

Esame Comunicazioni Numeriche

"What I hear, I forget; What I see, I remember; What I do, I understand."

Rambod Rahmani

7 gennaio 2019

To my twin brother Ramtin.

Indice

Indice	i
0 Disclaimer	1
1 Introduction	2
1.1 Complex Numbers	2
1.1.1 Cartesian form	3
1.1.2 Polar form	4
1.1.3 Trigonometric form	5
1.1.4 Euler's formula	5
1.1.5 Euler's formula and Complex Numbers	6
1.1.6 Elementary operations	6
1.1.6.1 Conjugate	6
1.1.6.2 Addition and subtraction	7
1.1.6.3 Multiplication	8
1.1.6.4 Multiplying a complex number by j	8
1.2 The Field \mathbb{C} of Complex Numbers	10
1.2.1 Naive introduction to the field \mathbb{C}	10
1.2.2 Definition of the field \mathbb{C}	11
1.2.3 Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2×2 matrices	12
2 Concetti Preliminari	13
2.1 Introduzione allo studio dei segnali	13
2.1.1 Proprietà elementari dei segnali determinati	13
2.1.1.1 Esercizio Lezione 12 Marzo 2018	15
2.2 Segnali periodici a tempo continuo	20
2.2.1 Sviluppo in serie di Fourier in forma reale polare	22

2.2.2	Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa . . .	24
2.2.3	Sviluppo in serie di Fourier in reale rettangolare . . .	27
2.2.4	Il criterio di Dirichlet	28
2.2.5	Spettri di ampiezza e di fase	29
2.2.5.1	Spettro di un coseno	30
2.2.5.2	Spettro di un seno	31
2.3	Segnali aperiodici a tempo continuo	33
2.4	Sistemi monodimensionali a tempo continuo	34
2.5	Segnali a tempo discreto	35
2.6	Sistemi monodimensionali a tempo discreto	36
2.7	Progetto di filtri digitali	37
2.8	Richiami di teoria della probabilità	38
2.9	Segnali aleatori a tempo continuo e a tempo discreto	39
3	Esame Scritto	40
3.1	Compitino 2014	41
3.2	Compitino 2015	42
3.3	Compitino 2016	43
3.4	Compitino 2017	44
3.5	Compitino 2018	45
3.6	Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Gennaio 2018	46
3.7	Prova di Comunicazioni Numeriche - 29 Gennaio 2018	47
3.8	Prova di Comunicazioni Numeriche - 20 Febbraio 2018	48
3.9	Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Aprile 2018	49
4	Esame Orale	50
4.1	Segnali Deterministici	50
4.1.1	Relazioni tra Potenza Media P_x ed Energia E_x di un Segnale	51
4.1.1.1	Funzione a quadrato sommabile	52
4.1.1.2	Applicazioni nella Meccanica Quantistica	52
4.1.2	Relazione Potenza Media, Valore Efficace e Valore Medio: $P_x = 0 \implies x_{eff} = 0, x_m = 0$	54
4.1.2.1	Media quadratica	57
4.1.2.2	Valore Efficace	57
4.1.3	Biunivocità della trasformata serie di Fourier	58
4.1.4	Linearità della trasformata serie di Fourier	61
4.1.5	Simmetria Hermitiana della trasformata serie di Fourier	62

4.1.5.1	Simmetria pari per il modulo	63
4.1.5.2	Simmetria dispari per la fase	64
4.1.6	Trasformata di un segnale reale e pari	65
4.1.7	Trasformata di un segnale reale e dispari	66
4.1.8	Trasformata di un segnale reale alternativo	67
4.1.9	Biunivocità della Trasformata Continua di Fourier (TCF)	68
4.1.10	Linearità della Trasformata Continua di Fourier (TCF)	69
4.1.11	Simmetrie della TCF: Simmetria Hermitiana	70
4.1.12	Simmetrie della TCF: Segnali reali e pari	71
4.1.13	Simmetrie della TCF: Segnali reali e dispari	72
4.1.14	Dualità della TCF	73
4.1.15	TCF: Teorema del ritardo	74
4.1.16	TCF: Teorema del cambiamento di scala	75
4.1.17	Teorema della Modulazione	76
4.1.17.1	Modulazione con coseno	77
4.1.17.2	Modulazione con seno	78
4.1.17.3	Modulazione con esponenziale complesso	79
4.1.18	Teorema di derivazione	80
4.1.18.1	Derivazione nel tempo	81
4.1.18.2	Derivazione in frequenza	82
4.1.19	Teorema di integrazione	83
4.1.19.1	Integrazione nel tempo	84
4.1.19.2	Integrazione in frequenza	85
4.1.20	Teorema del Prodotto di Convoluzione	86
4.1.21	Teorema della Convoluzione	87
4.2	Segnali Aleatori	88
4.2.1	Teorema di Bayes	89
4.2.2	Teorema della Probabilità Totale	90
4.2.2.1	Esempio Teorema di Bayes & Teorema della Probabilità Totale	91
4.2.3	Legame tra Varianza σ_x^2 e Valor quadratico medio m_x^2	92
A	Segnali Canonici	93
A.1	Gradino Unitario	93

Capitolo 0

Disclaimer

"Information is power. But like all power, there are those who want to keep it for themselves. The world's entire scientific and cultural heritage, published over centuries in books and journals, is increasingly being digitized and locked up by a handful of private corporations. There is no justice in following unjust laws. It's time to come into the light and, in the grand tradition of civil disobedience, declare our opposition to this private theft of public culture."

— Aaron Swartz

The material and information in this document are provided "AS IS" in good faith and without warranties of any kind, either expressed or implied.

This work is licensed under:



Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Capitolo 1

Introduction

*"The only person who is educated is the one who
has learned how to learn and change."*

— Carl Rogers

This chapter contains introductory concepts needed as theoretical base to be able to understand the signal processing topics presented in this text.

1.1 Complex Numbers

A complex number is a number that can be expressed in the form

$$z = a + ib,$$

where a is known to be the real part

$$a = \Re(z),$$

and b is known to be the imaginary part

$$b = \Im(z).$$

The complex number system can be defined as the algebraic extension of the ordinary real numbers by an imaginary number i . i is a solution of the equation $x^2 = -1$. Because no real number satisfies this equation, since the square of a real number cannot be negative, i is called an imaginary number.

A real number a can be regarded as a complex number $a + 0i$ whose imaginary part is 0. A purely imaginary number bi is a complex number $0 + bi$ whose real part is zero. It is common to write a for $a + 0i$ and bi for $0 + bi$.

The complex numbers give rise to the fundamental theorem of algebra: every non-constant polynomial equation with complex coefficients has a complex solution. This property is true of the complex numbers, but not the reals. The 16th century Italian mathematician Gerolamo Cardano is credited with introducing complex numbers in his attempts to find solutions to cubic equations.

Geometrically, complex numbers extend the concept of the one-dimensional number line to the two-dimensional complex plane by using the horizontal axis for the real part and the vertical axis for the imaginary part.

Engineers reserve the letter i for electric current - the derivative of electric charge with respect to time. We will therefore be using the letter j instead of the letter i .

1.1.1 Cartesian form

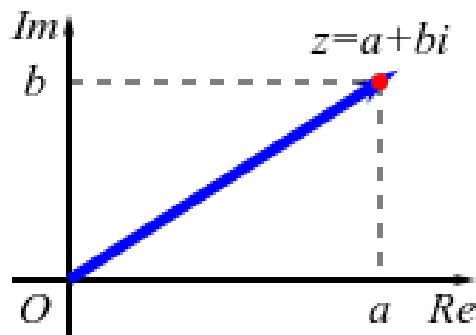


Figura 1.1: A Complex Number in Cartesian Form.

A complex number can thus be identified with an ordered pair $(\Re(z), \Im(z))$ in the Cartesian plane, an identification sometimes known as the Cartesian form of z . A complex number can be viewed as a point or position vector in a two-dimensional Cartesian coordinate system called the complex plane or Argand diagram, named after Jean-Robert Argand. The numbers are conventionally plotted using the real part as the horizontal component, and imaginary part as vertical (see Figure 1.1). In

fact, a complex number can be defined as an ordered pair (a, b) , but then

rules for addition and multiplication must also be included as part of the definition. William Rowan Hamilton introduced this approach to define the complex number system.

1.1.2 Polar form

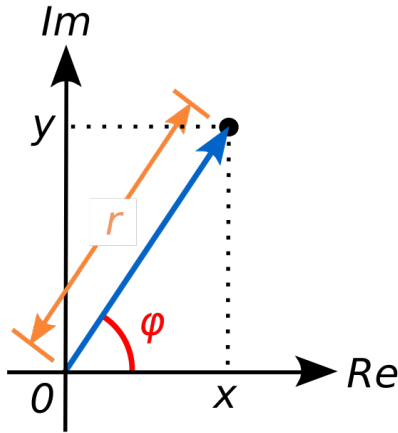


Figura 1.2: A Complex Number in Polar Form

An alternative way of defining a point P in the complex plane, other than using the a - and b -coordinates, is to use the distance of the point from O , the point whose coordinates are $(0, 0)$ (the origin), together with the angle subtended between the positive real axis and the line segment OP in a counterclockwise direction. This idea leads to the polar form of complex numbers. (see Figure 1.2 where x and y were used instead of a and b).

