario in banda base	167
4.3.17	Descrivere il sistema PCM standard	167
4.3.18	Dimostrare che il valore medio di un processo $Y(t)$ ot- tenuto filtrando un processo $X(t)$ con un filtro lineare e stazionario con risposta impulsiva $h(t)$ è scrivibile in termini della $h(t)$ e del valore medio del processo in ingresso $\eta_x(t)$	167
4.3.19	Definire il segnale trasmesso per una QAM generica e calcolare dal punto di vista teorico l'energia media per simbolo trasmesso	167
4.3.20	Schema QAM (ricevitore + trasmettitore)	167
4.3.21	Schema PAM in banda base e in banda passante . . .	167
4.3.22	Definire gli indici statistici del primo ordine e quelli del secondo ordine per processi aleatori	167
4.3.23	Illustrare le relazioni fra processi	167
4.3.23.1	Incorrelati	167
4.3.23.2	Ortogonalmente	167
4.3.23.3	Indipendenti	167
4.3.24	Dire quando due processi sono congiuntamente sta- zionari in SSS e SSL	167

A Segnali Canonici **168**

A.1	Gradino Unitario	168
-----	----------------------------	-----

Capitolo 0

Disclaimer

"Information is power. But like all power, there are those who want to keep it for themselves. The world's entire scientific and cultural heritage, published over centuries in books and journals, is increasingly being digitized and locked up by a handful of private corporations. There is no justice in following unjust laws. It's time to come into the light and, in the grand tradition of civil disobedience, declare our opposition to this private theft of public culture."

— Aaron Swartz

The material and information in this document are provided "AS IS" in good faith and without warranties of any kind, either expressed or implied.

This work is licensed under:



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Capitolo 1

Introduction

*"The only person who is educated is the one who
has learned how to learn and change."*

— Carl Rogers

This chapter contains introductory concepts needed as theoretical base to be able to understand the signal processing topics presented in this text.

1.1 Complex Numbers

A complex number is a number that can be expressed in the form

$$z = a + ib,$$

where a is known to be the real part

$$a = \Re(z),$$

and b is known to be the imaginary part

$$b = \Im(z).$$

The complex number system can be defined as the algebraic extension of the ordinary real numbers by an imaginary number i . i is a solution of the equation $x^2 = -1$. Because no real number satisfies this equation, since the square of a real number cannot be negative, i is called an imaginary number.

A real number a can be regarded as a complex number $a + 0i$ whose imaginary part is 0. A purely imaginary number bi is a complex number $0 + bi$ whose real part is zero. It is common to write a for $a + 0i$ and bi for $0 + bi$.

The complex numbers give rise to the fundamental theorem of algebra: every non-constant polynomial equation with complex coefficients has a complex solution. This property is true of the complex numbers, but not the reals. The 16th century Italian mathematician Gerolamo Cardano is credited with introducing complex numbers in his attempts to find solutions to cubic equations.

Geometrically, complex numbers extend the concept of the one-dimensional number line to the two-dimensional complex plane by using the horizontal axis for the real part and the vertical axis for the imaginary part.

Engineers reserve the letter i for electric current - the derivative of electric charge with respect to time. We will therefore be using the letter j instead of the letter i .

1.1.1 Cartesian form

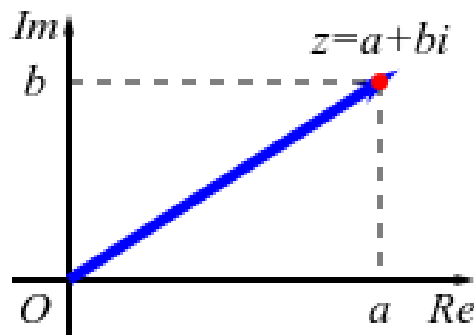


Figura 1.1: A Complex Number in Cartesian Form.

A complex number can thus be identified with an ordered pair $(\Re(z), \Im(z))$ in the Cartesian plane, an identification sometimes known as the Cartesian form of z . A complex number can be viewed as a point or position vector in a two-dimensional Cartesian coordinate system called the complex plane or Argand diagram, named after Jean-Robert Argand. The numbers are conventionally plotted using the real part as the horizontal component, and imaginary part as vertical (see Figure 1.1). In

fact, a complex number can be defined as an ordered pair (a, b) , but then

rules for addition and multiplication must also be included as part of the definition. William Rowan Hamilton introduced this approach to define the complex number system.

1.1.2 Polar form

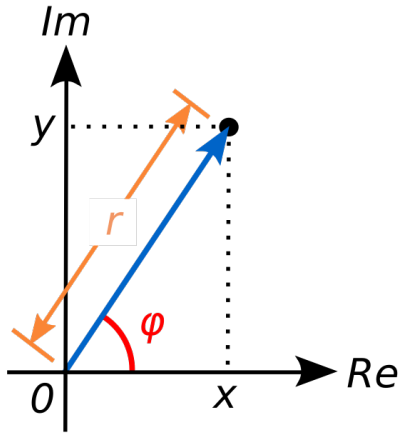


Figura 1.2: A Complex Number in Polar Form

An alternative way of defining a point P in the complex plane, other than using the a - and b -coordinates, is to use the distance of the point from O , the point whose coordinates are $(0, 0)$ (the origin), together with the angle subtended between the positive real axis and the line segment OP in a counterclockwise direction. This idea leads to the polar form of complex numbers. (see Figure 1.2 where x and y were used instead of a and b).

The absolute value (or modulus or magnitude) of a complex number $z = a + bj$ is

$$c = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

If z is a real number (that is, if $b = 0$), then $c = |a|$. That is, the absolute value of a real number equals its absolute value as a complex number. By Pythagoras' theorem, the absolute value of complex number is the distance to the origin of the point representing the complex number in the complex plane.

The argument of z (in many applications referred to as the "phase") is the angle of the radius OP with the positive real axis, and is written as $\arg(z)$. As with the modulus, the argument can be found from the

rectangular form $a + bj$:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{if } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{if } a < 0 \text{ and } b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{if } a < 0 \text{ and } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a = 0 \text{ and } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } a = 0 \text{ and } b < 0 \\ \text{indeterminate} & \text{if } a > 0 \end{cases}$$

The value of φ is expressed in radians in this article. It can increase by any integer multiple of 2π and still give the same angle. Hence, the $\arg()$ function is sometimes considered as multivalued. The polar angle for the complex number 0 is indeterminate, but arbitrary choice of the angle 0 is common. Together, c and φ give another way of representing complex numbers, the polar form, as the combination of modulus and argument fully specify the position of a point on the plane.

If we are given the polar form to start with, the following formulas can be used to retrieve the cartesian coordinates:

$$\begin{cases} a = c \cdot \cos(\varphi) \\ b = c \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$$

1.1.3 Trigonometric form

The trigonometric form of a complex number $z = a + bj$ can be easily obtain by substitution in our previous equations:

$$z = a + bj = c \cdot \cos(\varphi) + c \cdot \sin(\varphi) \cdot j = c \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)).$$

1.1.4 Euler's formula

Euler's formula, named after Leonhard Euler, is a mathematical formula in complex analysis that establishes the fundamental relationship between the trigonometric functions and the complex exponential function. Euler's formula states that for any real number φ :

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

where e is the base of the natural logarithm, j is the imaginary unit, and \cos and \sin are the trigonometric functions cosine and sine respectively, with the argument φ given in radians.

When $\varphi = \pi$, Euler's formula evaluates to $e^{j\pi} + 1 = 0$, which is known as Euler's identity.

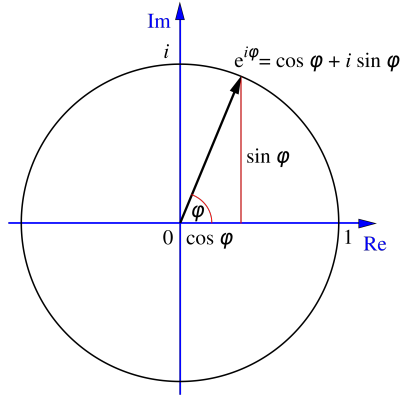


Figura 1.3: Euler's formula
Interpretation

This formula can be interpreted as saying that the function $e^{j\varphi}$ is a unit complex number, i.e., it traces out the unit circle in the complex plane as φ ranges through the real numbers. Here φ is the angle that a line connecting the origin with a point on the unit circle makes with the positive real axis, measured counterclockwise and in radians.

The original proof is based on the Taylor series expansions of the exponential function e^z (where z is a complex number) and of $\sin(x)$ and $\cos(x)$ for real numbers x . In fact, the same proof shows that Euler's formula is even valid for all complex numbers z .

1.1.5 Euler's formula and Complex Numbers

Using Euler's formula we can now write:

$$z = a + jb = c \cdot \cos(\varphi) + c \cdot \sin(\varphi) \cdot j = c \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = e^{j\varphi}.$$

1.1.6 Elementary operations

1.1.6.1 Conjugate

The complex conjugate of the complex number $z = a + jb$ is given by $a - jb$. It is denoted by either \bar{z} or z^* . This unary operation on complex numbers cannot be expressed by applying only their basic operations addition, subtraction, multiplication and division.

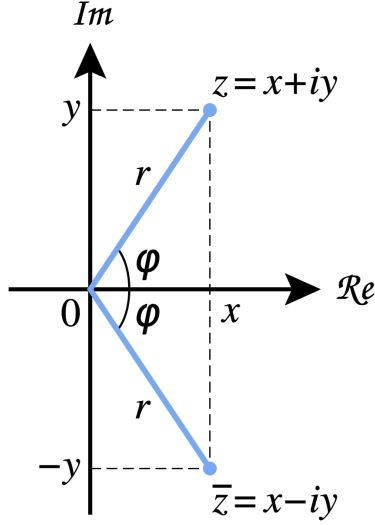


Figura 1.4: Geometric representation of z and its conjugate \bar{z}

Geometrically, \bar{z} is the "reflection" of z about the real axis. Conjugating twice gives the original complex number

$$\overline{\bar{z}},$$

which makes this operation an involution. The reflection leaves both the real part and the magnitude of z unchanged, that is

$$\Re(\bar{z}) = \Re(z) \quad \text{and} \quad |\bar{z}| = |z|.$$

The imaginary part and the argument of a complex number z change their sign under conjugation

$$\Im(\bar{z}) = -\Im(z) \quad \text{and} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z).$$

The real and imaginary parts of a complex number $z = a + jb$ can be extracted using the conjugation:

$$\Re(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + jb + a - jb}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$\Im(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2j} = \frac{a + jb - a + jb}{2j} = \frac{2jb}{2j} = b.$$

Moreover, a complex number is real if and only if it equals its own conjugate.

$$z = \bar{z} \quad \rightarrow \quad z \in \mathbb{R}$$

1.1.6.2 Addition and subtraction

Two complex numbers z_1 and z_2 are most easily added by separately adding their real and imaginary parts of the summands. That is to say:

$$z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

Similarly, subtraction can be performed as

$$z_1 - z_2 = a_1 + jb_1 - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Please keep in mind that this is completely wrong:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad , \quad z_2 = c_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\ z_1 + z_2 &= c_1 \cdot e^{j\varphi_1} + c_2 \cdot e^{j\varphi_2} = (c_1 + c_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

As a matter of fact:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot e^{j\varphi_1} &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot c_1 \cdot \sin(\varphi_1), \\ c_2 \cdot e^{j\varphi_2} &= c_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot c_2 \cdot \sin(\varphi_2), \\ c_1 \cdot e^{j\varphi_1} + c_2 \cdot e^{j\varphi_2} &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1) + c_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot (c_1 \cdot \sin(\varphi_1) + c_2 \cdot \sin(\varphi_2)), \end{aligned}$$

while:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} &= (c_1 + c_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + c_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot (c_1 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + c_2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

and:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2).$$

1.1.6.3 Multiplication

Since the real part, the imaginary part, and the indeterminate i in a complex number are all considered as numbers in themselves, two complex numbers, given as $z_1 = a_1 + jb_1$ and $z_2 = a_2 + jb_2$ are multiplied under the rules of the distributive property, the commutative properties and the defining property $i^2 = -1$ in the following way

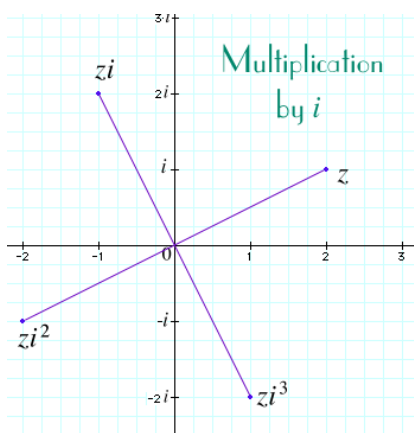
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = \\ &= a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + (jj)b_1b_2 = (a_1a_2 + b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + b_1a_2). \end{aligned}$$

The cartesian form is convenient for additions and subtractions but not for multiplications.

1.1.6.4 Multiplying a complex number by j

In our goal toward finding a geometric interpretation of complex multiplication, let's consider next multiplying an arbitrary complex number $z = a + jb$ by j :

$$z \cdot j = (a + jb) \cdot j = -b + ja$$

Figura 1.5: Multiplying by i

Let's interpret this statement geometrically. The point z in \mathbb{C} is located a units to the right of the imaginary axis and b units above the real axis. The point $z \cdot j$ is located b units to the left, and a units above. What has happened is that multiplying by j has rotated the point z 90° counterclockwise around the origin to the point zj . Stated more briefly, multiplication by j gives a 90° counterclockwise rotation about 0. You can analyze what multiplication by $-j$ does in the same way. You'll find that multiplication by $-j$ gives a 90° clockwise rotation about 0. When we don't specify counterclockwise or clockwise when referring to rotations or angles, we'll follow the standard convention that counterclockwise is intended. Then we can say that multiplication by $-j$ gives a -90° rotation about 0, or if you prefer, a 270° rotation about 0.

1.2 The Field \mathbb{C} of Complex Numbers

Before continuing with signal processing, I want to spend some time talking about the field of complex numbers \mathbb{C} . The motivation for this is to try and provide a much more formal definition of the field \mathbb{C} than the one roughly introduced in the previous section which represents the minimal concepts required for the contents of the following pages. You can simply skip over this section if you are not interested or have previous knowledge.

1.2.1 Naive introduction to the field \mathbb{C}

The usual way to quickly start with complex numbers is to say that we introduce a new object, which I will call j (mathematicians use i), such that the following *characteristic* property holds:

$$j^2 = -1.$$

Now, having this object at my disposal, I can easily define the set of complex numbers as the set with elements of the form $x + jy$ where x, y are our familiar real numbers:

$$\mathbb{C} := \{x + jy : x, y \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}.$$

After this, using the usual rules of arithmetic operations as applied to the real numbers, I can define the four fundamental operations for the complex numbers as well. And I therefore have arithmetic in the set of complex numbers.

The definition we just saw and the one used in the previous section are, however, not really satisfactory, because they *do not explain* what j is, and hence we get a sense of mystery here (and hence the name "imaginary" numbers). But there is actually nothing imaginary about complex numbers, as was realized by Gauss and others, if we identify them with the elements of our familiar \mathbb{R}^2 and add a little more. This is the first formal introduction for the set of complex numbers \mathbb{C} I will provide in the subsection **Definition of the field \mathbb{C}** (as a side remark I note that there are other ways to define complex numbers, but this one is arguably the most natural). A second rigorous definition using matrices is provided in the section **Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2×2 matrices**.

1.2.2 Definition of the field \mathbb{C}

The set of complex numbers, which is denoted by \mathbb{C} , is, by definition, \mathbb{R}^2 , this is, the set of all vectors with two real coordinates, on which the operation of addition and multiplication are defined as follows

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Definitely, the multiplication rule should look a little strange at the beginning, but of course the motivation comes from the previous subsection.

The set \mathbb{C} , defined with such an addition and multiplication, is a field. That is, it can be proved that for any $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, we have

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$z_1z_2 = z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),$$

there is a unique element $0 \in \mathbb{C}$ such that

$$z_1 + 0 = z_1,$$

for any $z_1 \in \mathbb{C}$ there is $-z_1 \in \mathbb{C}$ such that

$$z_1 + (-z_1) = 0,$$

for any nonzero $z \in \mathbb{C}$ there is $z^{-1} \in \mathbb{C}$ such that

$$zz^{-1} = 1.$$

It should be clear that above $0 = (0, 0)$, where the 0 on the left of the equal sign is the complex zero, whereas the ones used in the round brackets are in \mathbb{R} .

Now, consider the following equation

$$z^2 + 1 = 0.$$

Here 1 and 0 and the complex unit and the complex zero. We all know that this equation has no real roots. But I claim that it has two complex roots being $(0, 1)$ and $-(0, 1)$. This can easily be checked by substitution according to the definition we provided for our addition and multiplication (just keep in mind that .

1.2.3 Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2×2 matrices

To be continued.

Capitolo 2

Concetti Preliminari

"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new."

— Albert Einstein

Di seguito alcune definizioni essenziali necessarie per poter comprendere i contenuti presentati nei capitoli successivi.

2.1 Introduzione allo studio dei segnali

La teoria dei segnali studia le proprietà matematiche e statistiche dei segnali, definiti come funzioni matematiche del tempo. In generale, un segnale è una variazione temporale dello stato fisico di un sistema o di una grandezza fisica (potenziale o corrente elettrica per segnali elettrici, parametri di campo elettromagnetico per segnali radio) che serve per rappresentare e trasmettere messaggi ovvero informazione a distanza; il sistema in questione può essere il più disparato. In elettronica un segnale viene dunque studiato attraverso un modello matematico o funzione in cui il tempo (o il suo inverso, la frequenza) è considerato variabile indipendente.

Un segnale è *una qualunque grandezza fisica variabile cui è associata una informazione*.

In generale esistono diversi tipi di segnali, ma tutti sono accomunati dall'essere in natura segnali casuali e continui e quasi mai deterministici.

La teoria dei segnali studia la rappresentazione dei segnali in modo da poter poi manipolarli e trattarli matematicamente. Questa rappresentazione richiede l'uso di matematica astratta e, nel caso di segnali stocastici, della teoria della probabilità.

La teoria si suddivide in due grandi branche a seconda del tipo di segnale in esame: i "segnali determinati" o deterministici, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i "segnali stocastici" o aleatori, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche e che rientrano nella più vasta tematica dei processi aleatori o stocastici.

Nella trasmissione di informazione a distanza (telecomunicazione) i segnali determinati vengono utilizzati per la modulazione tramite portante, mentre i segnali contenenti l'informazione sono invece segnali aleatori, quindi processi stocastici, dal momento che l'informazione viaggia sotto forma di "innovazione" ovvero varia in maniera aleatoria nel tempo.

I segnali periodici possono essere trattati mediante l'astrazione in uno spazio vettoriale lineare quale lo spazio di Hilbert e quindi con l'utilizzo della serie di Fourier. Per quanto riguarda i segnali non periodici, questi necessitano della trasformata di Fourier.

Altra suddivisione è quella in "segnali continui" e "segnali discreti". Ad essi si associano rispettivamente le comunicazioni analogiche e le comunicazioni digitali.

Parte della teoria dei segnali è intimamente connessa con la teoria dei sistemi giacché molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output. Centrale è anche l'analisi di Fourier ovvero l'analisi spettrale.

2.1.1 Proprietà elementari dei segnali determinati

Limitiamo per il momento la nostra attenzione ai segnali determinati e definiamo alcune grandezze di fondamentale importanza per il prosieguo dello studio. Supponiamo di disporre di un resistore di resistenza R

attraversato da una corrente $i(t)$; l'espressione della potenza istantanea dissipata sul resistore per effetto Joule è, come è noto, $Ri^2(t)$. Osserviamo quindi la proporzionalità tra la potenza istantanea e il *quadrato* del segnale; il coefficiente di proporzionalità è legato al particolare esempio. Estendendo in maniera astratta tale definizione, diremo che al segnale $x(t)$ è associata una potenza istantanea *normalizzata* (aggettivo che verrà poi sistematicamente omissso) pari a

$$P_x(t) = P_x \triangleq |x(t)|^2. \quad (2.1.1.1)$$

Inoltre, tornando all'esempio del resistore, l'energia totale dissipata per effetto del passaggio della corrente $i(t)$ è pari a $\int_{-\infty}^{+\infty} Ri^2(t) dt$. Conseguentemente, definiremo l'*energia* associata al segnale $x(t)$ come

$$E_x(t) = E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt \quad (2.1.1.2)$$

purchè l'integrale risulti convergente (cioè $E_x < \infty$). La definizione di energia, benchè meno intuitiva, viene banalmente estesa anche ai segnali a tempo discreto:

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.1.1.3)$$

Per tutti i segnali *fisici* (cioè effettivamente osservati) l'integrale (o la sommatoria) che definisce l'energia risulta convergente, poichè ogni segnale proveniente da un sistema fisico è portatore di *energia finita*. Molto spesso però conviene considerare *modelli ideali* di segnale, ovvero segnali idealizzati non esistenti in natura, ma assai utili per approssimare casi reali.

Consideriamo ora un generico segnale $x(t)$ a valori limitati ma energia infinita, e costruiamo il segnale $x_T(t)$ con una operazione di *troncamento* come segue:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.1.1.4)$$

Se indichiamo con E_{x_T} l'energia di $x_T(t)$, è chiaro che in generale $E_{x_T} < \infty$ poichè il segnale è diverso da zero e assume valori finiti solo su di un

intervallo limitato. Altrettanto chiaro è che se ingrandiamo l'intervallo di osservazione per comprendere l'andamento di tutto il segnale $x(t)$ (imponiamo cioè $T \rightarrow \infty$) otteniamo $E_{x_T} \rightarrow \infty$. Introduciamo allora il concetto di *potenza* di un segnale: la potenza media del segnale $x_T(t)$ valutata sull'intervallo di osservazione $[-T/2, T/2]$ è per definizione pari all'energia di $x_T(t)$ rapportata alla durata dell'intervallo stesso:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}. \quad (2.1.1.5)$$

Siamo ora in grado di estendere a $x(t)$ questa definizione di *potenza media* attraverso un'operazione di passaggio al limite:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.1.1.6)$$

Analogamente a quanto visto per l'energia di un segnale, per i segnali a tempo discreto abbiamo

$$P_x \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (2.1.1.7)$$

dove la notazione è autoesplicativa. Talvolta torna utile usare il *valore efficace* di un segnale a potenza finita, definito sia per i segnali a tempo continuo, sia per quelli a tempo discreto come

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}. \quad (2.1.1.8)$$

Ricordiamo che il valore efficace di un dato segnale (chiamato nei paesi anglosassoni RMS, *Root Mean Square*) si può interpretare come quel valore che dovrebbe assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato.

Definiamo infine il *valore medio temporale* di un segnale, che richiede un procedimento al limite simile a quello appena visto relativamente alla potenza:

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (2.1.1.9)$$

$$x_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.1.1.10)$$

Nell'ingegneria elettrica, il valore medio rappresenta la "componente continuo" (cioè costante) attorno alla quale si svolge l'evoluzione del segnale.

2.1.1.1 Esercizio 12 Marzo 2018

Calcolare E_y , P_y , y_{eff} e y_m per la funzione $y(t)$ definita come

$$y(t) = x(t) - x(-t), \quad (2.1.1.11)$$

dove $x(t)$ è definita come

$$x(t) = Ae^{-t} \cdot u(t)^1.$$

Infine quindi

$$y(t) = Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t). \quad (2.1.1.12)$$



Figura 2.1: Grafico di $y(t)$ con $A = 1$.

¹Il segnale canonico "gradino unitario" è presente nell'Appendice A: Segnali Canonici.

Come possiamo vedere graficamente, il segnale gradino $u(t)$ fa sì che la funzione complessiva $y(t)$ si ottenga come contributo delle due funzioni

$$Ae^{-t} \quad t \rightarrow +\infty,$$

e

$$-Ae^t \quad t \rightarrow -\infty.$$

Calcolo di E_y

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x(-t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt = \\ &^2 = \int_{-\infty}^0 |-Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t)|^2 dt = \\ &^3 = \int_{-\infty}^0 |-Ae^t|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t}|^2 dt = \int_{-\infty}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2|t|} dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = 2A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 2A^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} [e^{-2t}]_0^{\infty} \right) = \\ &2A^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2 \cdot (\infty)} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2 \cdot (0)} \right) \right) = 2A^2 \cdot \frac{1}{2} = A^2. \end{aligned}$$

²Notiamo che $u(t) = 0$ $[-\infty, 0]$ e $u(-t) = 0$ $[0, +\infty]$.

³Notiamo che $|u(t)|^2 = |u(-t)|^2 = 1$.

Calcolo di P_y , y_{eff} e y_y

Dato che $E_y = A^2 = K < \infty$ allora

$$P_y = 0,$$

$$y_{eff} = 0,$$

$$y_m = 0.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 P_y &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt + \int_0^{T/2} |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt \right] = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 |-Ae^t u(-t)|^2 dt + \int_0^{T/2} |Ae^{-t}u(t)|^2 dt \right] = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{T/2} A^2 e^{-2t} dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2|t|} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{T/2} A^2 e^{-2t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2A^2 \int_0^{T/2} e^{-2t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2A^2 \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-2t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 \int_0^{T/2} 2 \cdot e^{-2t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 \left[e^{-2t} \right]_0^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \left[e^{-T} - 1 \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{2.1.1.13}$$

$$y_{eff} = \sqrt{P_y} = 0. \tag{2.1.1.14}$$

$$\begin{aligned}
y_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) - x(-t) \, dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -Ae^t u(-t) \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t}u(t) \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -Ae^t \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t} \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-A \left(e^0 - e^{-T/2} \right) + A \left(-e^{-T/2} + e^0 \right) \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-A + Ae^{-T/2} - Ae^{-T/2} + A \right] = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.1.15}$$

□

2.2 Segnali periodici a tempo continuo

Un segnale $x(t)$ è periodico se soddisfa la seguente relazione

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (2.2.0.1)$$

per ogni valore della variabile t . La grandezza T_0 rappresenta il *periodo* del segnale che è legato alla *frequenza di ripetizione* f_0 del segnale stesso dalla relazione

$$f_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (2.2.0.2)$$

L'energia E_x del segnale periodico è infinita:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2+kT_0}^{T_0/2+kT_0} |x(t)|^2 dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_{T_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot E_{T_0} = \infty. \end{aligned} \quad (2.2.0.3)$$

Dove si è posto

$$E_{T_0} = \int_{-T_0/2+kT_0}^{T_0/2+kT_0} |x(t)|^2 dt. \quad (2.2.0.4)$$

Per la precedente (2.13) è di fondamentale importanza la seguente considerazione:

Lemma 2.2.1. *L'integrale di una funzione periodica lungo intervalli pari al periodo stesso della funzione è uguale indipendentemente dall'intervallo considerato.*

Ovvero, sia $x(t) = x(t + T_0) \forall t$ un funzione periodica di periodo T_0 , allora

$$\int_0^{T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt. \quad (2.2.0.5)$$

Dimostrazione. Poniamo

$$H(b) = \int_b^{b+T_0} x(t) dt. \quad (2.2.0.6)$$

Calcoliamo la derivata di $H(b)$:

$$\frac{dH(b)}{db} = x(b + T_0) - x(b) \stackrel{4}{=} 0.$$

Ne segue che $H(b)$ è costante, in particolare $H(b) = H(0)$. \square

In generale invece $x(t)$ ha *potenza* P_x finita, per calcolare la quale, non è necessario il procedimento di passaggio al limite definito dalla (2.1.1.6), ma è sufficiente calcolare

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.2.0.7)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \cdot \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} |x(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \cdot k \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (2.2.0.8)$$

\square

Con segnali periodici è bene fare attenzione a non confondere il periodo T_0 della funzione $x(t)$ con il troncamento T della funzione stessa.

