练习题 2.11 2 参考格式

周潇翔

2021 年 9 月 9 日

例题

设 $A, B \in \mathbb{R}, A < B$, f 是 (a,b) 上的连续函数, 值在 (a,b) 中的数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b, \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B$$

证明：对于每一个 $\eta \in (A,B)$, 存在值在 (a,b) 中的数列 $\{z_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta$$

[解答]

对 $\forall \eta \in (A,B)$, 固定 $m \in \mathbb{N}$, 我们寻找 $z_m \in (b - \dfrac{1}{m}, b)$:
$\forall \varepsilon > 0$(这里令 $\varepsilon = \min\{\dfrac{B-\eta}{2}, \dfrac{\eta - A}{2}\}$),

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A\colon \exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_1, |f(x_n) - A| < \varepsilon && \Rightarrow f(x_n) < A + \varepsilon \\
&\lim_{n\to\infty} f(y_n) = B\colon \exists N_2 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_2, |f(y_n) - B| < \varepsilon && \Rightarrow f(y_n) > B - \varepsilon \\
&\lim_{n\to\infty} x_n = b\colon \exists N_3 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_3, |x_n - b| < \frac{1}{m} && \Rightarrow b - \frac{1}{m} < x_n < b \\
&\lim_{n\to\infty} y_n = b\colon \exists N_4 \in \mathbb{N}, s.t.\ \forall n > N_4, |y_n - b| < \frac{1}{m} && \Rightarrow b - \frac{1}{m} < y_n < b
\end{aligned}$$

令 $n_m = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1$, 则

$$\begin{cases} b - \dfrac{1}{m} < x_{n_m} < b \\ b - \dfrac{1}{m} < y_{n_m} < b \end{cases} \qquad f(x_{n_m}) < A + \varepsilon < \eta < B - \varepsilon < f(y_{n_m})$$

则由介值定理，存在 z_m 落于 x_{n_m} 与 y_{n_m} 之间 $(\Rightarrow z_m \in (b - \frac{1}{m}, b))$, 而 $f(z_m) = \eta$,
故我们找到了数列 $\{z_m\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} z_n = b, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \eta$$

.