The absolute value (or modulus or magnitude) of a complex number $z = a + bj$ is

$$c = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

If z is a real number (that is, if $y = 0$), then $c = |x|$. That is, the absolute value of a real number equals its absolute value as a complex number. By Pythagoras' theorem, the absolute value of complex number is the distance to the origin of the point representing the complex number in the complex plane.

The argument of z (in many applications referred to as the "phase") is the angle of the radius OP with the positive real axis, and is written as $\arg(z)$. As with the modulus, the argument can be found from the

rectangular form $a + bj$:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{if } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{if } a < 0 \text{ and } b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{if } a < 0 \text{ and } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a = 0 \text{ and } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } a = 0 \text{ and } b < 0 \\ \text{indeterminate} & \text{if } a > 0 \end{cases}$$

The value of φ is expressed in radians in this article. It can increase by any integer multiple of 2π and still give the same angle. Hence, the $\arg()$ function is sometimes considered as multivalued. The polar angle for the complex number 0 is indeterminate, but arbitrary choice of the angle 0 is common. Together, c and φ give another way of representing complex numbers, the polar form, as the combination of modulus and argument fully specify the position of a point on the plane.

If we are given the polar form to start with, the following formulas can be used to retrieve the cartesian coordinates:

$$\begin{cases} a = c \cdot \cos(\varphi) \\ b = c \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$$

1.1.3 Trigonometric form

The trigonometric form of a complex number $z = a + bj$ can be easily obtain by substitution in our previous equations:

$$z = a + bj = c \cdot \cos(\varphi) + c \cdot \sin(\varphi) \cdot j = c \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = c \cdot e^{j\varphi}$$

1.1.4 Euler's formula

Euler's formula, named after Leonhard Euler, is a mathematical formula in complex analysis that establishes the fundamental relationship between the trigonometric functions and the complex exponential function. Euler's formula states that for any real number φ :

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

where e is the base of the natural logarithm, j is the imaginary unit, and \cos and \sin are the trigonometric functions cosine and sine respectively, with the argument φ given in radians.

When $\varphi = \pi$, Euler's formula evaluates to $e^{j\pi} + 1 = 0$, which is known as Euler's identity.

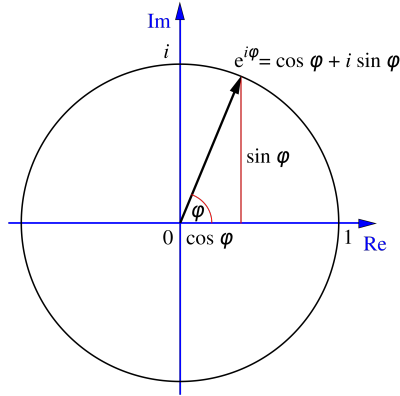


Figura 1.3: Euler's formula Interpretation

This formula can be interpreted as saying that the function $e^{j\varphi}$ is a unit complex number, i.e., it traces out the unit circle in the complex plane as φ ranges through the real numbers. Here φ is the angle that a line connecting the origin with a point on the unit circle makes with the positive real axis, measured counterclockwise and in radians.

The original proof is based on the Taylor series expansions of the exponential function e^z (where z is a complex number) and of $\sin(x)$ and $\cos(x)$ for real numbers x . In fact, the same proof shows that Euler's formula is even valid for all complex numbers z .

1.1.5 Euler's formula and Complex Numbers

Using Euler's formula we can now write:

$$z = a + jb = c \cdot \cos(\varphi) + c \cdot \sin(\varphi) \cdot j = c \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = e^{j\varphi}.$$

1.1.6 Elementary operations

1.1.6.1 Conjugate

The complex conjugate of the complex number $z = a + jb$ is given by $a - jb$. It is denoted by either \bar{z} or z^* . This unary operation on complex numbers cannot be expressed by applying only their basic operations addition, subtraction, multiplication and division.

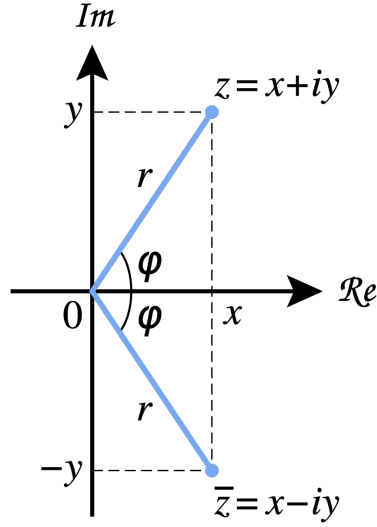


Figura 1.4: Geometric representation of z and its conjugate \bar{z}

Geometrically, \bar{z} is the "reflection" of z about the real axis. Conjugating twice gives the original complex number

$$\overline{\bar{z}},$$

which makes this operation an involution. The reflection leaves both the real part and the magnitude of z unchanged, that is

$$\Re(\bar{z}) = \Re(z) \quad \text{and} \quad |\bar{z}| = |z|.$$

The imaginary part and the argument of a complex number z change their sign under conjugation

$$\Im(\bar{z}) = -\Im(z) \quad \text{and} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z).$$

The real and imaginary parts of a complex number $z = a + jb$ can be extracted using the conjugation:

$$\Re(z) = a = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + jb + a - jb}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$\Im(z) = b = \frac{z - \bar{z}}{2j} = \frac{a + jb - a + jb}{2j} = \frac{2jb}{2j} = b.$$

Moreover, a complex number is real if and only if it equals its own conjugate.

$$z = \bar{z} \quad \rightarrow \quad z \in \mathbb{R}$$

1.1.6.2 Addition and subtraction

Two complex numbers z_1 and z_2 are most easily added by separately adding their real and imaginary parts of the summands. That is to say:

$$z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

Similarly, subtraction can be performed as

$$z_1 - z_2 = a_1 + jb_1 - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Please keep in mind that this is completely wrong:

$$\begin{aligned} z_1 &= c_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad , \quad z_2 = c_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\ z_1 + z_2 &= c_1 \cdot e^{j\varphi_1} + c_2 \cdot e^{j\varphi_2} = (c_1 + c_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

As a matter of fact:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot e^{j\varphi_1} &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1) + j \cdot c_1 \cdot \sin(\varphi_1), \\ c_2 \cdot e^{j\varphi_2} &= c_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot c_2 \cdot \sin(\varphi_2), \\ c_1 \cdot e^{j\varphi_1} + c_2 \cdot e^{j\varphi_2} &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1) + c_2 \cdot \cos(\varphi_2) + j \cdot (c_1 \cdot \sin(\varphi_1) + c_2 \cdot \sin(\varphi_2)), \end{aligned}$$

while:

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} &= (c_1 + c_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= c_1 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + c_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot (c_1 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + c_2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

and:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2).$$

1.1.6.3 Multiplication

Since the real part, the imaginary part, and the indeterminate i in a complex number are all considered as numbers in themselves, two complex numbers, given as $z_1 = a_1 + jb_1$ and $z_2 = a_2 + jb_2$ are multiplied under the rules of the distributive property, the commutative properties and the defining property $i^2 = -1$ in the following way

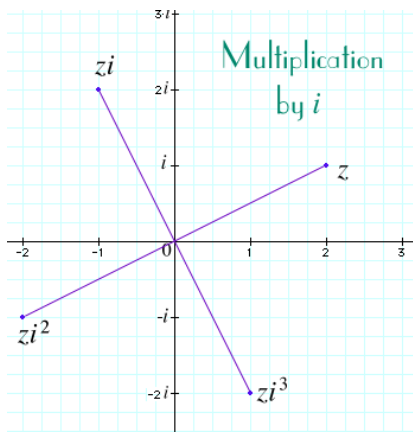
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = \\ &= a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + (jj)b_1b_2 = (a_1a_2 + b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + b_1a_2). \end{aligned}$$

The cartesian form is convenient for additions and subtractions but not for multiplications.

1.1.6.4 Multiplying a complex number by j

In our goal toward finding a geometric interpretation of complex multiplication, let's consider next multiplying an arbitrary complex number $z = a + jb$ by j :

$$z \cdot j = (a + jb) \cdot j = -b + ja$$

Figura 1.5: Multiplying by i

Let's interpret this statement geometrically. The point z in \mathbb{C} is located a units to the right of the imaginary axis and b units above the real axis. The point $z \cdot j$ is located b units to the left, and a units above. What has happened is that multiplying by j has rotated the point z 90° counterclockwise around the origin to the point zj . Stated more briefly, multiplication by j gives a 90° counterclockwise rotation about 0. You can analyze what multiplication by $-j$ does in the same way. You'll find that multiplication by $-j$ gives a 90° clockwise rotation about 0. When we don't specify counterclockwise or clockwise when referring to rotations or angles, we'll follow the standard convention that counterclockwise is intended. Then we can say that multiplication by $-j$ gives a -90° rotation about 0, or if you prefer, a 270° rotation about 0.