Mentre il *valore efficace* di un segnale periodico segue dalla definizione della potenza P_x

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}, \quad (2.2.0.9)$$

⁴Essendo $x(t)$ periodica infatti risulta $x(b + T_0) = x(b)$.

analogamente a quanto visto per la potenza, l'espressione del *valor medio* si semplifica, per il segnale periodico $x(t)$, come segue:

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt. \quad (2.2.0.10)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} x(t) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.0.11)$$

□

2.2.1 Sviluppo in serie di Fourier in forma reale polare

Ciò premesso, ci poniamo una domanda: qual è il modo più appropriato di procedere quando il segnale $x(t)$ è periodico con *andamento arbitrario*, e in particolare *non sinusoidale*? La risposta a questo quesito sta nella cosiddetta *analisi di Fourier* che costituisce la base della moderna teoria dei segnali. Infatti, sotto ipotesi piuttosto ampie, che in seguito elencheremo, un segnale reale periodico qualunque può essere espresso come *somma di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportune* cioè in una forma che richiami:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_1 t + \vartheta_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \vartheta_2) + \dots \quad (2.2.1.1)$$

In particolare, le frequenze di oscillazione includono in generale la "frequenza zero" relative al termine costante, e sono *multiple intere della fre-*

quenza fondamentale f_0 , cosicché la (2.2.1.1) diventa:⁵

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n) \quad (2.2.1.2)$$

dove per comodità di notazione si è anche posto $A_0 = a_0$ e $2A_n = a_n$ per $n \geq 1$. Questa rappresentazione del segnale prende il nome di *sviluppo in serie di Fourier*; più precisamente la relazione (2.2.1.2) costituisce l'espressione in forma polare dello sviluppo in serie di Fourier. Essa permette dunque di rappresentare un segnale reale $x(t)$ come somma di una costante A_0 e di una serie il cui n -esimo termine, detto n -esima oscillazione armonica (o *armonica tout-court*), ha ampiezza $A_n > 0$, frequenza $n f_0$ (la n -esima frequenza armonica) e fase iniziale ϑ_n .

Prima di procedere ulteriormente, da un punto di vista formale, è bene dimostrare che la funzione $A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)$ sia effettivamente periodica:

$$A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n) = A_n \cos(2\pi n f_0 (t - m T_0) + \vartheta_n) \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Ricordando che $f_0 \cdot T_0 = 1$ e che $T_{\cos(x)} = 2\pi$,

$$\begin{aligned} A_n \cos(2\pi n f_0 (t - m T_0) + \vartheta_n) &= \\ &= A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n - 2\pi n f_0 m T_0) = \\ &= A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n - 2\pi n m) = A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n). \end{aligned} \quad (2.2.1.3)$$

□

Evidentemente, ogni particolare segnale $x(t)$ sarà caratterizzato da particolari insiemi di valori di A_n e ϑ_n . Dovremo quindi ricavare formule utili per il calcolo delle ampiezze e delle fasi delle varie armoniche e indicare condizioni matematiche che garantiscano la convergenza della serie (2.2.1.2). Il primo di questi problemi fu risolto dal matematico L. Eulero attorno alla fine del 1700 in connessione con lo studio delle corde vibranti. e fu ripreso alcuni anni più tardi da J.B. Fourier. Quest'ultimo fu il primo a intuire l'importanza e la potenza della rappresentazione (2.2.1.2), che usò per risolvere questioni di trasmissione del calore. La convergenza della (2.2.1.2) fu dimostrata in seguito in maniera rigorosa da P.D. Dirichlet.

⁵Il termine A_0 è dato dal fatto che il coseno in 0 valore 1 mentre il seno vale 0.

2.2.2 Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa

Per semplificare gli sviluppi analitici si preferisce usare una forma alternativa della serie di Fourier. Richiamando le formule di Eulero delle funzioni trigonometriche

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad , \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad (2.2.2.1)$$

la (2.2.1.2) può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n) = \\ &= A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)} + e^{-j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)}}{2} = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)} + e^{-j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)} \right) = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)} = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\vartheta_n} e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\vartheta_n} e^{-j2\pi n f_0 t} = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\vartheta_n} e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} A_{-n} e^{-j\vartheta_{-n}} e^{j2\pi n f_0 t} = \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

Definiamo ora le quantità

$$\begin{aligned} X_0 &\triangleq A_0 \\ X_n &\triangleq A_n e^{j\vartheta_n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ X_n &\triangleq A_{-n} e^{-j\vartheta_{-n}} \quad , \quad n = \dots, -2, -1. \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

Se si effettuano le opportune sostituzioni nella (2.2.2.2) si ricava

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} - \sum_{n=-\infty}^{-1} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.2.2.4)$$

che rappresenta l'espressione in forma complessa della serie di Fourier⁶.

⁶Tale rappresentazione può essere estesa nella stessa forma anche al caso di segnale $x(t)$ complesso.

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del generico coefficiente di Fourier X_k , dove k deve intendersi *fissato*. A tal fine moltiplichiamo entrambi i membri della (2.2.7.1) per il fattore $e^{-j2\pi k f_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} \quad (2.2.2.5)$$

e integriamo il risultato in un intervallo pari al periodo T_0 del segnale stesso:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (2.2.2.6)$$

Supponendo che la serie a secondo membro converga *uniformemente* (cosa che peraltro non è stata dimostrata fino a questo momento), possiamo considerare il termine $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_n$ una costante:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (2.2.2.7)$$

Ovvero

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt. \quad (2.2.2.8)$$

Procediamo adesso con il calcolo dell'integrale a secondo membro. Ricordando che $f_0 \cdot T_0 = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{j2\pi(n-k)f_0} \frac{d}{dt} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{j2\pi(n-k)f_0} \left[e^{j2\pi(n-k)f_0 t} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{e^{j2\pi(n-k)f_0(T_0/2)} - e^{j2\pi(n-k)f_0(-T_0/2)}}{j2\pi(n-k)f_0} = \\ &= \frac{1}{j2\pi(n-k)f_0} \left[e^{j\pi(n-k)} - e^{-j\pi(n-k)} \right] = \frac{2j \sin(\pi(n-k))}{j2\pi(n-k)f_0} = \frac{2 \sin(\pi(n-k))}{2\pi(n-k)f_0} = \frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)f_0} \end{aligned}$$

⁷ $\int f(t) e^{f(t)} dt = e^{f(t)}$ quindi si moltiplica e divide per $\frac{d}{dt} (j2\pi(n-k)f_0 t) = j2\pi(n-k)f_0$.

$$= \frac{e^{j\pi(n-k)} - e^{-j\pi(n-k)}}{j2\pi(n-k)f_0} = \frac{\sin[\pi(n-k)]}{\pi(n-k)f_0}$$

Il valore dell'integrale è pertanto nullo se $n \neq k$, essendo $\sin[\pi(n-k)] = 0$. Se $n = k$ allora si ottiene $\sin[0] = 0$ e il risultato perde di significato in quanto si ottiene una forma $\frac{0}{0}$. Tuttavia, ponendo $n = k$ direttamente nell'espressione di partenza si ricava che l'integrale cercato vale in questo caso T_0 :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Riprendendo quindi da dove avevamo lasciato la nostra ricerca per una espressione per il generico coefficiente di Fourier,

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt.$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = X_k T_0.$$

Dalla quale si deduce infine, l'espressione del generico coefficiente di Fourier X_k data da:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (2.2.2.9)$$

Questa relazione permette quindi di effettuare il calcolo dei *coefficienti della serie di Fourier* di un segnale $x(t)$ dato. In particolare, per $k = 0$ si ha

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad (2.2.2.10)$$

che coincide con l'espressione del valore medio x_m del segnale.

$$\frac{8 \frac{e^{j\pi(n-k)} - e^{-j\pi(n-k)}}{j^2}}{2j} = \frac{\sin[\pi(n-k)]}{2j}.$$

2.2.3 Sviluppo in serie di Fourier in forma reale rettangolare

Abbiamo dunque ricavato due possibili espressioni per la serie di Fourier, e precisamente quella in forma polare (2.2.1.2) e quella in forma complessa (2.2.7.1); ne esiste anche una terza, detta *espressione in forma rettangolare*, che ricaviamo di seguito. Sviluppando le funzioni cosinusoidali della (2.2.1.2) si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n) = \\ &= A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos(2\pi n f_0 t) \cos \vartheta_n - \sin(2\pi n f_0 t) \sin \vartheta_n], \end{aligned} \quad (2.2.3.1)$$

dove è stata sfruttata l'identità $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Se adesso si definiscono le quantità $a_0 \triangleq A_0$, $a_n \triangleq A_n \cos \vartheta_n$ e $b_n \triangleq A_n \sin \vartheta_n$, con $n = 1, 2, \dots$, si ricava la relazione cercata:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) - b_n \sin(2\pi n f_0 t)]. \quad (2.2.3.2)$$

I coefficienti dell'espressione in forma rettangolare a_n , b_n sono legati a quelli relativi all'espansione in forma complessa X_n della relazioni

$$a_n = \Re[X_n] = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad (2.2.3.3)$$

$$b_n = \Im[X_n] = -\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt. \quad (2.2.3.4)$$

Nelle equazioni precedenti, la notazione $\int_{[T_0]}$ sta a indicare che l'integrale può essere esteso a un qualunque intervallo temporale di ampiezza T_0 . Per ragioni di simmetria, è buona norma scegliere l'intervallo $[-T_0/2, T_0/2]$.

2.2.4 Il criterio di Dirichlet

Ricordiamo che negli sviluppi analitici necessari per ottenere l'espressione del generico coefficiente di Fourier (2.2.2.9)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (2.2.4.1)$$

è stata ipotizzata la convergenza uniforme della serie ottenuta in (2.2.7.1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}. \quad (2.2.4.2)$$

Per i segnali che si incontrano comunemente nella applicazioni pratiche, questa ipotesi è sempre verificata; spesso però, per schematizzare fenomeni fisici, si fa ricorso a funzioni che non rappresentano esattamente i segnali in esame, ma che offrono il vantaggio non indifferente di una maggiore *semplicità*. Per tali funzioni, tuttavia, non è più assicurata in generale la possibilità di uno sviluppo in serie di Fourier e diventa quindi necessario disporre di criteri che garantiscano la correttezza di tale sviluppo.

Un insieme di condizioni sufficienti che garantiscano la possibilità di sviluppare un segnale in serie di Fourier è il cosiddetto *criterio di Dirichlet* che può essere enunciato come segue:

- se $x(t)$ è assolutamente integrabile⁹ sul periodo T_0 , vale a dire se verifica la condizione

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.2.4.3)$$

- se $x(t)$ è continuo o presenta in un periodo un numero finito di discontinuità di prima specie;

⁹Una funzione assolutamente integrabile su un intervallo è una funzione per la quale esiste finito l'integrale del valore assoluto della funzione sull'intervallo di integrazione considerato.

- se $x(t)$ è derivabile rispetto al tempo nel periodo, escluso al più un numero finito di punti nei quali esistono finite la derivata destra e sinistra,

allora la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione $x(t)$ nei punti in cui questa è continua, e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui $x(t)$ presenta le eventuali discontinuità di prima specie.

La terza ipotesi del criterio può anche essere sostituita con la seguente, che risulta del tutto equivalente:

- se il segnale presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo.

2.2.5 Spettri di ampiezza e di fase

Dunque, ogni segnale $x(t)$ che soddisfi il criterio di Dirichlet può essere rappresentato con lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad (2.2.5.1)$$

dove il particolare coefficiente X_k della serie è dato da

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (2.2.5.2)$$

Naturalmente, la sequenza X_n è in generale *complessa*; per rappresentarla è conveniente tracciare due grafici che prendono il nome di *spettro di ampiezza* e *spettro di fase*¹⁰. Il primo illustra l'andamento dell'ampiezza (modulo) dei coefficienti X_k , il secondo ne illustra l'andamento della fase, entrambi in funzione dell'ordine k del coefficiente o del valore della k -esima frequenza armonica $k f_0$. Esempi stilizzati di queste rappresentazioni sono riportati nelle seguenti figure:

¹⁰Il termine "spettro" deve intendersi nel significato di "gamma di rappresentazione, gamma di visione" e nasce in fisica nel campo della spettroscopia in cui si *analizza* la composizione dei materiali attraverso le "righe" di emissione caratteristiche dei diversi elementi chimici.

Spettro di ampiezza e di fase

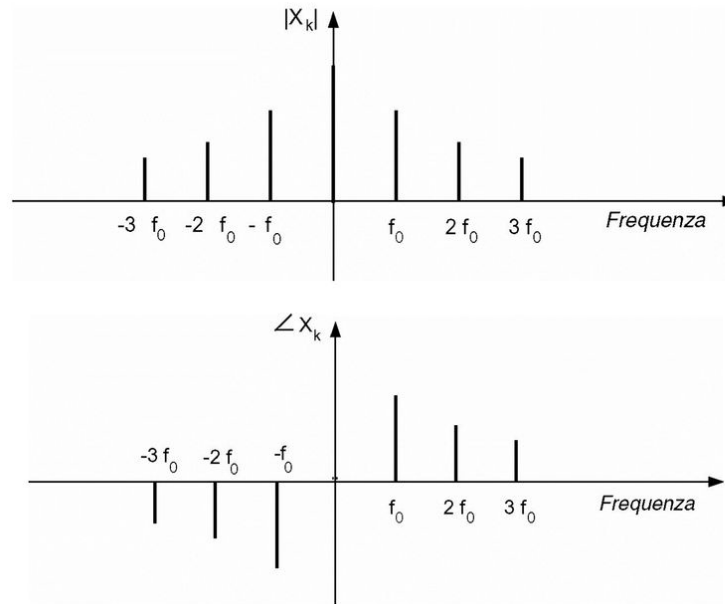


Figura 2.2: Spettro di ampiezza e di fase.

2.2.5.1 Spettro di un coseno

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.3)$$

Esso rappresenta un'oscillazione cosinusoidale di frequenza f_0 ; il periodo del segnale è $T_0 = 1/f_0$. Ricaviamo i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
 &= \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f_0(1-n)t} dt + \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f_0(1+n)t} dt = \\
 &= \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi f_0(1-n)t] + j \sin[2\pi f_0(1-n)t]) dt + \\
 &+ \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi f_0(1+n)t] - j \sin[2\pi f_0(1+n)t]) dt = \\
 &= \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt + \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt + \\
 &+ \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt - \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt =
 \end{aligned} \tag{2.2.5.4}$$

Osserviamo a questo punto che

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{2T_0} \cdot T_0 = \frac{A}{2} & n = 1 \\ \frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq 1 \end{cases} , \\
 \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n = 1 \\ \frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.2.5.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{2T_0} \cdot T_0 = \frac{A}{2} & n = -1 \\ \frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq -1 \end{cases} , \\
-\frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt &= \begin{cases} -\frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n = -1 \\ -\frac{A}{2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq -1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.2.5.6}$$

Ne segue quindi che

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt + \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt + \\
&+ \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt - \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{2.2.5.7}$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}
|X_{\pm 1}| &= \frac{A}{2} , \\
\angle X_{\pm 1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.5.8}$$

Gli spettri di ampiezza e fase del segnale sono mostrati nella seguente figura:

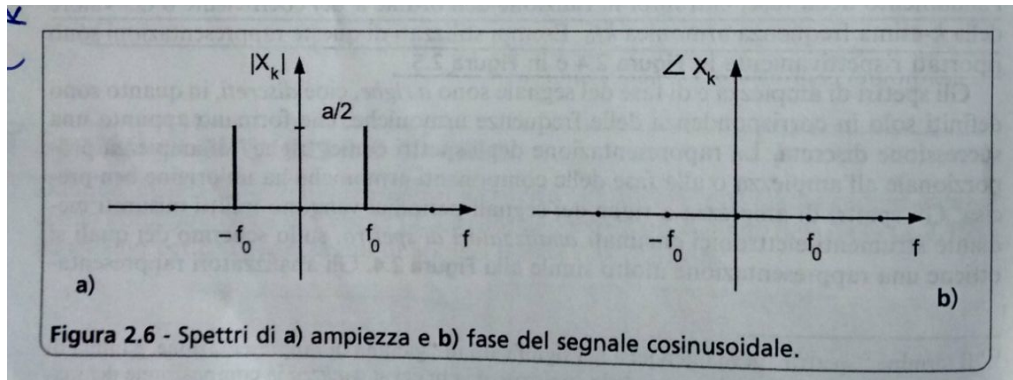


Figura 2.3: Spettri di ampiezza e fase dei segnali cosinusoidale.

Il calcolo può essere effettuato anche tramite un rapido ragionamento: se si confronta l'espressione in forma polare della serie di Fourier di un segnale generico

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k), \quad (2.2.5.9)$$

comparandola a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.10)$$

è possibile vedere immediatamente che

$$A_0 = 0$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = A \cos(2\pi f_0 t)^{11} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{A}{2}, \vartheta_1 = 0 \\ A_k, \vartheta_k = 0 \quad \forall k \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$X_1 = \frac{A}{2}, X_{-1} = \frac{A}{2}; \quad X_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1.$$

2.2.5.2 Spettro di un seno

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.11)$$

¹¹Notare che $\cos(2\pi f_0 t)$ ha fase iniziale nulla.

Esso rappresenta un'oscillazione sinusoidale di frequenza f_0 ; il periodo del segnale è $T_0 = 1/f_0$. Ricaviamo i coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \sin(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
 &= \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f_0(1-n)t} dt - \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f_0(1+n)t} dt = \\
 &= \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi f_0(1-n)t] + j \sin[2\pi f_0(1-n)t]) dt + \\
 &\quad - \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi f_0(1+n)t] - j \sin[2\pi f_0(1+n)t]) dt = \\
 &= \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt + \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt + \\
 &\quad - \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt + \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt =
 \end{aligned} \tag{2.2.5.12}$$

Osserviamo a questo punto che

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{j2T_0} \cdot T_0 = \frac{A}{j2} & n = 1 \\ \frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq 1 \end{cases} , \\
 \frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n = 1 \\ \frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.2.5.13}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt &= \begin{cases} -\frac{A}{j2T_0} \cdot T_0 = -\frac{A}{j2} & n = -1 \\ -\frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq -1 \end{cases} , \\
\frac{A}{j2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt &= \begin{cases} \frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n = -1 \\ \frac{A}{j2T_0} \cdot 0 = 0 & n \neq -1 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.2.5.14}$$

Ne segue quindi che

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1-n)t] dt + \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1-n)t] dt + \\
&+ \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi f_0(1+n)t] dt - \frac{A}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j \sin[2\pi f_0(1+n)t] dt = \\
&= \begin{cases} \frac{A}{j2} & n = 1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \\ -\frac{A}{j2} & n = -1 \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{2.2.5.15}$$

In conclusione, ricordando che

$$\begin{aligned}
\frac{A}{j2} \cdot \frac{j}{j} &= -j \cdot \frac{A}{2}, \\
-\frac{A}{j2} \cdot \frac{j}{j} &= j \cdot \frac{A}{2},
\end{aligned}$$

possiamo scrivere che

$$|X_{\pm 1}| = |\pm j \cdot \frac{A}{2}| = \frac{A}{2}, \tag{2.2.5.16}$$

$$\angle X_{\pm 1} = \begin{cases} \angle -j \cdot \frac{A}{2} = \angle \frac{A}{2} e^{-j} = -\frac{\pi}{2} \\ \angle j \cdot \frac{A}{2} = \angle \frac{A}{2} e^j = \frac{\pi}{2} \end{cases} . \tag{2.2.5.17}$$

Gli spettri di ampiezza e fase del segnale sono mostrati nella seguente figura:

Lo spettro di ampiezza è ovviamente uguale a quello del coseno visto precedentemente, mentre lo spettro di fase è differente.

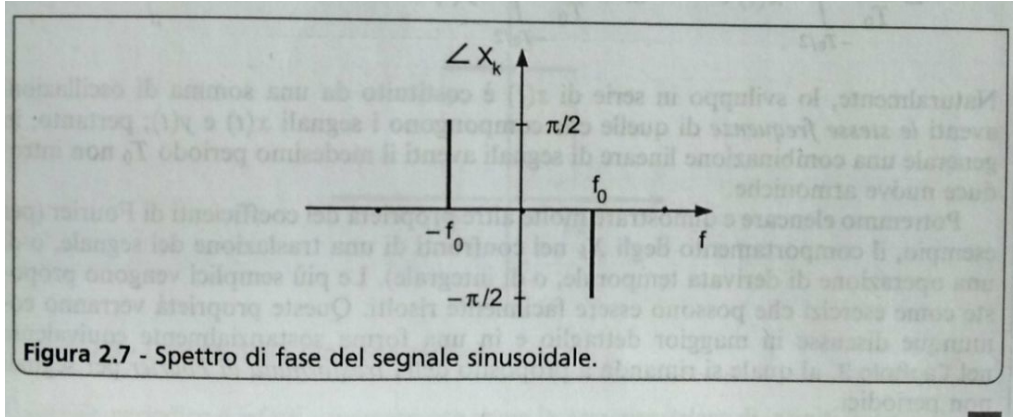


Figura 2.4: Spettro di fase del segnale sinusoidale.

Il calcolo può essere effettuato anche tramite un rapido ragionamento: riscriviamo il segnale come

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}), \quad (2.2.5.18)$$

ora, se si confronta l'espressione in forma polare della serie di Fourier di un segnale generico

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k), \quad (2.2.5.19)$$

comparandola a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}). \quad (2.2.5.20)$$

è possibile vedere immediatamente che

$$A_0 = 0$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})^{12} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{A}{2}, \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2} \\ A_k, \vartheta_k = 0 \forall k \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}, X_{-1} = \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad X_k = 0 \forall k \neq \pm 1.$$

¹²Notare che $\cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$ ha fase iniziale $-\frac{\pi}{2}$.

2.2.6 MATLAB 2.1

Verifichiamo le proprietà della serie di Fourier (simmetria e linearità) considerando un esempio di segnale periodico tratto dalla realtà. Prendiamo, in particolare, il tracciato di un *elettrocardiogramma*, che è stato acquisito registrando l'attività elettrica del cuore di un paziente al variare del tempo. Come è noto, la differenza di potenziale tra gli elettrodi applicati sul corpo del paziente (cioè l'elettrocardiogramma) ha un andamento tipo (pressoché) periodico, in virtù della regolarità temporale con la quale vengono prodotti gli impulsi da parte del miocardio.

Per verificare sperimentalmente quanto abbiamo appena introdotto, facciamo ricorso al pacchetto software per l'analisi e la simulazione di segnali Matlab. Riguardo all'uso di Matlab occorre fare alcune precisazioni: innanzitutto osserviamo che fino ad ora abbiamo sempre ragionato in termini di segnali *analogici*, e in particolare di segnali a *tempo continuo*. Matlab è invece un simulatore a *tempo discreto*, che fa uso di segnali numerici o *digitali*. Questi segnali a tempo discreto vengono introdotti per *emulare* o *simulare* segnali a tempo continuo (che non possono essere trattati dai computer digitali). Dunque in luogo di una forma d'onda continua nel tempo $x(t)$, Matlab elabora un vettore temporale x ottenuto, come nelle classiche procedure di calcolo numerico, raccogliendo una successione di N valori consecutivi ed equispaziati di $x(t)$. Tali campioni vengono estratti da $x(t)$ su di un dato intervallo (dominio) temporale con un certo quanto temporale Δt ; in breve, si ha che $x = [x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x((N-1)\Delta t)]$. Un vettore N -dimensionale come quello appena definito rappresenta la tipica entità trattata da Matlab per emulare un segnale analogico.

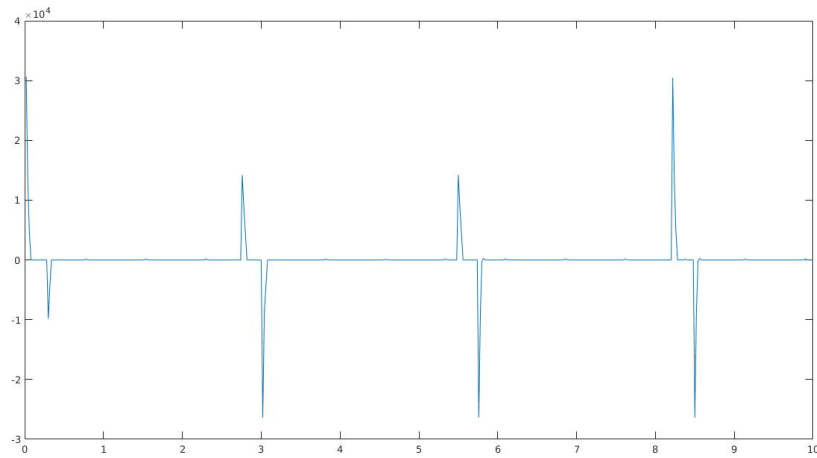


Figura 2.5: Elettrocardiogramma.

La figura precedente riporta l'andamento nel tempo della differenza di potenziale prodotta dall'attività cardiaca, registrata su di un paziente che nel passato ha subito un infarto miocardico (segnali di questo tipo sono facilmente estraibili da database disponibili online ¹³). Nel caso specifico, i dati sono immagazzinati nel file binario 'ecg.dat', che utilizza 16 bit per rappresentare ciascun campione temporale, con una spaziatura temporale pari a $\Delta t = 20ms$. Si consideri il seguente script Matlab

```

1 %%%
2 %
3 % File:          ecg.m
4 % Author:        Rambod Rahmani <rambodrahmani@autistici.org>
5 % Date:          18/01/2019
6 %
7 %%%
8
9 % apertura del file in lettura
10 fOut = fopen('ecg.dat');
11
12 % numeri di campioni da memorizzare
13 numeroCampioni = 500;
14
15 % segnale ECG
16 x = fread(fOut, numeroCampioni, 'int16');
17
18 % spaziatura temporale dei campioni [s]
19 deltaT = 0.02;

```

¹³ <https://www.physionet.org/physiobank/database/mitdb/>

```

20
21 % scala dei tempi
22 tempo = (1:numeroCampioni)*deltaT;
23
24 % rappresentiamo graficamente il segnale
25 figure
26 plot(tempo, x);
27
28 % lunghezza dei punti su cui calcola la FFT
29 lunghezzaFft = 2^nextpow2(numeroCampioni);
30
31 % serie di Fourier del segnale
32 X=fft(x, lunghezzaFft);
33
34 % rendiamo la serie di Fourier ottenuta simmetrica rispetto all'origine
35 X=[X(lunghezzaFft/2+1:lunghezzaFft) X(1:lunghezzaFft/2)];
36
37 % calcolo del vettore delle frequenze
38 frequenza = linspace(-0.5, 0.5, length(X))/deltaT;
39
40 % rappresentiamo graficamente la serie di Fourier del segnale
41 figure
42 plot(frequenza, abs(X));

```

Le righe di codice

```

1 fOut = fopen('ecg.dat');
2 numeroCampioni = 5000;
3 x = fread(fOut, numeroCampioni, 'int16');

```

servono a leggere 500 campioni dall'elettrocardiogramma e memorizzarli nel vettore x . A questo punto, è possibile visualizzare l'andamento temporale del segnale con

```

1 deltaT = 0.02;
2 tempo = (1:numeroCampioni)*deltaT;
3 figure
4 plot(tempo, x);

```

Utilizzando la funzione `fft` in dotazione a Matlab, è possibile valutare sperimentalmente lo spettro del segnale in esame:

```

1 lunghezzaFft = 2^nextpow2(numeroCampioni);
2 X=fft(x, lunghezzaFft);
3 X=[X(lunghezzaFft/2+1:lunghezzaFft) X(1:lunghezzaFft/2)];
4 frequenza = linspace(-0.5, 0.5, length(X))/deltaT;
5 figure
6 plot(frequenza, abs(X));

```

Il risultato delle precedenti operazioni è lo spettro di ampiezza illustrato di seguito. Come possiamo facilmente vedere, sono presenti righe abbastanza marcate (e simmetriche rispetto all'origine), che ci consentono di affermare che lo spettro calcolato è quello di un segnale periodico.

