集合论

1. $A \equiv \chi_A(x) \Longrightarrow \lim . \overline{\lim} . \underline{\lim}$
2. Zorn引理：处理不可数情况
3. 势 ① Def：$\le, \ge, =$ 　良定：$|X|\le|Y| \Leftrightarrow |Y|\le|X|$ （选择）
   ② 全序：Verify 对称(ping-pong)，极小元(Zorn)
   ③ 分布：最小势 $\aleph_0$，无最大势 Cantor连续统假设
   ④ 运算：k_1+k_2，$k_1 \cdot k_2$　$k_1^{k_2}$ 倍等，幂等　$c^{\aleph_0}=c$　$c^c=2^c$
   ⑤ 特殊集合：$|\mathbb{R}| = |\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = c$　$|\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$

抽象测度论

$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue测度同抽象测度理论相互影响，共同促进。花开两朵，各表一枝。

一、Definition

为定义测度空间，我们先引入

可测空间(X,Γ)：$X\neq\phi$，$\Gamma\subset 2^X$，Γ为σ-代数（空，差，可列并）

测度空间(X,Γ,μ)　$\mu:\Gamma\longrightarrow[0,+\infty]$　（空，可列可加）

Remark：测度空间可由外测度诱导

外测度(X,μ^*)：$X\neq\phi$，$\mu^*: 2^X\to[0,+\infty]$（空，单调，可列次可加）

Thm：(X,μ^*)诱导测度空间(X,Γ,μ)，其中

$$\Gamma := \{A\subset X \mid \mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\quad \forall E\subset X\}\qquad \mu:=\mu^*|_\Gamma$$

其中$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ 称为Caratheodory条件

Notation：

F	G	σ	δ
闭	开	可列并	可列交

$\sigma(\Sigma) := \langle\Sigma\rangle_{\sigma\text{-algebra}} := \bigcap_{\substack{\Sigma\subset\Gamma \\ \Gamma \text{ is } \sigma\text{-algebra}}} \Gamma$

Borel σ-代数：$=\sigma(\{开集\})$，元素称为Borel集

可测映射：可测集原像是可测集　e.p. $X_2=\mathbb{R}$时默认Γ_2为Borel σ-代数，故

可测函数：开集$([a,+\infty)$，Borel集)原像是可测集

Thm：$\exists!$ 测度空间$(\mathbb{R}^n,\Gamma,\mu)$，s.t.

(1) $\Gamma\supset$ Borel σ-代数 $\Leftrightarrow \Gamma\supset$开集

(2) Γ ~~完备~~ 完备：$\forall A\subset B\in\Gamma, \mu(B)=0 \Rightarrow A\in\Gamma$

(3) $\mu((a_1,b_1)\times\cdots(a_n,b_n)) = \prod_{j=1}^n (b_j-a_j)$

(4) $\mu(x+A)=\mu(A)\quad \forall A\in\Gamma\quad x\in\mathbb{R}^n$

$(X,\Gamma,\mu) := (\mathbb{R}^n$, Lebesgue σ-代数, Lebesgue 测度$)$

二. 抽象测度性质

Prop. 设 (X,Γ,μ) 为测度空间, $A_i\in\Gamma$

1. $A_k\nearrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)=\mu(\lim\limits_{k\to\infty}A_k)$ 测度从下方连续性
2. $A_k\searrow$, $\mu(A_1)<+\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)=\mu(\lim\limits_{k\to\infty}A_k)$ 测度从上方连续性
3. $\Rightarrow \mu(\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k)\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\mu(A_k)$
4. $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k)<+\infty \Rightarrow \overline{\lim}_{k\to\infty}\mu(A_k)\le\mu(\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k)$

(雏形) **Remark.** 1 单调收敛定理. $\lim\limits_{k\to\infty}\int_X\chi_{A_k}(x)d\mu(x)=\int_X\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)d\mu(x)$ 可测

2. 控制收敛定理. 同上, $\chi_{A_1}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $|\chi_{A_k}(x)|\le\chi_{A_1}(x)$

3. Fatou引理. $\int_X\underline{\lim}_{k\to\infty}\chi_{A_k}(x)d\mu(x)\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_X\chi_{A_k}(x)d\mu(x)$ 非负可测

~~Bore~~

Lemma (Boral-Cantelli) 设 (X,Γ,μ) 为测度空间, $A_n\in\Gamma$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)<+\infty\Rightarrow\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=0\qquad(\Leftrightarrow\ \chi_{A_n}\xrightarrow{a.e.\mu}0)$$

Proof. $0=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mu(A_n)\ge\lim\limits_{k\to\infty}\mu(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty}A_n)\overset{2}{=}\mu(\lim\limits_{k\to\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty}A_n)$

三. 抽象测度的完备化

Thm. (X,Γ,m) 测度空间 $\Rightarrow(X,\overline{\Gamma},\overline{m})$ 完备~~度~~测度空间.

其中 $\overline{\Gamma}=\{A\cup Z\mid A\in\Gamma, Z\in\mathcal{N}\}$ $\quad\overline{m}(A\cup Z):=m(A)$

$\mathcal{N}:=\{A\subset X\mid\exists N\in\Gamma, s.t\ A\subset N, \mu(N)=0\}$

Lebesgue 测度论

1. Definition

Thm $m^*(E) := \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k| \mid E\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k, I_k$是开矩体$\}$是$\mathbb{R}^n$上外测度,称为Lebesgue外测度

Thm. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$是测度空间,其中:

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \{A\subset\mathbb{R}^n \mid \forall E\subset\mathbb{R}^n\ \ m^*(E)=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)\}$ Lebesgue σ-代数

$m := m^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ Lebesgue测度

2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$是$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$的完备化

Prop. Borel集是Lebesgue可测集

Proof. 只需证 $I := (a_1,b_1)\times\cdots(a_n,b_n)$是Lebesgue可测集即可。

证明需用到以下引理:

Lemma1 $\forall E\subset\mathbb{R}^n$, $\forall\delta>0$,有

$$m^*(E)=\inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|J_k| \mid E\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}J_k, J_k\text{闭}\}$$
$$= m^*_\delta(E) := \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty}|J_k| \mid E\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}J_k, J_k\text{闭,边长}<\delta\}$$

Lemma2 (距离外测度性质)

设$A,B\subset\mathbb{R}^n$, $d(A,B)>0$,则

$m^*(A\sqcup B)=m^*(A)+m^*(B)$ (i.e 有限可加性)

Lemma 3 (Lindelöf原理) $E\subset\mathbb{R}^n$的任一开覆盖具有可列子覆盖

Thm Lebesgue测度是完备的, i.e $\forall A\subset B\in\Gamma, \mu(B)=0 \Rightarrow A\in\Gamma$

Thm. Lebesgue测度是正则测度, i.e

设$A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,则 $m(A)=\inf\{m(G) \mid A\subset G, G\overset{\text{开}}{\subset}\mathbb{R}^n\}$

$= \sup\{m(K) \mid K\subset A, K\overset{\text{紧}}{\subset}\mathbb{R}^n\}$ (分类证明)

Thm. 等测核等测包定理 (完备化定理)

$\forall A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\exists B_1\in F_\sigma$(等测核), $B_2\in G_\delta$(等测包), s.t