1.2 The Field \mathbb{C} of Complex Numbers

Before continuing with signal processing, I want to spend some time talking about the field of complex numbers \mathbb{C} . The motivation for this is to try and provide a much more formal definition of the field \mathbb{C} than the one roughly introduced in the previous section which represents the minimal concepts required for the contents of the following pages. You can simply skip over this section if you are not interested or have previous knowledge.

1.2.1 Naive introduction to the field \mathbb{C}

The usual way to quickly start with complex numbers is to say that we introduce a new object, which I will call j (mathematicians use i), such that the following *characteristic* property holds:

$$j^2 = -1.$$

Now, having this object at my disposal, I can easily define the set of complex numbers as the set with elements of the form $x + jy$ where x, y are our familiar real numbers:

$$\mathbb{C} := \{x + jy : x, y \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}.$$

After this, using the usual rules of arithmetic operations as applied to the real numbers, I can define the four fundamental operations for the complex numbers as well. And I therefore have arithmetic in the set of complex numbers.

The definition we just saw and the one used in the previous section are, however, not really satisfactory, because they *do not explain* what j is, and hence we get a sense of mystery here (and hence the name "imaginary" numbers). But there is actually nothing imaginary about complex numbers, as was realized by Gauss and others, if we identify them with the elements of our familiar \mathbb{R}^2 and add a little more. This is the first formal introduction for the set of complex numbers \mathbb{C} I will provide in the subsection **Definition of the field \mathbb{C}** (as a side remark I note that there are other ways to define complex numbers, but this one is arguably the most natural). A second rigorous definition using matrices is provided in the section **Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2x2 matrices**.

1.2.2 Definition of the field \mathbb{C}

The set of complex numbers, which is denoted by \mathbb{C} , is, by definition, \mathbb{R}^2 , this is, the set of all vectors with two real coordinates, on which the operation of addition and multiplication are defined as follows

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Definitely, the multiplication rule should look a little strange at the beginning, but of course the motivation comes from the previous subsection.

The set \mathbb{C} , defined with such an addition and multiplication, is a field. That is, it can be proved that for any $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, we have

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$z_1z_2 = z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),$$

there is a unique element $0 \in \mathbb{C}$ such that

$$z_1 + 0 = z_1,$$

for any $z_1 \in \mathbb{C}$ there is $-z_1 \in \mathbb{C}$ such that

$$z_1 + (-z_1) = 0,$$

for any nonzero $z \in \mathbb{C}$ there is $z^{-1} \in \mathbb{C}$ such that

$$zz^{-1} = 1.$$

It should be clear that above $0 = (0, 0)$, where the 0 on the left of the equal sign is the complex zero, whereas the ones used in the round brackets are in \mathbb{R} .

Now, consider the following equation

$$z^2 + 1 = 0.$$

Here 1 and 0 and the complex unit and the complex zero. We all know that this equation has no real roots. But I claim that it has two complex roots being $(0, 1)$ and $-(0, 1)$. This can easily be checked by substitution according to the definition we provided for our addition and multiplication (just keep in mind that .

1.2.3 Constructing the complex numbers via the arithmetic of 2×2 matrices

To be continued.

Capitolo 2

Concetti Preliminari

"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new."

— Albert Einstein

Di seguito alcune definizioni essenziali necessarie per poter comprendere i contenuti presentati nei capitoli successivi.

2.1 Introduzione allo studio dei segnali

Un segnale è *una qualunque grandezza fisica variabile cui è associata una informazione*.

2.1.1 Proprietà elementari dei segnali determinati

Limitiamo per il momento la nostra attenzione ai segnali determinati e definiamo alcune grandezze di fondamentale importanza per il prosieguo dello studio. Supponiamo di disporre di un resistore di resistenza R attraversato da una corrente $i(t)$; l'espressione della potenza istantanea dissipata sul resistore per effetto Joule è, come è noto, $Ri^2(t)$. Osserviamo quindi la proporzionalità tra la potenza istantanea e il *quadrato* del segnale; il coefficiente di proporzionalità è legato al particolare esempio. Estendendo in maniera astratta tale definizione, diremo che al segnale $x(t)$ è associata una potenza istantanea *normalizzata* (aggettivo che verrà

poi sistematicamente omissa) pari a

$$P_x(t) = P_x \triangleq |x(t)|^2. \quad (2.1.1.1)$$

Inoltre, tornando all'esempio del resistore, l'energia totale dissipata per effetto del passaggio della corrente $i(t)$ è pari a $\int_{-\infty}^{+\infty} Ri^2(t) dt$. Conseguentemente, definiremo l'energia associata al segnale $x(t)$ come

$$E_x(t) = E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt \quad (2.1.1.2)$$

purchè l'integrale risulti convergente (cioè $E_x < \infty$). La definizione di energia, benchè meno intuitiva, viene banalmente estesa anche ai segnali a tempo discreto:

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.1.1.3)$$

Per tutti i segnali *fisici* (cioè effettivamente osservati) l'integrale (o la sommatoria) che definisce l'energia risulta convergente, poichè ogni segnale proveniente da un sistema fisico è portatore di *energia finita*. Molto spesso però conviene considerare *modelli ideali* di segnale, ovvero segnali idealizzati non esistenti in natura, ma assai utili per approssimare casi reali.

Consideriamo ora un generico segnale $x(t)$ a valori limitati ma energia infinita, e costruiamo il segnale $x_T(t)$ con una operazione di *troncamento* come segue:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.1.1.4)$$

Se indichiamo con E_{x_T} l'energia di $x_T(t)$, è chiaro che in generale $E_{x_T} < \infty$ poichè il segnale è diverso da zero e assume valori finiti solo su di un intervallo limitato. Altrettanto chiaro è che se ingrandiamo l'intervallo di osservazione per comprendere l'andamento di tutto il segnale $x(t)$ (imponiamo cioè $T \rightarrow \infty$) otteniamo $E_{x_T} \rightarrow \infty$. Introduciamo allora il concetto di *potenza* di un segnale: la potenza media del segnale $x_T(t)$ valutata sull'intervallo di osservazione $[-T/2, T/2]$ è per definizione pari all'energia di $x_T(t)$ rapportata alla durata dell'intervallo stesso:

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}. \quad (2.1.1.5)$$

Siamo ora in grado di estendere a $x(t)$ questa definizione di *potenza media* attraverso un'operazione di passaggio al limite:

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.1.1.6)$$

Analogamente a quanto visto per l'energia di un segnale, per i segnali a tempo discreto abbiamo

$$P_x \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (2.1.1.7)$$

dove la notazione è autoesplicativa. Talvolta torna utile usare il *valore efficace* di un segnale a potenza finita, definito sia per i segnali a tempo continuo, sia per quelli a tempo discreto come

$$x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}. \quad (2.1.1.8)$$

Ricordiamo che il valore efficace di un dato segnale (chiamato nei paesi anglosassoni RMS, *Root Mean Square*) si può interpretare come quel valore che dovrebbe assumere un segnale costante per avere la stessa potenza del segnale dato.

Definiamo infine il *valore medio temporale* di un segnale, che richiede un procedimento al limite simile a quello appena visto relativamente alla potenza:

$$x_m \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (2.1.1.9)$$

$$x_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.1.1.10)$$

Nell'ingegneria elettrica, il valore medio rappresenta la "componente continuo" (cioè costante) attorno alla quale si svolge l'evoluzione del segnale.

2.1.1.1 Esercizio Lezione 12 Marzo 2018

Calcolare E_y , P_y , y_{eff} e y_m per la funzione $y(t)$ definita come

$$y(t) = x(t) - x(-t), \quad (2.1.1.11)$$

dove $x(t)$ è definita come

$$x(t) = Ae^{-t} \cdot u(t)^1.$$

Infine quindi

$$y(t) = Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t). \quad (2.1.1.12)$$



Figura 2.1: Grafico di $y(t)$ con $A = 1$.

Come possiamo vedere graficamente, il segnale gradino $u(t)$ fa sì che la funzione complessiva $y(t)$ si ottenga come contributo delle due funzioni

$$Ae^{-t} \quad t \rightarrow +\infty,$$

e

$$-Ae^t \quad t \rightarrow -\infty.$$

Calcolo di E_y

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x(-t)|^2 dt =$$

¹Il segnale canonico "gradino unitario" è presente nell'Appendice A: Segnali Canonici.

