4.2 例 10 修正

周潇翔

2019 年 11 月 16 日

例题

证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n^{3/2}}=-\frac{1}{6}$$

[解答]

利用等式 $\ln\cos x=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=0$$

此时记 $a_n^{(k)}=\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}$, 则有

$$\lim_{\frac{k}{n^{3/2}}\to 0}\frac{\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}}{\dfrac{k^2}{n^3}}=0$$

这里的意思是，对任意的数列 (n_j,k_j) 满足 $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{k_j}{n_j^{3/2}}=0$，我们有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\cos\dfrac{k_j}{n_j^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k_j^2}{n_j^3}}{\dfrac{k_j^2}{n_j^3}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\ln\cos\dfrac{k}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{n^3}}{\dfrac{k^2}{n^3}}\right\}=0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_n^{(k)}}{\dfrac{1}{n}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}na_n^{(k)}=0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_n^{(k)}=0$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n^{3/2}}=-\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}a_n^{(k)}=-\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(1)=-\frac{1}{6}$$