思考题

周潇翔

摘要. 寒假列一些思考题.

1. Lie 代数方向

设 E 为 n 维内积空间. 我们称 E 中的容许集 M 为 E 中满足下列条件的集合：

- $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 为 E 的一组基, 且 $\|e_i\| = 1$.
- 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 我们有 $4(e_i, e_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

现对 E 中的某一个容许集 M, 我们可以按照如下方式构建图 Γ_M：

- 图的顶点取为 M 中的元素
- 两个顶点 e_i, e_j 之间的边数 $= 4(e_i, e_j)^2$

试确定所有可能的 Γ_M（更精确地说, 是在图的同构意义下确定. 思考：如何定义图的同构？）

Remark 1.1.

(1) 这道题需要你至少知道内积空间的知识（习题课讲过, 可见李尚志的最后一章）, 但是这道题较为开放, 且背后隐含着有限维半单 Lie 代数的分类理论, 完整的解答详见 [1, p58].
(2) 你可以试着从 $n = 1, 2, 3$ 开始做起. 这部分直观且结论相当漂亮.
(3) 这是毛天乐助教在线代习题课上给我们出的思考题, 留给我们寒假思考. 我还没有完整思考出来.

2. 发红包的题

打算给做出来下面这道题的同学一点小奖励。

2.1. 近世代数 ＋ 线性代数. 记

$$SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 24a+1 & b \\ 24c & 24d+1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

证明 A 为 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的子群, 并求 $(SL(2,\mathbb{Z}):A)$ 的值.

请将此值转换为中文并在其后添加“科大红包”即为支付宝的吱口令.

例如：如这个值为 2018, 则吱口令就为“二零一八科大红包”.

References

[1] James E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978, Second printing, revised. MR 499562

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China,

Email address: xx352229@mail.ustc.edu.cn