$B_1\subset A\subset B_2$, $m(B_2-B_1)=0$

Remark. Lebesgue可测集 $=F_\sigma+Z=G_\delta\setminus Z$

Thm. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$是$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$的完备化

Proof. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \overset{?}{=} \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ $\quad\subset$: 等测核等测包

$\supset$: Lebesgue测度完备

Cor: $E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ ∃闭 F 开 G:

$F\subset E\subset G$ $\quad m^*(E\setminus F)<\varepsilon \quad m^*(G\setminus E)<\varepsilon$

Def E 的等测包 $H\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$: $E\subset H$ & $m^*(E)=m(H)$ 一般 $m^*(H\setminus E)\neq 0$

推广: 测度性质 $\xrightarrow{\text{等测包}}$ 外测度性质

(1) (Fatou) $m^*:\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\to[0,+\infty]$ 下半连续, i.e. $m^*(\varliminf_{k\to\infty} E_k)\le \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k)$ $\forall E_k\subset\mathbb{R}^n$

(2) (单调收敛) $E_k\uparrow \Rightarrow m^*(\lim_{k\to\infty} E_k)=\lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$

下半连续示意

3. 测度平移不变性 (开矩体平移不变)

$m^*(E)=m^*(x_0+E)$ $\quad E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow x_0+E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

4. 正测集性质

Thm: $E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\Rightarrow \sup\limits_{\substack{I\text{ 开矩体}\\ I\text{ 有界}}}\dfrac{m(E\cap I)}{m(I)}=\begin{cases}1 & m(E)>0\\ 0 & m(E)=0\end{cases}$

Steinhaus 定理: $E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $m(E)>0\Rightarrow 0\in(E-E)^\circ$

e.g. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\xRightarrow{\exists m(E)>0\ s.t.\ f|_E\text{ 有界}}$ $f(x)=xf(1)$

可测函数论

一. Definition

1. 存在连续函数 h s.t 可测集的原象是不可测集

取 $\Phi=\frac{1}{2}(\text{Cantor}+Id)$ $h=\Phi^{-1}$

C: Cantor 集 W: 右图所示 则

$\Phi^{-1}(W)$ 的原像 W 是不可测集

$[0,1]/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H \leftarrow [0,1]$ 中代表元

$\parallel \qquad\qquad \parallel$ 代表元重新选取

$\Phi(C)+\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} W\subset\Phi(C)$

2. $f: E\to\mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测函数

$\Leftrightarrow$ 开集的原象是 Lebesgue 可测集

$\Leftrightarrow f:(E,\mathcal{L}(E))\to(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 可测

$\overset{(n=1)}{\Longleftrightarrow} f^{-1}[a,+\infty)$ 可测, $\forall a\in\mathbb{R}$

Remark 1. $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 兼顾连续、可测

$\Rightarrow$ 可测函数比连续函数更加柔韧

可测 连续

2. $A \rightleftharpoons \chi_A$ 可测性一致

3. 扩充直线 $\overline{\mathbb{R}}:=[-\infty,+\infty]$ 不同于单点紧化

$\overline{\mathbb{R}}$ 中 Borel 集由 $[a,+\infty]$ 生成, $a\in[-\infty,+\infty]$

二. 封闭性与局部性质

1. 复合：$\mathbb{R}^m \xrightarrow[\text{可测}]{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{连续}]{f} \mathbb{R}$，则 $f\circ g$ 可测　加乘可测

2. 直乘积：$u, v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测，则 $(u,v): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 可测
$x \mapsto (u(x), v(x))$

3. 极限：$f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测，则 $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$，$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k$ 可测

4. Thm　$f \overset{a.e}{=} g \Rightarrow (f\text{可测} \Leftrightarrow g\text{可测})$

可测是局部性质：$E = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$　E_k 可测，则

$f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测 $\Leftrightarrow$ $f|_{E_k}: E_k \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 可测

Thm　$f_k: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测，$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e $x\in E$

$\Rightarrow f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测　　i.e. a.e. lim 封闭

三. 结构定理

$L(E)$ 可测　$\overline{\mathbb{R}}$

$L^+(E)$ 非负可测　$\overline{\mathbb{R}} = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle_{A\text{可测}}$

$S(E)$ 简单可测　$\mathbb{R}$

$S^+(E)$ 非负简单可测 $\mathbb{R} = \langle \chi_A, +, \cdot \rangle_{A\text{可测}}$

Lemma　$S(E)$的标准表示：$f\in S(E) \Leftrightarrow f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{f^{-1}(a_i)}(x)$

$f\in L^+(E) \Rightarrow \exists\, \varphi_k \in S^+(E)$，$\operatorname{supp}\varphi_k$ 紧，$\varphi_k \uparrow f$ (二进制剖分 + 球扩张)

$f\in L(E) \Rightarrow \exists\, \varphi_k \in S(E)$，$\operatorname{supp}\varphi_k$ 紧，$|\varphi_k| \nearrow |f|$，$\varphi_k \longrightarrow f$

$f\in L(E)$有界 $\begin{cases} \Rightarrow \exists\, \varphi_k \in S(E)，\operatorname{supp}\varphi_k \text{紧}，|\varphi_k| \uparrow |f|，\varphi_k \overset{\text{内闭}}{\rightrightarrows} f \\ \Rightarrow \exists\, \varphi_k \in S(E)，|\varphi_k| \nearrow |f|，\varphi_k \rightrightarrows f \end{cases}$

四. 三种收敛

1. Def　设 $f_k, f: E \to \mathbb{R}$ 可测

(1) $f_k \xrightarrow{a.e.} f$：$m[f_k \nrightarrow f] = 0$

(2) $f_k \xrightarrow{m} f$：$\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geq \varepsilon] = 0$

(3) $f_k \xrightarrow{a.un} f$：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 可测集 $E_\varepsilon \subset E$，$m(E\setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$，$f_k \rightrightarrows f$ on E_ε

E.g. $\chi_{[n,n+1)}$，$\chi_{[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n})}$

2. 三种收敛刻划性质

(1) $f_k \xrightarrow{a.e} f \Leftrightarrow m\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}[|f_k-f|\geq\varepsilon]\right)\right)=0$

(2) $f_k \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left(m[|f_k-f|\geq\varepsilon]\right)=0$

(3) $f_k \xrightarrow{a.un} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(m\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}[|f_k-f|\geq\varepsilon]\right)\right)=0$

3. 三种收敛关系

$$f_n \xrightarrow{a,un} f \Rightarrow \begin{cases} f_n \xrightarrow{a.e} f \overset{m(E)<+\infty}{\Longrightarrow} f \xrightarrow{a,un} f \\ f_n \xrightarrow{m} f \Leftrightarrow \forall \{f_n\}\text{子列}\{f_{n'}\},\exists\{f_{n'}\}\text{子列}\{f_{n'_k}\},\ s.t\ f_{n'_k}\xrightarrow{a.un} f \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Riesz: $\exists\{f_n\}$的子列$\{f_{n_k}\}$ s.t $f_{k_n}\xrightarrow{a.e} f$

Borel Cantelli引理:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} m(A_n)<+\infty \Rightarrow m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)=0 \Leftrightarrow \chi_{A_n}\xrightarrow{a.e} 0$

$\Leftrightarrow \chi_{A_n}\xrightarrow{a.un} 0 \Rightarrow \chi_{A_n}\xrightarrow{m} 0$