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t) - Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 |-Ae^t \cdot u(-t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t} \cdot u(t)|^2 dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 |-Ae^t|^2 dt + \int_0^{+\infty} |Ae^{-t}|^2 dt = \int_{-\infty}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = \\
&= \int_{-\infty}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2|t|} dt = \\
&= 2 \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t} dt = 2A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 2A^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} [e^{-2t}]_0^{\infty} \right) = \\
&= 2A^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2 \cdot (\infty)} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2 \cdot (0)} \right) \right) = 2A^2 \cdot \frac{1}{2} = A^2.
\end{aligned}$$

Calcolo di P_y , y_{eff} e y_y

Dato che $E_y = A^2 = K < \infty$ allora

$$P_y = 0,$$

$$y_{eff} = 0,$$

$$y_m = 0.$$

²Notiamo che $u(t) = 0$ $[-\infty, 0]$ e $u(-t) = 0$ $[0, +\infty]$.

³Notiamo che $|u(t)|^2 = |u(-t)|^2 = 1$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
P_y &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt + \int_0^{T/2} |Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t)|^2 dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 |-Ae^t u(-t)|^2 dt + \int_0^{T/2} |Ae^{-t}u(t)|^2 dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 A^2 e^{2t} dt + \int_0^{T/2} A^2 e^{-2t} dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2|t|} dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2 \int_0^{T/2} A^2 e^{-2t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2A^2 \int_0^{T/2} e^{-2t} dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 2A^2 \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-2t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 \int_0^{T/2} 2 \cdot e^{-2t} dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} A^2 \left[e^{-2t} \right]_0^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \left[e^{-T} - 1 \right] = 0.
\end{aligned}$$

(2.1.1.13)

$$y_{eff} = \sqrt{P_y} = 0. \quad (2.1.1.14)$$

$$\begin{aligned}
y_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) - x(-t) \, dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t}u(t) - Ae^t u(-t) \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -Ae^t u(-t) \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t}u(t) \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 -Ae^t \, dt + \int_0^{T/2} Ae^{-t} \, dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-A \left(e^0 - e^{-T/2} \right) + A \left(-e^{-T/2} + e^0 \right) \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-A + Ae^{-T/2} - Ae^{-T/2} + A \right] = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.1.15}$$

□

2.2 Segnali periodici a tempo continuo

Un segnale $x(t)$ è periodico se soddisfa la seguente relazione

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (2.2.0.1)$$

per ogni valore della variabile t . La grandezza T_0 rappresenta il *periodo* del segnale che è legato alla *frequenza di ripetizione* f_0 del segnale stesso dalla relazione

$$f_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (2.2.0.2)$$

L'energia E_x del segnale periodico è infinita:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2+kT_0}^{T_0/2+kT_0} |x(t)|^2 dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_{T_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot E_{T_0} = \infty. \end{aligned} \quad (2.2.0.3)$$

Dove si è posto

$$E_{T_0} = \int_{-T_0/2+kT_0}^{T_0/2+kT_0} |x(t)|^2 dt. \quad (2.2.0.4)$$

Per la precedente (2.13) è di fondamentale importanza la seguente considerazione:

Lemma 2.2.1. *L'integrale di una funzione periodica lungo intervalli pari al periodo stesso della funzione è uguale indipendentemente dall'intervallo considerato.*

Ovvero, sia $x(t) = x(t + T_0) \forall t$ un funzione periodica di periodo T_0 , allora

$$\int_0^{T_0} x(t) dt = \int_b^{b+T_0} x(t) dt. \quad (2.2.0.5)$$

Dimostrazione. Poniamo

$$H(b) = \int_b^{b+T_0} x(t) dt. \quad (2.2.0.6)$$

Calcoliamo la derivata di $H(b)$:

$$\frac{dH(b)}{db} = x(b + T_0) - x(b) \stackrel{4}{=} 0.$$

Ne segue che $H(b)$ è costante, in particolare $H(b) = H(0)$. \square

In generale invece $x(t)$ ha *potenza* P_x finita, per calcolare la quale, non è necessario il procedimento di passaggio al limite definito dalla (2.1.1.6), ma è sufficiente calcolare

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.2.0.7)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \cdot \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} |x(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \cdot k \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (2.2.0.8)$$

\square

Con segnali periodici è bene fare attenzione a non confondere il periodo T_0 della funzione $x(t)$ con il troncamento T della funzione stessa.

Mentre il *valore efficace* di un segnale periodico segue dalla definizione della potenza P_x

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}, \quad (2.2.0.9)$$

⁴Essendo $x(t)$ periodica infatti risulta $x(b + T_0) = x(b)$.

analogamente a quanto visto per la potenza, l'espressione del *valor medio* si semplifica, per il segnale periodico $x(t)$, come segue:

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt. \quad (2.2.0.10)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} x(t) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.0.11)$$

□

2.2.1 Sviluppo in serie di Fourier in forma reale polare

Ciò premesso, ci poniamo una domanda: qual è il modo più appropriato di procedere quando il segnale $x(t)$ è periodico con *andamento arbitrario*, e in particolare *non sinusoidale*? La risposta a questo quesito sta nella cosiddetta *analisi di Fourier* che costituisce la base della moderna teoria dei segnali. Infatti, sotto ipotesi piuttosto ampie, che in seguito elencheremo, un segnale reale periodico qualunque può essere espresso come *somma di oscillazioni sinusoidali di ampiezza, frequenza e fase opportune* cioè in una forma che richiami:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_1 t + \vartheta_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \vartheta_2) + \dots \quad (2.2.1.1)$$

In particolare, le frequenze di oscillazione includono in generale la "frequenza zero" relative al termine costante, e sono *multiple intere della fre-*

quenza fondamentale f_0 , cosicché la (2.2.1.1) diventa:⁵

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) \quad (2.2.1.2)$$

dove per comodità di notazione si è anche posto $A_0 = a_0$ e $2A_k = a_k$ per $k \geq 1$. Questa rappresentazione del segnale prende il nome di *sviluppo in serie di Fourier*; più precisamente la relazione (2.2.1.2) costituisce l'espressione in forma polare dello sviluppo in serie di Fourier. Essa permette dunque di rappresentare un segnale reale $x(t)$ come somma di una costante A_0 e di una serie il cui k -esimo termine, detto k -esima oscillazione armonica (o *armonica tout-court*), ha ampiezza $A_k > 0$, frequenza $k f_0$ (la k -esima frequenza armonica) e fase iniziale ϑ_k .

Prima di procedere ulteriormente, da un punto di vista formale, è bene dimostrare che la funzione $A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)$ sia effettivamente periodica:

$$A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = A_k \cos(2\pi k f_0 (t - m T_0) + \vartheta_k) \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Ricordando che $f_0 \cdot T_0 = 1$ e che $T_{\cos(x)} = 2\pi$,

$$\begin{aligned} A_k \cos(2\pi k f_0 (t - m T_0) + \vartheta_k) &= \\ &= A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k - 2\pi k f_0 m T_0) = \\ &= A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k - 2\pi k m) = A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k). \end{aligned} \quad (2.2.1.3)$$

□

Evidentemente, ogni particolare segnale $x(t)$ sarà caratterizzato da particolari insiemi di valori di A_k e ϑ_k . Dovremo quindi ricavare formule utili per il calcolo delle ampiezze e delle fasi delle varie armoniche e indicare condizioni matematiche che garantiscano la convergenza della serie (2.2.1.2). Il primo di questi problemi fu risolto dal matematico L. Eulero attorno alla fine del 1700 in connessione con lo studio delle corde vibranti. e fu ripreso alcuni anni più tardi da J.B. Fourier. Quest'ultimo fu il primo a intuire l'importanza e la potenza della rappresentazione (2.2.1.2), che usò per risolvere questioni di trasmissione del calore. La convergenza della (2.2.1.2) fu dimostrata in seguito in maniera rigorosa da P.D. Dirichlet.

⁵Il termine A_0 è dato dal fatto che il coseno in 0 valore 1 mentre il seno vale 0.

2.2.2 Sviluppo in serie di Fourier in forma complessa

Per semplificare gli sviluppi analitici si preferisce usare una forma alternativa della serie di Fourier. Richiamando le formule di Eulero delle funzioni trigonometriche

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad , \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad (2.2.2.1)$$

la (2.2.1.2) può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)}}{2} = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(e^{j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} \right) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j(2\pi k f_0 t + \vartheta_k)} = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\vartheta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-j\vartheta_k} e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j\vartheta_k} e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{-k} e^{-j\vartheta_{-k}} e^{j2\pi k f_0 t} = \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

Definiamo ora le quantità

$$\begin{aligned} X_0 &\triangleq A_0 \\ X_k &\triangleq A_k e^{j\vartheta_k} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ X_k &\triangleq A_{-k} e^{-j\vartheta_{-k}} \quad , \quad k = \dots, -2, -1. \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

Se si effettuano le opportune sostituzioni nella (2.2.2.2) si ricava

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (2.2.2.4)$$

che rappresenta l'espressione in forma complessa della serie di Fourier⁶.

⁶Tale rappresentazione può essere estesa nella stessa forma anche al caso di segnale $x(t)$ complesso.