Possiamo identificare l'armonica fondamentale f_0 a una frequenza praticamente uguale a 1Hz ; ciò suggerisce che la pulsazione cardiaca del paziente al momento dell'elettrocardiogramma è pari a 60 battiti al minuto, come del resto ci potevamo aspettare valutando la distanza temporale T_0 tra due picchi consecutivi del segnale. Tuttavia, lo spettro ottenuto non è esattamente a righe come ci aspetteremo da un segnale periodico: le righe non sono isolate, in quanto si manifestano componenti frequenziali anche tra un'armonica e l'altra, e non sono neanche infinitamente strette. Questi fenomeni sono dovuti al fatto che il battito cardiaco è soltanto *approssimativamente* periodico. In realtà anche su piccola scala temporale, l'attività miocardica ha leggere irregolarità temporali e quindi lo spettro risultante non è perfettamente a righe.

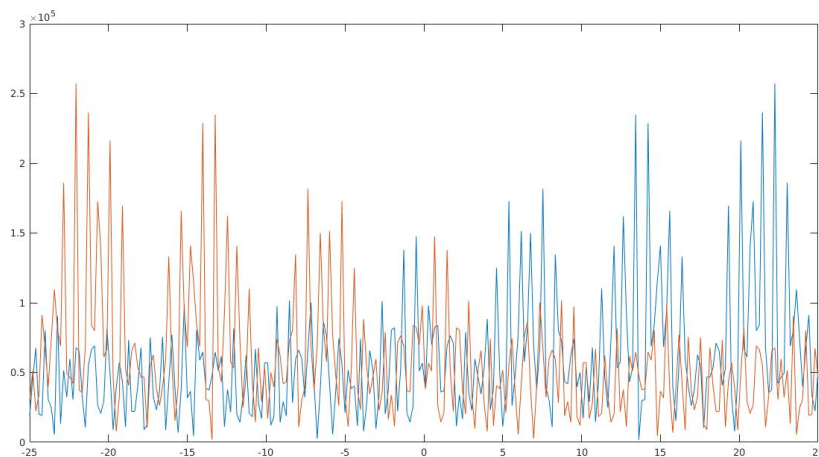


Figura 2.6: Elettrocardiogramma.

2.2.7 MATLAB 2.2

L'equazione di sintesi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.2.7.1)$$

richiede un numero illimitato di armoniche per ricostruire il segnale periodico $x(t)$. Le considerazioni fatte però suggeriscono che una approssimazione soddisfacente del segnale può essere conseguita anche con un numero *finito* di armoniche. Possiamo verificare "sperimentalmente" l'effetto che il troncamento a un numero finito K di armoniche produce sulla sintesi del segnale *treno di impulsi*

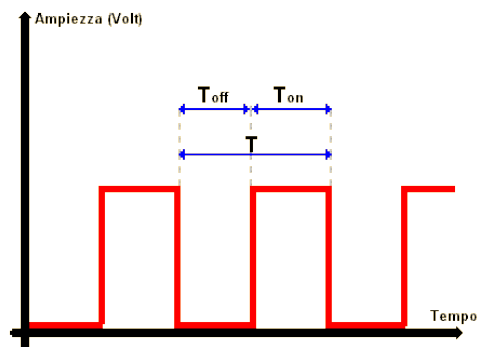


Figura 2.7: Rappresentazione grafica del segnale treno di impulsi.

sfruttando nuovamente il pacchetto software Matlab. Per riprodurre l'equazione di sintesi dobbiamo generare una rappresentazione vettoriale delle forme d'onda $\cos(2\pi k f_0 t)$ al variare di k . In altre parole, occorre calcolare i punti di queste curve utilizzando come supporto dei vettori temporali sufficientemente "fitti" (cioè con Δt sufficientemente piccolo), che siano in grado di approssimare in maniera accurata l'andamento dei segnali a tempo continuo.

Si consideri il seguente script Matlab

```

1 % numero di campioni per periodo
2 N = 51;
3
4 % numero di armoniche da utilizzare
5 K = 30000;
6
```

```

7 % limite inferiore della scala dei tempi
8 tempoNormalizzatoMin = -1.0;
9
10 % limite superiore della scala dei tempi
11 tempoNormalizzatoMax = +1.0;
12
13 % vettore tempo
14 tempoNormalizzato = linspace(tempoNormalizzatoMin, tempoNormalizzatoMax, N*(
    tempoNormalizzatoMax - tempoNormalizzatoMin));
15
16 % X_0 = 1/2
17 componentContinua = 0.5;
18
19 % vettore degli indici k
20 k = (1:2:K);
21
22 % vettore dei coefficienti X_k per ciascun valore di k
23 coefficienti = 2/pi*(-1).^((k-1)/2)./k;
24
25 % vettore dei coseni per ciascun valore di k
26 coseni = cos(2*pi*tempoNormalizzato'*k);
27
28 % equazione di sintesi
29 xApprossimante = componentContinua + sum(coseni*coefficienti', 2);
30
31 % rappresentazione grafica dei coefficienti
32 plot(xApprossimante);

```

Di seguito i grafici del seguente script per $K = 3$, $K = 7$, $K = 15$, $K = 30$.

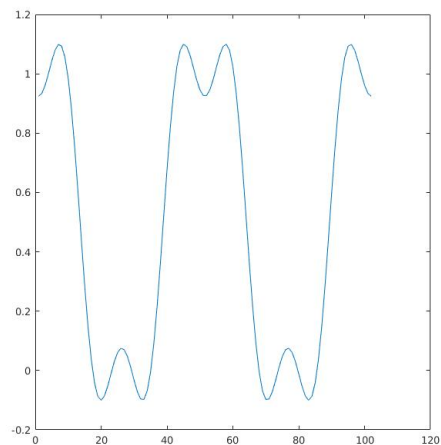


Figura 2.8: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 3$.

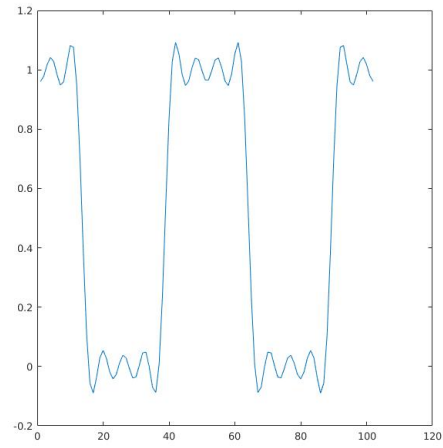


Figura 2.9: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 7$.

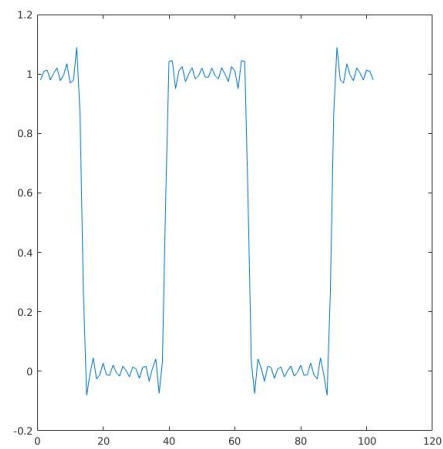


Figura 2.10: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 15$.

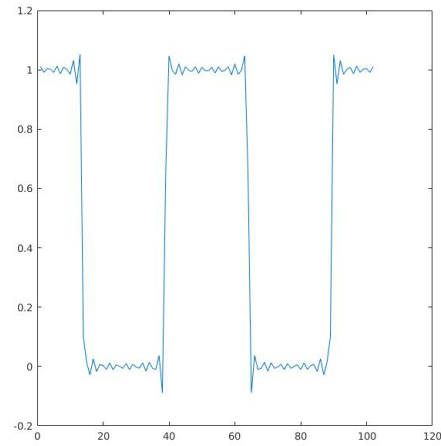


Figura 2.11: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 30$.

È interessante fornire la rappresentazione grafica dell'approssimazione che si ottiene per un valore crescente di K sino ad ottenere una quasi perfetta rappresentazione del segnale treno di impulsi.

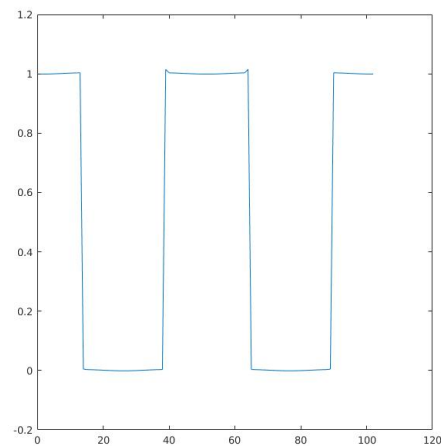


Figura 2.12: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 300$.

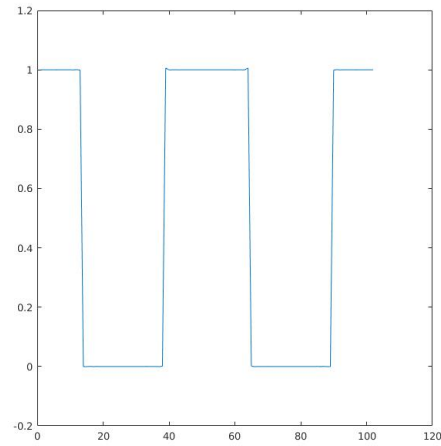


Figura 2.13: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 3000$.

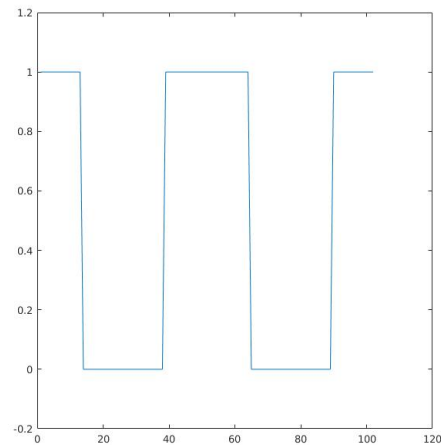


Figura 2.14: Approssimazione del treno di impulsi per $K = 30000$.

In tutto questo volume gli esperimenti Matlab vengono usati come semplici strumenti per chiarire ulteriormente i concetti esposti nel testo. Non vi è nessuna pretesa di *far apprendere* Matlab con le sue regole e/o i suoi trucchi. Non possiamo però sottrarci, di quando in quando, a qualche osservazione di carattere generale sulla programmazione. In parti-

colare, il codice presentato qui sopra merita alcune precisazioni riguardo allo stile di scrittura. Come è possibile notare soprattutto nelle ultime righe, l'approccio adottato fa un uso apprezzabile di *matrici* e *vettori*, a scapito talvolta della leggibilità del codice. Per esempio, invece di utilizzare un ciclo `for` in funzione dei coefficienti k per l'equazione di sintesi come in

```

1 % X_0 = 1/2
2 componenteContinua = 0.5;
3
4 % inizializzazione del vettore del segnale approssimante
5 ones(1, length(tempoNormalizzato));
6
7 % ciclo sui vari indici k
8 for k = 1:2:K
9     % X_k
10    coefficienteK = 2/(k*pi)*(-1)^((k-1)/2);
11
12    % aggiornamento del vettore segnale approssimante mediante l'equazione
13    % di sintesi
14    xApprossimante = xApprossimante + coefficienteK * cos(2*pi*k*
        tempoNormalizzato);
15 end

```

(e come si farebbe utilizzando un linguaggio di programmazione general-purpose, per esempio C o C++), abbiamo usato il prodotto matriciale tra vettore coseni e coefficienti. Il motivo di tale scelta risiede nel fatto che Matlab, a differenza di altri ambienti di simulazione numerica e altri linguaggi di programmazione, è ottimizzato per il calcolo matriciale. È buona regola, quindi, sfruttare questa caratteristica, adottando uno stile di programmazione conseguente, per ottenere un codice efficiente che venga eseguito velocemente sulla piattaforma di calcolo utilizzata.

2.3 Segnali aperiodici a tempo continuo

Consideriamo il segnale detto *treno di impulsi rettangolari di durata T e periodo T_0 ($T < T_0$)* rappresentato nella seguente figura

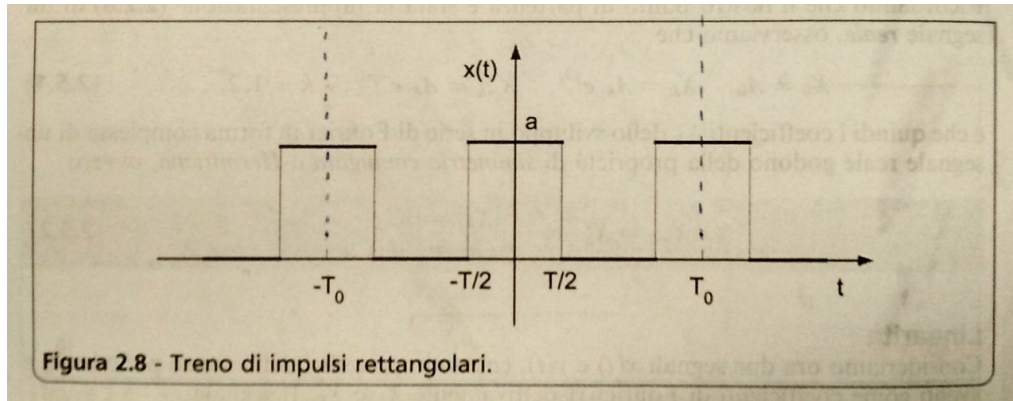


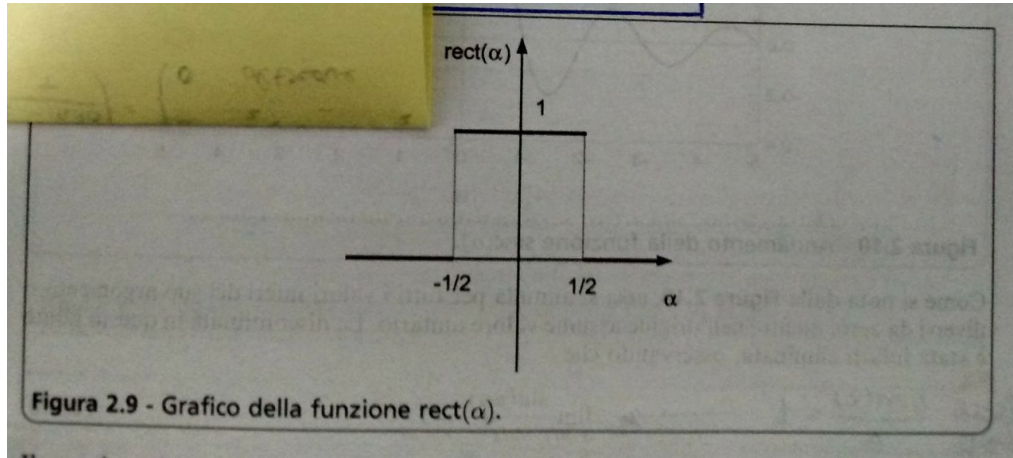
Figura 2.15: Treno di impulsi rettangolari.

Per questo segnale si definisce il parametro *duty-factor* (o *duty-cycle*) $\delta = T/T_0$ che esprime il rapporto tra la durata T di ciascun impulso e il periodo di ripetizione del segnale T_0 .

Per rappresentare più comodamente il treno di impulsi rettangolari è utile definire la funzione

$$rect(\alpha) \triangleq \begin{cases} 1 & |\alpha| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |\alpha| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.3.0.1)$$

il cui andamento (impulso rettangolare) è rappresentato nella seguente figura

Figura 2.16: Grafico della funzione $\text{rect}(\alpha)$.

Ancora una volta, questa semplice funzione rappresenta un'astrazione matematica utile per schematizzare impulsi che hanno *tempo di salita* molto breve rispetto alla propria *durata*. Utilizzando questa funzione è possibile scrivere la seguente espressione per il treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a \cdot \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right). \quad (2.3.0.2)$$

Il segnale periodico *treno di impulsi rettangolari* è infatti rappresentato come la *sovrapposizione* di infiniti impulsi di durata T ottenuti ciascuno ritardando l'impulso "base" non periodico $\text{rect}(t/T)$ di nT_0 secondi con $n = 0, \pm 1, \dots$. In questo caso diremo che l'impulso-base $\text{rect}(t/T)$ è stato *periodicizzato* con periodo di ripetizione T_0 per ottenere il segnale $x(t)$.

Calcoliamo ora i coefficienti dello sviluppo in serie del segnale in esame:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = {}^{14} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a \cdot \text{rect}(t/T) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

¹⁴Calcolare il coefficiente per $\text{rect}(t/T)$ è equivalente a calcolarlo per $\text{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T}\right)$ dato che la funzione è periodica.

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} a \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt}_{\text{rect}(t/T) = 1 \forall t \in [-T/2, T/2]} = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} a \cdot \frac{-j2\pi n f_0}{-j2\pi n f_0} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
&= \frac{a}{T_0} \cdot \frac{1}{-j2\pi n f_0} \int_{-T/2}^{T/2} (-j2\pi n f_0) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\
&= \frac{a}{T_0} \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi n f_0 t}}{(-j2\pi n f_0)} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{a}{T_0} \cdot \frac{e^{-j2\pi n f_0 T/2} - e^{j2\pi n f_0 T/2}}{(-j2\pi n f_0)} = \\
&= \frac{a}{T_0} \frac{e^{-j2\pi n f_0 T/2} - e^{j2\pi n f_0 T/2}}{(-j2\pi n f_0)} = \frac{a}{T_0} \frac{\sin(\pi n f_0 T)}{\pi n / T_0} = \\
&= \frac{aT}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi n T / T_0)}{\pi n T / T_0}
\end{aligned} \tag{2.3.0.3}$$

Per esprimere X_n in una forma più concisa, definiamo una ulteriore funzione notevole

$$\text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}, \tag{2.3.0.4}$$

per cui

$$X_n = \frac{aT}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{kT}{T_0}\right) = a \delta \text{sinc}(k\delta), \tag{2.3.0.5}$$

dove si è posto $\delta = T/T_0$ e $\alpha = kT/T_0$.

2.3.1 Dalla serie all'integrale di Fourier

Il significato e l'importanza della rappresentazione in serie di Fourier di un segnale periodico a tempo continuo sono stati ampiamente discussi nella sezione precedente. Molti segnali che si osservano nei fenomeni naturali non sono però periodici. Sorge allora immediata la questione della possibilità di ottenere una scomposizione simile alla serie di Fourier *anche per i segnali aperiodici*. **È possibile cioè rappresentare anche un segnale non periodico come una opportuna sovrapposizione di segnali elementari, in particolare sinusoidali?**

Per rispondere a questa domanda, consideriamo come caso di studio il segnale aperiodico appena introdotto impulso rettangolare:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right).$$

Mettiamo ora in relazione questo segnale con il treno di impulsi rettangolari *periodico*

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right) \quad (2.3.1.1)$$

di cui già conosciamo la rappresentazione in serie di Fourier. Come è chiaro, $x_p(t)$ è ottenuto *periodicizzando* $x(t)$ con periodo di ripetizione T_0 , come suggerito nella seguente figura

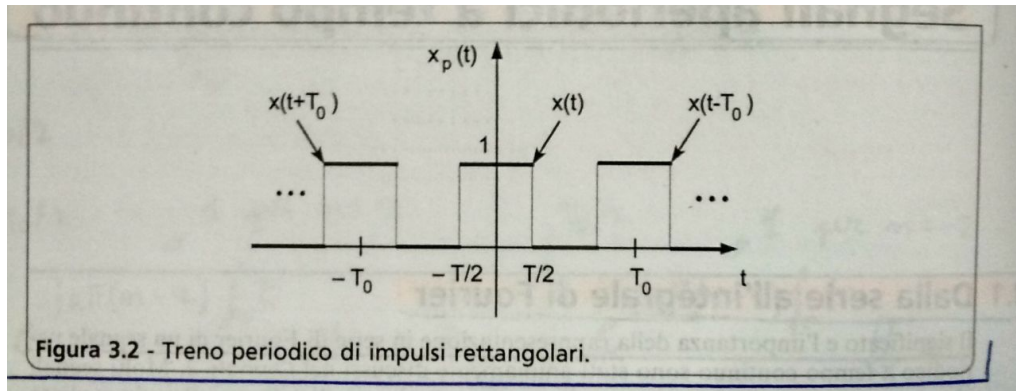


Figura 2.17: Treno di impulsi rettangolari.

Il segnale originario $x(t)$ può essere considerato come una sorta di caso-limite di un segnale periodico: partendo da $x_p(t)$, si riottiene l'impulso "base" $x(t)$ centrato in $t = 0$ se si pensa di fare una *periodicizzazione di periodo* $T_0 \rightarrow \infty$. Al di là del particolare esempio, se si costruisce un segnale periodico $x_p(t)$ per periodizzazione del segnale aperiodico $x(t)$ è vero in generale che

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t). \quad (2.3.1.2)$$

Naturalmente, il segnale $x_p(t)$, essendo periodico di periodo T_0 , può essere rappresentato mediante serie di Fourier tramite la ben nota relazione

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

con $f_0 = 1/T_0$ e con i coefficienti di Fourier X_n dati da

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$

Questo ci fa già intuire che, dato che il segnale $x(t)$ rappresenta un caso limite del segnale $x_p(t)$, sia possibile ottenere una espressione tramite i coefficienti di Fourier anche per il segnale aperiodico $x(t)$ come caso limite dei coefficienti di Fourier del segnale periodico $x_p(t)$.

Nase adesso l'esigenza di stabilire il comportamento della serie di Fourier e dei relativi coefficienti X_n quando $T_0 \rightarrow \infty$.

Osserviamo innanzitutto che aumentando il periodo di ripetizione T_0 si riduce la frequenza fondamentale $f_0 = 1/T_0$, e quindi si riduce la differenza tra due generiche frequenze armoniche consecutive. Ciò determina un infittimento dello spettro del segnale se la scala di rappresentazione delle frequenze resta la stessa. Inoltre, dalla relazione

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

è facile vedere che l'ampiezza dei coefficienti tende a ridursi man mano che T_0 cresce; al limite, per $T_0 \rightarrow \infty$, lo spettro di $x_p(t)$ tende a divenire sempre più fitto e ad assumere valori sempre più piccoli per tutte le frequenze armoniche.

Si può facilmente ovviare al problema della riduzione delle ampiezze delle righe spettrali definendo, per ciascuna delle frequenze armoniche $n f_0$, una sorta di "coefficiente di Fourier modificato"

$$X(n f_0) \triangleq T_0 \cdot X_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (2.3.1.3)$$

che evidentemente non è una quantità che tende a zero per $T_0 \rightarrow \infty$. Riscriviamo dunque l'espansione in serie di Fourier di $x_p(t)$ usando il coefficiente modificato¹⁵

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \cdot f_0. \quad (2.3.1.4)$$

Possiamo adesso effettuare il passaggio cruciale al limite per $T_0 \rightarrow \infty$ (ovvero per $f_0 \rightarrow 0$). Il segnale periodico $x_p(t)$ al primo membro si trasforma nel segnale aperiodico $x(t)$. La somma a secondo membro invece, per definizione, si trasforma in un *integrale* e si ottiene uno *sviluppo* del segnale aperiodico $x(t)$ tramite

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (2.3.1.5)$$

Il segnale aperiodico è dunque rappresentabile attraverso il cosiddetto **integrale di Fourier**. Resta da determinare l'espressione della funzione $X(f)$ che compare nell'integrando della (2.3.1.5). Innanzitutto, è chiaro che tale quantità risulta una funzione complessa della variabile continua f , che mantiene il significato di *frequenza*. L'espressione di $X(f)$ si ottiene passando al limite per $T_0 \rightarrow \infty$ nella definizione di $X(nf_0)$ del coefficiente di Fourier modificato:

$$X(f) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ f_0 \rightarrow 0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.3.1.6)$$

che rappresenta la **trasformata continua di Fourier del segnale** $x(t)$. In maniera euristica, possiamo dire che la variabile continua f è, in un certo senso, il limite della variabile discreta nf_0 di partenza, quando $f_0 \rightarrow 0$.

Commentiamo il risultato ottenuto. Nella serie di Fourier per un segnale periodico, quest'ultimo viene rappresentato mediante componenti

¹⁵Dato che si è posto $X(nf_0) \triangleq T_0 \cdot X_n$, ne segue che $X_n = X(nf_0) \frac{1}{T_0} = X(nf_0) \cdot f_0$.

sinusoidali a frequenze in *relazione armonica*, cioè tutti multiple di un'unica fondamentale, nonchè di ampiezza *finita*. Nel caso del segnale aperiodico, la (2.3.1.5), detta anche *antitrasformata di Fourier* (o *trasformata inversa di Fourier*), permette ancora di rappresentare il segnale aperiodico $x(t)$ come la sovrapposizione di componenti sinusoidali, ma questa volta di ampiezza *infinitesima* $|X(f)| df$ e di frequenza f variabile *con continuità* su tutto l'asse reale. In altre parole, il segnale aperiodico è visto come un segnale periodico "di periodo illimitato" e quindi con frequenza fondamentale "infinitamente piccola".