Thm. $E\subset\mathbb{R}^n$可测, $f_n: E\to\mathbb{R}$可测函数, 则

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛 $\Leftrightarrow$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度Cauchy

i.e $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} m[|f_n-f_m|\geq\varepsilon]=0$

e.g. $f_n: [0,1]\to\mathbb{R}$可测 $\Rightarrow \exists c_n$ 正常值函数, s.t $\frac{f_n}{c_n}\xrightarrow{a.e} 0$

4. 可测与连续的关系

Lusin: $f: E\to\mathbb{R}$可测, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$闭集$F\subset E$ s.t $f|_F$连续, $m(E\setminus F)<\varepsilon$

可测函数结构定理 $f: E\to\mathbb{R}$可测 $\Leftrightarrow \exists g_k\in\begin{cases}C_c(\mathbb{R}^n) \\ C_b(\mathbb{R}^n) & f\text{有界}\end{cases}$ s.t $g_k\xrightarrow{a.e} f$

欲证此定理, 我们不加证明给出三引理:

Urysohn引理: $\underset{紧}{K}\subset\underset{开}{U}\subset\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists f\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n): \chi_K\leq f\leq\chi_U$

Tietz扩张定理: $K\overset{闭}{\subset}\mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{cases} C_c(K) \xrightarrow[\|f\|_\infty]{\text{保范}} C_c(\mathbb{R}^n) & \text{当}K\text{紧} \\ C_b(K)\longrightarrow C_b(\mathbb{R}^n) \\ C(K)\longrightarrow C(\mathbb{R}^n)\end{cases}$

Lusin: $\forall\varepsilon>0$ $\exists$闭$F\subset E$: $m(E\setminus F)<\varepsilon$

$\exists g\in\begin{cases} C_c(\mathbb{R}^n) & E\text{有界} \\ C_b(\mathbb{R}^n) & f\text{有界} \\ C(\mathbb{R}^n)\end{cases}$ s.t $f|_F=g|_F$

Lebesgue 积分论(一)（以下设E.A为可测集）

洞察力
见微知著
一步登天

1. Definition

标准四步：$\chi_A \xrightarrow[\text{提升}]{S^+ \quad L^+} L'$

$f = \chi_A$: $\int_E \chi_A(x) := m(A)$

$f \in S^+(E)$: $\int_E \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x)dx := \sum_{i=1}^{k} a_i m(E_i)$

$f \in L^+(E)$: $\int_E f(x)dx := \xlongequal{\exists \varphi_k \in S^+ \varphi_k \nearrow f} \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k(x)dx$ (良定)

$$= \sup_{\substack{\varphi \le f \\ \varphi \in S^+}} \int_E \varphi(x)dx$$

$f \in L'(E)$: $\int_E f(x)dx := \int_E f^+ - \int_E f^- = \begin{cases} f\in L'(E) & * - * \\ \infty & \infty - * \\ -\infty & * - \infty \\ \text{无定义} & \infty - \infty \end{cases}$

$f \in L'(E) \Leftrightarrow f^{\pm} \in L'(E) \Leftrightarrow |f| \in L'(E) \Leftrightarrow \int_E |f| < +\infty$

Lebesgue积分是绝对可积理论

2. $L'(E)$的简单性质

Lemma ($S^+(E)$的性质)

① 线性性　　② 单调性

③ 可积性：$f \in L'(E) \Leftrightarrow m[f>0] < +\infty$

④ 收敛性：$f_k \uparrow \; g_k \uparrow \; \lim_{k\to\infty} f_k \le \lim_{k\to\infty} g_k \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int_E f_k \le \lim_{k\to\infty}\int_E g_k$

① 线性：$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ f,g \in L'(E)$

② 单调性：$f \le g \Rightarrow \int_E f \le \int_E g \quad f,g \in L'(E)$

③ 三角不等式：$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx \quad f \in L'(E)$

④ 零测集：

(i) $f \in L'(E) \Rightarrow |f| \overset{a.e}{<} +\infty$

(ii) $\int_E f = 0 \Leftrightarrow f \xlongequal{a.e.} 0$

(iii) $f \in L'(E) \quad E = \bigsqcup_{j=1}^{m} E_j \quad E_j$ 可测 $\Rightarrow \int_E f = \sum_{j=1}^{m} \int_{E_j} f$

(iv) $f \in L'(E) \quad A \subset E$ 可测 $m(A)=0 \Rightarrow \int_A f = 0 \xRightarrow{③} \int_{E\setminus A} f = \int_E f$

(v) by (iv), $f \xlongequal{a.e} g$ 则 $\begin{cases} f \in L'(E) \Leftrightarrow g \in L'(E) \\ \int_E f \,\exists \Leftrightarrow \int_E g \,\exists \quad \text{且此时} \int_E f = \int_E g \end{cases}$

Remark　将$L'(E)$中a.e相等视作恒等，则 $L'(E)$构成Banach空间（赋范线性完备空间）

Def　L'收敛　$f_n \xrightarrow{L'} f$: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L'} = 0$

3. 交换次序的积分定理 (与测度的σ可加性等价)

$L^+(E)$ Levi单调收敛:

(1) $f_n\uparrow f \xRightarrow{f_n\in L^+(E)} \int_E f_n \uparrow \int_E f$

(2) $f_n\downarrow f \xRightarrow{f_n\in L^+(E)\cap L^1(E)} \int_E f_n\downarrow\int_E f$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n=\int_E\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$

$L^+(E)$ Fatou引理:

$$\int_E \varliminf_{n\to+\infty} f_n \overset{f_n\in L^+(E)}{\le} \varliminf_{n\to+\infty} \int_E f_n$$

$L^1(E)$ Lebesgue控制收敛:

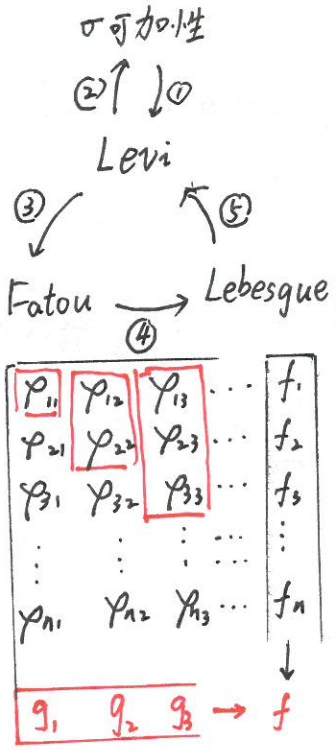
$$f_n \xrightarrow{a.e\ in\ E} f \xRightarrow[f_n\text{ 可测}]{|f_n|\le g\in L^1} f_n\xrightarrow{L^1(E)} f$$

e.p. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n=\int_E\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$

$L^+(E)\cup L^1(E)$ Fubini定理:(略)

Remark 1. "反例": $f_n(x)=\frac{|x|}{n}$, $\chi_{(n,n+1)}$, $n\chi_{(0,\frac1n)}$

("<"成立) $0=\int_{\mathbb R}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n < \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb R} f_n = \begin{cases}+\infty\\1\\1\end{cases}$ for $f_n(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{n}\\ \chi_{(n,n+1)}\\ n\chi_{(0,\frac1n)}\end{cases}$