Determiniamo ora una espressione per il calcolo del generico coefficiente di Fourier X_n , dove n deve intendersi *fissato*. A tal fine moltiplichiamo entrambi i membri della (2.2.2.4) per il fattore $e^{-j2\pi n f_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \quad (2.2.2.5)$$

e integriamo il risultato in un intervallo pari al periodo T_0 del segnale stesso:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt. \quad (2.2.2.6)$$

Supponendo che la serie a secondo membro converga *uniformemente* (cosa che peraltro non è stata dimostrata fino a questo momento), possiamo considerare il termine $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k$ una costante:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt. \quad (2.2.2.7)$$

Ovvero

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt. \quad (2.2.2.8)$$

Procediamo adesso con il calcolo dell'integrale a secondo membro. Ricordando che $f_0 \cdot T_0 = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt &= \frac{1}{j2\pi(k-n)f_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} j2\pi(k-n)f_0 e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{j2\pi(k-n)f_0} \left[e^{j2\pi(k-n)f_0 t} \right]_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{e^{j2\pi(k-n)f_0(T_0/2)} - e^{j2\pi(k-n)f_0(-T_0/2)}}{j2\pi(k-n)f_0} = \\ &= \frac{1}{j2\pi(k-n)f_0} \left[e^{j\pi(k-n)} - e^{-j\pi(k-n)} \right] = \frac{2j \sin(\pi(k-n))}{j2\pi(k-n)f_0} = \frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)f_0} \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j2\pi f t} dt = F(f)$ quindi si moltiplica e divide per $\frac{d}{dt} (j2\pi(k-n)f_0 t) = j2\pi(k-n)f_0$.

$$= \frac{e^{j\pi(k-n)} - e^{-j\pi(k-n)}}{j2\pi(k-n)f_0} = 8 \frac{\sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_0}$$

Il valore dell'integrale è pertanto nullo se $k \neq n$, essendo $\sin[\pi(k-n)] = 0$. Se $k = n$ allora si ottiene $\sin[0] = 0$ e il risultato perde di significato in quanto si ottiene una forma $\frac{0}{0}$. Tuttavia, ponendo $k = n$ direttamente nell'espressione di partenza si ricava che l'integrale cercato valore in questo caso T_0 :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt = \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Riprendendo quindi da dove avevamo lasciato la nostra ricerca per una espressione per il generico coefficiente di Fourier,

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f_0 t} dt.$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0.$$

Dalla quale si deduce infine, l'espressione del generico coefficiente di Fourier X_k data da:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (2.2.2.9)$$

Questa relazione permette quindi di effettuare il calcolo dei *coefficienti della serie di Fourier* di un segnale $x(t)$ dato. In particolare, per $k = 0$ si ha

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad (2.2.2.10)$$

che coincide con l'espressione del valore medio x_m del segnale.

$$8 \frac{e^{j\pi(k-n)} - e^{-j\pi(k-n)}}{j^2} = \frac{\sin[\pi(k-n)]}{2j}.$$

2.2.3 Sviluppo in serie di Fourier in reale rettangolare

Abbiamo dunque ricavato due possibili espressioni per la serie di Fourier, e precisamente quella in forma polare (2.2.1.2) e quella in forma complessa (2.2.2.4); ne esiste anche una terza, detta *espressione in forma rettangolare*, che ricaviamo di seguito. Sviluppando le funzioni cosinusoidali della (2.2.1.2) si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = \\ &= A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\cos(r\pi k f_0 t) \cos \vartheta_k - \sin(2\pi k f_0 t) \sin \vartheta_k], \end{aligned} \quad (2.2.3.1)$$

dove si è sfruttata l'identità $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Se adesso si definiscono le quantità $a_0 \triangleq A_0$, $a_k \triangleq A_k \cos \vartheta_k$ e $b_k \triangleq A_k \sin \vartheta_k$, con $k = 1, 2, \dots$, si ricava la relazione cercata:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(r\pi k f_0 t) - b_k \sin(2\pi k f_0 t)]. \quad (2.2.3.2)$$

I coefficienti dell'espressione in forma rettangolare a_k , b_k sono legati a quelli relativi all'espansione in forma complessa X_k della relazioni

$$a_k = \Re[X_k] = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt, \quad (2.2.3.3)$$

$$b_k = \Im[X_k] = -\frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt. \quad (2.2.3.4)$$

Nelle equazioni precedenti, la notazione $\int_{[T_0]}$ sta a indicare che l'integrale può essere esteso a un qualunque intervallo temporale di ampiezza T_0 . Per ragioni di simmetria, è buona norma scegliere l'intervallo $[-T_0/2, T_0/2]$.

2.2.4 Il criterio di Dirichlet

Ricordiamo che negli sviluppi analitici necessari per ottenere l'espressione del generico coefficiente di Fourier (2.2.2.9)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (2.2.4.1)$$

è stata ipotizzata la convergenza uniforme della serie ottenuta in (2.2.2.4)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}. \quad (2.2.4.2)$$

Per i segnali che si incontrano comunemente nelle applicazioni pratiche, questa ipotesi è sempre verificata; spesso però, per schematizzare fenomeni fisici, si fa ricorso a funzioni che non rappresentano esattamente i segnali in esame, ma che offrono il vantaggio non indifferente di una maggiore *semplicità*. Per tali funzioni, tuttavia, non è più assicurata in generale la possibilità di uno sviluppo in serie di Fourier e diventa quindi necessario disporre di criteri che garantiscano la correttezza di tale sviluppo.

Un insieme di condizioni sufficienti che garantiscano la possibilità di sviluppare un segnale in serie di Fourier è il cosiddetto *criterio di Dirichlet* che può essere enunciato come segue:

- se $x(t)$ è assolutamente integrabile⁹ sul periodo T_0 , vale a dire se verifica la condizione

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.2.4.3)$$

- se $x(t)$ è continuo o presenta in un periodo un numero finito di discontinuità di prima specie;

⁹Una funzione assolutamente integrabile su un intervallo è una funzione per la quale esiste finito l'integrale del valore assoluto della funzione sull'intervallo di integrazione considerato.

- se $x(t)$ è derivabile rispetto al tempo nel periodo, escluso al più un numero finito di punti nei quali esistono finite la derivata destra e sinistra,

allora la serie di Fourier converge al valore assunto dalla funzione $x(t)$ nei punti in cui questa è continua, e alla semisomma dei limiti destro e sinistro nei punti in cui $x(t)$ presenta le eventuali discontinuità di prima specie.

La terza ipotesi del criterio può anche essere sostituita con la seguente, che risulta del tutto equivalente:

- se il segnale presenta un numero finito di massimi e minimi nel periodo.

2.2.5 Spettri di ampiezza e di fase

Dunque, ogni segnale $x(t)$ che soddisfi il criterio di Dirichlet può essere rappresentato con lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad (2.2.5.1)$$

dove il particolare coefficiente X_k della serie è dato da

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (2.2.5.2)$$

Naturalmente, la sequenza X_n è in generale complessa *complessa*; per rappresentarla è conveniente tracciare due grafici che prendono il nome di *spettro di ampiezza* e *spettro di fase*¹⁰. Il primo illustra l'andamento dell'ampiezza (modulo) dei coefficienti X_k , il secondo ne illustra l'andamento della fase, entrambi in funzione dell'ordine k del coefficiente o del valore della k -esima frequenza armonica $k f_0$. Esempi stilizzati di queste rappresentazioni sono riportati nelle seguenti figure:

¹⁰Il termine "spettro" deve intendersi nel significato di "gamma di rappresentazione, gamma di visione" e nasce in fisica nel campo della spettroscopia in cui si *analizza* la composizione dei materiali attraverso le "righe" di emissione caratteristiche dei diversi elementi chimici.

Spettro di ampiezza e di fase

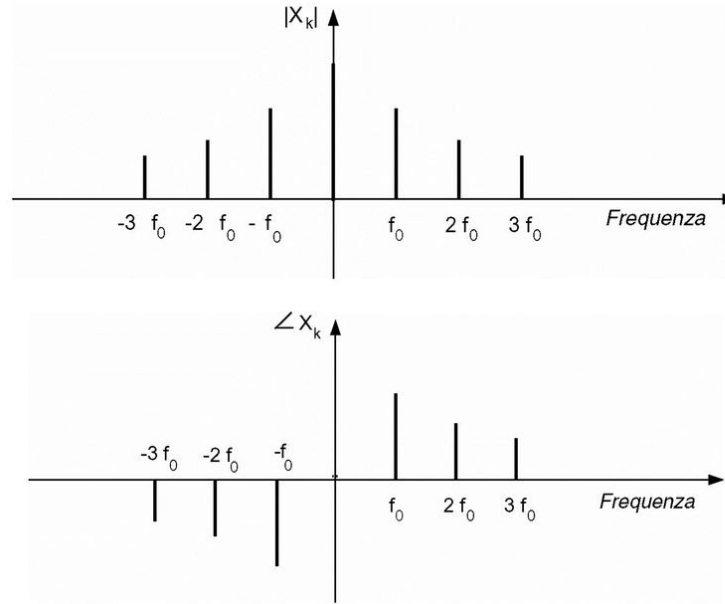


Figura 2.2: Spettro di ampiezza e di fase.

