

模形式和五次方程的解

周潇翔

指导老师: 许金兴

University of Science and Technology of China

2020 年 6 月 8 日

目录

- ① 正二十面体方程
- ② 模方程
- ③ 应用：解五次方程

目录

- 1 正二十面体方程
- 2 模方程
- 3 应用：解五次方程

代数

几何

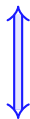
代数

几何

正多面体

代数

几何

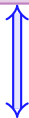


正多面体

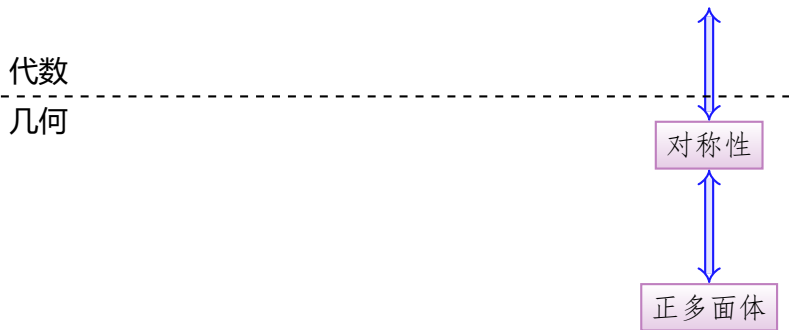
代数

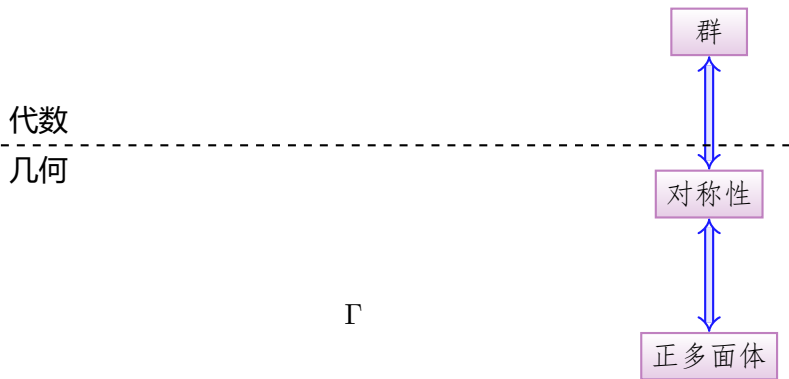
几何

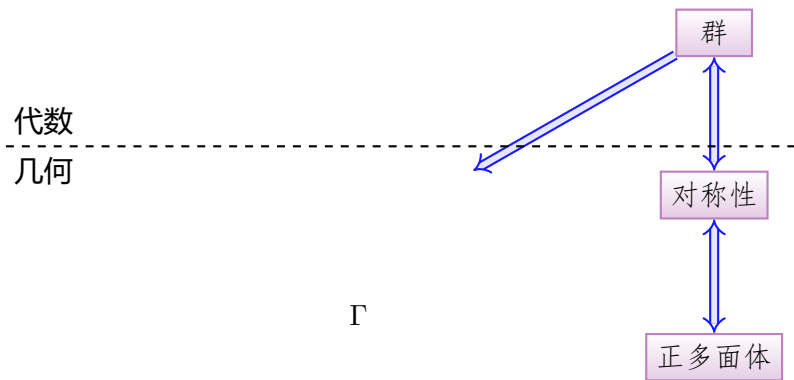
对称性

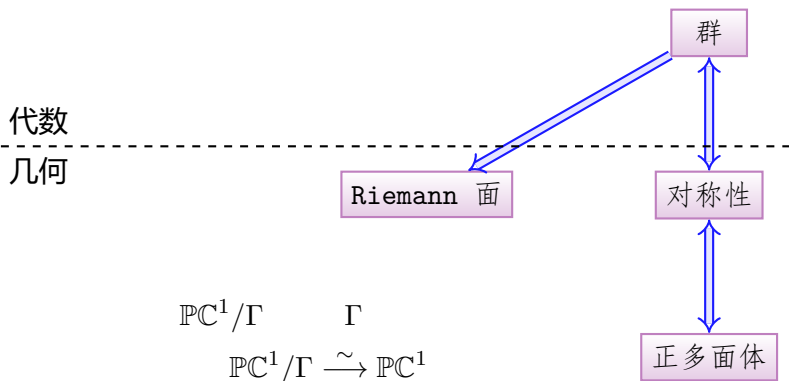


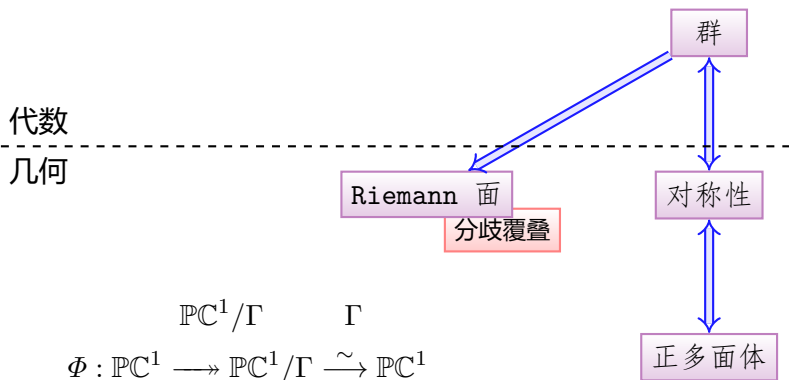
正多面体

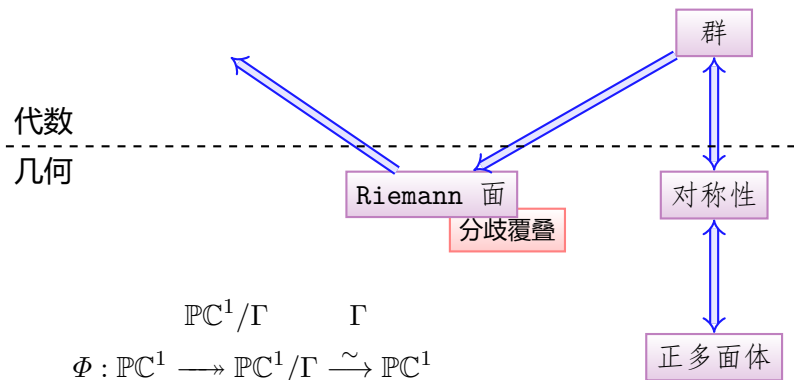


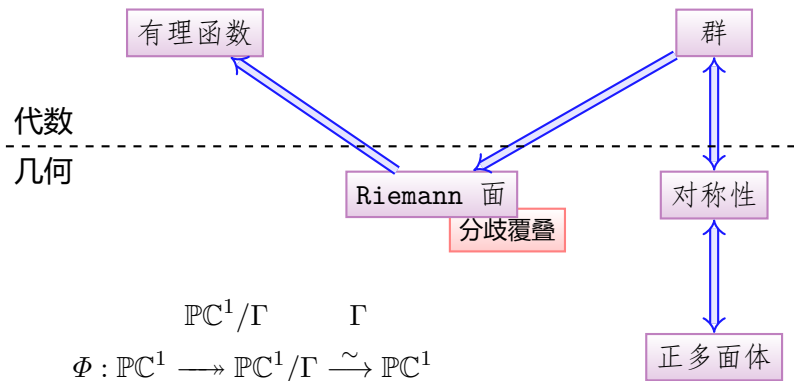


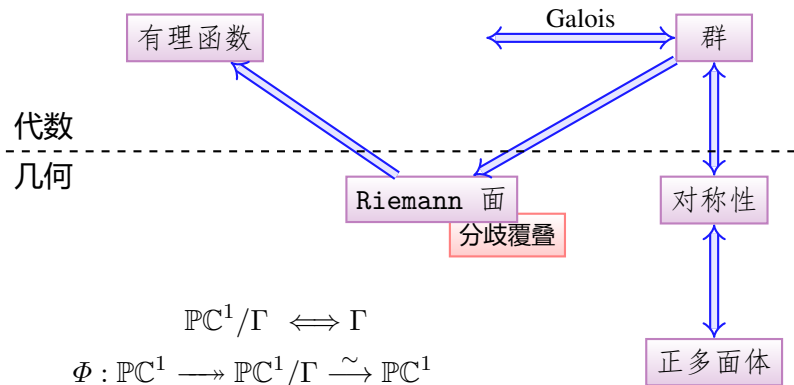


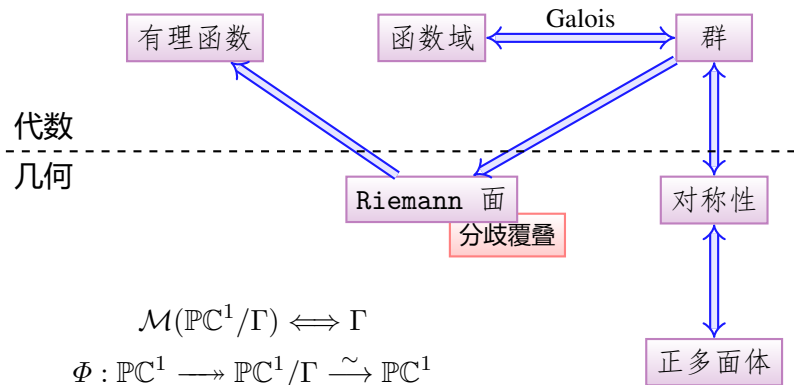


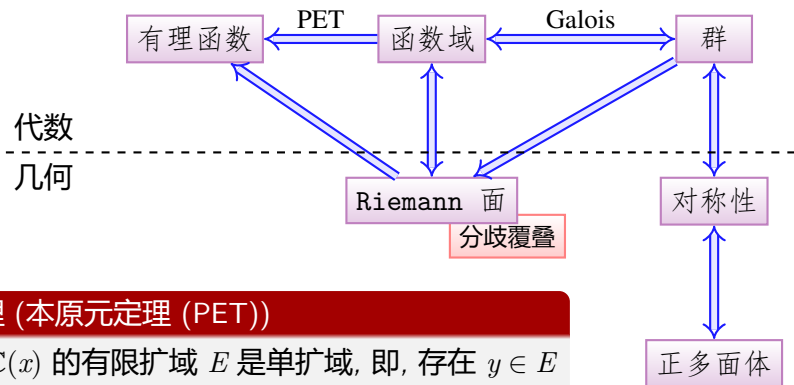






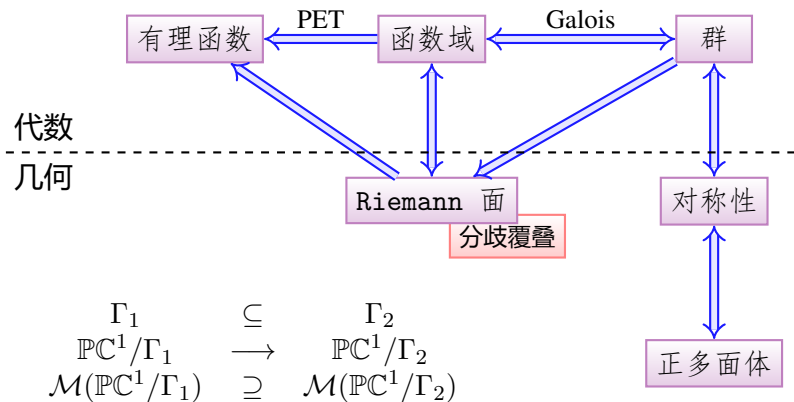






定理 (本原元定理 (PET))