2. $f\in L^1(\mathbb R)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_{|x|\ge n} f(x)dx=0$

控制条件 ⇒ 面积不会逃逸到∞

3. 我们按左图顺序证明各定理间的等价性

① Levi单调版本的对角化序列:

如左图, $\varphi_{ij}\in S^+(E)$ 对i↑, $g_j:=\max(\varphi_{1j},\cdots \varphi_{jj})\in L^+(E)\uparrow f$

$g_j\le f_j$, 则 $\int_E f=\lim\limits_{j\to+\infty}\int_E g_j\le\lim\limits_{j\to+\infty}\int_E f_j\le\int_E f$ 可证(1)

(2) $f_n\downarrow f \xRightarrow{\text{不妨设}f_1\text{实值}} f_1-f_n\uparrow f_1-f \xRightarrow{(1)} \int_E(f_1-f_n)\uparrow\int_E(f_1-f)$

$\xRightarrow{f_1\in L^1(E)} \int_E f_n\downarrow\int_E f$

② Levi单调收敛定理级数形式:

$\int_E\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{f_n\in L^+(E)}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_E f_n$ 取 $f_n=\chi_{A_n}$ 即可

③ $\int_E\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n=\int_E\lim\limits_{k\to+\infty}(\inf\limits_{n\ge k} f_n)\xRightarrow{Levi}\lim\limits_{k\to+\infty}\int_E\inf\limits_{n\ge k} f_n\le\varliminf\limits_{k\to+\infty}\int_E f_n$

④ $2g-|f_n-f|\in L^+(E)\xRightarrow{Fatou}\int_E\varliminf\limits_{n\to+\infty}(2g-|f_n-f|)\le\varliminf\limits_{n\to+\infty}\int_E(2g-|f_n-f|)$

$\Rightarrow 0=\int_E\varlimsup\limits_{n\to+\infty}|f_n-f|\ge\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\int_E|f_n-f|\Rightarrow f_n\xrightarrow{L^1}f$

⑤ 只证(1)。 $f\in L^1(E)$时 $|f_n|\le f\in L^1$

$f\notin L^1(E)$时 $\infty=\int_E f=\lim\limits_{j\to\infty}\int g_j\le\lim\limits_{j\to\infty}\int f_j$

Lemma: $g_k \xrightarrow{a.e.} g \quad g_k, g \in L^+(E) \cap L^1(E)$, 则 (Fatou: $g_k + g - |g_k - g|$)

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E g_k(x)dx = \int_E g(x)dx \Leftrightarrow g_k \xrightarrow{L^1} g$$

Thm (推广的Lebesgue控制收敛定理)

$$g_k \xrightarrow{a.e.} g \qquad g_k \xrightarrow{L^1} g \text{ (or } \lim_{k\to+\infty}\int_E g_k = \int_E g) \qquad |f_k| \le g_k$$

f_k可测 $f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Rightarrow f_k \xrightarrow{L^1} f$ (Fatou: $g_k + g - |f_k - f|$)

Thm (Fubini定理的级数形)

$$\int_E \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{f_n \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E f_n$$

注: $f_n \in L^1$ 是指 $f_n(x) := f(n,x) \in L^1(\mathbb{N} \times E) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |f_n(x)| dx < +\infty$

Proof. 只证 $f_n \in L^1$。 $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |f_n| < +\infty \overset{Levi}{\Longrightarrow} \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| < +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \in L^1(E) \overset{Lebesgue}{\Longrightarrow} \text{结论成立}$$

4. 可数 ⇒ 无穷: 含参量积分

含参量积分连续性:

若 f 关于 $t \in C[a,b]$ 关于 $x \in L^1(E)$ 且

控制可积: $|f(x,t)| \le g(x) \in L^1(E)$ 则 $\int_E f(x,t)dx \in C[a,b]$

含参量积分可微性:

若 $\frac{\partial f}{\partial t}$ ∃ $f, \frac{\partial f}{\partial t}$ 关于 $x \in L^1(E)$ 且

控制可积: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x) \in L^1(E)$ 则 $\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$

Borel-Cantalli 引理: $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty \overset{f_n \in L^1(E)}{\Longrightarrow} f_n \xrightarrow{a.e} 0$

抽象积分理论

1. Definition　测度空间 (X,Γ,μ)　可测函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$

抽象积分：四步走　$\chi_{A\in\Gamma} \xrightarrow[\text{代数}\quad\text{极限}]{S^+(X,\mu)\quad L^+(X,\mu)} L^1(X,\mu)$

Thm. $\forall f\in L^+(X,\mu)$, $\int_A f(x)d\mu(x)=\int_X f(x)\chi_A(x)d\mu(x)$

2. 交换次序积分定理

Levi单调收敛定理：$L^+(X,\mu)\ni f_k\nearrow f \Rightarrow \int_X f_k d\mu\nearrow\int_X f d\mu$

Fatou引理：$L^+(X,\mu)\ni f_k \Rightarrow \int_X \underline{\lim} f_k d\mu\le\underline{\lim}\int_X f_k d\mu$

Lebesgue控制收敛定理：$f_k\xrightarrow{\mu\ a.e}f$ 可测　$|f_k|\le g\in L^1(X,\mu)$

$\Rightarrow f_k\xrightarrow{L^1(X,\mu)}f$　e.p. $\lim\limits_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu=\int_X f d\mu$

3. Examples

(1)（计数测度）$(\mathbb{Z}_n,2^{\mathbb{Z}_n},\mu)$ 测度空间，其中

$\mathbb{Z}_n=\{1,2,\cdots n\}$　fix $\lambda_j\ge0$ s.t $\lambda_1+\cdots\lambda_n=1$　计数测度：$\mu^{\#}(\{j\}):=\lambda_j$

$\int_{\mathbb{Z}} f(x)d\mu(x) \overset{a_j=f(j)}{=\!=} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j$　积分＝权重为λ_j，对a_j的加权平均

(2)（离散测度）$(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$ 测度空间，其中 离散测度：$\mu(A):=\begin{cases}|A| & |A|<+\infty\\ +\infty & |A|\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$\int_{\mathbb{N}} f(x)d\mu(x) \overset{a_j=f(j)}{=\!=} \sum_{j=1}^{\infty}a_j$　积分＝级数（绝对收敛）

(3)（绝对连续测度）(X,Γ)可测空间　两个测度 ν,μ，$\nu(X)<+\infty$

Def　ν关于μ绝对连续，记为$\nu\ll\mu$ 若 $\forall A\in\Gamma$，$\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$

Thm　$\nu\ll\mu \Leftrightarrow \lim\limits_{\mu(A)\to0}\nu(A)=0$

(4)（$\mathbb{R}^n$上的绝对连续测度）$(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\mu)$ 测度空间，其中

固定 $f\in L^1(\mathbb{R}^n,m)$　$\mathbb{R}^n$上关于m的绝对连续测度：$\mu(A):=\int_A d\mu:=\int_A|f(x)|dm(x)$

$\int_E g(x)d\mu(x) \overset{\text{四步}}{=\!=} \int_E g(x)|f(x)|dm(x)$

Remark (i)与抽象绝对连续相容（$f=\chi_B$成立）$\lim\limits_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,k)}d\mu(x)=0$