2.2.5.1 Spettro di un coseno

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.3)$$

Esso rappresenta un'oscillazione cosinusoidale di frequenza f_0 ; il periodo del segnale è $T_0 = 1/f_0$. Ricaviamo i coefficienti di Fourier:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (2.2.5.4)$$

Il calcolo può essere effettuato anche tramite un rapido ragionamento: se si confronta l'espressione in forma polare della serie di Fourier di un

segnale generico

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k), \quad (2.2.5.5)$$

comparandola a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.6)$$

è possibile vedere immediatamente che

$$A_0 = 0$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = A \cos(2\pi f_0 t)^{11} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{A}{2}, \vartheta_1 = 0 \\ A_k, \vartheta_k = 0 \forall k \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$X_1 = \frac{A}{2}, X_{-1} = \frac{A}{2}; \quad X_k = 0 \forall k \neq \pm 1.$$

Gli spettri di ampiezza e fase sono mostrati nella seguente figura:

2.2.5.2 Spettro di un seno

Consideriamo il segnale

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t). \quad (2.2.5.7)$$

Esso rappresenta un'oscillazione sinusoidale di frequenza f_0 ; il periodo del segnale è $T_0 = 1/f_0$. Ricaviamo i coefficienti di Fourier:

$$X_n \quad (2.2.5.8)$$

Il calcolo può essere effettuato anche tramite un rapido ragionamento: riscriviamo il segnale come il segnale

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}), \quad (2.2.5.9)$$

ora, se si confronta l'espressione in forma polare della serie di Fourier di un segnale generico

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k), \quad (2.2.5.10)$$

¹¹Notare che $\cos(2\pi f_0 t)$ ha fase iniziale nulla.

comparandola a

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}). \quad (2.2.5.11)$$

è possibile vedere immediatamente che

$$A_0 = 0$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \vartheta_k) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})^{12} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{A}{2}, \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2} \\ A_k, \vartheta_k = 0 \quad \forall k \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}, X_{-1} = \frac{A}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad X_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1.$$

Gli spettri di ampiezza e fase sono mostrati nella seguente figura: **Lo spettro di ampiezza è ovviamente uguale a quello del coseno visto precedentemente, mentre lo spettro di fase è differente.**

¹²Notare che $\cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})$ ha fase iniziale $-\frac{\pi}{2}$.

2.3 Segnali aperiodici a tempo continuo

2.4 Sistemi monodimensionali a tempo continuo

2.5 Segnali a tempo discreto

2.6 Sistemi monodimensionali a tempo discreto

2.7 Progetto di filtri digitali

2.8 Richiami di teoria della probabilità

2.9 Segnali aleatori a tempo continuo e a tempo discreto

Capitolo 3

Esame Scritto

"The reason I talk to myself is because I'm the only one whose answers I accept."

— George Carlin

Di seguito una lista di temi di esame presi dalla pagina "Comunicazioni Numeriche 2017-18" sul sito E-learning del Polo di Ingegneria. Le soluzioni fornite sono state arricchite di appunti personali e approfondimenti teorici.

3.1 Compitino 2014

3.2 Compitino 2015

3.3 Compitino 2016

3.4 Compitino 2017

3.5 Compitino 2018

3.6 Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Gennaio 2018

3.7 Prova di Comunicazioni Numeriche - 29 Gennaio 2018

3.8 Prova di Comunicazioni Numeriche - 20 Febbraio 2018

3.9 Prova di Comunicazioni Numeriche - 09 Aprile 2018

Capitolo 4

Esame Orale

"Read less, study less, but think more. "

— Leo Tolstoy

Di seguito una lista di domande, con una possibile risposta, riprese dagli orali delle ultime sessioni di esame suddivise tra **segnali deterministici** e **segnali aleatori**.

4.1 Segnali Deterministici

Segnali il quale valore sia univocamente determinabile non appena siano fissati i valori delle variabili indipendenti (in particolare, il tempo per segnali monodimensionali). Questo accade quando il segnale è noto attraverso un grafico, o una registrazione magnetica, o più semplicemente attraverso una ben definita espressione matematica, o ancora perchè è il prodotto di sistemi e apparati di cui si ha stretto controllo (per esempio, un generatore di forme d'onda di un laboratorio elettronico). Per modellare e studiare i segnali determinati sono sufficienti i concetti dell'analisi matematica tradizionale.

4.1.1 Relazioni tra Potenza Media P_x ed Energia E_x di un Segnale

Un segnale ad energia finita (matematicamente, a quadrato sommabile) ha potenza media nulla:

$$E_x = K < \infty \implies P_x = 0. \quad (4.1.1.1)$$

Viceversa, un segnale che abbia un valore finito diverso da zero della potenza media ha necessariamente energia infinita:

$$P_x = K < \infty, K \neq 0 \implies E_x = \infty. \quad (4.1.1.2)$$

Lemma 4.1.1. *Un segnale ad energia finita (matematicamente, a quadrato sommabile) ha potenza media nulla:*

$$E_x = K < \infty \implies P_x = 0. \quad (4.1.1.3)$$

Dimostrazione. Dato un segnale $x(t)$ tale che $E_x = K < \infty$, ad energia finita, risulta

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = K < \infty, \quad (4.1.1.4)$$

ricordando poi che

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T}, \quad (4.1.1.5)$$

ne segue che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} = K < \infty. \quad (4.1.1.6)$$

Allora

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = \\ &= K \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.1.7)$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

Lemma 4.1.2. *Un segnale che abbia un valore finito diverso da zero della potenza media ha necessariamente energia infinita:*

$$P_x = K < \infty, K \neq 0 \implies E_x = \infty. \quad (4.1.1.8)$$

Dimostrazione. Dato un segnale $x(t)$ tale che $P_x = K < \infty$, con $K \neq \infty$, a potenza finita non nulla, risulta

$$P_x \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = K. \quad (4.1.1.9)$$

Da cui segue che

$$E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} E_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot P_{x_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot K = \infty, \quad (4.1.1.10)$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

I due precedenti lemmi sono validi solo ed esclusivamente nell'ordine in cui sono stati posti.

4.1.1.1 Funzione a quadrato sommabile

In analisi matematica, una funzione $f(x)$ di una variabile reale a valori reali e complessi si dice a quadrato sommabile, o anche a quadrato integrabile, in un determinato intervallo $I = [a, b]$ se l'integrale del suo modulo in I è finito:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (4.1.1.11)$$

La nozione si estende a funzioni definite su di uno spazio di misura a valori in uno spazio vettoriale topologico.

L'insieme di tutte le funzioni misurabili su un dato dominio, che in esso sono a quadrato sommabile, forma uno spazio di Hilbert, il cosiddetto spazio L^2 .

4.1.1.2 Applicazioni nella Meccanica Quantistica

La condizione di quadrato sommabile è necessaria particolarmente nella meccanica quantistica, in quanto costituisce una richiesta basilare per le funzioni d'onda che descrivono il comportamento delle particelle elementari e, in particolare, la probabilità di osservare il sistema in un certo

stato quantico. Ad esempio, lo stato di una particella (senza spin) associata a un campo scalare è una funzione d'onda della forma $\psi(x, y, z)$, dove l'integrale

$$p(V) = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz, \quad (4.1.1.12)$$

rappresenta la probabilità di trovare la particella p nel volume V . Per questo motivo, dato che la probabilità deve essere necessariamente finita e normalizzabile, si richiede che esista e abbia valore finito un integrale della forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz |\psi(x, y, z)|^2. \quad (4.1.1.13)$$

4.1.2 Relazione Potenza Media, Valore Efficace e

Valore Medio: $P_x = 0 \implies x_e f f = 0, x_m = 0$

Teorema 4.1.3. *Dato un segnale $x(t)$, tale che $P_x = 0$, a potenza nulla, risulta*

$$\begin{cases} x_e f f = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.1)$$

Oververo

$$P_x = 0 \implies \begin{cases} x_e f f = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.2)$$

Dimostrazione. Il primo punto è di facile dimostrazione. Infatti

$$x_e f f = \sqrt{P_x}, \quad (4.1.2.3)$$

quindi

$$P_x = 0 \implies x_e f f = 0. \quad (4.1.2.4)$$

Resta da dimostrare che

$$P_x = 0 \implies x_m = 0. \quad (4.1.2.5)$$

Per fare ciò consideriamo il segnale $x(t) = \tilde{x}(t) + x_m$, dove x_m è il valore medio del segnale $x(t)$ stesso. Risulta quindi $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - x_m$, e quindi per definizione $\tilde{x}(t)$ è un segnale con valore medio nullo. Infatti

$$\begin{aligned} \tilde{x}_m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - x_m) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_m dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt - x_m \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = x_m - x_m = 0. \end{aligned} \quad (4.1.2.6)$$

Sviluppiamo ora i calcoli per ottenere un'espressione per la potenza P_x del segnale $x(t) = \tilde{x}(t) + x_m$:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t)^* dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\tilde{x}(t) + x_m) \cdot (\tilde{x}(t)^* + x_m^*) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^* + x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^* + x_mx_m^* dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 + (x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^*) + |x_m|^2 dt = \quad (4.1.2.7) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^*\tilde{x}(t) + x_m\tilde{x}(t)^*) dt \\
 &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Vediamo di risolvere questi tre limiti di integrali separatamente. Il primo integrale è ovvio

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt = P_{\tilde{x}}. \quad (4.1.2.8)$$

Il terzo integrale è di facile risoluzione

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt &= |x_m|^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = \\
 &= |x_m|^2 \cdot \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = |x_m|^2.
 \end{aligned} \quad (4.1.2.9)$$

¹Dato $z \in \mathbb{C}$ allora $z \cdot z^* = ce^{j\varphi} \cdot ce^{-j\varphi} = c^2 e^{j(\varphi-\varphi)} = c^2 = |z|^2$.