域 $\mathbb{C}(x)$ 的有限扩域 E 是单扩域, 即, 存在 $y \in E$ 使得 $E = \mathbb{C}(x)(y)$.



一些结论

$$\Phi : \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\mathbb{C}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: ▶ process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728f^5} = \frac{\{-(z^{20} + 1) + 228(z^{15} - z^5) - 494z^{10}\}^3}{1728 \{z(z^{10} + 11z^5 - 1)\}^5}$$

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1} .

一些结论

$$\Phi : \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\mathbb{C}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: ▶ process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728f^5} = \frac{\{-(z^{20} + 1) + 228(z^{15} - z^5) - 494z^{10}\}^3}{1728\{z(z^{10} + 11z^5 - 1)\}^5}$$

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1} .

一些结论

$$\Phi : \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\mathbb{C}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: ▶ process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728f^5} = \frac{\{-(z^{20} + 1) + 228(z^{15} - z^5) - 494z^{10}\}^3}{1728 \{z(z^{10} + 11z^5 - 1)\}^5}$$

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1} .

正二十面体方程

Definition

称正二十面体方程为如下关于 z 的多项式方程

$$H(z)^3 - 1728\Phi_0 f(z)^5 = 0$$

这等价于方程 $\Phi(z) = \Phi_0$.

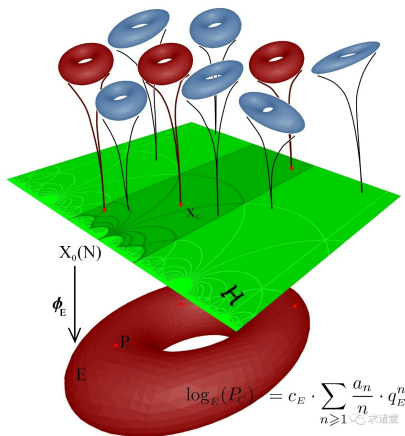
目录

- ① 正二十面体方程
- ② 模方程
- ③ 应用：解五次方程

符号解释

- $SL_2(\mathbb{Z}) :=$ 行列式为 1 的整系数矩阵构成的群;
- $\Gamma(N) :=$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\};$$
- 特别地, $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$;
- $\mathcal{H} :=$ 上半平面;
- $\mathcal{H}^* := \mathcal{H} \sqcup \mathbb{P}\mathbb{Q}^1$.