Riportiamo di nuovo le due equazioni relative alla rappresentazione del segnale aperiodico, osservando che in generale indicheremo con la lettera maiuscola X, Y, Z , la trasformata di Fourier rispettivamente di un segnale x, y, z :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad , \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.3.1.7)$$

La prima delle due rappresenta evidentemente un'equazione di *sintesi* che permette di rappresentare il segnale come sovrapposizione di segnali elementari, ed è chiaramente analoga alla (2.2.7.1) per i segnali periodici; la seconda è un'equazione di *analisi*, analoga alla (2.2.2.9), che permette di determinare il *peso* che le varie componenti frequenziali (a tutte le possibili frequenze variabili con continuità da $-\infty$ a $+\infty$) hanno nella composizione di $x(t)$. Tali relazioni mettono in corrispondenza un segnale del tempo con la propria trasformata di Fourier, funzione a valori complessi della frequenza. Come d'uso anche con i coefficienti di Fourier, questa relazione viene riassunta con la notazione

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f). \quad (2.3.1.8)$$

Un modo alternativo di indicare sinteticamente le operazioni di trasformata e antitrasformata è quello mutuato alla notazione degli operatori caratteristica dell'analisi funzione:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] \quad , \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] \quad (2.3.1.9)$$

2.3.1.1 Esempio

Conseideriamo il segnale impulso rettangolare

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

e calcoliamone la trasformata di Fourier $X(f)$. questa è data da

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}. \end{aligned}$$

Gli spettri di ampiezza e di fase del segnale $x(t)$ sono rappresentati nella seguente figura

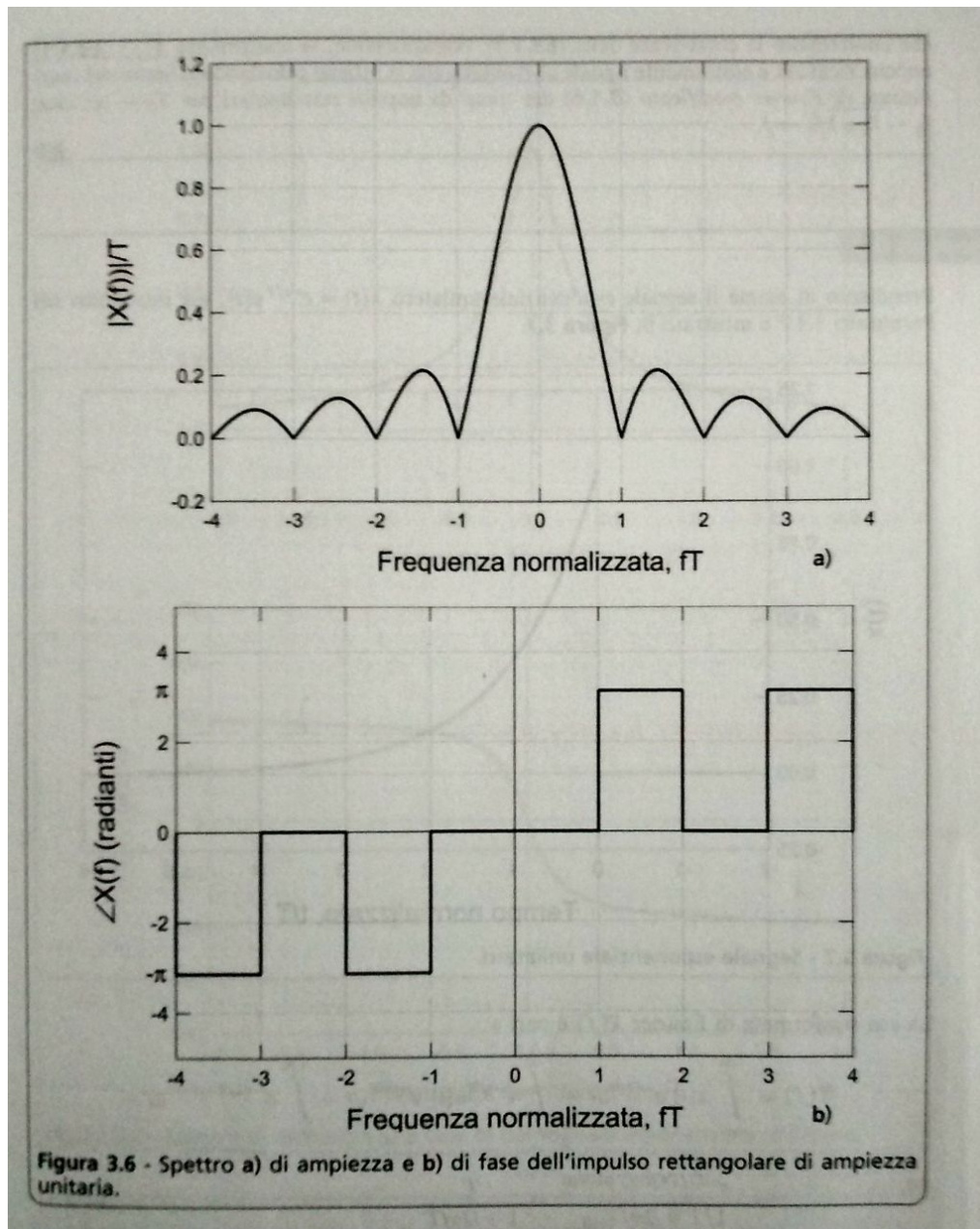


Figura 2.18: Spettro a) di ampiezza e b) di fase dell'impulso rettangolare di ampiezza unitaria.

2.3.1.2 Esempio

Consideriamo il segnale

$$x(t) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + 1 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

graficamente rappresentabile come

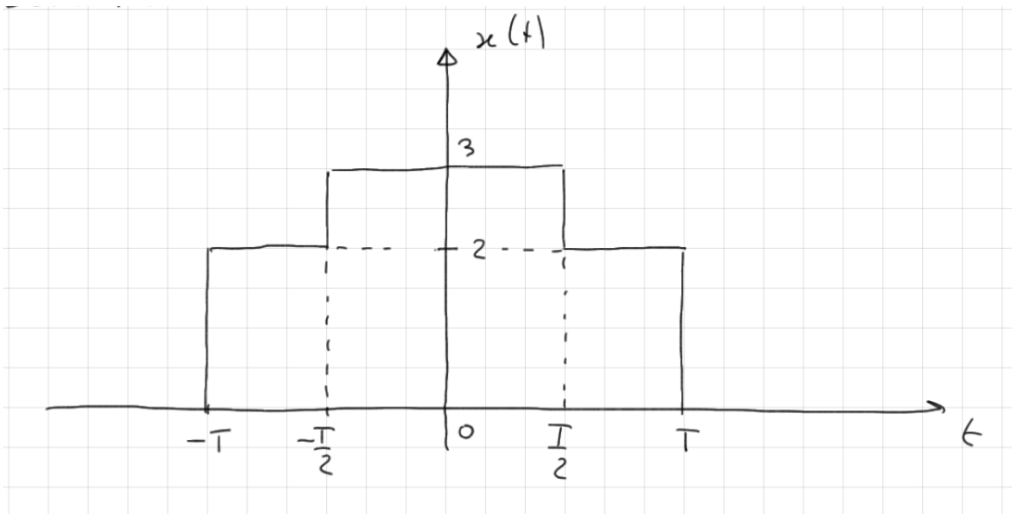


Figura 2.19: Segnale $x(t)$.

Possiamo scomporre il nostro segnale come contributo di due segnali

$$x_1(t) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

$$x_2(t) = 1 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Calcoliamone la trasformata di Fourier.

Sappiamo già che

$$X_2(f) = T \cdot \text{sinc}(fT).$$

Calcoliamo quindi la trasformata di $x_1(t)$

$$x_1(t) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) = 2 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T'}\right)$$

da cui segue immediatamente che

$$X_1(f) = 2 \cdot T' \cdot \text{sinc}(fT') = 2 \cdot 2T \cdot \text{sinc}(f2T) = 4T \cdot \text{sinc}(2fT).$$

Infine

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = 4T \cdot \text{sinc}(2fT) + T \cdot \text{sinc}(fT).$$

2.3.1.3 Esempio

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t-3T}{T}\right)$$

Graficamente rappresentabile come

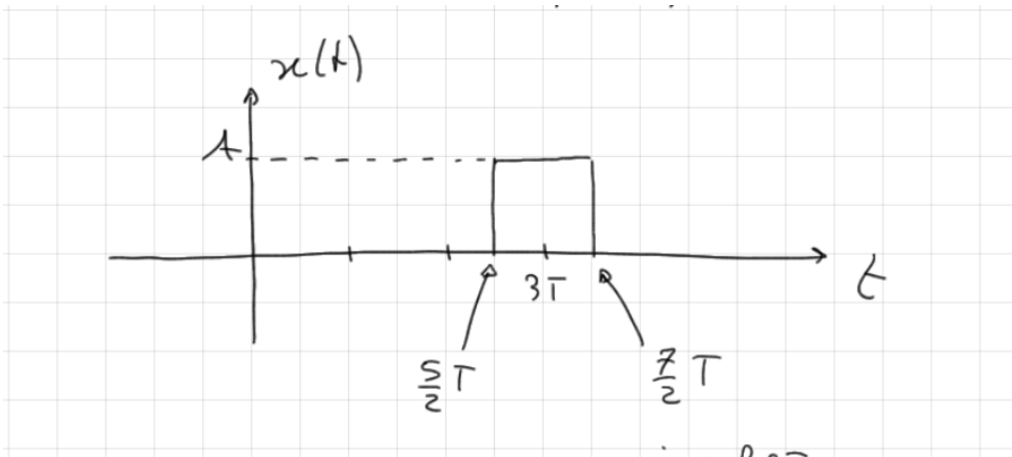


Figura 2.20: Segnale $x(t)$.

Per calcolarne la trasformata continua possiamo utilizzare il **teorema del ritardo**.

$$X(f) = A \cdot T \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f3T}.$$

2.3.2 Criteri di esistenza della Trasformata Continua di Fourier (TCF)

Indichiamo adesso delle condizioni sufficienti per la rappresentazione del segnale $x(t)$ attraverso la propria trasformata di Fourier $X(f)$, nel senso già discusso riguardo la serie di Fourier. Se tali condizioni sono soddisfatte è possibile affermare che la conoscenza dell'andamento nel tempo del segnale $x(t)$ è equivalente alla conoscenza dell'andamento frequenziale della relativa trasformata di Fourier.

Una prima condizione sufficiente afferma che se il segnale $x(t)$ ha energia finita

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad (2.3.2.1)$$

allora la trasformata $X(f)$ esiste, nel senso che l'integrale (2.3.1.6) è convergente e la rappresentazione del segnale come integrale di Fourier (antitrasformata) coincide quasi ovunque con il segnale originario $x(t)$.

Un secondo criterio sufficiente meno restrittivo (criterio di Dirichlet) può essere enunciato come segue:

- se il segnale $x(t)$ è assolutamente sommabile, ovvero $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty$;
- se in qualunque intervallo finito $t_1 \leq t \leq t_2$ il segnale $x(t)$ ha un numero finito di discontinuità di prima specie;
- se in qualunque intervallo finito $t_1 \leq t \leq t_2$ il segnale $x(t)$ ha un numero finito di massimi e minimi;

allora il segnale è rappresentabile come integrale di Fourier - cioè l'antitrasformata della sua propria trasformata di Fourier $X(f)$.

2.3.3 Banda

In informatica e in telecomunicazioni, il termine *banda* indica la quantità di dati informativi che possono essere trasferiti, attraverso una connessione, in un dato periodo di tempo, e la cui ampiezza è in analogia con l'ampiezza di banda in campo fisico.

$$BANDA = \frac{DIMENSIONE\ DELLE\ INFORMAZIONI}{TEMPO\ DI\ TRASFERIMENTO}$$

Più precisamente, nell'ambito della trasmissione, per banda si intende l'intervallo di frequenze in cui il canale trasmette misurato dall'ampiezza di banda B e la velocità di trasmissione espressa in bit/s , è proporzionale a tale banda B a mezzo del parametro noto come efficienza spettrale. Normalmente, la banda dipende dal tipo di mezzo fisico utilizzato e dalle sue condizioni fisiche (interferenze, saturazione, ecc...), studiati nel campo delle telecomunicazioni, rappresentando di fatto una risorsa limitata e in molti casi anche condivisa tra più utenti.

2.3.3.1 Larghezza di banda

In telecomunicazioni ed elettronica la larghezza di banda è la misura dell'ampiezza di banda dello spettro di un segnale informativo trasmesso dalla banda passante disponibile o utilizzata in un canale di comunicazione oppure, la banda di lavoro di un certo sistema fisico in relazione alla sua risposta in frequenza. La sua importanza in telecomunicazioni è legata al fatto che essa è a sua volta strettamente legata alla velocità di trasmissione dei dati: la quantità di informazioni trasmissibile sul canale è infatti strettamente collegata all'intervallo di frequenze utilizzato nella trasmissione in base al **teorema di campionamento di Nyquist-Shannon**.

Nel caso delle comunicazioni analogiche, la banda si misura in modo indiretto, ed è data dall'intervallo di frequenze occupato dal segnale (per esempio, una comunicazioni telefonica analogica occupa le frequenze che vanno da 300Hz a 3400Hz, quindi ha una larghezza di banda di 3100Hz ovvero la differenza tra 3400Hz e 300Hz).

2.3.4 Convoluzione

In matematica, in particolare nell'analisi funzionale, la convoluzione è un'operazione tra due funzioni di una variabile che consiste nell'integrare il prodotto fra la prima e la seconda traslata di un certo valore.

Formalmente si considerino due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ definite da \mathbb{R} in sè, con f e g integrabili secondo Lebesgue su \mathbb{R} . Si definisce convoluzione di f e g la funzione definita nel seguente modo:

$$(f \cdot g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

dove $\int_{-\infty}^{+\infty}$ denota l'integrale definito nell'insieme dei numeri reali. Le limitazioni poste alle funzioni f e g assicurano che l'integrale sia un numero reale.

La convoluzione viene utilizzata in vari campi della fisica, della statistica, dell'elettronica, dell'analisi d'immagini e della grafica computerizzata. Quando si studiano sistemi dinamici lineari stazionari, l'uscita è data dalla convoluzione tra il segnale in ingresso e la risposta all'impulso del sistema, la cui trasformata di Laplace (o la trasformata di Fourier) è la funzione di trasferimento del sistema.

A parole, si tratta dell'integrale del prodotto delle funzioni dopo che una delle funzioni di partenza è stata rovesciata e traslata, e si può considerare una forma di trasformata integrale.

Più in generale, si possono considerare due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ definite su \mathbb{R}^d a valori in \mathbb{C} , la cui convoluzione è data da

$$(f \cdot g)(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy.$$

La convoluzione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$, reali o complessi, indicata simbolicamente come

$$C_{xy}(\tau) = x(t) * y(t)$$

è data, indifferentemente, dalle due espressioni

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t) dt.$$

e

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t)y(t) dt.$$

La convoluzione è un operatore lineare: questa proprietà è molto utile per semplificare il calcolo di convoluzioni di segnali decomponibili nella somma di segnali più semplici.

2.3.5 Sommario

Questo capitolo ha dimostrato che l'analisi di Fourier è applicabile anche ai segnali **aperiodici**. Immaginando infatti di ottenere un segnale aperiodico come il **limite** di un segnale periodico quando il **periodo di ripetizione** T_0 **tende a infinito**, si riesce a estendere l'espansione in serie di Fourier, valida per il segnale periodico, anche ai segnali non periodici, ottenendo così l'**integrale** di Fourier. In questa equazione di **sintesi**, il ruolo che nella serie giocavano i coefficienti X_k viene riservato alla **trasformata continua** di Fourier $X(f)$ del segnale aperiodico $x(t)$. Il segnale è ancora scomposto come una **sovrapposizione** di infinite componenti sinusoidali di frequenza variabile **con continuità** da $-\infty$ a $+\infty$, con fase $\angle X(f)$ e con ampiezza **infinitesima** $|X(f)| df$. Molte delle proprietà di simmetria degli spettri di ampiezza $A(f) = |X(f)|$ e di fase $\vartheta(f) = \angle X(f)$ del segnale aperiodico sono analoghe a quelle già discusse per i segnali periodici.

Sono state ricavate molte proprietà notevoli della trasformata continua di Fourier, che permettono di calcolare lo spettro di un segnale che subisce particolari operazioni di trasformazione: **ritardo**, **modulazione**, **combinazione lineare** tra più segnali, ed è stata messa in evidenza la **dualità** tra i domini del tempo e della frequenza. Tra le proprietà più importanti, menzioniamo i teoremi di **integrazione** e **derivazione**, secondo i quali operazioni di carattere **differenziale** sul segnale temporale equivalgono a più semplici operazioni **algebriche** sulle trasformate. Analoga considerazione può farsi a proposito del teorema della **convoluzione**, per cui l'operazione di integrale di convoluzione nel tempo corrisponde a un semplice **prodotto** in ambito frequenziale.

La necessità di estendere l'operazione di derivata anche in casi in cui segnale temporale è **discontinuo** ha portato all'introduzione della funzione generalizzata $\delta(t)$ di Dirac, formalmente definita come la derivata della funzione gradino unitario. Da questa definizione, precisata poi in senso limite, sono state ricavate numerose altre proprietà, come la proprietà **campionatrice** e la **neutralità** nei confronti della convoluzione. Attraverso la $\delta(t)$ di Dirac, è possibile ricavare le trasformate di Fourier **generalizzate** di segnali non trasformabili in senso ordinario: il segnale costante, il gradino unitario, le funzioni seno e coseno, e i segnali periodici. A quest'ultimo proposito, si è poi ricavata la relazione di **campio-**

namento in frequenza che sussiste tra la trasformata continua di un segnale aperiodico e i coefficienti di Fourier del segnale periodico ottenuto **periodicizzando** il segnale aperiodico dato.

Il capitolo si è chiuso infine con l'esame della relazione tra la trasformata di Fourier $X(f)$ e la **trasformata di Laplace** $X(s)$ di un segnale causale. Si è messo in luce, in particolare, che la trasformata di Fourier si può direttamente ricavare da quella di Laplace solo quando la **zona di convergenza** di quest'ultima comprende l'asse immaginario $s = j2\pi f$.

2.4 Sistemi monodimensionali a tempo continuo

Sistemi monodimensionali a tempo continuo.

To be continued.

2.5 Segnali a tempo discreto

Segnali a tempo discreto.

To be continued.

2.6 Sistemi monodimensionali a tempo discreto

Sistemi monodimensionali a tempo discreto.

To be continued.

2.7 Progetto di filtri digitali

Progetto di filtri digitali.

To be continued.

2.8 Richiami di teoria della probabilità

Premessa

Dobbiamo momentaneamente abbandonare lo studio dei segnali in senso stretto per richiamare alcuni concetti matematici fondamentali alla comprensione della natura e delle particolari proprietà dei segnali aleatori. Questi ultimi infatti vengono studiati attraverso gli strumenti della *teoria della probabilità e delle variabili aleatorie*, che si presuppone già nota al lettore. Lo scopo di questo capitolo è soltanto quello di *richiamare* i risultati principali della teoria della probabilità, e di riformularli con le notazioni che saranno poi riprese nel prossimo capitolo. Il lettore che si ritiene ferrato su questi argomenti può usare questo capitolo soltanto come *rifetimento*, e può proseguire lo studio dei segnali procedendo direttamente alla lettura del capitolo successivo.

2.8.1 Esperimenti deterministici e aleatori

Ogni volta che si devono compiere misurazioni per controllare il verificarsi di certi avvenimenti, è necessario effettuare un *esperimento*. La definizione di esperimento che possiamo dare, così come potrebbe trovarsi su di un vocabolario, è appunto quella di una *prova pratica intesa alla verifica di una certa ipotesi di lavoro*. Supponiamo che si desideri studiare la "caduta di un grave", cioè di un corpo materiale, lasciato libero a una certa altezza h dal suolo, e in particolare che si desideri verificare la formula galileiana del tempo di caduta $t_0 = \sqrt{2 \cdot h/g}$ (dove g è l'accelerazione di gravità). Dobbiamo costruire un *esperimento* che consiste nell'effettuare una *prova* di caduta, misurando con la massima accuratezza possibile il tempo impiegato per arrivare al suolo. I dati raccolti in molte prove permetteranno quindi di *verificare l'ipotesi* che sta alla base dell'*esperimento* stesso.

Dobbiamo però notare una importante diversità di fondo tra certi tipi di esperimento e altri, che porta alla introduzione di due diverse *categorie* di esperimenti. Tornando all'esempio precedente di caduta di un grave, e supponendo di effettuare molte prove, notiamo che i *risultati* che otteniamo in ogni prova sono molto simili fra loro. Nel limite in cui l'effetto della resistenza dell'aria risulta trascurabile o può essere a sua volta calcolato (ad esempio, conducendo l'esperimento in ambiente controllato

al chiuso e usando corpi sferici costruiti con materiale ad alta densità) otteniamo risultati praticamente *identici* di volta in volta. Possiamo allora dire che l'esperimento condotto è di carattere *deterministico*, nel senso che è possibile *prevedere* il risultato *a priori*, cioè prima di effettuare una prova dell'esperimento stesso. Quest'ultimo mostra dunque una completa predicibilità: esiste una *legge* di carattere matematico che rende di fatto inutile la materiale effettuazione di una prova perchè ne predice accuratamente il risultato.

Sorvoliamo ovviamente sulle implicazioni che questo concetto di determinismo ha sulla visione del mondo e della vita umana, e procediamo presentando un diverso tipo di esperimento. Immaginiamo dunque di sederci alla cassa di un supermercato e di contare il numero di clienti che si presentano nell'intervallo di tempo di un'ora dalle 11 : 00 alla 12 : 00 di ogni giorno. Questo può ritenersi a buon diritto un *esperimento* in virtù del quale è possibile verificare il numero di casse che sono necessarie per evitare lunghe code. Sfortunatamente, questo esperimento dà risultati anche molto diversi da prova a prova, e non è possibile *prevedere* a priori il risultato di nessuna delle prove effettuate. Il numero di persone osservato di volta in volta cambia in maniera *aleatoria*¹⁶, cioè casuale. Bisogna dunque rinunciare a descrivere questo esperimento con una legge? La risposta fortunatamente è *no*. Ovviamente, sarà comunque impossibile trovare una legge che potrà *predire* in ogni prova il numero di clienti osservato: questo dato è ricavabile solo *a posteriori*, cioè *dopo* che la prova stessa è stata effettuata. Quel che è possibile fare in questo caso però è predire il comportamento *globale* dei dati che si ottengono *effettuando molte prove dell'esperimento*¹⁷. In quest'ultimo caso, infatti, i dati raccolti

¹⁶L'aggettivo *aleatorio* deriva dal latino *alea*, cioè dado, che è ritenuto l'oggetto casuale per antonomasia.

¹⁷La legge dei grandi numeri oppure teorema di Bernoulli (in quanto la sua prima formulazione è dovuta a Jakob Bernoulli), descrive il comportamento della media di una sequenza di n prove di una variabile casuale, indipendenti e caratterizzate dalla stessa distribuzione di probabilità (n misure della stessa grandezza, n lanci della stessa moneta, ecc...), al tendere ad infinito della numerosità della sequenza stessa (n). In altre parole, grazie alla legge dei grandi numeri, possiamo fidarci che la media sperimentale, che calcoliamo a partire da un numero sufficiente di campioni, sia sufficientemente vicina alla media vera, ovvero quella calcolabile teoricamente. Che cosa significhi "ragionevolmente sicuri" dipende da quanto vogliamo essere precisi nel nostro test: con dieci prove, avremo una stima grossolana, con cento, ne otterremo una molto più precisa, con mille,

mostrano quella che viene chiamata *regolarità statistica*. Nell'esperimento aleatorio per antonomasia, il lancio di un dado, nessuno è in grado di predire il risultato di una prova, e cioè la faccia che si presenta lanciando il dado a un certo istante. L'esperienza però suggerisce che se abbiamo la pazienza di effettuare molti lanci del dado, diciamo 6000 (possibilmente con un apposito meccanismo!), osserviamo all'incirca 1000 volte la faccia 1, all'incirca 1000 volte la faccia 2, ..., all'incirca 1000 volte la faccia 6. Questa regolarità permette di ricavare *anche per l'esperimento aleatorio* alcune leggi cui l'esperimento ottempera, però nel senso statistico appena accennato.

Come l'analisi matematica tradizionale è lo strumento matematico per eccellenza che descrive gli esperimenti deterministici (si pensi alla relazione tra l'analisi infinitesimale e la dinamica dei corpi), così la *teoria della probabilità* è lo strumento matematico sviluppato appositamente per descrivere gli esperimenti aleatori. Quello che un tempo veniva chiamato "calcolo delle probabilità" nasce infatti tra il diciassettesimo e il diciottesimo secolo a opera principalmente del matematico svizzero J. Bernoulli e dei matematici francesi B. Pascal e P.S. de Laplace per quantificare le vincite di giocatori e gestori dei giochi d'azzardo (dadi, carte, estrazioni di palline ecc...). E a giudicare dai guadagni dei casinò in tutto il mondo, è palese che questa teoria funziona alquanto bene!

2.8.2 Elementi di teoria della probabilità

2.8.2.1 Esperimento aleatorio, spazio di probabilità e proprietà elementari

Immaginiamo dunque di effettuare un esperimento aleatorio. Vediamo come la teoria della probabilità permetta di *modellare* questo esperimento, e come si possano poi ricavare delle *leggi* applicabili all'esperimento stesso. Per caratterizzare tale esperimento dobbiamo individuare innanzitutto l'insieme di tutti i suoi possibili risultati (ad esempio, le possibili facce del dado, o il numero di clienti che si possono presentare in un'ora alla cassa): tale insieme è detto *spazio campione* e si indica, convenzionalmente, con la lettera Ω . Se l'esperimento prevede un numero finito

ancora di più, e così via: il valore di n che siamo disposti ad accettare come sufficiente dipende dal grado di casualità che riteniamo necessario per il dado in questione.

(dado) o infinito numerabile (clienti alla cassa) di risultati, questi verranno indicati con il simbolo ω_i , $i = 1, \dots$. Quindi, con la notazione tipica della teoria degli insiemi, possiamo scrivere

$$\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots$$

Oltre che i singoli risultati dell'esperimento, è spesso importante considerare anche dei *gruppi* di risultati. Ad esempio, nell'esperimento della cassa del supermercato, è importante considerare tutti i casi in cui il numero di clienti in un'ora è maggiore (ad esempio) di 20, perchè essi potrebbero rappresentare un numero eccessivo per quella cassa. L'interesse nell'esperimento potrebbe essere allora concentrato su questo *evento*: "numero di clienti in un'ora superiore a 20", cioè su tutti quei risultati dello spazio campione contenuti nel *sottoinsieme* $\{21, 22, \dots\}$. I gruppi di risultati dello spazio campione sono chiamati *eventi*. Formalmente, gli *eventi* sono tutti i sottoinsiemi dello spazio campione che soddisfano le seguenti condizioni:

- se A è un evento, anche il complemento \bar{A} , rispetto all'insieme Ω , è un evento;
- se A e B sono eventi, anche la loro unione $A \cup B$ è un evento.

Usando queste proprietà si può anche dimostrare che

- l'intersezione $A \cap B$ di due eventi arbitrari A e B è un evento;
- dato un evento A , gli insiemi $A \cup \bar{A}$ e $A \cap \bar{A}$ sono eventi, il primo, coincidente con Ω (ovvero con tutto lo spazio campione), è detto *evento certo*, mentre il secondo, indicato con il simbolo \emptyset e non contenente alcun risultato dell'esperimento, è detto *evento impossibile*.

Le definizioni e proprietà sopra elencate dicono che gli eventi di uno spazio campione costituiscono una *classe* S , ovvero un insieme *chiuso* rispetto alle operazioni di unione e di intersezione.

A questo punto possiamo introdurre la *caratterizzazione completa di un esperimento aleatorio* che richiede sostanzialmente tre elementi: *a)* la descrizione del suo *spazio campione* Ω ; *b)* l'individuazione della sua *classe degli eventi* S , e infine *c)* la descrizione della sua *legge di probabilità* $Pr(\cdot)$

che associa ad ogni evento una misura della sua probabilità di presentazione. La terna $(\Omega, S, Pr(\cdot))$ che rappresenta la descrizione dell'esperimento è chiamata *spazio di probabilità*. Qualche volta, con libertà di linguaggio, identificheremo con *esperimento aleatorio* ciò che in realtà è lo *spazio di probabilità*, identificando cioè l'esperimento con la propria descrizione matematica astratta.

