小测参考题目

周潇翔

2018 年 11 月 23 日

1 Exercise1

可以从以下任选一题.

1. 用极限来定义函数：$f(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-x^n}$

   请**直接**给出 f 的定义域, 并画出它的图像.

2. 填空：设 $a > 1$, 计算：

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x\ln a)\ln\left(\frac{\ln(ax)}{\ln(x/a)}\right) = \underline{\qquad}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}}{(n+1)(n+2)} = \underline{\qquad}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\cosh\frac{1}{n+\sqrt{\pi}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n+\pi}}}\right\}^{[\pi n]\left[\frac{12}{\pi}\arctan n\right]} = \underline{\qquad}$$

   其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 为双曲余弦.

3. 1) 已知数列 $\{2x_n + x_{n+1}\}$ 收敛, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

   2) 已知数列 $\{x_n + 2x_{n+1}\}$ 与 $\{x_n + 2x_{n+2}\}$ 收敛, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

4. 设 $f \in C[0,1]$, 且存在两两互异的点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0,1)$, 使得

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \beta$$

   求证: 对任意的 $\gamma \in (\alpha, \beta)$, 存在互异的两点 $x_5, x_6 \in (0,1)$, 使得

$$\gamma = \frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}$$

2 Exercise2

1. 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 为周期为 2π 的连续函数, 证明: 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+\pi) = f(x)$.

2. 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 满足:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad f(0) = 1$$
证明:

   1) 存在 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 使得 $f(\frac{1}{x}) = f(-x)$.

   2) 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x+\pi) = f(x)$.

3. 若对给定的 $f \in C[0,20]$, 定义集合
$$A_f = \{|x-y| \mid x, y \in [0,20], f(x) = f(y)\}$$
请问:

   1) 是否存在某个连续函数 $f \in C[0,20]$, 它所对应的集合为 $A_f = [0,\pi)$? 如果是, 请举出具体例子；如果不是, 请证明之.

   2) 是否存在某个连续函数 $f \in C[0,20]$, 它所对应的集合为 $A_f = [0,3] \cup [4,6] \cup [9,12]$? 如果是, 请举出具体例子；如果不是, 请证明之.

   3)(附加题) 若 $f(0) = f(\pi) = 0$, 是否一定有 $1 \in A_f$? 如果不是, 请举出具体例子；如果是, 请证明之.

注 1 *第二题的出发点来自代数拓扑中的 $Borsuk-Ulam$ 定理, 想强调 $\mathbb{R} \to S^1$ 的复叠映射和球极投影, 还有构造辅助函数的技巧.3.1) 的标准方法是找 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{k_n}\}$ 以及 $\{y_{k_n}\}$ 的收敛子列 $\{y_{l_n}\}$. 第 3 问第 3 小问我还没想出来对不对. 建议考试的时候将第 1 问及问第 3 问第 3 小问删去.*