(ii)关于积分限的可加性即关于绝对连续测度μ的σ可加性

(iii) $\mathbb{R}^n$上的测度＝绝对连续测度＋奇异测度

(iv)　函数 $\longrightarrow$ 测度 $\longrightarrow$ 广义函数

f　　fdm　　$(fdm)(g)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)dm(x)$

4. Jensen不等式　设(X,Γ,μ)为测度空间，$\mu(X)<+\infty$，有

$X\xrightarrow[f\in L^1(X,\mu)]{f}(a,b)\xrightarrow[\varphi\text{凸}]{\varphi}\mathbb{R} \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f(x)d\mu(x)\right)\le\frac{1}{\mu(X)}\int_X\varphi(f(x))d\mu(x)$

$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\varphi(a_j)$　"="成立$\Leftrightarrow \varphi|_{\mathrm{Im}f} \overset{a.e}{=\!=}$ 线性函数

Lebesgue 积分论(二)

1. 可积函数的建筑材料

$f\in L^1(E) \Leftrightarrow f\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 简化到 $L^1(\mathbb{R}^n)$

稠密性，Σ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密（记 $\overline{\Sigma}=L^1(\mathbb{R}^n)$），若

$$\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)\ \forall \varepsilon>0\quad \exists g\in\Sigma\ \text{s.t}\ \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$$

Main Theorem：下列函数族在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 稠密：

(1) 具有紧支集的 C^∞ 函数 (2) 具有紧支集的阶梯函数

其中 $n=1$ 时阶梯函数形如 $\sum_{i=0}^{n-1} b_i\chi_{(a_i,a_{i+1})}+\sum_{j=1}^{n-1}c_j\chi_{\{a_j\}}$ $n>1$ 时取直乘积

Proof $f\in L^1(\mathbb{R})\to$ 紧支集化 $\to$ 简单函数 $\to$ 连续函数 $\to$ 阶梯函数

Cor 1 $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ 分解 $f=f_1+f_2$ (好+小)，其中

$f_1\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (or 阶梯) $f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}<\varepsilon$

Cor 2. $f\in L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \exists$ 具有紧支集的 C^∞(阶梯)函数 g_k s.t $g_k\xrightarrow[a.e]{L^1} f$

注 $f_k\xrightarrow{L^1}f \underset{\not\Leftarrow\ n\chi_{[0,\frac{1}{n})}}{\overset{\text{chebyshev}}{\Longrightarrow}} f_k\xrightarrow{m}f \overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \exists$ 子列 $f_{k_n}\xrightarrow{a.e.}f$

Application 1. 积分的平均连续性（"积分是一种平均"）.

$$f\in L^1(\mathbb{R}^n)\Rightarrow \lim_{h\to0}\|f(x+h)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$$

Cor. $\forall$ ~~\#~~ $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，$\lim_{h\to0}m((E+h)\cap E)=m(E)$ (积分法)

Application 2. Riemann-Lebesgue 引理（线性空间+分解(好+小)）

$\|g_n\|_{L^\infty[a,b]}\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|g_n(x)|\le1$ $\forall x\in[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$，则

$$\forall f\in L^1[a,b]\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx=0 \Leftrightarrow \left(\overset{\forall c\in[a,b]}{\forall f=\chi_{[a,c]}}\right)\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx=0$$

Cor $\forall f\in L^1[0,2\pi]\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$

2. Lebesgue积分与Riemann积分关系

Main Theorem：(1) $R[a,b]\subset L^1[a,b]$ 且积分值相同

Lebesgue积分是Riemann积分的延拓
有界线性映照可以抽象延拓到完备线性映照上

(2) 设 $f\in R[0,+\infty)$*，则 $f\in L^1[0,+\infty)\Leftrightarrow |f|\in R[0,+\infty)$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}f(x)dm(x)=(R)\int_0^{+\infty}f(x)dx$$

绝对收敛的广义Riemann积分是Lebesgue可积的(反例：$\sum\frac{(-1)^n}{n}\chi_{[n,n+1)}$)

---

*$f\in R[0,+\infty)$：$\forall b>0$ $f\in R[0,b]$ 且 $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$ 存在有限

5. Fubini定理

Tonelli定理: $f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\overbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{f(x,y)}_{\text{slice a.e 可测}} dy}^{\text{可测}} \Big) dx$$

注: $f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \in L^+(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f(x,\cdot) \in L^+(\mathbb{R}^m) \quad$ a.e $x \in \mathbb{R}^n$

Fubini定理: $f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \cup L^1(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \Big) dx$$

注: $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f(x,\cdot)$ $\underset{x}{\text{a.e.}}$ 可测 $\quad f(x,y)$ $\underset{x,y}{\text{a.e}}$ 有限值

抽象积分理论中的Fubini定理:

(X,Γ_X,μ), (Y,Γ_Y,ν) 是 σ有限(可列的测度有限集合之并)的测度空间,

$f \in L^+ \cup L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$

$$\Rightarrow \int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \Big) d\mu(x)$$

注: **乘积测度** $(X\times Y, \Gamma_{X\times Y}, \mu\times\nu)$

$\Gamma_{X\times Y}$: 由 $\Gamma_X \times \Gamma_Y$ 生成的 σ代数 $\quad (\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\times\nu(B)$

$(X\times Y, \Gamma_{X\times Y}, \mu\times\nu)$ 可能非完备

特别地, 取 $(Y,\Gamma_Y,\nu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \text{计数测度})$, 则得到:

级数与积分交换次序的定理:

(X,Γ_X,μ) 是 **σ有限**的测度空间, $f \in L^+ \cup L^1(X\times\mathbb{N})$ $\quad f(x,n) := f_n(x)$

$$\Rightarrow \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x)$$

此时 $f \in L^1(X\times\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n(x)|\,d\mu(x) < +\infty$