模空间



- $\mathcal{H}/\Gamma(1)$: 分类复环面;
- $\mathcal{H}/\Gamma(N)$: 分类复环面 + 复环面上的级结构.

$$\log_E(P_c) = c_E \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \cdot q_E^n$$

\mathbb{C}/Λ 与 $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$

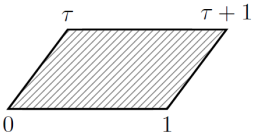
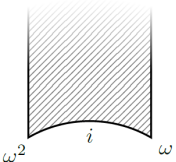
复环面 \mathbb{C}/Λ_τ	模空间 $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$
	
$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$	$M_*(\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$
椭圆函数	模形式
Weierstrass 函数	Eisenstein 级数

表 1: 复环面与模空间的比较

$\mathcal{H}/\Gamma(5)$: 基本区域

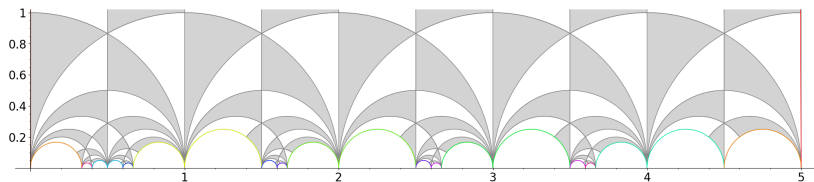
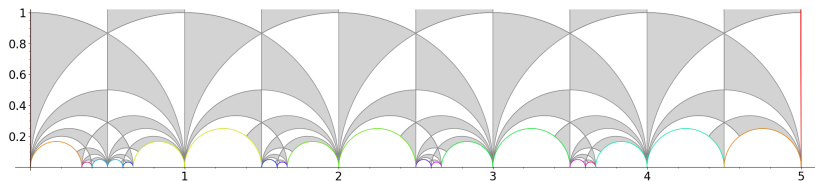
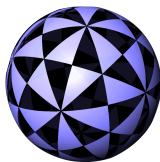


表 2: $\mathcal{H}/\Gamma(5)$ 的基本区域

$\mathcal{H}/\Gamma(5)$: 紧化



$$\Downarrow \hat{j}_5$$



$\mathcal{H}/\Gamma(7)$: 基本区域

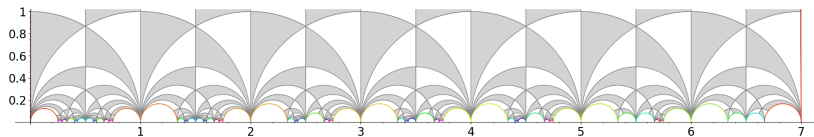
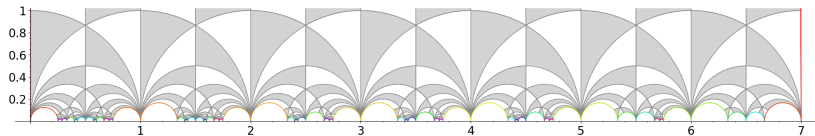


