正多面体方程

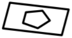
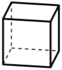
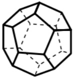
几何体	Z $c_2F_2^{v_2}$ 点	$Z-1$ $c_3F_3^{v_3}$ 线	1 $c_1F_1^{v_1}$ 面	辅助方程
旋转群[16]	z_1^n	$z_1^n - z_2^n$	z_2^n	$Z_1^{(n)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$
	$\left(\frac{z_1^n - z_2^n}{2}\right)^2$	$\left(\frac{z_1^n + z_2^n}{2}\right)^2$	$-(z_1z_2)^n$	$Z_2^{(n)} = -\frac{(Z_1^{(n)}-1)^2}{4Z_1^{(n)}}$
	Ψ^3 $z_1^4 - 2\sqrt{3}iz_1^2z_2^2 + z_2^4$	$-12\sqrt{3}it^2$ $z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$	Φ^3 $z_1^4 + 2\sqrt{3}iz_1^2z_2^2 + z_2^4$	$Z_3 = \left(\frac{Z_2^{(2)} + \omega_3^2}{Z_2^{(2)} + \omega_3}\right)^3$
	W^3 $z_1^8 + 14z_1^4x_2^4 + z_2^8$	χ^2 $z_1^{12} + z_2^{12}$ $-33(z_1^8z_2^4 + z_1^4z_2^8)$	$108t^4$ $z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$	$Z_4 = \frac{4Z_3}{(Z_3-1)^2}$
	H^3 $-(z_1^{20} + z_2^{20})$ $+228(z_1^{15}z_2^5 - z_1^5z_2^{15})$ $-494z_1^{10}z_2^{10}$	$-\mathcal{T}^2$ $(z_1^{30} + z_2^{30})$ $+522(z_1^{25}z_2^5 - z_1^5z_2^{25})$ $-10005(z_1^{20}z_2^{10} + z_1^{10}z_2^{20})$	$1728f^5$ $z_1z_2(z_1^{10} + 11z_1^5z_2^5 - z_2^{10})$	$Z_5 = -\frac{1}{1728}(Z_4' - 3)^3$ $\cdot(Z_4'^2 - 11Z_4' + 64)$

表 1: 正多面体对应方程

辅助方程

Remarks

1. 由于嵌入正十二面体的立方体为倾斜放置, 辅助方程为 Z_4', 与 Z_4 相差一个分式线性变换. 倾斜的立方体对应的 F_1, F_2, F_3 及其代数关系如下:

$256W'^3$	χ'^2	$135t'^4$
$W' = z_1^8 + z_2^8 - z_1z_2(z_1^6 - z_2^6)$ $+7z_1^2z_2^2(z_1^4 + z_2^4) + 7z_1^3z_2^3(z_1^2 - z_2^2)$	$\chi' = 11(z_1^{12} + z_2^{12}) - 84z_1z_2(z_1^{10} - z_2^{10})$ $-66z_1^2z_2^2(z^8 + z_2^8) - 220z_1^3z_2^3(z_1^6 - z_2^6)$ $+165z_1^4z_2^4(z_1^4 + z_2^4) - 264z_1^5z_2^5(z_1^2 - z_2^2)$ $-924z_1^6z_2^6$	$t' = z_1^6 + z_2^6$ $+2z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$ $-5z_1^2z_2^2(z_1^2 + z_2^2)$

2. 通过辅助方程, 除 $Z_5(z)$ 以外的其他方程均可解出, 且为根式解. 但是正十二面体所对应的最后一个辅助方程是 5 次方程!

预解式

Definition

我们称 $r \in K$ 相对于 *Galois* 扩张 K/k 的**预解式** *(resolution)* 为 r 的最小多项式 $R_{r,K/k}$.

假设预解式可解即相当于给出 r 的值。对 t' 齐次化，得到亚纯函数

$$u := \frac{12f^2}{\mathcal{T}} \cdot t'$$

计算得到 ($Z_5' := \{1728(1 - Z_5)\}^{-1}$)

$$R_{u,\mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T) := T^5 - 10Z_5' T^3 + 45{Z_5'}^2 T - {Z_5'}^2$$

被称作 **Brioschi 预解式**.

正二十面体方程 $\Longleftrightarrow$ 解 Brischi 预解式

$\Leftarrow$: 固定 $Z_5=\lambda_0$, 若给出 $R_{u,\mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T)=0$ 的一个解 $T=u_0$, 则得到

$$Z_4=\frac{t'^2}{f}=\frac{u^2\mathcal{T}^2}{144f^5}=12u^2(1-Z_5)$$

从而依次解出 $Z_4,Z_3,Z_2^{(2)},Z_1^{(2)},z$, 得到方程 $Z_5(z)=\lambda_0$ 的解.

$\Rightarrow$: 若给出正二十面体方程解，直接算出 u 即可。

方法：Jerrard-Bring 约化

记 $k = \mathbb{Q}[a_0, \ldots, a_4]$, 设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

其根记为 r_i. 对某个多项式 $t(T) \in k[T] \pmod{f(T)}$, 我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^{5}(T - t(r_i)) = T^5 + d_1T^4 + d_2T^3 + d_3T^2 + d_4T + d_5 \in k[T]$$

消去 a_4, a_3

设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

通过设 $x' = x + b_0$ 我们消去 a_4, 再通过设 $x' = x^2 + b_1x + b_0$ 消去 a_3, 得到

$$p(x) = x^5 - \sigma_3\alpha x^2 + \sigma_4 x - \sigma_5 = 0$$

消去 a_4, a_3

设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

通过设 $x' = x + b_0$ 我们消去 a_4, 再通过设 $x' = x^2 + b_1x + b_0$ 消去 a_3, 得到

$$p(x) = x^5 - \sigma_3\alpha x^2 + \sigma_4 x - \sigma_5 = 0$$

$p(x) = 0 \iff$ Brioschi 预解式

设原方程为

$$p(T) := T^5 - \sigma_3 T^2 + \sigma_4 T - \sigma_5$$

通过定义特定的多项式 $t(T) \in k[T] \pmod{p(T)}$(可通过线性代数、结式、对称多项式的计算算出), 我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^{5}(T - t(r_i)) = T^5 + d_3 T^3 + d_4 T + d_5 \in k[T]$$

放缩后得到 Brioschi 预解式.

例：$p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

对方程

$$p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

定义多项式 $t(T) = 510\,T^4 + 120\,T^3 + 240\,T^2 + 600\,T + 960$, 运用 Jerrard-Bring 约化，我们得到五次方程

$$q(T) = T^5 - 1782000\,T^3 + 1428985800000\,T - 636613173900000 = 0$$

取 $T' = \frac{2}{40095}T$, 则方程化为

$$T'^5 - \frac{320}{72171}T'^3 + \frac{5120}{578739249}T' - \frac{1024}{5208653241} = 0$$

此即为 $W = \frac{32}{72171}$ 的 Brioschi 预解式.