微积分基本定理

本章的主旨在于按图索骥。我愿如庖丁解牛，
"手之所触，肩之所倚，足之所履，膝之所踦，
砉然向然，奏刀騞然，莫不中音。"
——《庄子·养生主》

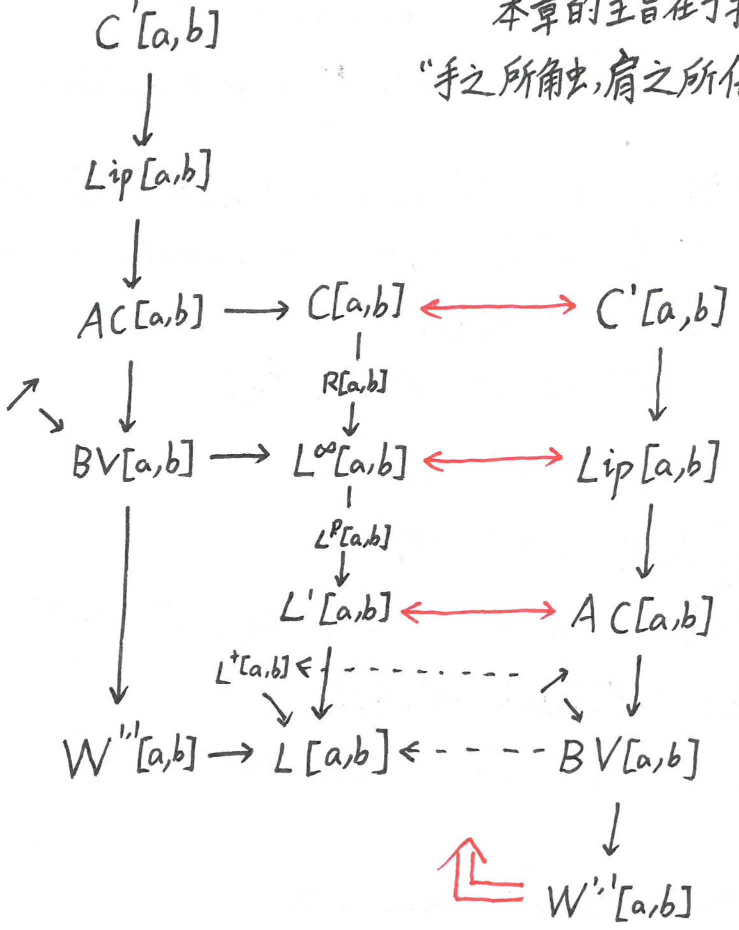


FIG 5-0

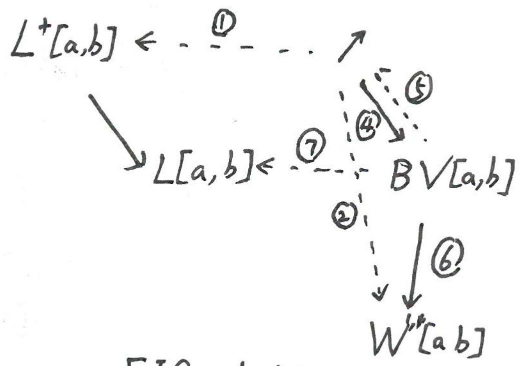


FIG 5-1,2

1. 单调函数 $\nearrow$

① Lebesgue 微分定理: $f:[a,b]\to\mathbb{R}\nearrow \Rightarrow f'$ a.e ∃有限

Lebesgue 定理: $f:[a,b]\to\mathbb{R}\nearrow \Rightarrow f'\in L^+\cap L^1[a,b]$, i.e ② $f\in W^{1,1}[a,b]$

(其中 $W^{1,1}[a,b]:=\{g:[a,b]\to\mathbb{R}\mid g'$ a.e. ∃ 且 $g'\in L^1[a,b]\}$)

③ $\nearrow \Rightarrow \int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a)$

注: 对于 Cantor 函数, "<"成立 (①非单)

Moreover, 取 $f=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\chi_{[r_n,1]}(x)$, 则 $f:[a,b]\to\mathbb{R}\nearrow$ $f'\overset{a.e}{=}0$.

Proof. For ①, $\overline{\lim_{h\to0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \overset{a.e}{\underset{(1)}{\le}}\ \underline{\lim_{h\to0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\le\overline{\lim_{h\to0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\ \overset{a.e}{\underset{(2)}{\le}}\ \underline{\lim_{h\to0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(3) $f'(x)\overset{a.e}{<}\infty$ (1)(2)(3)均需用 ~~Vit~~ Vitali 引理

For ②&③, $f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 在 $[a,b]$ 可测

$$\int_a^b f'(x)dx\ \underset{增值延拓}{\overset{Fatou}{\le}}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_a^b\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}dx\le f(b)-f(a)$$

2. 有界变差函数与全变差　$BV[a,b]$

(Bounded Variation) $BV[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid V_a^b f < +\infty\}$，其中

全变差 $V_a^b f := \sup\limits_{a=x_0<\cdots<x_n=b} \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$

注：1. $f\in BV[a,b] \Leftrightarrow Graph(f)$ 为可求长曲线

2. ④ $f\uparrow \Rightarrow V_a^b f = f(b)-f(a)$　　$f\in C[a,b] \Rightarrow V_a^b f = V_a^b |f|$

3. $f\in BV[a,b] \Rightarrow \forall c\in(a,b)$,　$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$

⑤ Jordan分解定理：$f\in BV[a,b] \Leftrightarrow \exists f_1, f_2:[a,b]\to\mathbb{R}\uparrow$ s.t. $f=f_1-f_2$

注意到 $V_a^x f$ 单调　e.p. 取 $f_1(x)=V_a^x f$　$\left(\begin{matrix} ②+⑤\Rightarrow⑥ \\ ①+⑤\Rightarrow⑦ \end{matrix}\right)$

注：$f\in BV[a,b]$，则 $|f'(x)| \overset{a.e.}{=} \frac{d}{dx}(V_a^x f)$

3. 绝对连续函数　$AC[a,b]$

(Absolute Continuity)

$AC[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid \lim\limits_{m(\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i))\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} |f(b_i)-f(a_i)| = 0\}$

注：① $C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]$　　$AC[a,b]\subset BV[a,b]$

② $C[a,b]$, $BV[a,b]$ 互不包含, e.g. $f\nearrow$ 与 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

③ Cantor 函数 $\in BV[a,b] \cup C[a,b] \setminus AC[a,b]$

Banach定理：$AC[a,b] = \{f\in BV\cap C[a,b] \mid f$ 保零测集$\}$

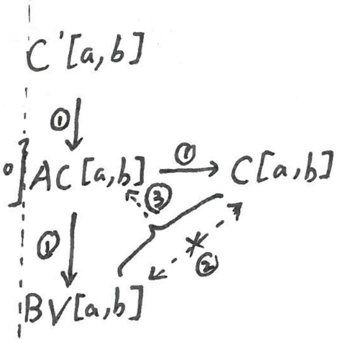


FIG 5-3

4. 微积分基本定理　$L^1[a,b]/\sim \;\leftrightarrow AC[a,b]/\mathbb{R}$

间奏：$L^1(X,\mu)$ 的性质刻画

可积函数的绝对连续性：$f\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim\limits_{m(E)\to 0} \left|\int_E f\,dx\right| = 0$

可积函数的平均连续性：$f\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$

i.e. $\lim\limits_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0$

Radon变换：设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{紧 K\subset\mathbb{R}^n} L^1(K)$，则

1. $f(x) \overset{a.e.}{=} \lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dm(y)$

2. $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dm(y) \overset{a.e.}{=} 0$

微积分基本定理：

Riemann：$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R}$

$\overset{推广}{\Longrightarrow}$ Lebesgue：$L^1[a,b]/\sim \;\underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R}$

(a.e.相等视为恒等)　　(相差常值函数视为恒等)

Lebesgue: (i) $f\in L^1[a,b] \Rightarrow \int_a^x f(t)dt \in AC[a,b]$ $\quad \left(\int_a^x f(t)dt\right)' \overset{a.e}{=\!=} f(x)$

(ii) $F(x)\in AC[a,b] \Rightarrow F'(x)$ a.e. $\exists$ 且 $F'\in L^1[a,b]$

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x)-F(a) \quad \forall x\in[a,b]$$

Lemma: $f\in AC[a,b]$，则 $f' \overset{a.e}{=\!=} 0 \Leftrightarrow f\equiv C$

Proof: fix $\varepsilon>0$ 取Vitali覆盖 $\Gamma_\varepsilon=\left\{[y_1,y_2]\subset(a,x_0)\,\middle|\, y_1<y_2, \left|\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}\right|<\varepsilon\right\}$

注. $f\in L^1[a,b] \Rightarrow f(x) \overset{a.e.}{=\!=} \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt$