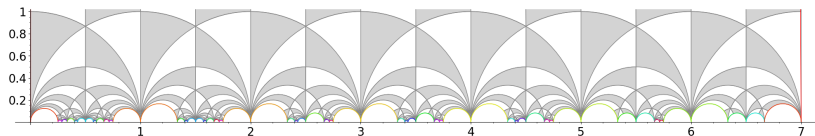
表 3: $\mathcal{H}/\Gamma(7)$ 的基本区域

$\mathcal{H}/\Gamma(7)$: Klein 四次曲线



$$\Downarrow \Phi$$


$\mathcal{H}/\Gamma(7)$: Klein 四次曲线



$$\Downarrow \Phi$$


目录

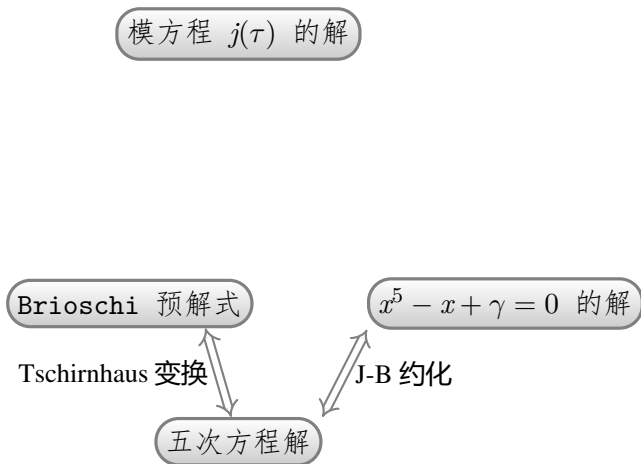
- 1 正二十面体方程
- 2 模方程
- 3 应用：解五次方程**

流程图

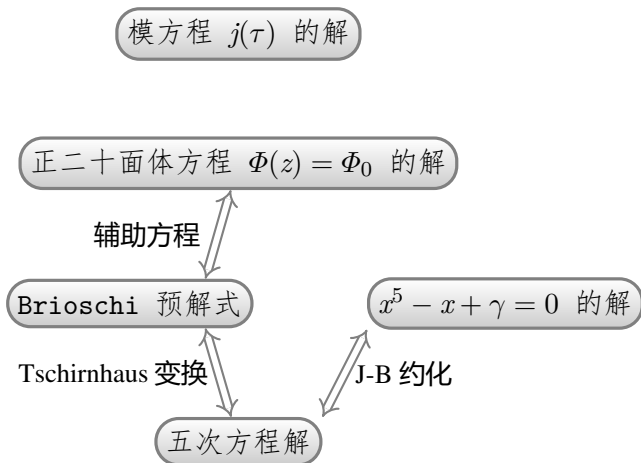
模方程 $j(\tau)$ 的解

五次方程解

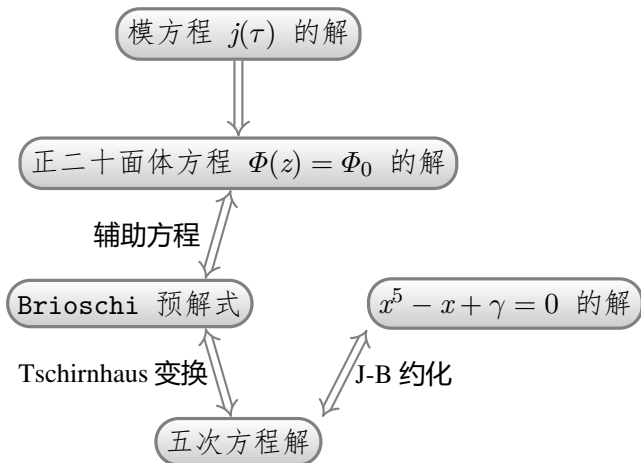
流程图



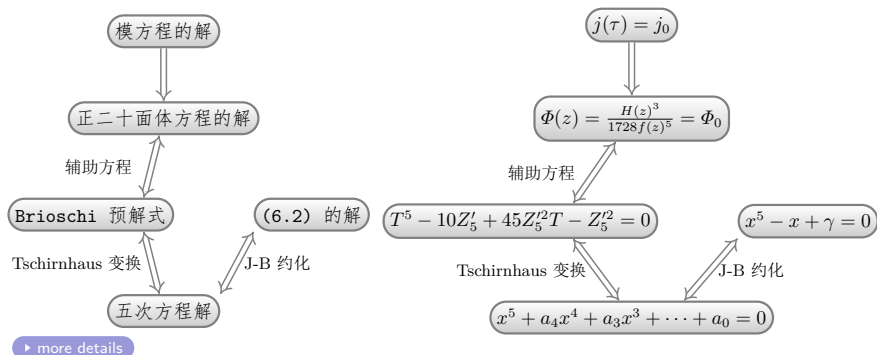
流程图



流程图



流程图



模方程解正二十面体方程

$$\text{记 } \Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

则有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^* & \xrightarrow{r} & \mathcal{H}^*/\Gamma(5) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{H}^*/\Gamma(1) \\ & & \sim \downarrow \hat{j}_5 & & \sim \downarrow \hat{j} \\ & & \mathbb{P}\mathbb{C}^1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \end{array}$$

$$(\Gamma(1)/\Gamma(5) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong \Gamma)$$

模方程解正二十面体方程

$$\text{记 } \Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

则有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^* & \xrightarrow{r} & \mathcal{H}^*/\Gamma(5) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{H}^*/\Gamma(1) \\ & & \sim \downarrow \hat{j}_5 & & \sim \downarrow \hat{j} \\ & & \mathbb{P}\mathbb{C}^1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \end{array}$$

$$(\Gamma(1)/\Gamma(5) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong \Gamma)$$

Thank You!