Non è il caso di esaminare qui le varie definizioni e interpretazioni della probabilità di un evento, che sono oggetto di discussione nei testi specificamente dedicati alla teoria della probabilità e alla statistica (si veda comunque a questo proposito l'esempio del **lancio di un dado non truccato** presentato nelle pagine successive). Secondo lo scopo di questo capitolo, ci limiteremo qui a richiamare le proprietà base della probabilità la cui conoscenza sarà indispensabile allo studio elementare dei processi aleatori.

La probabilità di una classe di eventi può essere definita secondo la *teoria assiomatica* la cui forma moderna si può sostanzialmente far risalire al matematico russo A.N. Kolmogorov. Secondo questo approccio, assegnato un esperimento aleatorio con uno spazio campione Ω e la relativa classe degli eventi S , una legge di probabilità $Pr(\cdot)$ è semplicemente una *corrispondenza* che associa a ogni elemento di S cioè a ogni *evento* di interesse in una prova dell'esperimento, un numero reale che soddisfa i seguenti *assiomi*:

- **A.1** - la probabilità di un evento arbitrario A è non negativa:

$$Pr(A) \geq 0$$

- **A.2** - la probabilità dell'evento certo è unitaria (*assioma di normalizzazione*):

$$Pr(\Omega) = 1$$

- **A.3** - dati due eventi A e B mutuamente esclusivi (o incompatibili, o disgiunti, cioè che non possono verificarsi contemporaneamente), la probabilità dell'evento unione è data dalla somma delle probabilità di A e B :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$$

Da questi *assiomi* si possono poi ricavare alcune *proprietà* (cioè dimostrare alcuni *teoremi* o corollari) che sembrano ovvie, ma che devono comunque essere ricondotte ai soli principi primi (cioè agli assiomi stessi):

- Dato un evento A , la probabilità dell'evento complementare \bar{A} è data dal complemento a uno di $Pr(A)$:

$$Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A);$$

- L'insieme impossibile ha probabilità nulla di verificarsi;
- La probabilità di un evento A non può assumere un valore maggiore di uno:

$$0 \leq Pr(A) \leq 1;$$

- Dati due eventi A e B , la probabilità dell'evento unione $A \cup B$ è espressa dall'uguaglianza

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(B \cap A).$$

L'intersezione fra due eventi A e B può anche essere rappresentata con la scrittura AB , così come talvolta l'unione tra eventi viene indicata con la scrittura $A + B$. La probabilità $Pr(B \cap A) = Pr(AB)$ dell'evento intersezione fra A e B è chiamata *probabilità congiunta* degli eventi A e B . Le probabilità $Pr(A)$ e $Pr(B)$ sono dette, invece, *probabilità marginali*.

Data una coppia di eventi A e B , con $Pr(B) \neq 0$, la probabilità $Pr(A|B)$ dell'evento A *condizionata* al verificarsi dell'evento B è definita dalla relazione

$$Pr(A|B) \triangleq \frac{Pr(AB)}{Pr(B)}.$$

2.8.2.2 Probabilità Condizionata

In teoria della probabilità la probabilità condizionata di un evento A rispetto ad un evento B è la probabilità che si verifichi A , sapendo che B è verificato. Questa probabilità, indicata con $Pr(A|B)$ o $P_B(A)$, esprime una "correzione" delle aspettative per A , dettata dall'osservazione di B . Poichè, come si vedrà nella successiva definizione, $Pr(B)$ compare al suo denominatore, $Pr(A|B)$ ha senso se e solo se B ha una probabilità non nulla di verificarsi.

Data una coppia di eventi A e B , con $Pr(B) \neq 0$, la probabilità $Pr(A|B)$ dell'evento A condizionata al verificarsi dell'evento B è definita dalla relazione

$$\begin{aligned} Pr(A|B) &\triangleq \frac{Pr(AB)}{Pr(B)} = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \\ &= \frac{Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cup B)}{Pr(B)}. \end{aligned} \quad (2.8.2.1)$$

Nella teoria della probabilità $Pr(A)$ è detta comunemente probabilità a priori dell'evento A e $Pr(A|B)$ probabilità a posteriori di A dato B . La probabilità condizionata (in alcuni testi chiamata anche condizionale) ha un significato importante, che ruota attorno all'evento condizionante B . Infatti, $Pr(A|B)$ è la probabilità che l'evento A assume una volta che l'evento B si è già verificato. La definizione suggerisce proprio questo: la probabilità a priori di A viene scalata del fattore $1/Pr(B)$ per tenere conto che l'evento B , essendosi già verificato, deve considerarsi come una sorta di "nuovo spazio campione" in quanto al di fuori di questo niente può verificarsi. In questo senso bisogna rinormalizzare tutte le probabilità rispetto a quello di B .

Si noti inoltre che $Pr(B|B) = 1$.

Due eventi A e B sono *indipendenti* se la probabilità marginale $Pr(A)$ e la probabilità condizionata $Pr(A|B)$ sono identiche, cioè in pratica se il verificarsi dell'evento B non ha alcuna influenza sull'evento A :

$$Pr(A) = Pr(A|B)$$

o, tenendo conto della definizione di probabilità condizionata:

$$Pr(AB) = Pr(A) \cdot Pr(B).$$

Pertanto, se gli eventi A e B sono indipendenti, la probabilità congiunta $Pr(AB)$ è pari al prodotto delle probabilità marginali. La relazione precedente viene utilizzata spesso per definire l'indipendenza fra due eventi, anche se il suo significato non è immediatamente comprensibile con la prima.

2.8.2.3 Esempi Probabilità Condizionata

Esempio 1

La probabilità di ottenere 4 con il lancio di un dado a sei facce (evento A) ha probabilità $Pr(A) = 1/6$ di verificarsi. Sapendo però che il risultato del lancio è un numero tra 4, 5, 6 (evento B verificato) la probabilità di A diventa

$$\begin{aligned} Pr(A|B) &\triangleq \frac{Pr(AB)}{Pr(B)} = \frac{Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cup B)}{Pr(B)}_{18} = \\ &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}. \end{aligned}$$

Esempio 2

Si consideri questo secondo esempio: la probabilità di ottenere 1 con il lancio di un comune dado (evento A) ha probabilità $Pr(A) = 1/6$ di verificarsi. Sapendo però che il risultato del lancio è un numero tra 4, 5, 6 (evento B verificato), la probabilità di A diventa

$$\frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cup B)}{Pr(B)}_{19} = \frac{1/6 + 3/6 - 4/6}{3/6} = 0.$$

Note Aggiuntive: Dati due eventi mutuamente esclusivi (o *incompatibili* o *disgiunti*, cioè che non possono verificarsi contemporaneamente), la probabilità dell'evento unione è data dalla somma delle probabilità di A e B :

$$A \cap B = \emptyset \implies Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B).$$

Dati due eventi A e B compatibili (quando cioè il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro), la probabilità dell'evento unione $A \cup B$ è espressa dall'uguaglianza:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B).$$

¹⁸Dati due eventi A e B , la loro unione: $A \cup B$ è data dall'evento "Almeno uno degli eventi A e B si verifica".

¹⁹La probabilità dell'unione di due eventi incompatibili è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento.

2.8.2.4 Teorema della Probabilità Composta

Il teorema della probabilità composta deriva dal concetto di probabilità condizionata

$$Pr(A \cap B) = Pr(B)Pr(A|B) = Pr(A)Pr(B|A), \quad (2.8.2.2)$$

per cui la probabilità che si verifichino entrambi i due eventi è pari alla probabilità di uno dei due eventi moltiplicato con la probabilità dell'altro evento condizionato al verificarsi del primo.

Nel caso di indipendenza stocastica²⁰ si ottiene che la probabilità congiunta è pari al prodotto delle probabilità:

$$Pr(A|B) = Pr(A)Pr(B). \quad (2.8.2.3)$$

Il teorema della probabilità composta può essere generalizzato al caso dell'intersezione di un numero arbitrario di eventi:

$$Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \quad (2.8.2.4)$$

$$Pr(A_1)Pr(A_2|A_1)Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots Pr(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2.8.2.5 Esempio lancio di un dado non truccato

Cerchiamo di definire un esperimento aleatorio (nel senso della definizione appena vista) che modelli il *lancio di un dado non truccato*. Evidentemente lo spazio campione Ω è costituito da 6 risultati $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, dove ω_i corrisponde al presentarsi al termine del lancio della faccia i -esima (cioè quella con un numero di puntini pari ad i). Poiché lo spazio campione Ω è *finito*, la classe degli eventi S è semplicemente costituita dalla raccolta di tutti i sottoinsiemi di Ω stesso (che sono in numero, come è noto, di 2^6 , inclusi \emptyset ed Ω). La legge di probabilità degli eventi resta a questo punto definita non appena assegniamo una probabilità a

²⁰Nell'ambito del calcolo delle probabilità, l'indipendenza stocastica di due eventi A e B si ha quando il verificarsi di uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro, ovvero quando la probabilità condizionata $Pr(A|B)$ oppure $Pr(B|A)$ è pari rispettivamente a $Pr(A)$ e $Pr(B)$.

ciascuno dei *risultati* dello spazio Ω . Fatto ciò, è possibile calcolare la probabilità di un qualunque evento A . Sfruttando la *simmetria* del problema, cioè l'ipotesi di dado non truccato, è ragionevole imporre che

$$Pr(\{\omega_1\}) = Pr(\{\omega_2\}) = \dots = Pr(\{\omega_6\}) = \frac{1}{6}.$$

Allora, ad esempio, la probabilità dell'evento $A = \{\text{la faccia del dado è dispari}\}$ è

$$Pr(A) = Pr(\{\omega_1\}) \cup Pr(\{\omega_3\}) \cup Pr(\{\omega_5\})$$

quindi, per il terzo assioma:

$$Pr(A) = Pr(\{\omega_1\}) + Pr(\{\omega_3\}) + Pr(\{\omega_5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per giustificare il fatto che tutte le facce del dado hanno la stessa probabilità di presentarsi, osserviamo che in casi come questo, di esperimento *simmetrico* e spazio campione finito, $Pr(A)$ può essere calcolata attraverso la cosiddetta *definizione classica di probabilità*, attribuite a Pascal. Questa prevede di individuare il numero $N_F(A)$ dei cosiddetti *casi favorevoli* ad A , e il numero N_P dei cosiddetti *casi possibili*. Quest'ultimo è semplicemente il numero totale di risultati contenuti in Ω , mentre il primo è il numero dei risultati elementari contenuti in A stesso. La probabilità cercata è allora data dal rapporto

$$Pr(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}$$

Considerando di nuovo $A = \{\text{la faccia del dado è dispari}\}$, è chiaro che $N_F(A) = 3$ ed $N_P = 6$, e quindi,

$$Pr(A) = \frac{N_F(A)}{N_P} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

L'ipotesi cruciale alla base della definizione "classica" è la *perfetta simmetria* del dado o, in altri termini, l'*equiprobabilità* di tutti i possibili risultati dell'esperimento. Questa definizione ha il pregio di essere molto semplice, ma può essere applicata solamente a una classe ristretta di esperimenti. In particolare, essa è incapace di modellare il caso in cui il dado risulti "truccato", cioè le varie facce (intenzionalmente o per imperfezioni di manifattura) *non* siano equiprobabili.

In questi casi è più conveniente dare un'altra definizione di probabilità, che trova una sua giustificazione in un *approccio di tipo sperimentale*. Consideriamo di nuovo l'esperimento del lancio del dado ed effettuiamo N prove dell'esperimento stesso (cioè lanciamo il dado N volte). Indichiamo poi con N_A il numero di volte in cui, nelle suddette ripetizioni, si verifica l'evento A (cioè la faccia uscita mostra un numero dispari). All'aumentare di N , ovvero del numero di lanci, si ottiene una situazione simile a quella riassunta nella tabella seguente:

N	N_A	N_A/N
100	47	0.47
1000	491	0.491
10000	4984	0.4984
100000	50012	0.50012
...

Si nota una certa *regolarità* nella relazione tra il numero di volte in cui si verifica l'evento A rispetto al numero totale di prove effettuate: il rapporto

$$\frac{N_A}{N},$$

detto *frequenza relativa dell'evento A* , approssima il numero $1/2$ al crescere di N . Da questa osservazione discende la *definizione di probabilità di Von Mises* (o *frequentista*), secondo la quale

$$Pr(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}.$$

Tale definizione, rispetto alla definizione classica, presenta il vantaggio di *prescindere dalla simmetria del problema* e di poter modellare anche il caso di dado "truccato", ma contiene un'operazione di limite che non si è in grado di eseguire (e che pone anche questioni di esistenza).

È interessante osservare che la definizione "frequentista" non è in contrasto con quella assiomatica di Kolmogorov. Infatti la probabilità $Pr(A)$, espresso con il limite che abbiamo appena introdotto, è *i)* una quantità *non negativa* poichè prodotta dal limite di un rapporto fra quantità positive; se inoltre *ii)* l'evento A coincide con l'evento certo Ω , allora banalmente $N_A = N$ e quindi $Pr(A) = 1$; se infine *iii)* A e B sono due eventi

mutuamente esclusivi, una prova dell'esperimento che fa verificare $A \cup B$ dà un risultato che sta o in A o in B , ma che non può stare in entrambi, per cui $N_{A \cup B} = N_A + N_B$ e allora

$$\begin{aligned} Pr(A \cup B) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{A \cup B}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A + N_B}{N} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_B}{N} = Pr(A) + Pr(B), \end{aligned}$$

cioè tutti gli assiomi di Kolmogorov sono automaticamente verificati.

2.8.2.6 Teorema della Probabilità Assoluta

In teoria della probabilità il teorema della probabilità assoluta (detto anche teorema delle partizioni) afferma che se A_1, \dots, A_n formano una partizione dello spazio campionario di tutti gli eventi possibili Ω (ossia $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ e $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$) e B è un qualsiasi evento (dipendente dagli eventi A_i), allora:

$$Pr(B) = \sum_{i=1}^n Pr(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n Pr(A_i) Pr(B|A_i). \quad (2.8.2.5)$$

Vedi il teorema della probabilità totale nel capitolo "Esame Orale".

2.8.2.7 Esperimento aleatorio composto

Consideriamo ora due *diversi* esperimenti aleatori caratterizzati dagli spazi campione Ω_1 e Ω_2 (ad esempio il lancio di un dado e l'estrazione di una carta da un mazzo di 52). È possibile definire un *esperimento composto* i cui risultati sono costituiti da una *coppia ordinata* dei risultati degli esperimenti componenti (ad esempio, (*faccia*₃ e *due*_d*picche*)). Lo spazio campione Ω dell'esperimento composto è costituito dal *prodotto cartesiano* degli spazi dei due esperimenti componenti, cioè $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Consideriamo, adesso, un evento A_1 definito nello spazio campione Ω_1 e un evento A_2 definito in Ω_2 ; vogliamo calcolare la probabilità dell'evento $A = A_1 \times A_2$ appartenente allo spazio campione Ω . Se i due esperimenti sono *indipendenti*, la probabilità dell'evento composto A è

$$Pr(A) = Pr_1(A_1) \times Pr_2(A_2)$$

dove $Pr_1(\cdot)$ e $Pr_2(\cdot)$ rappresentano le leggi di probabilità definite rispettivamente per il primo e il secondo esperimenti componente. È importante osservare che

- dalla conoscenza delle leggi di probabilità dei singoli esperimenti non è possibile, in generale, ricavare la legge di probabilità dell'esperimento composto;
- le considerazioni appena illustrate per una coppia di esperimenti aleatori indipendenti possono essere immediatamente estese al caso di n esperimenti aleatori indipendenti.

In questo ambito è utile ricordare il problema delle *prove ripetute binarie e indipendenti* (o *prove di Bernoulli*). In tal caso l'esperimento composto è costituito da n esperimenti identici, indipendenti, e aventi ciascuno uno spazio campione costituito da due risultati soltanto. In questo modello ricadono numerosi esperimenti elementari (testa/croce, vero/falso, 0/1, alto/basso, ecc...). Indichiamo con ω_0 e ω_1 questi risultati e con $p = Pr(\omega_0)$ e $q = Pr(\omega_1) = 1 - p$ le loro rispettive probabilità, e definiamo l'evento $A = \{\omega_0 \text{ si presenta } k \text{ volte in } n \text{ prove ripetute}\}$. La *formula di Bernoulli* (o *binomiale*) dice che

$$Pr(A) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$

dove compare il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Esempio Formula di Bernoulli

Una scatola contiene due monete: la prima è una moneta "perfetta", la seconda è una moneta "truccata" avente $Pr(\{Testa\}) = 0.8$. Viene scelta casualmente una delle due monete, che viene poi lanciata per dieci volte in condizioni indipendenti, osservando l'uscita di 5 facce Testa e 5 facce Croce. Sulla base di quest'ultima osservazione, qual è la probabilità che la moneta scelta sia quella "perfetta"? Cosa può dirsi di questa probabilità se si osservano 5000 facce Testa su 1000 lanci?

In questo esempio si deve calcolare la *probabilità condizionata* $Pr(A|B)$ dove B è l'evento osservato {5 facce Testa, 5 facce Croce}, mentre A è l'evento

{la moneta scelta è quella perfetta}. Usando il teorema di Bayes è possibile ricavare $Pr(A|B)$ dalla conoscenza delle probabilità $Pr(B|A)$, $Pr(A)$, $Pr(B)$. Poichè la scelta fra le due monete è casuale, abbiamo facilmente

$$Pr(A) = Pr(\bar{A}) = \frac{1}{2}.$$

Supponiamo ora di aver effettivamente scelto la moneta perfetta, cioè che si sia verificato A . La probabilità condizionata $Pr(B|A)$ può essere calcolata mediante la formula di Bernoulli con $n = 10, k = 5, w_0$ corrispondente al presentarsi della faccia Testa e w_1 al presentarsi della faccia Croce (le facce della moneta perfetta sono equiprobabili $Pr(\{w_0\}) = Pr(\{w_1\}) = 0.5$), risulta

$$\begin{aligned} Pr(B|A) &= \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \\ &= \binom{10}{5} \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} \cong 0.246. \end{aligned}$$

$Pr(B)$ può essere calcolata mediante il teorema della probabilità totale, con la partizione

$$\Omega = A \cup \bar{A},$$

$$Pr(B) = Pr(B|A)Pr(A) + Pr(B|\bar{A})Pr(\bar{A})$$

Resta da ricavare la probabilità $Pr(B|\bar{A})$ (cioè la probabilità di avere 5 volte Testa su 10 prove con la moneta *truccata*), che può di nuovo essere calcolata mediante la formula di Bernoulli con $n = 10, k = 5, p = Pr(\{\omega_0\}) = 0.8, q = Pr(\{\omega_1\}) = 0.2$ (le facce della moneta truccata non sono equiprobabili):

$$Pr(B|\bar{A}) = \binom{10}{5} (0.8)^5 (0.2)^5 = 252 \cdot (0.16)^5 \cong 0.0264.$$

Usando i valori appena ricavati possiamo finalmente determinare $Pr(B)$:

$$\begin{aligned} Pr(B) &= \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} + \binom{10}{5} (0.8)^5 (0.2)^5 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{252}{2} \cdot \left[\frac{1}{1024} + (0.16)^5 \right] \cong 0.1363 \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} Pr(A|B) &= \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{\binom{10}{5}\binom{1}{2}^{2 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\binom{10}{5}\binom{1}{2}^{2 \cdot 5} + \frac{1}{2}\binom{10}{5}(0.8)^5(0.2)^5} = \\ &= \frac{1}{1 + (2 \cdot 0.8 \cdot 2 \cdot 0.2)^5} \cong 0.903. \end{aligned}$$

Questa probabilità è piuttosto alta. Lanciando infatti la moneta *truccata*, è abbastanza impossibile ottenere un serie di risultati "equiripartiti" 5-5 come quella richiesta.

Ripetendo i calcoli per il caso in cui B sia l'evento {5000 *facce Testa*, 5000 *facce Croce*}, si ottiene la seguente espressione per $Pr(A|B)$:

$$Pr(A|B) = \frac{1}{1 + (0.8 \cdot 0.2 \cdot 4)^{5000}} \cong 1$$

e si raggiunge quasi la *certezza* che la moneta scelta sia effettivamente quella perfetta. Infatti, la probabilità di ottenere un così preciso bilanciamento dei risultati {*Testa*} e {*Croce*} con la moneta (pesantemente) truccata è praticamente *nulla*.

2.9 Segnali aleatori a tempo continuo e a tempo discreto

Segnali aleatori a tempo continuo e a tempo discreto.

To be continued.

Capitolo 3

Esame Scritto

"The reason I talk to myself is because I'm the only one whose answers I accept."

— George Carlin

Di seguito una lista di temi di esame presi dalla pagina "Comunicazioni Numeriche 2017-18" sul sito E-learning del Polo di Ingegneria. Le soluzioni fornite sono state arricchite di appunti personali e approfondimenti teorici.

3.1 Compitino 2014

To be continued.

3.2 Compitino 2015

To be continued.

3.3 Compitino 2016

To be continued.

3.4 Compitino 2017

To be continued.

3.5 Compitino 2018

To be continued.

3.6 Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Gennaio 2018

To be continued.

3.7 Prova di Comunicazioni Numeriche - 29 Gennaio 2018

To be continued.

3.8 Prova di Comunicazioni Numeriche - 20 Febbraio 2018

To be continued.

3.9 Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Aprile 2018

To be continued.

Capitolo 4

Esame Orale

"Read less, study less, but think more."

— Leo Tolstoy

Di seguito una lista di domande, con una possibile risposta, riprese dagli orali delle ultime sessioni di esame suddivise tra **segnali deterministici**, **segnali aleatori** e **sistemi monodimensionali**.

4.1 Segnali Deterministici

Segnali il quale valore sia univocamente determinabile non appena siano fissati i valori delle variabili indipendenti (in particolare, il tempo per segnali monodimensionali). Questo accade quando il segnale è noto attraverso un grafico, o una registrazione magnetica, o più semplicemente attraverso una ben definita espressione matematica, o ancora perchè è il prodotto di sistemi e apparati di cui si ha stretto controllo (per esempio, un generatore di forme d'onda di un laboratorio elettronico). Per modellare e studiare i segnali determinati sono sufficienti i concetti dell'analisi matematica tradizionale.

4.1.1 Relazioni tra Potenza Media P_x ed Energia E_x di un Segnale

Un segnale ad energia finita (matematicamente, a quadrato sommabile) ha potenza media nulla:

$$E_x = K < \infty \implies P_x = 0. \quad (4.1.1.1)$$

Viceversa, un segnale che abbia un valore finito diverso da zero della potenza media ha necessariamente energia infinita:

$$P_x = K < \infty, K \neq 0 \implies E_x = \infty. \quad (4.1.1.2)$$

Lemma 4.1.1. *Un segnale ad energia finita (matematicamente, a quadrato sommabile) ha potenza media nulla:*

$$E_x = K < \infty \implies P_x = 0. \quad (4.1.1.3)$$

Dimostrazione. Dato un segnale $x(t)$ tale che $E_x = K < \infty$, ad energia finita, risulta

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = K < \infty, \quad (4.1.1.4)$$

ricordando poi che

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T}, \quad (4.1.1.5)$$

ne segue che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} = K < \infty. \quad (4.1.1.6)$$

Allora

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \\ &= K \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.1.7)$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

Lemma 4.1.2. *Un segnale che abbia un valore finito diverso da zero della potenza media ha necessariamente energia infinita:*

$$P_x = K < \infty, K \neq 0 \implies E_x = \infty. \quad (4.1.1.8)$$

Dimostrazione. Dato un segnale $x(t)$ tale che $P_x = K < \infty$, con $K \neq \infty$, a potenza finita non nulla, risulta

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = K. \quad (4.1.1.9)$$

Da cui segue che

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot K = \infty, \quad (4.1.1.10)$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

I due precedenti lemmi sono validi solo ed esclusivamente nell'ordine in cui sono stati posti.

4.1.1.1 Funzione a quadrato sommabile

In analisi matematica, una funzione $f(x)$ di una variabile reale a valori reali e complessi si dice a quadrato sommabile, o anche a quadrato integrabile, in un determinato intervallo $I = [a, b]$ se l'integrale del suo modulo in I è finito:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (4.1.1.11)$$

La nozione si estende a funzioni definite su di uno spazio di misura a valori in uno spazio vettoriale topologico.

L'insieme di tutte le funzioni misurabili su un dato dominio, che in esso sono a quadrato sommabile, forma uno spazio di Hilbert, il cosiddetto spazio L^2 .

4.1.1.2 Applicazioni nella Meccanica Quantistica

La condizione di quadrato sommabile è necessaria particolarmente nella meccanica quantistica, in quanto costituisce una richiesta basilare per le funzioni d'onda che descrivono il comportamento delle particelle elementari e, in particolare, la probabilità di osservare il sistema in un certo

stato quantico. Ad esempio, lo stato di una particella (senza spin) associata a un campo scalare è una funzione d'onda della forma $\psi(x, y, z)$, dove l'integrale

$$p(V) = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz, \quad (4.1.1.12)$$

rappresenta la probabilità di trovare la particella p nel volume V . Per questo motivo, dato che la probabilità deve essere necessariamente finita e normalizzabile, si richiede che esista e abbia valore finito un integrale della forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\psi(x, y, z)|^2. \quad (4.1.1.13)$$

4.1.2 Relazione Potenza Media, Valore Efficace e

Valore Medio: $P_x = 0 \implies x_e f f = 0, x_m = 0$

Teorema 4.1.3. *Dato un segnale $x(t)$, tale che $P_x = 0$, a potenza nulla, risulta*

$$\begin{cases} x_e f f = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.1)$$

Ovvero

$$P_x = 0 \implies \begin{cases} x_e f f = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.2)$$

Dimostrazione. Il primo punto è di facile dimostrazione. Infatti

$$x_e f f = \sqrt{P_x}, \quad (4.1.2.3)$$

quindi

$$P_x = 0 \implies x_e f f = 0. \quad (4.1.2.4)$$

Resta da dimostrare che

$$P_x = 0 \implies x_m = 0. \quad (4.1.2.5)$$

Per fare ciò consideriamo il segnale $x(t) = \tilde{x}(t) + x_m$, dove x_m è il valore medio del segnale $x(t)$ stesso. Risulta quindi $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - x_m$, e quindi per definizione $\tilde{x}(t)$ è un segnale con valore medio nullo. Infatti

$$\begin{aligned} \tilde{x}_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - x_m) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_m dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt - x_m \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = x_m - x_m = 0. \end{aligned} \quad (4.1.2.6)$$

Sviluppiamo ora i calcoli per ottenere un'espressione per la potenza P_x del segnale $x(t) = \tilde{x}(t) + x_m$:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = {}^1 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t)^* dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\tilde{x}(t) + x_m) \cdot (\tilde{x}(t)^* + x_m^*) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^* + x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^* + x_mx_m^* dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 + (x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^*) + |x_m|^2 dt = \quad (4.1.2.7) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^*) dt \\
 &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Vediamo di risolvere questi tre limiti di integrali separatamente. Il primo integrale è ovvio

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt = P_{\tilde{x}}. \quad (4.1.2.8)$$

Il terzo integrale è di facile risoluzione

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt &= |x_m|^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = \\
 &= |x_m|^2 \cdot \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = |x_m|^2.
 \end{aligned} \quad (4.1.2.9)$$

¹Dato $z \in \mathbb{C}$ allora $z \cdot z^* = ce^{j\varphi} \cdot ce^{-j\varphi} = c^2 e^{j(\varphi-\varphi)} = c^2 = |z|^2$.