Thm (Lebesgue点) $\quad f\in L^1[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt \overset{a.e}{=\!=} 0$

称等号成立的点为Lebesgue点 (Proof: Freezing Technique)

e.g. $\quad f\in L^1[a,b] \quad \forall n\in\mathbb{N} \ \int_a^b x^n f(x)dx=0 \Rightarrow f \overset{a.e.}{=\!=} 0$

Proof. 1 绝对连续函数对于乘法运算封闭

2. $F(x):=\int_a^x f \in AC[a,b]\subset W^{1,1}[a,b]$

$\Rightarrow F(a)=F(b)=0 \quad (t^nF(t))' \overset{a.e.}{=\!=} nt^{n-1}F(t)+t^nf(t)$

$\Rightarrow n\int_a^b t^{n-1}F(t)dt=0 \quad \Rightarrow \int_a^b F^2(t)dt=0$

$\Rightarrow F(t) \overset{a.e.}{=\!=} 0 \quad \overset{F连续}{\Longrightarrow} F\equiv 0 \quad \Rightarrow f \overset{a.e.}{=\!=} 0$

Thm. (AC判别法)

$$f\in AC[a,b] \xleftarrow[\cancel{\int_a^x |f'(t)|dt \le V_a^x f}]{|f(y)-f(x)| \overset{x<y}{\le} V_x^y f = V_a^y f - V_a^x f} V_a^x f\in AC[a,b]$$

$$f\in AC[a,b] \xrightarrow{\int_a^x |f'(t)|dt \le V_a^x f} V_a^x f=\int_a^x |f'(t)|dt \xrightarrow{微积分基本定理} V_a^x f\in AC[a,b]$$

$f\in W^{1,1}[a,b]$

5. Lipchitz 连续函数 $\quad Lip[a,b]$

$L^\infty[a,b]:=[a,b]$上有界可测函数全体

$Lip[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid \exists M>0, s.t$

$|f(y)-f(x)|\le M|y-x| \quad \forall x,y\in[a,b]\}$

则由定义可知 $L^\infty[a,b]/\sim \leftrightarrow Lip[a,b]/\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc}
C^1[a,b]/\mathbb{R} & \longleftrightarrow & C[a,b] \\
\cup & & \cup \\
\int_a^x R[a,b]/\mathbb{R} & \longleftrightarrow & R[a,b]/\sim \\
\cup & & \cup \\
Lip[a,b]/\mathbb{R} & \longleftrightarrow & L^\infty[a,b]/\sim \\
\cup & & \cup \\
AC[a,b]/\mathbb{R} & \longleftrightarrow & L^1[a,b]/\sim
\end{array}$$

FIG 5-5

e.g. $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0\end{cases} \quad \alpha,\beta>0$，则

$f\in BV[0,1] \Leftrightarrow f\in AC[0,1] \Leftrightarrow \alpha>\beta$

$f\in Lip[0,1] \Leftrightarrow \alpha\ge\beta+1$

e.g $\quad f\in Lip[0,1] \quad g\in AC[0,1] \quad Im\,g\subset[0,1] \Rightarrow f\circ g\in AC[0,1]$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\in AC[0,1] \quad g(x)=x^3\sin^3\frac{1}{x}\in C^1[0,1]\subset Lip[0,1]$

$\Rightarrow f\circ g(x)=x\sin\frac{1}{x}\in C[0,1]\setminus BV[0,1]$

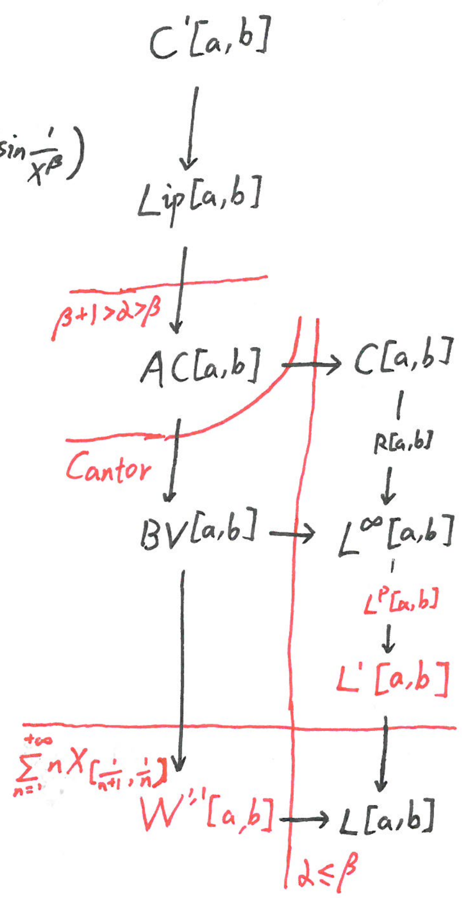
6. Fubini逐项微分定理

i) $\begin{cases} f_k:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\nearrow \\ \forall x\in[a,b]\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\text{收敛} \end{cases} \Rightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right)' \overset{a.e.}{=\!=} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$

ii) $\begin{cases} f_k\in AC[a,b] \\ \exists\, c\in[a,b]\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(c)\text{存在有限} \\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\int_a^b |f_k'|<+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k\in AC[a,b] \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k\right)' \overset{a.e}{=\!=} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k' \end{cases}$

7. 总结

右图所示空间均为线性空间，其中黑体字标注的空间为环。特殊函数（Cantor函数, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$, $x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}$）的确切位置已在右图中注明。



L^p空间

1. Definition 设$E\subset\mathbb{R}^n$可测 $p\in[1,+\infty]$

$L^p(E):=\{f\in L(E) \mid \|f\|_p<+\infty\}$，其中 a.e 相等视为恒等，且

$$\|f\|_p:=\|f\|_{L^p(E)}:=\begin{cases}\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & p<+\infty\\ \underset{x\in E}{\operatorname{ess\,sup}}|f(x)|:=\inf\limits_{m(Z)=0}\sup\limits_{x\in E\setminus Z}|f(x)| & p=+\infty\end{cases}$$

注：i) $p\neq+\infty$时，$f\in L^p(E)\Leftrightarrow f^p\in L^1(E)$ （前提：$f\in L(E)$）

ii) $\int_E|f(x)|dx\leq\|f\|_{L^\infty}m(E)$ $\qquad \lim\limits_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p(E)}\overset{m(E)<+\infty}{=\!=}\|f\|_{L^\infty(E)}$

2. 预备不等式（p,q 共轭指数，i.e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$）

$$\text{凸}\begin{cases}\to \text{Young} \longrightarrow \text{Hölder} \begin{cases}\longrightarrow \text{反向Hölder}\\ \searrow \text{Minkowski}\end{cases}\\ \to \text{均值}\end{cases}$$