截影	不变量	经典模形式: θ 函数
函数	Φ	j, j_5
空间	$\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma$	$\mathcal{H}^*/\Gamma(N)$

正多面体方程





几何体	Z $c_2 F_2^{v_2}$ 点	$Z-1$ $c_3 F_3^{v_3}$ 线	1 $c_1 F_1^{v_1}$ 面	辅助方程
旋转群 ¹⁶	z_1^n	$z_1^n - z_2^n$	z_2^n	$Z_1^{(n)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$
	$\left(\frac{z_1^n - z_2^n}{2}\right)^2$	$\left(\frac{z_1^n + z_2^n}{2}\right)^2$	$-(z_1 z_2)^n$	$Z_2^{(n)} = -\frac{(Z_1^{(n)} - 1)^2}{4Z_1^{(n)}}$
	ψ^3 $z_1^4 - 2\sqrt{3}iz_1^2 z_2^2 + z_2^4$	$-12\sqrt{3}it^2$ $z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)$	ϕ^3 $z_1^4 + 2\sqrt{3}iz_1^2 z_2^2 + z_2^4$	$Z_3 = \left(\frac{Z_2^{(2)} + \omega_3^2}{Z_2^{(2)} + \omega_3}\right)^3$
	W^3 $z_1^8 + 14z_1^4 z_2^4 + z_2^8$	χ^2 $z_1^{12} + z_1^{12}$ $-33(z_1^8 z_2^4 + z_1^4 z_2^8)$	$108t^4$ $z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)$	$Z_4 = \frac{4Z_3}{(Z_3 - 1)^2}$
	H^3 $-(z_1^{20} + z_2^{20})$ $+228(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15})$ $-494z_1^{10} z_2^{10}$	$-\mathcal{T}^2$ $(z_1^{30} + z_2^{30})$ $+522(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25})$ $-10005(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})$	$1728f^5$ $z_1 z_2 (z_1^{10} + 11z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$	$Z_5 = -\frac{1}{1728}(Z_4' - 3)^3$ $\cdot (Z_4'^2 - 11Z_4' + 64)$

表 4: 正多面体对应方程

辅助方程

Remarks

- 由于嵌入正十二面体的立方体为**倾斜放置**, 辅助方程为 Z'_4 , 与 Z_4 相差一个分式线性变换. 倾斜的立方体对应的 F_1, F_2, F_3 及其代数关系如下:

$256W^3$	χ'^2	$135t'^4$
$W' = z_1^8 + z_2^8 - z_1 z_2 (z_1^6 - z_2^6)$ $+ 7z_1^2 z_2^2 (z_1^4 + z_2^4) + 7z_1^3 z_2^3 (z_1^2 - z_2^2)$	$\chi' = 11(z_1^{12} + z_2^{12}) - 84z_1 z_2 (z_1^{10} - z_2^{10})$ $- 66z_1^2 z_2^2 (z^8 + z_2^8) - 220z_1^3 z_2^3 (z_1^6 - z_2^6)$ $+ 165z_1^4 z_2^4 (z_1^4 + z_2^4) - 264z_1^5 z_2^5 (z_1^2 - z_2^2)$ $- 924z_1^6 z_2^6$	$t' = z_1^6 + z_2^6$ $+ 2z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4)$ $- 5z_1^2 z_2^2 (z_1^2 + z_2^2)$

- 通过辅助方程, 除 $Z_5(z)$ 以外的其他方程均可解出, 且为根式解. 但是正十二面体所对应的最后一个辅助方程是 5 次方程!

预解式

Definition

我们称 $r \in K$ 相对于 *Galois* 扩张 K/k 的**预解式** (resolution) 为 r 的最小多项式 $R_{r,K/k}$.

假设预解式可解即相当于给出 r 的值. 对 t' 齐次化, 得到亚纯函数

$$u := \frac{12f^2}{\mathcal{T}} \cdot t'$$

计算得到 ($Z'_5 := \{1728(1 - Z_5)\}^{-1}$)

$$R_{u, \mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T) := T^5 - 10Z'_5 T^3 + 45Z_5'^2 T - Z_5'^2$$

被称作 **Brioschi 预解式**.

正二十面体方程 \iff 解 Brischi 预解式

\Leftarrow : 固定 $Z_5 = \lambda_0$, 若给出 $R_{u, \mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T) = 0$ 的一个解 $T = u_0$, 则得到

$$Z_4 = \frac{t^2}{f} = \frac{u_0^2 \mathcal{T}^2}{144f^5} = 12u_0^2(1 - Z_5)$$

从而依次解出 $Z_4, Z_3, Z_2^{(2)}, Z_1^{(2)}, z$, 得到方程 $Z_5(z) = \lambda_0$ 的解.

\Rightarrow : 若给出正二十面体方程解, 直接算出 u 即可.