Per quanto riguarda il secondo invece, possiamo procedere così

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + x_m \tilde{x}(t)^*) dt &= {}^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + (x_m^* \tilde{x}(t))^*) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 \cdot \Re(x_m^* \tilde{x}(t)) dt = \\
&= 2 \cdot \Re \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_m^* \tilde{x}(t) dt \right) = \\
&= 2 \cdot \Re \left(x_m^* \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) dt \right) = 2 \cdot \Re(x_m^* \tilde{x}_m) = {}^3 2 \cdot \Re(x_m^* \cdot 0) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.2.10}$$

A questo punto, riportando i risultati ottenuti nell'integrale di partenza:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_m^* \tilde{x}(t) + x_m \tilde{x}(t)^*) dt \\
&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_m|^2 dt = P_{\tilde{x}} + 0 + |x_m|^2 = P_{\tilde{x}} + |x_m|^2.
\end{aligned} \tag{4.1.2.11}$$

Infine risulta quindi

$$P_x = P_{\tilde{x}} + |x_m|. \tag{4.1.2.12}$$

Da cui, dato che si è posto $P_x = 0$ come supposizione iniziale, e dato che $P_{\tilde{x}} \geq 0$ e $|x_m|^2 \geq 0$ per definizione, risulta

$$P_x = 0 \implies P_{\tilde{x}} + |x_m| = 0 \implies \begin{cases} P_{\tilde{x}} = 0 \\ |x_m| = 0 \end{cases}, \tag{4.1.2.13}$$

che dimostra la tesi iniziale:

$$P_x = 0 \implies \begin{cases} x_e f f = 0 \\ |x_m| = 0 \end{cases}. \tag{4.1.2.14}$$

□

²Dato $z = a + ib$ con $z \in \mathbb{C}$, allora $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \Re(z)$

³Nella (4.1.2.6) abbiamo calcolato che $\tilde{x}_m = 0$.

Come conseguenza dei due teoremi visti nelle sezioni 4.1.1 e 4.1.2 possiamo scrivere che

$$\begin{cases} \text{SISTEMI AD} \\ \text{ENERGIA FINITA} \\ (E_x = K < \infty) \end{cases} \implies \begin{cases} P_x = 0 \\ x_{eff} = 0 \\ x_m = 0 \end{cases} . \quad (4.1.2.15)$$

4.1.2.1 Media quadratica

La media quadratica di due o più numeri è definita come la radice quadrata del rapporto tra la somma dei quadrati dei valori numerici ed il numero di valori, ed è un indicatore statistico definito a partire dai quadrati dei valori considerati. Formalmente, dai n valori numerici

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (4.1.2.16)$$

la formula di calcolo della media quadratica è data da

$$\text{Media quadratica} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}. \quad (4.1.2.17)$$

4.1.2.2 Valore Efficace

Si definisce valore efficace di una funzione continua $x(t)$, la radice della media quadratica (ovvero la "radice della media dei quadrati" detta anche *valore quadratico medio*, in inglese *root mean square*, da cui la sigla RMS), sul periodo della funzione stessa:

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [x(t)]^2 dt}. \quad (4.1.2.18)$$

Se si applica il procedimento ad un segnale costante si può facilmente constatare che il suo valore efficace coincide con il valore reale.

4.1.3 Biunivocità della trasformata serie di Fourier

Ogni segnale $x(t)$ che soddisfi il criterio di Dirichlet può essere rappresentato con lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad (4.1.3.1)$$

dove il particolare coefficiente X_k della serie è dato da

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \quad (4.1.3.2)$$

La seconda delle due è una equazione di *analisi* che permette di stabilire qual è il contenuto in termini di oscillazioni armoniche del segnale (in una parola, di *analizzare* il segnale). La prima delle due, viceversa, è una equazione di *sintesi* che, note le ampiezze e fasi delle varie armoniche (cioè noti i coefficienti di Fourier), permette di ricostruire, cioè di *sintetizzare*, il segnale dato a partire dalle proprie componenti frequenziali (armoniche). Evidentemente, l'equazione di sintesi prevede l'uso di *infinite* armoniche per ricostruire il segnale. D'altronde, condizione necessaria alla convergenza della serie è che l'ampiezza $|X_n|$ delle armoniche *tenda a zero* quando $n \rightarrow \infty$. Questo comporta che le armoniche più "importanti" ai fini della sintesi del segnale sono in numero limitato, e che quindi la serie può essere sostituita ai fini pratici da una sommatoria di un numero finito di termini.

Le equazioni di analisi e di sintesi permettono di stabilire una corrispondenza tra il segnale $x(t)$ e la *sequenza* X_n costituita dai coefficienti della serie (coefficienti di Fourier o di Eulero). Indicheremo tale corrispondenza con la seguente scrittura:

$$x(t) \Longleftrightarrow X_n \quad (4.1.3.3)$$

Questo tipo di notazione suggerisce che la conoscenza dell'andamento del segnale $x(t)$ in ambito temporale è di fatto *equivalente* alla conoscenza della *successione* dei coefficienti di Fourier X_n in ambito frequenziale, nel senso che il passaggio da un dominio all'altro è immediato attraverso le relazioni di analisi e sintesi.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-k)f_0 t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos[2\pi(n-k)f_0 t] dt + j \sin[2\pi(n-k)f_0 t]) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos[2\pi(n-k)f_0 t] dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin[2\pi(n-k)f_0 t] dt \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.3.4}$$

I due integrali sono risolvibili senza effettuare eccessivi calcoli matematici, infatti

$$\begin{aligned}
 \cos(2\pi(n-k)f_0 t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases} \\
 \sin(2\pi(n-k)f_0 t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-k)f_0 t) dt = {}^4 \begin{cases} T_0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

⁴Poichè integriamo il *coseno* lungo intervalli pari al periodo.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-k)f_0t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

Possiamo quindi riprendere

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-k)f_0t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-k)f_0t) dt \right] = \\ &= {}^5 \frac{1}{T_0} X_k T_0 = X_k, \end{aligned}$$

che dimostra la tesi iniziale. \square

⁵Di tutti i termini della sommatoria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n$ rimane infatti solo il k -esimo per cui il primo dei due integrali non è nullo.

4.1.4 Linearità della trasformata serie di Fourier

Consideriamo ora due segnali $x(t)$ e $y(t)$, entrambi periodici dello stesso periodo T_0 e aventi come coefficienti di Fourier X_k and Y_k . Il segnale

$$z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \quad (4.1.4.1)$$

data dalla combinazione lineare di $x(t)$ e $y(t)$, è periodico di periodo T_0 , e il coefficiente k -esimo Z_k della sua serie di Fourier è

$$Z_k = a \cdot X_k + b \cdot Y_k. \quad (4.1.4.2)$$

Dimostrazione. Tale proprietà di linearità dei coefficienti di Fourier deriva direttamente dalla medesima proprietà dell'integrale; si ha infatti che

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} z(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{a}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{b}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= a \cdot \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right] + b \cdot \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right] = \\ &= a \cdot X_k + b \cdot Y_k. \end{aligned} \quad (4.1.4.3)$$

Naturalmente, lo sviluppo in serie di $z(t)$ è costituito da una somma di oscillazioni aventi *le stesse frequenze* di quelle che compongono i segnali $x(t)$ e $y(t)$; pertanto, in generale una combinazione lineare di segnali aventi medesimo periodo T_0 non introduce nuove armoniche.

□

4.1.5 Simmetria Hermitiana della trasformata serie di Fourier

Dato un segnale reale $x(t)$ ($x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = x^*(t)$), i coefficienti X_k dello sviluppo in serie di Fourier in forma complessa di $x(t)$ godono della proprietà di simmetria Hermitiana (o coniugata). Ovvero

$$x(t) = x^*(t) \iff X_{-n} = X_n^* \quad (4.1.5.1)$$

$$X_{-n} = X_n^* \iff \begin{cases} |X_k| = |X_{-k}| & (\text{simmetria pari per il modulo}) \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} & (\text{simmetria dispari per la fase}) \end{cases} \quad (4.1.5.2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} X_{-k} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^*(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \\ &= {}^{67} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right]^* = X_k^*. \end{aligned} \quad (4.1.5.3)$$

□

⁶Sia $z = re^{j\varphi} \in \mathbb{C}$ un numero complesso espresso in forma esponenziale. Allora: $\bar{z} = re^{-j\varphi}$ where \bar{z} denota il complesso coniugato di z .