Per quanto riguarda il secondo invece, possiamo procedere così

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + x_m \tilde{x}(t)^*) dt &= {}^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + (x_m^* \tilde{x}(t))^*) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 \cdot \Re(x_m^* \tilde{x}(t)) dt = \\
&= 2 \cdot \Re \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_m^* \tilde{x}(t) dt \right) = \\
&= 2 \cdot \Re \left(x_m^* \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) dt \right) = 2 \cdot \Re(x_m^* \tilde{x}_m) = {}^3 2 \cdot \Re(x_m^* \cdot 0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.2.10}$$

A questo punto, riportando i risultati ottenuti nell'integrale di partenza:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + x_m \tilde{x}(t)^*) dt \\
&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt = P_{\tilde{x}} + 0 + |x_m|^2 = P_{\tilde{x}} + |x_m|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.2.11}$$

Infine risulta quindi

$$P_x = P_{\tilde{x}} + |x_m|. \tag{4.1.2.12}$$

Da cui, dato che si è posto $P_x = 0$ come supposizione iniziale, e dato che $P_{\tilde{x}} \geq 0$ e $|x_m|^2 \geq 0$ per definizione, risulta

$$P_x = 0 \implies P_{\tilde{x}} + |x_m| = 0 \implies \begin{cases} P_{\tilde{x}} = 0 \\ |x_m| = 0 \end{cases}, \tag{4.1.2.13}$$

che dimostra la tesi iniziale:

$$P_x = 0 \implies \begin{cases} x_e f f = 0 \\ |x_m| = 0 \end{cases}. \tag{4.1.2.14}$$

□

²Dato $z = a + ib$ con $z \in \mathbb{C}$, allora $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \Re(z)$

³Nella (4.1.2.6) abbiamo calcolato che $\tilde{x}_m = 0$.

Come conseguenza dei due teoremi visti nelle sezioni 4.1.1 e 4.1.2 possiamo scrivere che

$$\begin{cases} \text{SISTEMI AD} \\ \text{ENERGIA FINITA} \\ (E_x = K < \infty) \end{cases} \implies \begin{cases} P_x = 0 \\ x_{eff} = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.15)$$

4.1.2.1 Media quadratica

La media quadratica di due o più numeri è definita come la radice quadrata del rapporto tra la somma dei quadrati dei valori numerici ed il numero di valori, ed è un indicatore statistico definito a partire dai quadrati dei valori considerati. Formalmente, dai n valori numerici

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (4.1.2.16)$$

la formula di calcolo della media quadratica è data da

$$\text{Media quadratica} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}. \quad (4.1.2.17)$$

4.1.2.2 Valore Efficace

Si definisce valore efficace di una funzione continua $x(t)$, la radice della media quadratica (ovvero la "radice della media dei quadrati" detta anche *valore quadratico medio*, in inglese *root mean square*, da cui la sigla RMS), sul periodo della funzione stessa:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [x(t)]^2 dt}. \quad (4.1.2.18)$$

Se si applica il procedimento ad un segnale costante si può facilmente constatare che il suo valore efficace coincide con il valore reale.

4.1.3 Biunivocità della trasformata serie di Fourier

Ogni segnale $x(t)$ che soddisfi il criterio di Dirichlet può essere rappresentato con lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad (4.1.3.1)$$

dove il particolare coefficiente X_k della serie è dato da

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (4.1.3.2)$$

La seconda delle due è una equazione di *analisi* che permette di stabilire qual è il contenuto in termini di oscillazioni armoniche del segnale (in una parola, di *analizzare* il segnale). La prima delle due, viceversa, è una equazione di *sintesi* che, note le ampiezze e fasi delle varie armoniche (cioè noti i coefficienti di Fourier), permette di ricostruire, cioè di *sintetizzare*, il segnale dato a partire dalle proprie componenti frequenziali (armoniche). Evidentemente, l'equazione di sintesi prevede l'uso di *infinite* armoniche per ricostruire il segnale. D'altronde, condizione necessaria alla convergenza della serie è che l'ampiezza $|X_n|$ delle armoniche *tenda a zero* quando $n \rightarrow \infty$. Questo comporta che le armoniche più "importanti" ai fini della sintesi del segnale sono in numero limitato, e che quindi la serie può essere sostituita ai fini pratici da una sommatoria di un numero finito di termini.

Le equazioni di analisi e di sintesi permettono di stabilire una corrispondenza tra il segnale $x(t)$ e la *sequenza* X_n costituita dai coefficienti della serie (coefficienti di Fourier o di Eulero). Indicheremo tale corrispondenza con la seguente scrittura:

$$x(t) \Longleftrightarrow X_n \quad (4.1.3.3)$$

Questo tipo di notazione suggerisce che la conoscenza dell'andamento del segnale $x(t)$ in ambito temporale è di fatto *equivalente* alla conoscenza della *successione* dei coefficienti di Fourier X_n in ambito frequenziale, nel senso che il passaggio da un dominio all'altro è immediato attraverso le relazioni di analisi e sintesi.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi(n-k)f_0 t] dt + j \sin[2\pi(n-k)f_0 t]) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi(n-k)f_0 t] dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin[2\pi(n-k)f_0 t] dt \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.3.4}$$

I due integrali sono risolvibili senza effettuare eccessivi calcoli matematici, infatti

$$\begin{aligned}
 \cos(2\pi(n-k)f_0 t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases} \\
 \sin(2\pi(n-k)f_0 t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-k)f_0 t) dt = {}^4 \begin{cases} T_0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

⁴Poichè integriamo il *coseno* lungo intervalli pari al periodo.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-k)f_0t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

Possiamo quindi riprendere

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-k)f_0t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-k)f_0t) dt \right] = \\ &= {}^5 \frac{1}{T_0} X_k T_0 = X_k \\ &X_k = X_k, \end{aligned}$$

che dimostra la tesi iniziale. □

⁵Di tutti i termini della sommatoria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n$ rimane infatti solo il k -esimo per cui il primo dei due integrali non è nullo.

4.1.4 Linearità della trasformata serie di Fourier

Consideriamo ora due segnali $x(t)$ e $y(t)$, entrambi periodici dello stesso periodo T_0 e aventi coefficienti di Fourier X_n and Y_n . Il segnale

$$z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \quad (4.1.4.1)$$

data dalla combinazione lineare di $x(t)$ e $y(t)$, è periodico di periodo T_0 , e ha coefficienti di Fourier Z_n dati da

$$Z_n = a \cdot X_n + b \cdot Y_n. \quad (4.1.4.2)$$

Dimostrazione. Tale proprietà di linearità dei coefficienti di Fourier deriva direttamente dalla medesima proprietà dell'integrale; si ha infatti che

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} z(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \frac{a}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt + \frac{b}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= a \cdot \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] + b \cdot \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] = \\ &= a \cdot X_n + b \cdot Y_n. \end{aligned} \quad (4.1.4.3)$$

Naturalmente, lo sviluppo in serie di $z(t)$ è costituito da una somma di oscillazioni aventi *le stesse frequenze* di quelle che compongono i segnali $x(t)$ e $y(t)$; pertanto, in generale una combinazione lineare di segnali aventi medesimo periodo T_0 non introduce nuove armoniche.

□

4.1.4.1 Esercizio

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + A \sin(2\pi f_0 t + \varphi), \quad (4.1.4.4)$$

ricaviamo i coefficienti di Fourier.

Notiamo subito che

$$x(t) = Ax_1(t) + Ax_2(t), \quad (4.1.4.5)$$

dove

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad (4.1.4.6)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi), \quad (4.1.4.7)$$

dalla proprietà di linearità dei coefficienti di Fourier deriva che

$$X_n = AX_{1n} + BX_{2n}. \quad (4.1.4.8)$$

Procediamo con i calcoli.

To be continued.

In conclusione possiamo quindi scrivere

$$X_n = \begin{cases} AX_{1n} & n = \pm 1 \\ BX_{2n} & n = \pm 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{2}e^{j\varphi} & n = 1 \\ \frac{A}{2}e^{-j\varphi} & n = -1 \\ \frac{B}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} & n = 2 \\ \frac{B}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} & n = -2 \\ 0 & n \neq \pm 1, \pm 2. \end{cases} \quad (4.1.4.9)$$

To be continued.

4.1.5 Simmetria Hermitiana della trasformata serie di Fourier

Dato un segnale reale $x(t)$ ($x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = x^*(t)$), i coefficienti X_n dello sviluppo in serie di Fourier in forma complessa di $x(t)$ godono della proprietà di simmetria Hermitiana (o coniugata). Ovvero

$$x(t) = x^*(t) \iff X_{-n} = X_n^* \quad (4.1.5.1)$$

$$X_{-n} = X_n^* \iff \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| & (\text{simmetria pari per il modulo}) \\ \angle X_n = -\angle X_{-n} & (\text{simmetria dispari per la fase}) \end{cases} \quad (4.1.5.2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} X_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \right)^* dt = \\ &= {}^{67} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right]^* = X_n^*. \end{aligned} \quad (4.1.5.3)$$

□

⁶Sia $z = re^{j\varphi} \in \mathbb{C}$ un numero complesso espresso in forma esponenziale. Allora: $\bar{z} = re^{-j\varphi}$ dove \bar{z} denota il complesso coniugato di z .

⁷Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora: $(z_1 \cdot z_2)^* = [c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2}]^* = [c_1 c_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}]^* = c_1 c_2 \cdot e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} = c_1 e^{-j\varphi_1} \cdot c_2 e^{-j\varphi_2} = z_1^* \cdot z_2^*$.

Spettro di ampiezza e di fase

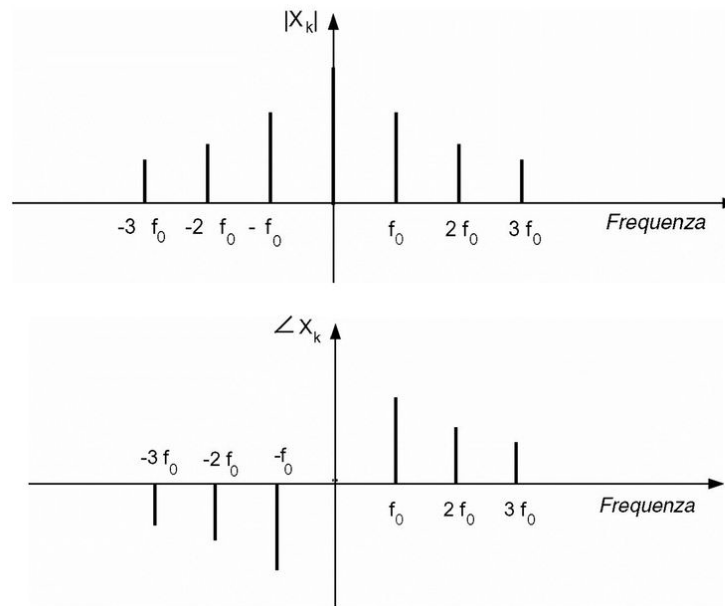


Figura 4.1: Spettro di ampiezza e di fase.

4.1.5.1 Simmetria pari per il modulo

$$|X_n| = |X_{-n}| \quad (4.1.5.4)$$

Sia $f(x)$ una funzione a valori reali di variabile reale e sia $D \subset \mathbb{R}$ il suo dominio. Allora f è **pari** se per ogni $x \in D$ vale l'equazione:

$$f(x) = f(-x).$$

Geometricamente, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y .

Il nome **pari** deriva dal fatto che le serie di Taylor di una funzione pari centrata nell'origine contengono solo potenze pari.

Esempi di funzioni pari sono x^2 , x^4 , $\cos(x)$, $\cosh(x)$.

Esempio pratico:

$$y = x^2 - 1 \implies f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x).$$

4.1.5.2 Simmetria dispari per la fase

$$\angle X_n = -\angle X_{-n} \quad (4.1.5.5)$$

Sia $f(x)$ una funzione a valori reali di variabile reale e sia $D \subset \mathbb{R}$ il suo dominio. Allora f è dispari se per ogni $x \in D$ sussiste l'equazione:

$$f(-x) = -f(x),$$

vale a dire

$$f(x) = -f(-x).$$

Geometricamente, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Il nome **dispari** deriva dal fatto che le serie di Taylor di una funzione dispari centrate nell'origine contengono solo potenze dispari.

Esempi di funzioni dispari sono x , x^3 , $\sin(x)$, $\sinh(x)$.

Esempio pratico:

$$y = x^3 - x \implies f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

4.1.6 Trasformata di un segnale (periodico) reale e pari

Si consideri un segnale periodico

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t,$$

reale

$$x(t) = x^*(t),$$

e pari

$$x(t) = x(-t).$$

In tal caso, il generico coefficiente di Fourier di $x(t)$ è una funzione pari di n :

$$X_n = X_{-n}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} X_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \\ &\stackrel{8}{=} \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{-T_0/2} x(-t') e^{-j2\pi n f_0 t'} - dt' = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(-t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = \\ &\stackrel{9}{=} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = X_n. \end{aligned}$$

□

Che dimostra la nostra tesi.

⁸Poniamo ora $t = -t'$.

⁹Dato che $x(t) = x(-t)$.

Ora, dato che in generale sappiamo che $X_{-n} = X_n^*$, ne segue che X_n è sia pari che reale ed è quindi possibile riscrivere la Serie di Fourier per $x(t)$ in forma semplificata. Infatti:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} X_{-n} e^{j2\pi(-n)f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} X_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} = \\
 {}^{10} &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi n f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \left(e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t} \right) = \\
 &= X_0 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \left(\frac{e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t}}{2} \right) = \\
 &= X_0 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t).
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi semplificato l'espressione in serie di Fourier eliminando i termini sinusoidale per i segnali periodici pari.

Questo risultato è logicamente giustificabile se si riflette sul fatto che il coseno è una funzione pari mentre il seno è una funzione dispari e quindi poco si presta a rappresentare l'andamento periodico di un segnale pari.

¹⁰ $X_n = X_{-n}$. dato che $x(t)$ è un segnale pari.

4.1.7 Trasformata di un segnale (periodico) reale e dispari

Si consideri un segnale periodico

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t,$$

reale

$$x(t) = x^*(t),$$

e dispari

$$x(t) = -x(-t).$$

In tal caso, il generico coefficiente di Fourier di $x(t)$ è una funzione dispari di n :

$$X_n = -X_{-n}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} -X_{-n} &= -\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi(-n)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} -x(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \\ &\stackrel{11}{=} \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{-T_0/2} -x(-t') e^{-j2\pi n f_0 t'} - dt' = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} -x(-t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = \\ &\stackrel{12}{=} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = X_n. \end{aligned}$$

□

Che dimostra la nostra tesi.

¹¹Poniamo ora $t = -t'$.

¹²Dato che $x(t) = -x(-t)$.

Ora, dato che in generale sappiamo che $X_{-n} = X_n^*$, ne segue che X_n è sia dispari che reale ed è quindi possibile riscrivere la Serie di Fourier per $x(t)$ in forma semplificata. Infatti:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} X_{-n} e^{j2\pi(-n)f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} X_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} = \\
 {}^{13} &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-X_n) e^{-j2\pi n f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} - \sum_{n=1}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi n f_0 t} = \\
 &= X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \left(e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t} \right) = \\
 &= X_0 + 2j \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \left(\frac{e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t}}{2j} \right) = \\
 &= X_0 + 2j \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \sin(2\pi n f_0 t).
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi semplificato l'espressione in serie di Fourier eliminando i termini cosinusoidale per i segnali periodici dispari.

Questo risultato è logicamente giustificabile se si riflette sul fatto che il seno è una funzione dispari mentre il coseno è una funzione pari e quindi poco si presta a rappresentare l'andamento periodico di un segnale dispari.

¹³ $X_n = -X_{-n}$. dato che $x(t)$ è un segnale dispari.

4.1.8 Trasformata di un segnale (periodico) reale alternativo

Si consideri un segnale periodico

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t,$$

reale

$$x(t) = x^*(t),$$

e alternativo

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right).^{14}$$

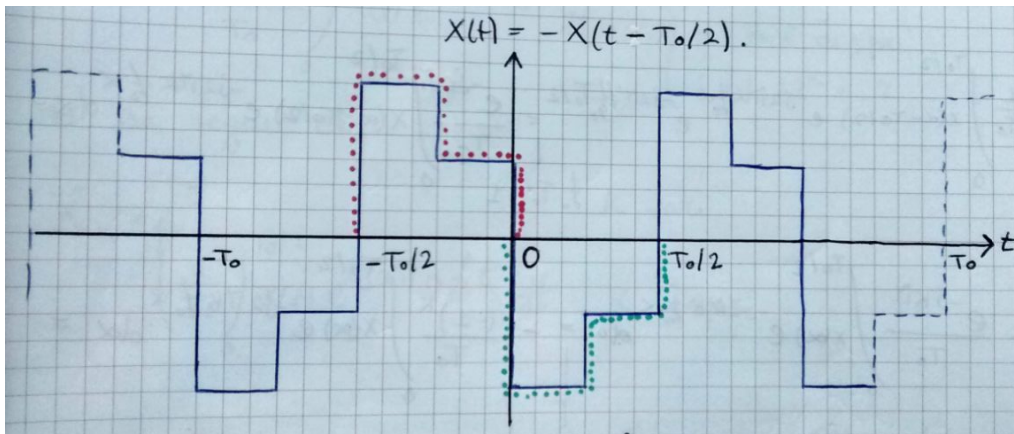


Figura 4.2: Rappresentazione grafica di un segnale alternativo.

In tal caso, il generico coefficiente X_n di Fourier di $x(t)$ è *nullo* per tutti i valori pari dell'indice n :

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}. \quad (4.1.8.1)$$

Dimostrazione.

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

¹⁴L'andamento del segnale in un qualunque semiperiodo $t_0 \leq t < t_0 + T_0/2$ è identico all'andamento nel semiperiodo precedente $t_0 - T_0/2 \leq t < t_0$, cambiato di segno.

$$^{15} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

Il primo integrale può essere riscritto come

$$\begin{aligned} ^{16} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x\left(t' - \frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi n f_0 \left(t' - \frac{T_0}{2}\right)} dt' = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} -x(t') e^{-j2\pi n f_0 \left(t' - \frac{T_0}{2}\right)} dt' = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} -x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} e^{j2\pi n f_0 \frac{T_0}{2}} dt' = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} -x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} e^{j\pi n} dt' = \\ ^{17} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} -x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} (-1)^n dt' = (-1)^n \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} -x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = \\ &= -\frac{(-1)^n}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt. \end{aligned}$$

Ora, sostituendo questo risultato nell'integrale iniziale

$$\begin{aligned} &= -\frac{(-1)^n}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' = \\ &= [1 - (-1)^n] \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t') e^{-j2\pi n f_0 t'} dt'. \end{aligned}$$

Ne segue quindi che

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt && n \text{ dispari} \\ X_n &= 0 && n \text{ pari.} \end{aligned}$$

□

¹⁵Avendo suddiviso l'intervallo di integrazione $[-T_0/2, T_0/2]$ in due semiperiodi.

¹⁶Poniamo $t' = t + \frac{T_0}{2}$ nel primo integrale. Quindi $t = t' - \frac{T_0}{2}$, e se t va da $-\frac{T_0}{2}$ a 0, allora $t' = t + \frac{T_0}{2}$ va da 0 a $\frac{T_0}{2}$.

¹⁷ $e^{j\pi n} = \cos(\pi n) - j \sin(\pi n) = \pm 1$.

Che dimostra la nostra tesi.

4.1.9 Simmetrie della Trasformata Continua di Fourier (TCF)

La funzione complessa $X(f)$ può essere rappresentata in forma polare o in forma rettangolare:

$$X(f) = R(f) + jI(f) \quad (4.1.9.1)$$

dove $R(f)$ e $I(f)$ ne rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria.

Vogliamo ora stabilire in che modo le proprietà della funzione $x(t)$ si riflettano sulla sua trasformata.

4.1.9.1 Simmetrie della TCF: Simmetria Hermitiana

Supponiamo che $x(t)$ sia una funzione *reale*:

$$x(t) = x^*(t)$$

in tal caso $X(f)$ è *Hermitiana*

$$X(-f) = X^*(f).$$

In tal caso le funzione $R(f)$ e $I(f)$ si ricavano immediatamente dalle seguenti relazioni

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt,$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

Da queste espressioni si vede chiaramente che

$$R(f) = R(-f),$$

$$I(f) = -I(-f),$$

ovvero la parte reale della trasformata di un segnale reale è una funzione *pari* della frequenza, mentre la parte immaginaria ne è una funzione

dispari.

La medesima proprietà si riflette ovviamente anche nelle funzioni $A(f)$ e $\vartheta(f)$:

$$\begin{aligned} A(f) &= A(-f), \\ \vartheta(f) &= -\vartheta(-f), \end{aligned}$$

per cui lo spettro di ampiezza di un segnale reale è una funzione pari, mentre il suo spettro di fase è dispari.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} X(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \right]^* dt = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(f). \end{aligned}$$

□

4.1.9.2 Simmetrie della TCF: Segnali reali e pari

Supponiamo adesso che $x(t)$ sia un segnale *reale e pari*

$$x(t) = x^*(t) \quad , \quad x(t) = x(-t).$$

Le relazioni che esprimono la parte reale e quella immaginaria del suo coefficiente di Fourier si semplificano rispettivamente in

$$R(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt,$$

$$I(f) = 0.$$

Ovvero, la trasformata di un segnale reale e pari è una funzione *reale e pari* della frequenza

$$X(f) = X^*(f) \quad , \quad X(f) = X(-f).$$

Dimostrazione. $X(f) = X^*(f)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \overset{18}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t') \cdot e^{-j2\pi f(-t')} - dt' = \\ &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t') \cdot e^{j2\pi ft'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t') \cdot e^{j2\pi ft'} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{j2\pi ft'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t') \cdot e^{j2\pi ft'} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t') \cdot e^{-j2\pi ft'}]^* dt' = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{-j2\pi ft'} dt' \right]^* = X^*(f). \end{aligned}$$

□

¹⁸Poniamo $t = -t'$, $dt = dt'$, se t va da $-\infty$ a $+\infty$, allora t' va da $+\infty$ a $-\infty$.

Dimostrazione. $X(f) = X(-f)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t') \cdot e^{-j2\pi f(-t')} - dt' = \\ &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(-t') \cdot e^{-j2\pi(-f)t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{-j2\pi(-f)t'} dt' = X(-f). \end{aligned}$$

□

4.1.9.3 Simmetrie della TCF: Segnali reali e dispari

Supponiamo adesso che $x(t)$ sia un segnale *reale e dispari*

$$x(t) = x^*(t) \quad , \quad x(t) = -x(-t).$$

Le relazioni che esprimono al parte reale e quella immaginaria del suo coefficiente di Fourier si semplificano rispettivamente in

$$R(f) = 0,$$

$$I(f) = -2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt.$$

Ovvero, la trasformata di un segnale reale e dispari è una funzione *immaginaria pura e dispari* della frequenza

$$X(f) = -X(-f) \quad , \quad X(f) \text{ immaginario puro.}$$

Dimostrazione. $X(f) = -X(-f)$

$$\begin{aligned} -X(-f) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(-f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t) \cdot e^{j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -x(-t') \cdot e^{j2\pi f(-t')} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{-j2\pi f t'} dt = X(f). \end{aligned}$$

□

4.1.10 Teoremi sulla trasformata continua di Fourier

Dalla definizione di trasformata, seguono facilmente alcune ulteriori proprietà, che chiameremo *teoremi*, estremamente utili nel calcolo delle trasformate dei segnali e comunque nell'uso dell'analisi di Fourier di carattere applicativo.

4.1.10.1 Linearità della TCF

Può essere conveniente in molti casi esprimere un segnale $x(t)$ come combinazione lineare di due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t),$$

con a e b costanti. Indicando come di consueto con $X_1(f)$ e $X_2(f)$ le trasformate rispettivamente dei segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$, la trasformata $X(f)$ di $x(t)$ è allora

$$X(f) = a \cdot X_1(f) + b \cdot X_2(f).$$

Dimostrazione. Infatti, applicando semplicemente la definizione trasformata, la tesi segue sfruttando la proprietà di linearità dell'integrale stesso

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot x_1(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot x_2(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= a \cdot X_1(f) + b \cdot X_2(f). \end{aligned}$$

□

4.1.10.2 Dualità della TCF

La similitudine tra le relazioni di trasformata e antitrasformata intese come "operatori" sulle funzioni rispettivamente $x(t)$ e $X(f)$ permette di risolvere una questione: se $X(f)$ indica la trasformata del segnale $x(t)$, qual è la trasformata del segnale *temporale* $X(t)$, avente cioè lo stesso andamento temporale originariamente posseduto nell'ambito frequenziale dalla trasformata di $x(t)$? La risposta è la seguente: se

$$x(t) \iff X(f)$$

allora

$$X(t) \iff x(-f).$$

Dimostrazione. Infatti, sappiamo che il segnale $x(t)$ è legato alla sua trasformata dalla relazione

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Scambiando formalmente le variabili t ed f nella precedente relazione, si ricava

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot e^{j2\pi tf} dt.$$

Se poi in questa relazione si effettua un cambiamento di variabile sostituendo alla variabile f la variabile $-f$, si ottiene

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

che dimostra la tesi iniziale. □

4.1.10.3 Teorema del ritardo

Come viene modificata la trasformata di un segnale se questo viene traslato sull'asse dei tempi (cioè, anticipato o ritardato)? Sia dunque $X(f)$ la trasformata del segnale $x(t)$; allora la trasformata del segnale traslato a destra della quantità t_0

$$y(t) = x(t - t_0)$$

è

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi ft_0}.$$

Questa operazione corrisponde evidentemente a un ritardo se $t_0 > 0$ e ad un anticipo se $t_0 < 0$.

Dimostrazione. Applicando la definizione di trasformata si ha

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &\stackrel{19}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'} e^{-j2\pi ft_0} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'} dt' \cdot e^{-j2\pi ft_0} = X(f)e^{-j2\pi ft_0}. \end{aligned}$$

□

Questa proprietà mostra che un ritardo temporale modifica lo spettro di fase della trasformata del segnale ma *non cambia il suo spettro di ampiezza*. Infatti, il teorema del ritardo si traduce nelle relazioni

$$|Y(f)| = |X(f)|,$$

$$\angle Y(f) = \angle X(f) - 2\pi ft_0.$$

¹⁹Poniamo $t' = t - t_0$.

4.1.10.4 Teorema del cambiamento di scala

Si consideri la situazione generale in cui due segnali siano legati dalla relazione

$$y(t) = x(\alpha t).$$

Cioè si effettua un cambiamento della scala temporale. Moltiplicando la variabile indipendente t del segnale $x(t)$ per coefficiente α si producono i seguenti effetti:

- $|\alpha| > 1 \rightarrow$ *compressione* della scala dei tempi
- $|\alpha| < 1 \rightarrow$ *dilatazione* della scala dei tempi
- $\alpha < 0 \rightarrow$ *inversione* della scala dei tempi

In altri termini, se $|\alpha| < 1$ l'evoluzione del segnale viene "rallentata", viceversa se $|\alpha| > 1$ il segnale viene "accelerato". Operazioni di questo tipo vengono effettuate correntemente nell'elaborazione dei segnali registrando il segnale ad una certa velocità e riproducendolo a velocità diversa.