方法: Jerrard-Bring 约化

记 $k = \mathbb{Q}[a_0, \dots, a_4]$, 设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

其根记为 r_i . 对某个多项式 $t(T) \in k[T] \pmod{f(T)}$, 我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^5 (T - t(r_i)) = T^5 + d_1T^4 + d_2T^3 + d_3T^2 + d_4T + d_5 \in k[T]$$

消去 a_4, a_3

设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

通过设 $x' = x + b_0$ 我们消去 a_4 , 再通过设 $x' = x^2 + b_1x + b_0$ 消去 a_3 , 得到

$$p(x) = x^5 - \sigma_3\alpha x^2 + \sigma_4x - \sigma_5 = 0$$

$p(x) = 0 \iff$ Brioschi 预解式

设原方程为

$$p(T) := T^5 - \sigma_3 T^2 + \sigma_4 T - \sigma_5$$

通过定义特定的多项式 $t(T) \in k[T] \pmod{p(T)}$ (可通过线性代数、结式、对称多项式的计算算出), 我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^5 (T - t(r_i)) = T^5 + d_3 T^3 + d_4 T + d_5 \in k[T]$$

放缩后得到 Brioschi 预解式.

例: $p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

对方程

$$p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

定义多项式 $t(T) = 510T^4 + 120T^3 + 240T^2 + 600T + 960$, 运用 Jerrard-Bring 约化, 我们得到五次方程

$$q(t) = t^5 - 1782000t^3 + 1428985800000t - 636613173900000 = 0$$

取 $T' = \frac{2}{40095}t$, 则方程化为

$$T'^5 - \frac{320}{72171}T'^3 + \frac{5120}{578739249}T' - \frac{1024}{5208653241} = 0$$

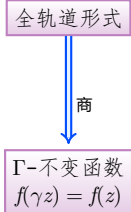
此即为 $W = \frac{32}{72171}$ 的 Brioschi 预解式. [▶ return](#)

寻找正多面体方程的流程

寻找正多面体方程的流程

$$\Gamma\text{-不变函数}$$
$$f(\gamma z) = f(z)$$

寻找正多面体方程的流程



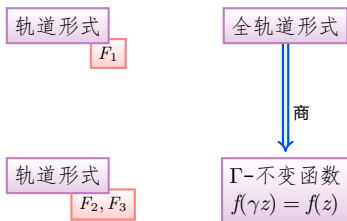
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [return](#)

寻找正多面体方程的流程



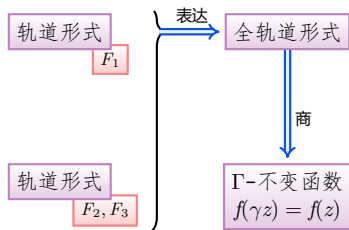
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [return](#)

寻找正多面体方程的流程



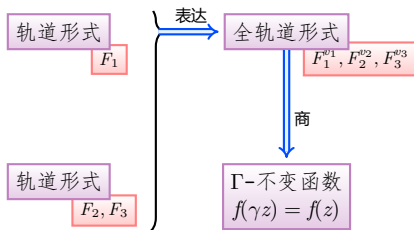
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [return](#)

寻找正多面体方程的流程



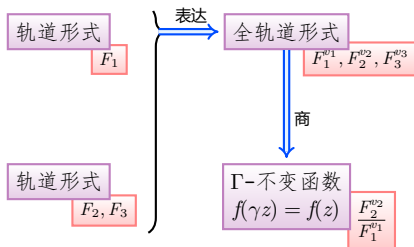
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [▶ return](#)

寻找正多面体方程的流程



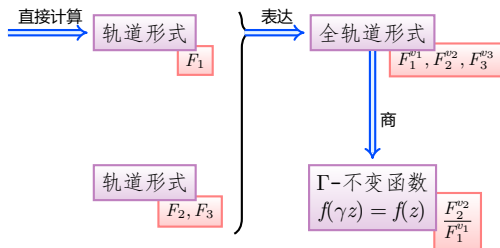
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [▶ return](#)

寻找正多面体方程的流程



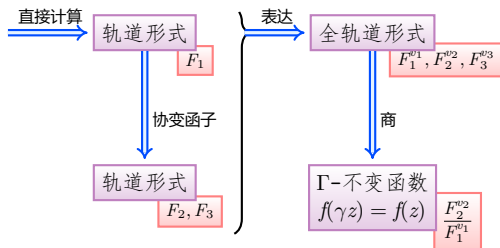
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [▶ return](#)

寻找正多面体方程的流程



Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \quad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. [▶ return](#)

$\mathcal{H}/\Gamma(N)$ 上的“函数”: θ -函数

Definition

我们定义带特征 $\chi := \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 的 θ -函数

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \tau + \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(z + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\}$$

注意到 θ -函数的良定性, 且分别关于 z, τ 全纯.