Hölder $\downarrow$ Schwarz

名称	条件	结论	取等条件	关键证明步骤
均值	$p\in[1,+\infty)$ $a,b>0$	$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p\leq\frac{a^p+b^p}{2}$	$a=b$ or $p=1$	x^p凸
Young	$p,q\geq1$, $a,b\geq0$	$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$	$a^p=b^q$	$\log x$凸
Hölder	$p,q\geq1$	$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$	$\|f\|^p\overset{a.e}{=}\lambda\|g\|^q$ ~~$g\overset{a.e}{=}0$~~	$\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_1\leq1$
反向Hölder	$0<p<1$, $q<0$	$\|fg\|_1\geq\|f\|_p\|g\|_q$	或 $g\overset{a.e}{=}0$	$\|f\|^p=\|fg\|^p\|g\|^{-p}$
Schwarz(离散)	$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$	$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$	$a_1:a_2=b_1:b_2$	$L^2(X,\mu)$离散测度
Schwarz(连续)	$f,g\in L(\mathbb{R})$	$\int_E f^2dx\int_E g^2dx\geq\left(\int_E fg\,dx\right)^2$	$f\overset{a.e}{=}\lambda g$ or $g\overset{a.e}{=}0$	Hölder中$p=q=2$
Minkowski	$p\geq1$ $f,g\in L^p(\mathbb{R})$	$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$	$f\overset{a.e}{=}\lambda g$ $\lambda\in\mathbb{R}^+$ or $g\overset{a.e}{=}0$	拆项放缩
Chebyshev	$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,+\infty)$	$m[\|f\|\geq\varepsilon]\leq\left(\frac{\|f\|_p}{\varepsilon}\right)^p$	——	放缩即可

反向Hölder：$\|f\|_p^p=\int_E|fg|^p|g|^{-p}dx\underset{\tilde{q}=\frac{1}{1-p}}{\overset{\tilde{p}=\frac{1}{p}}{\leq}}\|f^pg^p\|_{\tilde{p}}\|g^{-p}\|_{\tilde{q}}=\frac{\|fg\|^p}{\|g\|_q^p}$

3. 主要定理：$p\in[1,+\infty]$ 则 $L^p(E)$为Banach空间：完备赋范线性空间（$p=+\infty$不证）

线性性：均值　赋范：① $\|f\|_p\geq0$ "="成立$\Leftrightarrow f\overset{a.e}{=}0$ ② $\|\lambda f\|_p=|\lambda|\|f\|_p$ ③ Minkowski

完备化：收敛 $f_k\xrightarrow{L^p}f$：$\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$

Cauchy列 $\{f_k\}$：$\lim\limits_{k,j\to\infty}\|f_k-f_j\|_p=0$

$L^p(\mathbb{R}^n)$完备：$L^p(\mathbb{R}^n)$中Cauchy列收敛

$$f_k\xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)}f\ \begin{cases}\xRightarrow[p<+\infty]{\text{chebyshev}} f_k\xrightarrow{m}f \Rightarrow \exists\text{子列} f_{k_n}\xrightarrow{a.e.}f\\ \xRightarrow{p=+\infty} f_k\xrightarrow{a.un}f\end{cases}$$

$f_k\xrightarrow{a.un}f \Rightarrow f_k\xrightarrow{m}f$

$\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset L^p(E)$ Cauchy

$\Downarrow$

$\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$依m Cauchy

$\Downarrow$

$f_k\xrightarrow{m}f$

$\Downarrow$

$f_{k_n}\xrightarrow{a.e}f$

4. L^p空间稠密性. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{稠}{\subset} L^p(\mathbb{R}^n)$ $p\in[1,+\infty)$

Proof. (不完全) 由积分绝对连续性，问题化到 $L^p(K)$, K紧

$\{P_Q \chi_{B(0,m)}\} \overset{稠}{\subset} \{$~~有理系数~~$P_Q\} \overset{稠}{\subset} \{多项式\} \overset{稠}{\subset} C(K) \overset{稠}{\subset} L^p(K) \overset{Hölder}{\subset} L^1(K)$ □

5. L^2空间是 Hilbert空间(完备内积空间)

内积 $\langle f,g\rangle = \int_E fg\,dx$ 诱导范数 $\|f\|_{L^2(E)}$, 还可定义垂直, 夹角

e.g. $\mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu)$ $l^2 = L^2(\mathbb{N}, d\mu)$ $L^2[0,2\pi]$ $L^2(\mathbb{R})$

可分Hilbert空间: 标正基 $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ 的势至多可数。考虑可数情形

$\forall f\in L^2(X,d\mu) \Rightarrow f = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k$ (lim定义: $\lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=1}^{n}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k - f\|_2 = 0$)

Parseval等式 $\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2$

e.g. $L^2[0,2\pi]$ 标正基 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ or $\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{k\in\mathbb{Z}} \hat{=} \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$\forall f\in L^2[0,2\pi]$

f的Fourier系数 $=\langle f,\varphi_k\rangle$

f的Fourier 级数 $=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k$

$L^2(\mathbb{R})$ 标正基 ~~$\{\frac{e^{isx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{s\in\mathbb{R}}$~~ $\{\frac{e^{isx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{s\in\mathbb{R}} \hat{=} \{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$

$\forall f\in L^2(\mathbb{R})$

f的Fourier变换 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-isx}dx$

f的Fourier逆变换 $=\int_{\mathbb{R}}\langle f,\varphi_s\rangle\varphi_s(x)ds$

增补

1. 注：a.e连续 $\neq$ 与连续函数a.e.相等 e.g. $\chi_{\mathbb{Q}}$. $\chi_{(0,+\infty)}$

   $|f|$可测 $\not\Rightarrow$ f可测 e.g. $\chi_{W}-\chi_{W^c}$

   e.p $|f|$可积 $\not\Rightarrow$ f可积 $f^2\in L^1[a,b] \not\Rightarrow f\in L^2[a,b]$

2. Radon-Nykodym定理：(X,Γ_X,μ) (X,Γ_X,ν)为σ有限测度空间

   $\mu(X)<+\infty$ $\mu\ll\nu$ $\Rightarrow \exists f\in L^+\cap L^1(X,\nu)$ s.t $d\mu=f d\nu$ i.e $\mu(A)=\int_A f d\nu$

3. Lindelöf定理：$\forall$开覆盖 $\exists$可列子覆盖

   Vitali定理：设 $E\subset\mathbb{R}$ $m^*(E)<+\infty$，Γ为E的Vitali覆盖

   $$\Rightarrow E\subset \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} I_j \sqcup Z \quad I_j\in\Gamma \quad m(Z)=0$$

   $$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad E\subset \bigsqcup_{j=1}^{n(\varepsilon)} I_j\sqcup E_\varepsilon \quad I_j\in\Gamma \quad m(E_\varepsilon)<\varepsilon$$

   其中E的Vitali覆盖Γ：非退化闭区间族 s.t $\forall x\in E$ $\inf\{|I|: x\in I\in\Gamma\}=0$

   注：1 Vitali覆盖是无穷小层次意义上的覆盖

   2. Vitali引理在$\mathbb{R}^n$中成立：闭区间$\longrightarrow$闭球 $|I|\to diag$(闭球)

   Proof ① $E\to$开集

   ② 贪婪算法 归纳选取I_{k+1} s.t $|I_{k+1}|>\frac{1}{2}\delta_k$

   其中 $\delta_k := \sup\{|I|: I\cap(I_1\cup\cdots\cup I_k)=\phi\}$

   ③ $E\setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k=N+1}^{+\infty} 5I_k$

4. $F\in C[a,b]$ ~~a.e.~~ F一阶可导 $F'\in L^1[a,b]$ $\Rightarrow F\in AC[a,b]$

5. $W^{1,1}[a,b]$的定义与PDE中有所差别，PDE中额外要求函数可积。