⁷Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora: $(z_1 \cdot z_2)^* = [c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2}]^* = [c_1 c_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}]^* = c_1 c_2 \cdot e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} = c_1 e^{-j\varphi_1} \cdot c_2 e^{-j\varphi_2}$

Spettro di ampiezza e di fase

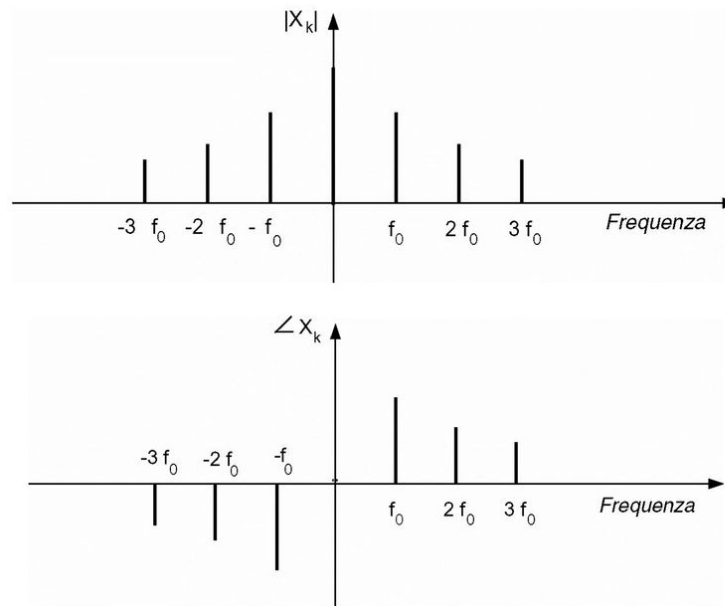


Figura 4.1: Spettro di ampiezza e di fase.

4.1.5.1 Simmetria pari per il modulo

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad (4.1.5.4)$$

Sia $f(x)$ una funzione a valori reali di variabile reale e sia $D \subset \mathbb{R}$ il suo dominio. Allora f è [aro se per ogni $x \in D$ vale l'equazione:

$$f(x) = f(-x).$$

Geometricamente, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y .

Il nome **pari** deriva dal fatto che le serie di Taylor di una funzione pari centrata nell'origine contengono solo potenze pari.

Esempi di funzioni pari sono x^2 , x^4 , $\cos(x)$, $\cosh(x)$.

Esempio pratico:

$$y = x^2 - 1 \implies f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x).$$

4.1.5.2 Simmetria dispari per la fase

$$\angle X_k = -\angle X_{-k} \quad (4.1.5.5)$$

Sia $f(x)$ una funzione a valori reali di variabile reale e sia $D \subset \mathbb{R}$ il suo dominio. Allora f è dispari se per ogni $x \in D$ sussiste l'equazione:

$$f(-x) = -f(x),$$

vale a dire

$$f(x) = -f(-x).$$

Geometricamente, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Il nome **dispari** deriva dal fatto che le serie di Taylor di una funzione dispari centrate nell'origine contengono solo potenze dispari.

Esempi di funzioni dispari sono x , x^3 , $\sin(x)$, $\sinh(x)$.

Esempio pratico:

$$y = x^3 - x \implies f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

4.1.6 Trasformata di un segnale reale e pari

4.1.7 Trasformata di un segnale reale e dispari

4.1.8 Trasformata di un segnale reale alternativo

4.1.9 Biunivocità della Trasformata Continua di Fourier (TCF)

4.1.10 Linearità della Trasformata Continua di Fourier (TCF)

4.1.11 Simmetrie della TCF: Simmetria Hermitiana

4.1.12 Simmetrie della TCF: Segnali reali e pari

4.1.13 Simmetrie della TCF: Segnali reali e dispari

4.1.14 Dualità della TCF

4.1.15 TCF: Teorema del ritardo

4.1.16 TCF: Teorema del cambiamento di scala

4.1.17 Teorema della Modulazione

4.1.17.1 Modulazione con coseno

4.1.17.2 Modulazione con seno

4.1.17.3 Modulazione con esponenziale complesso

4.1.18 Teorema di derivazione

4.1.18.1 Derivazione nel tempo

4.1.18.2 Derivazione in frequenza

4.1.19 Teorema di integrazione

4.1.19.1 Integrazione nel tempo

4.1.19.2 Integrazione in frequenza

4.1.20 Teorema del Prodotto di Convoluzione

4.1.21 Teorema della Convoluzione

4.2 Segnali Aleatori

In moltissimi casi non è possibile conoscere con esattezza *a priori* il valore assunto da un segnale in un certo istante. Si pensi per esempio al segnale geofisico colto da sensori posti sul terreno per effettuare rilevazioni minerarie. Tale segnale non è noto *a priori* completamente, in particolare non se ne conosce l'evoluzione futura se non dopo l'osservazione, cioè *a posteriori*. Prima dell'osservazione, si ha solo una conoscenza generica di alcune proprietà di massima di tale segnale, derivante dall'esperienza pregressa in casi simili. Stessa osservazione può farsi a proposito delle tensioni di disturbo (*rumore*) presenti nei componenti elettronici attivi e passivi e prodotte da fenomeni incontrollabili, tipicamente di origine quantistica. Diremo quindi che questi segnali sono *aleatori*, intendendo che il valore assunto da essi è affetto da un certo grado di improbabilità (alea) che ne impedisce una conoscenza esatta. Per modellare e studiare i segnali aleatori è indispensabile quindi ricorrere a tecniche basate sulla *teoria della probabilità e dei processi aleatori*.

4.2.1 Teorema di Bayes

4.2.2 Teorema della Probabilità Totale

4.2.2.1 Esempio Teorema di Bayes & Teorema della Probabilità Totale

4.2.3 Legame tra Varianza σ_x^2 e Valor quadratico medio m_x^2

Appendice A

Segnali Canonici

"Life is a sexually transmitted disease and the mortality rate is one hundred percent."

— R.D. Laing

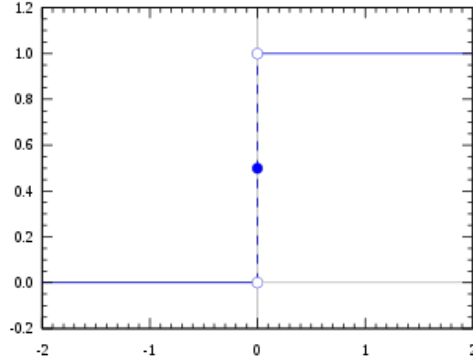
La presente appendice contiene una lista di segnali canonici, per ciascuno dei quali sono stati analizzati le proprietà principali, utilizzati nel testo.

A.1 Gradino Unitario

Nella teoria dei segnali e dei sistemi è utile definire la funzione *gradino unitario* $u(t)$ (detta anche *funzione di Heaviside*)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.0.1})$$

rappresentata graficamente dalla figura seguente:

Figura A.1: Segnale Gradino Unitario $u(t)$.

Tale funzione, discontinua nell'origine, consente una rappresentazione concisa dei cosiddetti segnali *causali*¹ o *cisoidali*, cioè *nulli* per $t < 0$. Si noti che, mentre per $t > 0$ $u(t)$ assume un valore unitario, nell'origine assume il valore $1/2$.

Il segnale gradino serve a modellare matematicamente l'accensione all'istante $t = 0$ di un generatore ideale di tensione continua, che eroga così una tensione costante per ogni valore $t \geq 0$. Il segnale possiede energia illimitata, in quanto

$$\begin{aligned}
 E_u &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt}_{u(t)=0 \ \forall \ t < 0} = \underbrace{\int_0^{+\infty} 1 dt}_{u(t)=1 \ \forall \ t > 0} = \\
 &= [t]_0^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty.
 \end{aligned} \tag{A.1.0.2}$$

¹Un segnale causale è una funzione dipendente dal tempo che rappresenta uno stimolo esterno su un sistema fisico. Matematicamente, un segnale causale è rappresentato mediante una funzione nulla per $t < 0$. L'istante $t = 0$ rappresenta il momento in cui viene applicato dall'esterno il segnale.

La potenza media P_u , invece, è espressa dalla relazione

$$\begin{aligned}
 P_u &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} |u(t)|^2 dt}_{u(t) = 0 \ \forall t < 0} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt}_{u(t) = 1 \ \forall t > 0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [t]_0^{T/2} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.1.0.3}$$

Il valore efficace è dato da

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{A.1.0.4}$$

mentre il valore medio è ottenibile da

$$u_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}. \tag{A.1.0.5}$$