θ -函数的意义

参数	变化的对象	考虑的"函数"
z	复环面中的不同点	层上一个截影
τ	不同的复环面	模形式
χ	环面上不同的层	不同层上的截影

表 5: 参数所代表的几何意义

θ -函数的结论

定理 ([1, p218])

设 N 为奇素数, 对 $l = 0, \dots, \frac{N-3}{2}$, 取 $\chi_l := \begin{bmatrix} \frac{2l+1}{N} \\ 1 \end{bmatrix}$, 定义全纯函数

$$\varphi_l: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \tau \longmapsto \theta[\chi_l](0, N\tau)$$

则 φ_l 为级 $\Gamma(N)$ 权 $1/2$ 的模形式, 且具有相同特征 χ_k .

θ -函数的结论

定理 ([1, p218])

设 N 为奇素数, 对 $l = 0, \dots, \frac{N-3}{2}$, 取 $\chi_l := \begin{bmatrix} \frac{2l+1}{N} \\ 1 \end{bmatrix}$, 定义全纯函数

$$\varphi_l: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \tau \longmapsto \theta[\chi_l](0, N\tau)$$

则 φ_l 为级 $\Gamma(N)$ 权 $1/2$ 的模形式, 且具有相同特征 χ_k .

通俗地说, 对任意 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$, 函数 φ_l 均满足等式

$$\varphi_l(\gamma z) = \chi_k(\gamma)(cz + d)^{\frac{1}{2}} \varphi_l(z)$$

亚纯函数与射影嵌入

定理

对 $N = 5, 7$, $\varphi_l/\varphi_{l'}$ 为 $\mathcal{H}^*/\Gamma(N)$ 上的亚纯函数, 且我们有射影嵌入

$$\Phi : \mathcal{H}^*/\Gamma(N) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^{\frac{N-3}{2}} \quad \bar{\tau} \longmapsto \left[\varphi_0(\tau), \dots, \varphi_{\frac{N-3}{2}}(\tau) \right]$$

$$N = 5$$

我们有同构 (记 $\hat{j}_5 := \Phi$)

$$\hat{j}_5 : \mathcal{H}^* / \Gamma(5) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \quad \bar{\tau} \longmapsto [\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau)]$$

并且 \hat{j}_5 将 $\Gamma(1)\infty$ 映至正十二面体的 12 个面心顶点上, 将 $\Gamma(1)i$ 映至边点, 将 $\Gamma(1)\omega_3$ 映至顶点上. 这给出了我们之前需要的性质.

$$N = 7$$

我们有射影嵌入

$$\Phi : \mathcal{H}^* / \Gamma(7) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \quad \bar{\tau} \longmapsto [\omega_7^4 \varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)]$$

满足方程

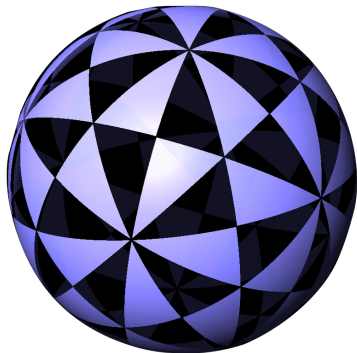
$$X^3 Y + Y^3 Z + Z^3 X = 0$$

故 $\mathcal{H}^* / \Gamma(7) \cong \text{Proj } \mathbb{C}[X, Y, Z] / (X^3 Y + Y^3 Z + Z^3 X)$, 称为 Klein 四次曲线.

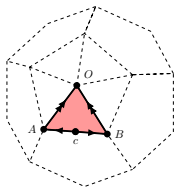
Klein 四次曲线还有其它的表达, 比如射影曲线 $Y^7 = X^2(X - 1)$. 它的对称性极强.

▶ return

多面体对应图像: 正十二面体/正二十面体



$$\Phi : \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\mathbb{C}^1$$



$$\begin{array}{cccc} \mathbb{P}^1 & A, B, \dots (12) & c, \dots (20) & O, \dots (30) \\ \downarrow 60 & \downarrow 3 & \downarrow 2 & \downarrow 5 \\ \mathbb{P}^1/\Gamma & 0 & 1 & \infty \end{array}$$

在 $0, 1, \infty$ 处分歧, 分歧指标为 $(2, 3, 5)$

- ▶ return



H. M. Farkas and I. Kra, *Theta Constants, Riemann Surfaces and the Modular Group: An Introduction with Applications to Uniformization Theorems, Partition Identities, and Combinatorial Number Theory*, vol. 37.

American Mathematical Soc., 2001.