Eine Woche, ein Beispiel

10.27 Schur functor for Hodge modules

Goal: compute $\mathbb{S}^\lambda\left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right)$

$n = 2-2g$

χ(Hodge module)

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{array} \qquad \square \quad n \qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{array} \qquad e \quad n$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & g & & g & \\ \binom{g}{2} & & g^2+1 & & \binom{g}{2} \\ & g & & g & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & g & & g & \\ \binom{g+1}{2} & & g^2+1 & & \binom{g+1}{2} \\ & g & & g & \\ & & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2g & & 2g & \\ g & & 2g^2+2 & & g \\ & 2g & & 2g & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$\square\square \quad \binom{n+1}{2} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \quad \binom{n}{2} \qquad\qquad e^2 \quad n^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & g & & g & & \\ & \binom{g}{2} & & g^2+1 & & \binom{g}{2} & \\ \binom{g}{3} & & g\binom{g}{2}+g & & g\binom{g}{2}+g & & \binom{g}{3} \\ & \binom{g}{2} & & g^2+1 & & \binom{g}{2} & \\ & & g & & g & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & g & & g & & \\ & g^2 & & 2g^2+1 & & g^2 & \\ \frac{1}{3}(g^3-g) & & g^3+2g & & g^3+2g & & \frac{1}{3}(g^3-g) \\ & g^2 & & 2g^2+1 & & g^2 & \\ & & g & & g & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & \binom{g+1}{2} & & g^2 & & \binom{g+1}{2} & \\ \binom{g+2}{3} & & g\binom{g+1}{2}+g & & g\binom{g+1}{2}+g & & \binom{g+2}{3} \\ & \binom{g+1}{2} & & g^2 & & \binom{g+1}{2} & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 0 & & & \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3g & & 3g & & \\ & 3g^2 & & 6g^2+3 & & 3g^2 & \\ g^3 & & 3g^3+6g & & 3g^3+6g & & g^3 \\ & 3g^2 & & 6g^2+3 & & 3g^2 & \\ & & 3g & & 3g & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

$$\square\square\square \quad \binom{n+2}{3} \qquad \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix} \quad \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1\cdot 3\cdot 1} \qquad \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \quad \binom{n}{3} \qquad e^2 \quad n^3$$

Will do it in three steps:

1. $\mathbb{S}^\lambda(g, g)$
2. $\mathbb{S}^\lambda\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$
3. E.g. $\mathrm{Sym}^n\left(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ g & & g \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right)$