Allora

$$Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Dimostrazione. $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{\alpha}} \frac{dt'}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' = \\ &= \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

□

²⁰Poniamo $t' = \alpha t$, da cui $dt' = d(\alpha t)$ e $dt' = \alpha dt \rightarrow dt = dt'/\alpha$.

Dimostrazione. $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \\
 {}^{21} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{\alpha}} - \frac{dt}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' = \\
 &= -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad , \quad \alpha < 0.
 \end{aligned}$$

□

I risultati ottenuti per $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$ possono allora essere riassunti con

$$x(\alpha t) \iff \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Si nota quindi che una dilatazione dell'asse dei tempi comporta una compressione dell'asse delle frequenze, e viceversa. Se infatti il segnale viene "rallentato", vengono a predominare le componenti frequenziali a bassa frequenza, che sono responsabili per così dire dell'evoluzione del segnale; lo spettro allora di "addensa" nell'intorno della frequenza nulla.

²¹Poniamo $t' = \alpha t$, da cui $t = \frac{t'}{\alpha}$, $dt' = d(\alpha t) \rightarrow dt' = \alpha \cdot dt$, $dt = \frac{dt'}{\alpha}$.

4.1.11 Teorema della Modulazione

In telecomunicazioni ed elettronica con il termine modulazione si indica l'insieme delle tecniche di trasmissione finalizzate ad imprimere un segnale elettrico o elettromagnetico, detto modulante, generalmente contenente informazione cioè variabile in maniera aleatoria nel tempo, su di un altro segnale elettrico o elettromagnetico, detto portante, sviluppato ad alta frequenza (frequenza portante \gg frequenza modulante). Il risultato della modulazione è la conversione del segnale modulante dalla banda base alla cosiddetta banda traslata (segnale modulato), secondo il teorema della modulazione.

The diagram shows the equation $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$ written on a grid background. Three colored arrows point from parts of the equation to labels below: an orange arrow from $y(t)$ to 'SEGNALE MODULATO', a blue arrow from $x(t)$ to 'SEGNALE MODULANTE', and a green arrow from $\cos(2\pi f_0 t)$ to 'OSCILLAZIONE'.

Figura 4.3: Segnale modulato.

L'operazione inversa di ripristino del segnale informativo originario in banda base è detto demodulazione. Il dispositivo in trasmissione che attua l'operazione di modulazione sul segnale informativo è detto modulatore, mentre il dispositivo in ricezione che attua l'operazione di demodulazione è detto demodulatore, compresi rispettivamente nel trasmettitore e nel ricevitore. In un sistema di ricetrasmissione tali sistemi vengono riuniti entrambi sotto la dizione *Modem* (dalla composizione di Modulazione e Demodulazione).

I segnali modulati possono rappresentare le informazioni più diverse: audio, video, dati, ecc... L'onda portante è un'onda elettromagnetica o un segnale elettrico a frequenza ben determinata (molto maggiore della frequenza del segnale modulante), che può essere trasmessa in aria o

nel vuoto (ad esempio nelle radiocomunicazioni), o tramite altro mezzo fisico (ad esempio un cavo). In caso di comunicazioni in fibra ottica la portante è la radiazione laser la cui frequenza è tipicamente espressa come lunghezza d'onda.

In generale, il motivo per cui si utilizzano le tecniche di modulazione risiede nel fatto che i segnali rappresentanti le informazioni da trasmettere sono in prevalenza di natura passa-basso (il loro contenuto spettrale è concentrato per lo più a basse frequenze), mentre i canali trasmissivi che più comunemente si utilizzano, per poter trasmettere segnali modulati contemporaneamente, (come canali hertziani e fibre ottiche) sono tipicamente di natura passa-banda cioè trasmettono in una banda a frequenza diversa da quella del segnale informativo originario. In sostanza occorre quindi convertire in frequenza, mediante tale tecnica, lo spettro del segnale rappresentante l'informazione.

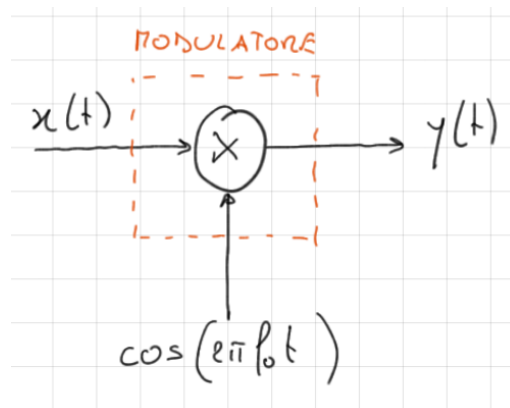


Figura 4.4: Modulatore.

Esistono diversi tipi di modulazione analogica, utilizzate nelle rispettive trasmissioni analogiche:

- AM - (Amplitude Modulation) modulazione di ampiezza;
- FM - (Frequency Modulation) modulazione di frequenza;
- PM - (Phase Modulation) modulazione di fase.

In sostanza, l'informazione da trasmettere può essere codificata all'interno di variazioni di ampiezza, frequenza e fase, ed in ricezione dovrà essere recuperata, ovvero demodulata dal segnale portante ricevuto.

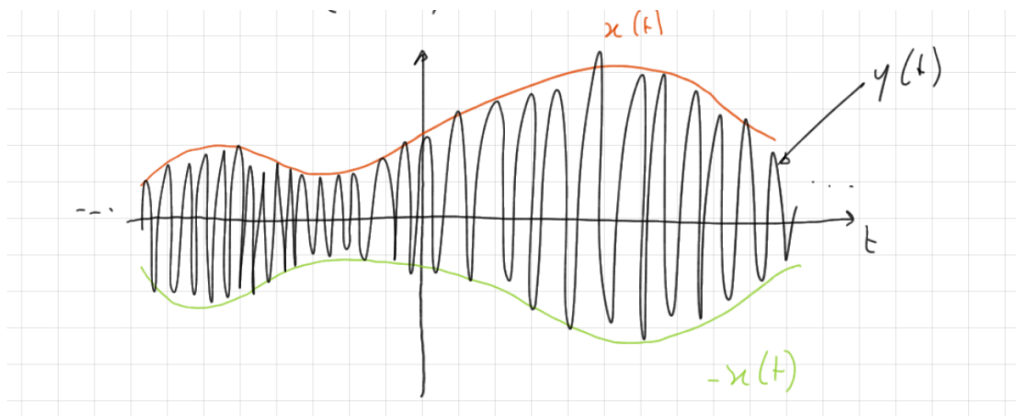


Figura 4.5: Codifica dell'informazione da trasmettere.

Enunciamo ora formalmente il cosiddetto teorema della modulazione.

4.1.11.1 Modulazione con coseno

Se, come di consueto, $x(t) \iff X(f)$, allora definendo

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

segue che

$$Y(f) = \frac{1}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0) = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &\stackrel{22}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\ &\quad \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0), \end{aligned}$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

Una prima conclusione che possiamo trarre è la seguente: se un segnale viene moltiplicato per il fattore esponenziale complesso $e^{j2\pi f_0 t}$, la sua trasformata di Fourier viene traslata attorno alla frequenza f_0 . Questo risultato rappresenta la cosiddetta proprietà di traslazione in frequenza della trasformata e può essere riassunto in

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \iff X(f - f_0).$$

²² $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

Allora, dato che abbiamo dimostrato che la trasformata del segnale modulato $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ può essere espresso come

$$\mathcal{F}[x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)] = \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2},$$

allo stesso modo è possibile ottenere

$$\mathcal{F}[x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)] = \frac{X(f - f_0) - X(f + f_0)}{2j},$$

questo risultato verrà approfondito nella sezione successiva.

4.1.11.2 Modulazione con seno

Se, come di consueto, $x(t) \iff X(f)$, allora definendo

$$y(t) = x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

segue che

$$Y(f) = \frac{1}{2j} \cdot X(f - f_0) - \frac{1}{2j} X(f + f_0) = \frac{X(f - f_0) - X(f + f_0)}{2j}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t}}{2j} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{2j} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} X(f - f_0) - \frac{1}{2j} X(f + f_0) = \frac{X(f - f_0) - X(f + f_0)}{2j}. \end{aligned}$$

□

4.1.11.3 Modulazione con cosinusoide generica

Se, come di consueto, $x(t) \iff X(f)$, allora definendo

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

segue che

$$Y(f) = \frac{e^{j\varphi}}{2} X(f - f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} X(f + f_0) = \frac{e^{j\varphi} X(f - f_0) + e^{-j\varphi} X(f + f_0)}{2}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\varphi} e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{e^{j\varphi} e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j\varphi} e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{2} dt = \\ &= \frac{e^{j\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{e^{-j\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\ &= \frac{e^{j\varphi}}{2} X(f - f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} X(f + f_0) = \frac{e^{j\varphi} X(f - f_0) + e^{-j\varphi} X(f + f_0)}{2}. \end{aligned}$$

□

4.1.11.4 Modulazione con esponenziale complesso

Se, come di consueto, $x(t) \iff X(f)$, allora definendo

$$y(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

segue che

$$Y(f) = X(f - f_0).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = X(f - f_0). \end{aligned}$$

□

È Interessante a questo punto sottolineare due risultati importanti che abbiamo ottenuto

Teorema del ritardo

$$y(t) = x(t - t_0) \iff Y(f) = X(f) e^{-j2\pi f t_0}.$$

Teorema della modulazione

$$y(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t} \iff Y(f) = X(f - f_0).$$

4.1.12 Teorema di derivazione

Nell'elaborazione dei segnali a tempo continuo si effettuano spesso operazioni di derivazione e/o integrazione. Sorge quindi la necessità di determinare le trasformate dei nuovi segnali ottenuti con tali operazioni. Consideriamo dunque come di consueto un segnale $x(t)$ con trasformata $X(f)$. Questo può essere espresso come integrale di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Se, inoltre, il segnale è derivabile,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Procediamo al calcolo dell'integrale a secondo membro della precedente equazione invertendo le operazioni di derivazione e integrazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} [X(f) e^{j2\pi ft}] df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è stato sfruttato il fatto che l'esponenziale è l'unica funzione che dipende da t . Calcolando quindi la derivata si ottiene

$$\frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} = (j2\pi f) e^{j2\pi ft},$$

quindi

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) (j2\pi f) e^{j2\pi ft} df.$$

Ponendo ora $Y(f) = (j2\pi f)X(f)$ nella precedente, si ottiene:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df,$$

quindi - confrontando questo risultato con la nostra equazione di partenza $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ - possiamo affermare che $Y(f)$ è la trasformata della funzione $\frac{dx(t)}{dt}$. Concludiamo allora con la relazione di corrispondenza che prende il nome di **teorema di derivazione**

$$\frac{dx(t)}{dt} = j2\pi f \cdot X(f).$$

L'operazione di derivazione temporale di un segnale si traduce, nel dominio della frequenza, in una semplice operazione algebrica, e cioè in una alterazione di tutte le componenti frequenziali secondo un fattore $j2\pi f$ proporzionale al valore della frequenza stessa.

Oltre ad uno sfasamento di $\pm\pi/2$ (a seconda del segno di f) l'operazione di derivata comporta in particolare una esaltazione delle componenti alle alte frequenze.

4.1.12.1 Teorema di derivazione nel tempo (Prof. Martorella)

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \implies Y(f) = j2\pi f \cdot X(f).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt} [e^{j2\pi ft}] df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot (2j\pi f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} [j2\pi f \cdot X(f)] e^{j2\pi ft} df, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} y(t) &= ATCF [j2\pi f \cdot X(f)] \\ Y(f) &= j2\pi f \cdot X(f). \end{aligned}$$

□

4.1.12.2 Teorema di derivazione in frequenza (Prof. Martorella)

$$Y(f) = \frac{d}{df} X(f) \implies y(t) = -j2\pi f \cdot x(t).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) = \frac{d}{df} X(f) &= \frac{d}{df} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \frac{d}{df} \left[e^{-j2\pi f t} \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j2\pi t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

da cui segue che

$$Y(f) = TCF [-j2\pi t \cdot x(t)] \implies y(t) = -j2\pi t \cdot x(t).$$

□

4.1.13 Teorema di integrazione

Nell'elaborazione dei segnali a tempo continuo, si effettuano spesso operazioni di derivazione e/o integrazione temporale dei segnali stessi. Sorge quindi la necessità di determinare le trasformate dei nuovi segnali ottenuti con tali operazioni.

Risolviamo adesso il problema inverso a quello della derivazione trattato nella sezione precedente. Indichiamo con $y(t)$ la funzione integrale (o segnale integrale, o primitiva) di $x(t)$, definita come

$$\begin{cases} y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0 \end{cases} \implies Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}.$$

Dimostrazione. Essendo $y(t)$ la funzione integrale di $x(t)$, risulta ovviamente

$$x(t) = \frac{d}{dt}y(t),$$

utilizzando il teorema della derivazione ora

$$X(f) = j2\pi f \cdot Y(f),$$

da cui si ricava banalmente

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}.$$

□

Questo risultato è noto come **teorema di integrazione** e si riassume con

$$\int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \iff \frac{X(f)}{j2\pi f}.$$

Ancora una volta, una operazione di calcolo differenziale in ambito temporale si traduce in una semplice operazione algebrica (una divisione per il fattore $j2\pi f$) in ambito frequenziale.

In questo caso, dualmente al teorema di derivazione, vengono esaltate le componenti a bassa frequenza nello spettro del segnale e attenuate quelle alle alte frequenze.

4.1.13.1 Teorema di Integrazione nel tempo (Prof. Martorella)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0 \end{array} \right. \implies Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}.$$

Dimostrazione.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha \implies x(t) = \frac{d}{dt}y(t) \implies$$

$$\implies \text{\textit{teorema della derivazione}} \implies X(f) = j2\pi f \cdot Y(f) \implies Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}.$$

□

4.1.13.2 Teorema di Integrazione in frequenza (Prof. Martorella)

$$\begin{cases} Y(f) = \int_{-\infty}^f X(\alpha) d\alpha \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) d\alpha = 0 \end{cases} \implies y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t}.$$

Dimostrazione. Dato che

$$Y(f) = \int_{-\infty}^f X(\alpha) d\alpha \implies X(f) = \frac{d}{df} Y(f).$$

Applicando il teorema della derivazione in frequenza a quanto abbiamo ottenuto

$$X(f) = \frac{d}{df} Y(f).$$

otteniamo che

$$x(t) = -2j\pi t \cdot y(t)$$

da cui segue infine che

$$y(t) = -\frac{x(t)}{2j\pi t}.$$

□

4.1.14 Teorema del Prodotto di Convoluzione

Consideriamo adesso due segnali $x(t)$ e $y(t)$ con le rispettive trasformate di Fourier date da $X(f)$ e $Y(f)$. Si vuole calcolare la trasformata del segnale prodotto $z(t) = x(t) \cdot y(t)$. Essa è espressa da

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Sostituendo a $x(t)$ la sua espressione come integrale di Fourier,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df,$$

si ricava

$$Z(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot e^{j2\pi \nu t} d\nu \right] \cdot y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Poichè nel passaggio precedente compaiono due operazioni di integrazione, abbiamo esplicitamente indicato sugli estremi di ogni integrale la variabile di integrazione cui si riferisce; inoltre, nell'espressione di $x(t)$ come integrale di Fourier, si è usata una variabile di integrazione "muta" ν con un nome differente da f per non creare conflitti con la variabile f di cui la trasformata $Z(f)$ risulta funzione. Se nella precedente equazione si inverte l'ordine delle operazioni di integrazione, ammettendo che questa operazione sia lecita, si ricava

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi(f-\nu)t} dt \right] d\nu$$

L'integrale entro parentesi quadre rappresenta la trasformata di $y(t)$ calcolata per il valore della frequenza pari a $(f - \nu)$; di conseguenza l'equazione precedente può essere scritta come

$$Z(f) = \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot Y(f - \nu) d\nu = X(f) \otimes Y(f).$$

L'operazione indicata con il simbolo \otimes prende il nome di integrale (o talvolta impropriamente di prodotto) di convoluzione, o *convoluzione tout-court*. La convoluzione, introdotta qui in ambito frequenziale per il calcolo della trasformata del prodotto di due segnali, ha un'importanza cardinale nella teoria dei sistemi lineari stazionari.

Dunque, il risultato ottenuto può essere riassunto come:

$$x(t) \cdot y(t) \iff X(f) \otimes Y(f).$$

4.1.14.1 Teorema del Prodotto (Prof. Martorella)

$$z(t) = x(t) \cdot y(t) \implies Z(f) = X(f) \otimes Y(f).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &\stackrel{23}{=} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha \right] \cdot y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi(f-\alpha)t} dt \right] d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} X(\alpha) Y(f-\alpha) d\alpha = X(f) \otimes Y(f). \end{aligned}$$

□

²³Avendo posto $x(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} X(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha$

4.1.15 Teorema di Convoluzione

Consideriamo ora il caso duale del precedente (teorema del prodotto di convoluzione), ovvero un segnale $z(t)$ dato dall'integrale di convoluzione in ambito temporale tra $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) \otimes y(t) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot y(t - \alpha) d\alpha \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} y(\alpha) x(\alpha - t) d\alpha, \end{aligned}$$

e calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$Z(f) = TCF[z(t)].$$

Procedendo come nel caso della convoluzione in frequenza ricaviamo

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot y(t - \alpha) d\alpha \right] e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t - \alpha) \cdot e^{-j2\pi ft} dt d\alpha = \end{aligned}$$

da cui, con la sostituzione $\beta = t - \alpha$, otteniamo

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} y(\beta) \cdot e^{-j2\pi f(\beta+\alpha)} d\beta d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} y(\beta) \cdot e^{-j2\pi f\beta} d\beta e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) Y(f) \cdot e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = Y(f) \cdot \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = X(f) \cdot Y(f). \end{aligned}$$

Dunque il risultato ottenuto può essere riassunto come

$$x(t) \otimes y(t) \iff X(f) \cdot Y(f).$$

4.1.15.1 Teorema di Convoluzione (Prof. Martorella)

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \iff X(f) \cdot Y(f).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi ft} d\tau dt = \\ &\stackrel{24}{=} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot Y(f) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= Y(f) \cdot \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f) \cdot Y(f). \end{aligned}$$

□

Uso della TCF per il calcolo del prodotto di convoluzione:

$$x(t) \otimes y(t) = z(t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$X(f) \cdot Y(f) = Z(f)$$

4.1.15.2 Proprietà della Convoluzione

Commutativa:

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

²⁴Per il teorema del ritardo $y(t - \tau) \iff Y(f) \cdot e^{-j2\pi f\tau}$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \, d\tau \stackrel{25}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} x(t - \alpha) \cdot y(\alpha) \, -d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha) \cdot x(t - \alpha) \, d\alpha = y(t) \otimes x(t). \end{aligned}$$

□

Distributiva

$$x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x(t) \otimes [y(t) + z(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot [y(t - \tau) + z(t - \tau)] \, d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot z(t - \tau) \, d\tau = \\ &= x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t). \end{aligned}$$

□

Associativa

$$x(t) \otimes (y(t) \otimes z(t)) = (x(t) \otimes y(t)) \otimes z(t).$$

Dimostrazione. Dal teorema della convoluzione sappiamo che

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \iff Z(f) = X(f) \cdot Y(f).$$

Ora, ponendo $w(t) = y(t) \otimes z(t)$ possiamo scrivere:

$$x(t) \otimes (y(t) \otimes z(t)) = x(t) \otimes w(t).$$

²⁵Poniamo $\alpha = t - \tau \implies \tau = t - \alpha$, $d\alpha = -d\tau$. α va da $+\infty$ a $-\infty$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier

$$x(t) \otimes w(t) \iff X(f) \cdot W(f)$$

con

$$W(f) = Y(f) \cdot Z(f).$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} TCD[x(t) \otimes (y(t) \otimes z(t))] &= X(f) \cdot (Y(f) \cdot Z(f)) = (X(f) \cdot Y(f)) \cdot Z(f) = \\ &^{26} = (x(t) \otimes y(t)) \otimes z(t). \end{aligned}$$

□

²⁶ $ATCF[(X(f) \cdot Y(f)) \cdot Z(f)] = (x(t) \otimes y(t)) \otimes z(t).$

4.1.16 Formule di Somma di Poisson

Consideriamo un segnale aperiodico $x(t)$ e costruiamo il segnale $y(t)$ periodico di periodo T_0 secondo la relazione di *periodicizzazione*

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT),$$

già incontrata più volte precedentemente. Il segnale $y(t)$ può allora essere sviluppato in serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t}.$$

dove $f_0 = 1/T_0$ e

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt.$$

Vediamo come stabilire una relazione fra il *coefficiente* Y_k dello sviluppo in serie del segnale *periodico* $y(t)$ e la *trasformata* $X(f)$ del segnale base *aperiodico* $x(t)$. Sostituiamo dunque la periodicizzazione che fornisce il segnale $y(t)$ nell'espressione del coefficiente Y_k :

$$Y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

scambiando poi l'operazione di sommatoria e di integrazione, si ha

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t - nT) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2 - nT}^{T_0/2 - nT} x(\alpha) \cdot e^{-j2\pi k f_0 (\alpha + nT_0)} d\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2-nT_0}^{T_0/2-nT_0} x(\alpha) \cdot e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha$$

dove si è giunti al risultato finale dopo aver effettuato il cambiamento di variabile $\alpha = t - nT_0$ e avendo osservato che $e^{-j2\pi k n f_0 T_0} = e^{-j2\pi k n} \equiv 1$.

La funzione integranda a secondo membro non dipende dall'indice della serie n ; tale indice agisce sugli *estremi di integrazione*. Ci si rende allora conto facilmente che, al variare di n tra $-\infty$ e $+\infty$, gli intervalli di integrazione $(-T_0/2 - nT_0, T_0/2 - nT_0)$ della *stessa funzione integranda* ricoprono tutto l'asse reale senza sovrapposizioni. Pertanto è possibile semplificare la precedente relazione in

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2-nT_0}^{T_0/2-nT_0} x(\alpha) \cdot e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot e^{-j2\pi k f_0 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot X(kf_0) = f_0 \cdot X(kf_0) = \frac{1}{T_0} \cdot X\left(\frac{k}{T_0}\right), \end{aligned}$$

che stabilisce la relazione cercata, detta di *campionamento in frequenza*. I coefficienti di Fourier del segnale periodico $y(t)$ sono dunque, a meno del fattore $1/T_0$, i valori (campioni) della trasformata continua del segnale-base $x(t)$ presi in corrispondenza delle *frequenze armoniche* kf_0 .

4.1.16.1 Prima Formula di somma di Poisson

Se usiamo l'espressione appena ricavata del coefficiente di Fourier nel corrispondente sviluppo in serie si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \cdot X\left(\frac{k}{T_0}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi k t}{T_0}} \end{aligned}$$

che è nota come *prima formula di somma di Poisson*.

4.1.16.2 Seconda Formula di somma di Poisson

Applichiamo adesso il teorema della dualità

$$x(t) \iff X(f) \implies X(t) \iff x(-f).$$

alla prima formula di Poisson, ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} x\left(-\frac{k}{T_0}\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi kt}{T_0}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t - nT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} x\left(\frac{k}{T_0}\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi kt}{T_0}} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(t - \frac{n}{T}\right) &= T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \cdot e^{-j2\pi ktT} \end{aligned}$$

avendo cambiato segno all'indice di sommatoria nel secondo membro e avendo posto $T = 1/T_0$. Se adesso, dal punto di vista puramente formale, cambiamo nome alla variabile corrente da t a f , otteniamo un'espressione "duale" alla prima formula di Poisson che costituisce la *seconda formula di somma di Poisson*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

la quale riveste importanza fondamentale nel *campionamento* dei segnali a tempo continuo.

4.1.16.3 Applicazione delle formule di Poisson alla Delta di Dirac

Sia

$$x(t) = \delta(t) \iff X(f) = 1$$

allora, dalla **prima formula di Poisson** segue che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi n f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t},$$

e dalla **seconda formula di Poisson** segue che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n f T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right).$$

4.1.17 Dimostrare la TCF di un segnale periodico

Sia $x(t)$ un segnale aperiodico che ammette TCF

$$x(t) \iff X(f)$$

e sia $y(t)$ il segnale ottenuto per periodicizzazione di $x(t)$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0), \quad T_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Allora

$$\begin{aligned} y(t) \iff Y(f) &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \end{aligned}$$

dove

$$y(t) \iff Y_n = \frac{1}{T_0} \cdot x\left(\frac{n}{T_0}\right).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ & \stackrel{27}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{-j2\pi f(t' + nT_0)} dt' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot e^{-j2\pi ft'} dt' \cdot e^{-j2\pi n f T_0} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{-j2\pi n f T_0} = X(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n f T_0} = \\ & \stackrel{28}{=} X(f) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \stackrel{29}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \end{aligned}$$

²⁷Poniamo $t' = t - nT_0$

²⁸Per la seconda formula di Poisson.

²⁹ $f = n \cdot f_0 = \frac{n}{T_0}$

$$^{30} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \cdot \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right).$$

□

Da questo risultato segue che periodicizzare nel tempo corrisponde a campionare in frequenza.

³⁰Dalla relazione tra *TSF* e *TCF* per un segnale $y(t)$ ottenuto tramite periodicizzazione di un segnale aperiodico $x(t)$, sappiamo che $Y_n = \frac{1}{T_0} \cdot X \left(\frac{n}{T_0} \right) = f_0 \cdot X(n \cdot f_0)$

4.1.18 Dimostrare che la TSF di $x(t) = \sum_n x_0(t - nT)$ è scrivibile tramite la TCF di $x_0(t)$

Consideriamo un segnale $x(t)$ periodico

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0),$$

$$x(t) \iff X_n,$$

$$X_n = TSF\{x(t)\} \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

La TSF di $x(t)$ può alternativamente essere calcolata come

$$X_n = \frac{1}{T_0} \cdot X_0\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

con

$$X_0(f) = TCF\{x_0(t)\}.$$

Quindi, per calcolare la TSF di un segnale periodico basta calcolare la TCF del segnale aperiodico di base.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_0(t - mT_0) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_0(t - mT_0) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \\ {}^{31} &= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2 - mT_0}^{T_0/2 - mT_0} x_0(t') \cdot e^{-j2\pi n f_0 (t' + mT_0)} dt' = \end{aligned}$$

³¹Pongo $t' = t - mT_0 \implies t = t' + mT_0$.

$$^{32} = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t') \cdot e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' \cdot e^{-j2\pi n f_0 m T_0} =$$

$$^{33} = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t') \cdot e^{-j2\pi n f_0 t'} dt' =$$

$$= \frac{1}{T_0} X_0(n f_0) = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{n}{T_0}\right).$$

□

³² $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2-mT_0}^{T_0/2-mT_0} = \int_{-\infty}^{+\infty}.$
³³ $e^{-j2\pi n f_0 m T_0} = e^{-j2\pi n m} = 1.$

4.1.19 Teorema di Parseval

In analisi complessa il teorema di Parseval o identità di Rayleigh, il cui nome è dovuto a Marc-Antoine Parseval, è un teorema che stabilisce che la sommatoria del prodotto dei coefficienti di Fourier di due funzioni periodiche è uguale all'integrale del loro prodotto.

Nonostante il termine "teorema di Parseval" sia spesso utilizzato per descrivere l'unitarietà di ogni trasformata di Fourier, in particolar modo in fisica e in ingegneria, la forma più generale di questa proprietà è data dal teorema di Plancherel.

4.1.19.1 Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali aperiodici

Se,

$$x(t) \iff X(f),$$

e

$$y(t) \iff Y(f),$$

allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \cdot y^*(t) dt = \\ &= \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right]^* df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df. \end{aligned}$$

□

4.1.19.2 Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali periodici (con TSF)

Consideriamo due segnali $x(t)$ e $y(t)$ periodici di periodo T_0 che ammettono TSF

$$x(t) \iff X_n$$

$$y(t) \iff Y_n$$

Allora

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot y^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot Y_n^*.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot y^*(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t} \cdot y^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y^*(t) \cdot e^{j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \right]^* = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot Y_n^*. \end{aligned}$$

□

4.1.19.3 Definire e dimostrare il teorema di Parseval per segnali periodici (con TCF)

Tenendo a mente quanto dimostrato usando la *TSF* nella sezione precedente, consideriamo due segnali $x(t)$ e $y(t)$ periodici di periodo T_0 che ammettono *TSF*. Prendiamo ora in esame il segnale base da cui vengono ottenuti per *periodicizzazione* questi due segnali

$$x_0(t) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right),$$

$$y_0(t) = y(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right).$$

Essendo aperiodici, $x_0(t)$ e $y_0(t)$ ammettono *TCF*

$$x_0(t) \iff X_0(f),$$

$$y_0(t) \iff Y_0(f).$$

Da quanto premesso, segue quindi che

$$x(t) \iff X_n = \frac{1}{T_0} X_0 \left(\frac{k}{T_0} \right),$$

$$y(t) \iff y_n = \frac{1}{T_0} Y_0 \left(\frac{k}{T_0} \right).$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot y^*(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_0 \left(\frac{n}{T_0} \right) \cdot \frac{1}{T_0} Y_0^* \left(\frac{n}{T_0} \right) = \\ &= \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0 \left(\frac{n}{T_0} \right) \cdot Y_0^* \left(\frac{n}{T_0} \right). \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot y^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot Y_n^* = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0 \left(\frac{n}{T_0} \right) Y_0^* \left(\frac{n}{T_0} \right).$$

□

In pratica, si tratta di una nuova relazione ottenuta sfruttando la relazione tra *TSF* e *TCF* precedentemente dimostrata e applicando il teorema di Parseval per segnali periodici (con *TSF*).

4.1.19.4 Definire e dimostrare il teorema di Parseval per le sequenze

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot y^*[n] &= T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) \cdot \bar{Y}^*(f) df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot y^*[n] \stackrel{34}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) \cdot e^{j2\pi f n T} df \cdot y^*[n] = \end{aligned}$$

³⁴L'antitrasformata di Fourier di una sequenza $x[n] = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) \cdot e^{j2\pi f n T} df$.

$$\begin{aligned}
&= T \int_{-1/2T}^{1/2T} \overline{X}(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^*[n] \cdot e^{j2\pi f n T} df = \\
&= T \int_{-1/2T}^{1/2T} \overline{X}(f) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{j2\pi f n T} \right]^* df = \\
&= T \int_{-1/2T}^{1/2T} \overline{X}(f) \cdot \overline{Y}^*(f) df.
\end{aligned}$$

- 4.1.20 Definire l'operazione di convoluzione ed illustrarne le proprietà
- 4.1.21 Dimostrare che la TFS di $x[n] = x(nT)$ è scrivibile tramite la TCF di $x(t)$
- 4.1.22 Definire l'operazione di autocorrelazione per segnali aperiodici ed illustrarne le proprietà

4.1.23 Definire la cross-correlazione e la convoluzione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$

La convoluzione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è data da

$$x(\tau) * y(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(\tau - t) dt,$$

mentre la cross-correlazione è definita come

$$C_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt.$$

4.1.24 Dimostrare che la cross-correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ è scrivibile in termini di convoluzione tra i due segnali

Si ricorda che la convoluzione tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è data da

$$x(\tau) * y(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(\tau - t) dt,$$

mentre la cross-correlazione è definita come

$$C_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt.$$

Dimostrazione. La relazione tra la cross-correlazione e la convoluzione è data

$$\begin{aligned} x(\tau) * y^*(-\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*[-(\tau - t)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt = C_{xy}(\tau) \\ &\implies C_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau). \end{aligned}$$

□

4.1.25 Dimostrare che la TFS di $x[n] = x(nT)$ è periodica di periodo $1/T$

Dato

$$x[n] \iff \bar{X}(f)$$

sappiamo che per definizione

$$\bar{X}(f) \triangleq \sum_n x[n] \cdot e^{-j2\pi n f T}$$

Dobbiamo ora dimostrare che

$$\bar{X}(f) = \bar{X}\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione.

$$\bar{X}\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi n(f - \frac{k}{T})T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi n f T} \cdot e^{j2\pi n k} =$$

$$\bar{X}(f)^{35}$$

□

4.1.26 Dare la definizione di Densità spettrale di Energia e dimostrare che $S_x(f) = |X(f)|^2$

4.1.27 Definire la funzione delta di Dirac e illustrare le sue proprietà

4.1.28 Dimostrare la condizione sufficiente per l'esistenza della TFS

³⁵Dato che $e^{j2\pi n k} = 1$.

4.2 Segnali Aleatori

In moltissimi casi non è possibile conoscere con esattezza *a priori* il valore assunto da un segnale in un certo istante. Si pensi per esempio al segnale geofisico colto da sensori posti sul terreno per effettuare rilevazioni minerarie. Tale segnale non è noto *a priori* completamente, in particolare non se ne conosce l'evoluzione futura se non dopo l'osservazione, cioè *a posteriori*. Prima dell'osservazione, si ha solo una conoscenza generica di alcune proprietà di massima di tale segnale, derivante dall'esperienza pregressa in casi simili. Stessa osservazione può farsi a proposito delle tensioni di disturbo (*rumore*) presenti nei componenti elettronici attivi e passivi e prodotte da fenomeni incontrollabili, tipicamente di origine quantistica. Diremo quindi che questi segnali sono *aleatori*, intendendo che il valore assunto da essi è affetto da un certo grado di improbabilità (alea) che ne impedisce una conoscenza esatta. Per modellare e studiare i segnali aleatori è indispensabile quindi ricorrere a tecniche basate sulla *teoria della probabilità e dei processi aleatori*.

4.2.1 Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes (conosciuto anche come formula di Bayes o teorema della probabilità delle cause), prodotto da Thomas Bayes, deriva da due teoremi fondamentali delle probabilità: il teorema della probabilità composta e il teorema della probabilità assoluta. Viene impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha scatenato l'evento verificato. Formalmente, il teorema di Bayes è valido in tutte le interpretazioni della probabilità. In ogni caso, l'importanza di questo teorema per la statistica è tale che la divisione tra le due scuole (statistica bayesiana e statistica frequentista) nasce dall'interpretazione che si dà al teorema stesso.

Enunciato

Consideriamo la coppia di eventi A e B , ciascuno avente probabilità non nulla. La probabilità condizionata $Pr(A|B)$ può essere ricavata con la relazione

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)}, \quad (4.2.1.1)$$

nota come teorema (o formula) di Bayes.

Dimostrazione. Il teorema deriva dalla definizione di probabilità condizionata. La probabilità di un evento A , noto un evento B , risulta:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{Pr(AB)}{Pr(B)}.$$

In modo analogo, la probabilità di un evento B noto un evento A

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(A)} = \frac{Pr(AB)}{Pr(A)},$$

dalla quale otteniamo

$$Pr(A \cap B) = Pr(B|A)Pr(A).$$

Sostituendo questo risultato nella prima uguaglianza, si trova il teorema di Bayes

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)}.$$

□

4.2.1.1 Esempio Teorema di Bayes

Si consideri una scuola che ha il 60% di studenti maschi e il 40% di studentesse femmine.

Le studentesse indossano in egual numero gonne e pantaloni; gli studenti indossano tutti quanti i pantaloni. Un osservatore, da lontano, nota un generico studente coi pantaloni. Qual è la probabilità che quello studente sia una femmina?

Il problema può essere risolto con il teorema di Bayes, ponendo l'evento A che lo studente osservato sia femmina, e l'evento B che lo studente osservato indossi i pantaloni. Per calcolare la probabilità $Pr(A|B)$ ³⁶, dovremo sapere:

- $Pr(A)$, ovvero la probabilità che lo studente sia femmina senza nessun'altra informazione. Dato che l'osservatore vede uno studente a caso, ciò significa che tutti gli studenti hanno la stessa probabilità di essere osservati. Essendo le studentesse il 40% del totale, la probabilità risulterà

$$Pr(A) = 40\% = \frac{40}{100} = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

- $Pr(\bar{A})$, la probabilità dell'evento complementare ad A , ovvero la probabilità che lo studente sia maschio senza nessun'altra informazione. Essendo \bar{A} l'evento complementare di A , risulta

$$Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Equivalentemente:

$$60\% = \frac{60}{100} = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

- $Pr(B|A)$, ovvero la probabilità che uno studente femmina indossi i pantaloni (ossia la probabilità che, verificato che lo studente osservato è una femmina, si verifichi l'evento che indossi i pantaloni). Poichè le studentesse indossano gonne e pantaloni in egual numero, la probabilità sarà $\frac{1}{2}$.

³⁶ $Pr(A|B)$ = probabilità dell'evento che lo studente sia femmina una volta osservato l'evento che lo studente visto indossa i pantaloni.

- $Pr(B|\overline{A})$, ovvero la probabilità che uno studente indossi i pantaloni, noto che lo studente osservato è un maschio. Tutti gli studenti maschi indossano i pantaloni, quindi l'evento è certo:

$$Pr(B|\overline{A}) = 1.$$

- $Pr(B)$, ovvero la probabilità che uno studente qualsiasi (maschio o femmina) indossi i pantaloni. Poichè il numero di coloro che indossano i pantaloni è 80% (il 60% di maschi e il 40/2% di femmine) sul totale 100% di studenti, la probabilità $Pr(B)$ è di $80\%/100\% = 8/10 = 4/5$.

Ciò detto, possiamo applicare il teorema:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4}.$$

Note Aggiuntive

Conversione Percentuale \implies Frazione:

1. Dividere il valore in percentuale per 100: $\frac{\text{percentuale}}{100}$;
2. Se si ottiene un numero non intero, moltiplicare e dividere per 10 sino ad ottenere una frazione;
3. Ridurre la frazione ottenuta.

Ad esempio, per ottenere la frazione corrispondente al 40%:

1. $\frac{40}{100} = 0.4$;
2. $0.4 \cdot \frac{10}{10} = \frac{4}{10}$;
3. $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Evento Complementare:

Dato un evento A , la probabilità dell'evento complementare \overline{A} è data dal complemento a uno di $Pr(A)$:

$$Pr(\overline{A}) = 1 - Pr(A).$$

Assiomi utilizzati

- **Assioma di Normalizzazione**

La probabilità dell'evento certo è unitaria:

$$Pr(\Omega) = 1.$$

4.2.2 Teorema della Probabilità Totale

Il teorema della probabilità totale consente di calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno di due o più eventi, ovvero la probabilità dell'unione di essi.

Il teorema di Bayes è spesso usato insieme al teorema della probabilità totale che esaminiamo di seguito.

Dimostrazione. Costruiamo una partizione dello spazio Ω scegliendo N eventi, $i = 1, 2, \dots, N$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} B_i \cap B_k = \emptyset & \text{se } i \neq k \\ \bigcup_{i=1}^N B_i = \Omega \end{cases}$$

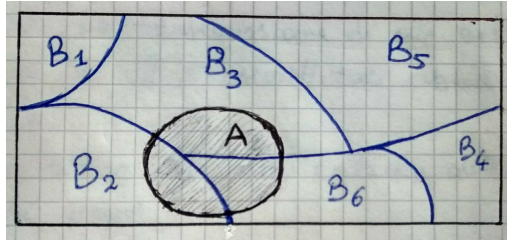


Figura 4.6: Una partizione dello spazio Ω che rispetta le proprietà date.

La probabilità di un evento A può allora essere calcolata come segue

$$\begin{aligned} Pr(A) &= Pr(A \cap \Omega) = Pr(A \cap \bigcup_{i=1}^N B_i) = Pr(\bigcup_{i=1}^N A \cap B_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N Pr(A \cap B_i). \end{aligned}$$

Se in questa relazione si esprime poi ciascuna probabilità congiunta $Pr(A \cap B_i)$ come prodotto tra la probabilità condizionata $Pr(A|B_i)$ e la probabilità marginale $Pr(B_i)$, si ricava l'uguaglianza

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^N Pr(A|B_i)Pr(B_i)$$

che rappresenta appunto l'enunciato del teorema della probabilità totale.

□

N.B.: A è un sottoinsieme di Ω , quindi

$$A = A \cap \Omega = A \cdot \Omega = A \cdot \left(\sum_{i=1}^N B_i \right) = \sum_{i=1}^N A \cdot B_i.$$

4.2.2.1 Esempio Teorema di Bayes & Teorema della Probabilità Totale

In una rete radio cellulare, un terminale mobile (telefonico) trasmette verso la stazione radio base un flusso di dati binario: in tale flusso la probabilità che ciascun bit assuma valore logico 1 è pari a $\rho = 0.3$, mentre quella che assuma valore logico 0 è pari a $1 - \rho = 0.7$.

A causa di disturbi introdotti dal canale radio, la probabilità di errore sul bit, cioè la probabilità che un bit venga ricevuto erroneamente, è pari a $P_e = 0.01$. Supponiamo ora che il ricevitore della stazione radio base abbia rivelato la trasmissione di un bit pari a zero e valutiamo la probabilità che il trasmettitore abbia effettivamente trasmesso un dato nullo.

Per risolvere questo problema con gli strumenti del calcolo delle probabilità, definiamo innanzitutto gli eventi:

- $A = \{\text{è stato trasmesso un bit 0}\};$
- $\bar{A} = \{\text{è stato trasmesso un bit 1}\};$
- $B = \{\text{è stato ricevuto un bit 0}\};$
- $\bar{B} = \{\text{è stato ricevuto un bit 1}\}.$

E osserviamo poi che, sulla base delle definizioni date e dei dati iniziali del problema, risulta

$$Pr(\bar{A}) = 0.3$$

$$Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A}) = 0.7$$

e

$$Pr(B|\bar{A}) = Pr(\bar{B}|A) = P_e = 0.01.$$

Occorre determinare la probabilità che il trasmettitore (telefono mobile) abbia effettivamente trasmesso un bit avente valore nullo quando sia stato ricevuto un dato dello stesso tipo (dalla stazione radio base), cioè la

probabilità condizionata $Pr(A|B)$; a tal fine possiamo usare la formula di Bayes:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)}.$$

Il calcolo di $Pr(A|B)$ mediante questa formula richiede la conoscenza delle probabilità $Pr(B|A)$ e $Pr(B)$ (dato che $Pr(A)$ è già nota). La prima è ottenibile dai dati del problema:

$$Pr(B|A) = 1 - Pr(B|\bar{A}) = 1 - Pr(\bar{B}|A) = 1 - P_e = 0.99,$$

e rappresentata la probabilità di corretta decisione, inversa alla probabilità di errore.

Mentre la seconda può essere ottenuta mediante il teorema della probabilità totale:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$Pr(B) = Pr(B|A) \cdot Pr(A) + Pr(B|\bar{A}) \cdot Pr(A)$$

$$Pr(B) = Pr(B|A) \cdot Pr(A) + Pr(B|\bar{A}) \cdot Pr(A) = 0.99 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.3 = 0.696.$$

Infine, possiamo calcolare $Pr(A|B)$ sostituendo questi valori nell'equazione iniziale della formula di Bayes:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{0.99 \cdot 0.7}{0.696}.$$

È chiaro che, quando si decide a favore di un valore 0 di un bit, è stato effettivamente trasmesso con elevata probabilità proprio un bit con quel valore logico (la probabilità è quasi pari a quella dell'evento certo. La terza cifra dopo la virgola di $Pr(A|B)$ può essere motivata ricordando che il bit 0 ha probabilità 0.7 contro il 0.3 del bit 1 di presentarsi).

Inoltre, questa "affidabilità" è motivata dal piccolo valore della probabilità di errore, cioè dalla scarsa frequenza di eventi di rivelazione errata dei dati. Infatti, se $P_e = 0$ (cioè la trasmissione è priva di errori) risulta chiaramente $Pr(A|B) = Pr(B|A) = 1$ qualunque sia ρ . In questo caso infatti, se il ricevitore ha ricevuto un bit di valore nullo, con certezza è stato trasmesso un bit con quel valore, in quanto la probabilità di errore è nulla. Il caso limite opposto è quello in cui il canale di trasmissione radio è così disturbato da provocare $P_e = 0.5$. In questo caso, la probabilità di rilevare un bit nullo quando il trasmettitore ha inviato proprio un bit

di quel valore ($Pr(B|A)$) è esattamente uguale alla probabilità di ricevere un bit nullo quando è stato trasmesso un bit di valore complementare ($Pr(B|\bar{A})$) ed entrambe queste probabilità sono pari a 0.5

1. Nel caso in cui $P_e = 0.5$, il rilevare un particolare valore di un bit non aggiunge alcuna informazione, cosicchè $Pr(A|B) = Pr(A)$ qualunque sia il valore di ρ :

Dimostrazione.

$$Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A}) = 1 - \rho = 0.7, \quad \text{avendo preso } \rho = 0.3.$$

$$Pr(B|\bar{A}) = Pr(\bar{B}|A) = P_e = 0.5.$$

$$Pr(B|A) = 1 - Pr(B|\bar{A}) = 1 - P_e = 0.5.$$

$$Pr(B) = Pr(B|A) \cdot Pr(A) + Pr(B|\bar{A}) \cdot Pr(\bar{A}) = 0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.5.$$

In conclusione:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.5} = 0.7 = Pr(A),$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

2. Nello scenario in esame il caso peggiore corrisponde proprio alla scelta $P_e = 0.5$, anche se P_e può assumere un valore arbitrario nell'intervallo $[0, 1]$.

Dimostrazione. A partire dalle formule del punto 1:

$$\begin{aligned} Pr(A|B) &= \frac{Pr(B|A) \cdot Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho)}{Pr(B|A) \cdot Pr(A) + Pr(B|\bar{A}) \cdot Pr(\bar{A})} = \\ &= \frac{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho)}{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho) + P_e \cdot \rho} = \frac{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho)}{1 - \rho - P_e \cdot (1 - \rho) + P_e \cdot \rho} = \\ &= \frac{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho)}{1 - \rho - P_e \cdot (1 - \rho + \rho)} = \frac{(1 - P_e) \cdot (1 - \rho)}{(1 - \rho) - P_e} = \frac{(1 - P_e) \cdot Pr(A)}{Pr(A) - P_e}. \end{aligned}$$

A partire da questo risultato si dimostra la tesi iniziale con una serie di **Considerazioni**:

- $P_e \rightarrow 0$, errore nullo, $(1 - P_e) \rightarrow 1$, $Pr(A|B) = \frac{Pr(A)}{Pr(A)} = 1$.
- $P_e \rightarrow 1$, errore massimo, $(1 - P_e) \rightarrow 0$, $Pr(A|B) = 0$.

□

4.2.3 Legame tra Varianza σ_X^2 e Valor quadratico medio m_X^2

La conoscenza della funzione densità (o distribuzione) di probabilità di una variabile aleatoria rappresenta il massimo di informazione che si può avere sul comportamento statistico dei valori assunti dalla variabile stessa. Naturalmente, però, non sempre è possibile arrivare a una conoscenza così completa riguardo a un problema aleatoria che si trattando. Molti più spesso, ci si accontenta della conoscenza di alcuni *parametri statistici semplificati* o *indici* relativi alla distribuzione di probabilità presentata dalla variabile.

Il *valore atteso* (chiamato anche *valor medio*, *speranza*, *attesa*) η_X di una variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x)$ è definito dalla relazione

$$\eta_X \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx,$$

e rappresenta in un certo senso un valore "baricentro" attorno al quale si distribuiscono i valori della variabile aleatoria stessa (indice di *posizione*).

Quando si ha a che fare con un problema di *trasformazione* di una variabile aleatoria $Y = g(X)$, si introduce il cosiddetto *operatore valor medio*:

$$E\{g(X)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.$$

La lettera E nell'operatore valori medio $E\{\cdot\}$ è l'iniziale della parola inglese *Expectation* che traduce l'italiano "aspettativa". Notiamo che anche il valore atteso η_X può essere riscritto formalmente usando questo operatore

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = E\{X\},$$

cioè il valore atteso è anche il valor medio della variabile aleatoria stessa.

Si definisce la *varianza* σ_X^2 di una variabile aleatoria X come:

$$\sigma_X^2 \triangleq E\{(X - \eta_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 \cdot f_X(x) dx.$$

Il parametro η_X , radice quadrata della varianza, è la cosiddetta *derivazione standard*. A maggiore varianza della variabile aleatoria corrispondono valori molto dispersi attorno al valor medio, e viceversa.

Il *valore quadratico medio* (talvolta chiamato anche *potenza*) di una variabile aleatoria è infine definito come

$$m_X^2 \triangleq E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx.$$

Poichè l'operatore valor medio $E\{\cdot\}$ è un operatore *lineare*, è facile trovare il legame tra la varianza σ_X^2 e il valore quadratico medio m_X^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &\triangleq E\{(X - \eta_X)^2\} = E\{X^2 + \eta_X^2 - 2 \cdot \eta_X \cdot X\} = \\ &= E\{X^2\} + E\{\eta_X^2\} - E\{2 \cdot \eta_X \cdot X\} = m_X^2 + \eta_X^2 - 2 \cdot \eta_X^2 = \\ &= m_X^2 - \eta_X^2. \end{aligned}$$

- 4.2.4 Teorema Fondamentale della Probabilità
- 4.2.5 Dimostrare il teorema Fondamentale della Probabilità per funzioni monotone
- 4.2.6 Dimostrare il teorema dell'Aspettazione per variabili discrete X e $Y = g(X)$
- 4.2.7 Teorema del Limite Centrale
- 4.2.8 Dimostrare che due variabili aleatorie gaussiane incorrelate sono anche indipendenti
- 4.2.9 Dare la definizione di Funzione di distribuzione e le sue proprietà, specificare come è fatta nel caso di variabili aleatorie discrete e continue
- 4.2.10 Definire Valore Medio, Varianza, Momento Ordinario di Ordine r e Valore Quadratico Medio
 - 4.2.10.1 Valore Medio
 - 4.2.10.2 Varianza
- 4.2.11 Momento Ordinario di Ordine r
 - 4.2.11.1 Valore Quadratico Medio
- 4.2.12 Modelli per Variabili Aleatorie: DDP, FDd, Valor Medio, Valore Quadratico Medio, Varianza
 - 4.2.12.1 Modello Uniforme
 - 4.2.12.2 Modello Gaussiano
 - 4.2.12.3 Modello Esponenziale Negativo
- 4.2.13 Definire la correlazione e la covarianza fra variabili aleatorie e dire quando sono incorrelate e indipendenti
- 4.2.14 Proprietà della funzione di autocorrelazione per processi aleatori
- 4.2.15 Definizione e proprietà della DSP per processi aleatori

4.3 Sistemi Monodimensionali

- 4.3.1 Dare la definizione di sistema e illustrarne le proprietà
- 4.3.2 Si dimostri che, per un SLS, il segnale di uscita è scrivibile come la convoluzione del segnale di ingresso per la risposta impulsiva
- 4.3.3 Definire quando un SLS è causale e stabile BIBO e dimostrarlo
- 4.3.4 Dare la definizione di replica fedele e specificare quando un filtro non introduce distorsioni lineari
- 4.3.5 Dimostrare che l'uscita $y(t)$ da un interpolatore, con funzione interpolatrice $p(t)$ e in ingresso la sequenza $x[n]$, è scrivibile come
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{X}(f) \cdot P(f)\}, \text{ dove } \bar{X}(f) = TFS\{x[n]\}$$

e $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$
- 4.3.6 Spiegare il concetto di stazionarietà in senso lato e in senso stretto di un processo aleatorio
- 4.3.7 Definire l'efficienza spettrale e calcolarla per una PAM binaria
- 4.3.8 Definire l'ISI e la condizione di Nyquist
- 4.3.9 Dimostrare che, per una modulazione PAM in banda passante, che la condizione di Nyquist nel tempo garantisce l'assenza di ISI
- 4.3.10 A partire dalla condizione di Nyquist per l'assenza di ISI per una PAM in banda base, dimostrare la condizione di Nyquist in Frequenza
- 4.3.11 Dimostrare che, se si rispetta la condizione di Nyquist, non si ha ISI per un sistema PAM binario
- 4.3.12 Definizione di Processo Indipendente

Appendice A

Segnali Canonici

" Life is a sexually transmitted disease and the mortality rate is one hundred percent. "

— R.D. Laing

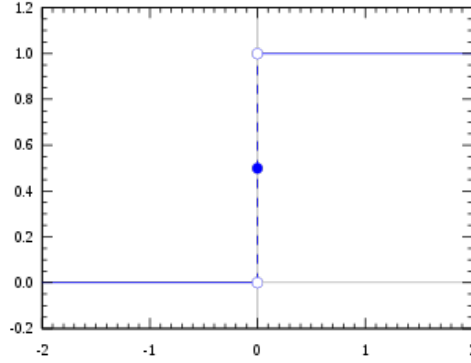
La presente appendice contiene una lista di segnali canonici, per ciascuno dei quali sono stati analizzati le proprietà principali, utilizzati nel testo.

A.1 Gradino Unitario

Nella teoria dei segnali e dei sistemi è utile definire la funzione *gradino unitario* $u(t)$ (detta anche *funzione di Heaviside*)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.0.1})$$

rappresentata graficamente dalla figura seguente:


 Figura A.1: Segnale Gradino Unitario $u(t)$.

Tale funzione, discontinua nell'origine, consente una rappresentazione concisa dei cosiddetti segnali *causali*¹ o *cisoidali*, cioè *nulli* per $t < 0$. Si noti che, mentre per $t > 0$ $u(t)$ assume un valore unitario, nell'origine assume il valore $1/2$.

Il segnale gradino serve a modellare matematicamente l'accensione all'istante $t = 0$ di un generatore ideale di tensione continua, che eroga così una tensione costante per ogni valore $t \geq 0$. Il segnale possiede energia illimitata, in quanto

$$\begin{aligned}
 E_u &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt}_{u(t)=0 \forall t < 0} = \underbrace{\int_0^{+\infty} 1 dt}_{u(t)=1 \forall t > 0} = \\
 &= [t]_0^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty.
 \end{aligned} \tag{A.1.0.2}$$

¹Un segnale causale è una funzione dipendente dal tempo che rappresenta uno stimolo esterno su un sistema fisico. Matematicamente, un segnale causale è rappresentato mediante una funzione nulla per $t < 0$. L'istante $t = 0$ rappresenta il momento in cui viene applicato dall'esterno il segnale.

La potenza media P_u , invece, è espressa dalla relazione

$$\begin{aligned}
 P_u &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} |u(t)|^2 dt}_{u(t) = 0 \ \forall t < 0} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt}_{u(t) = 1 \ \forall t > 0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [t]_0^{T/2} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.1.0.3}$$

Il valore efficace è dato da

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{A.1.0.4}$$

mentre il valore medio è ottenibile da

$$u_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}. \tag{A.1.0.5}$$