模形式和五次方程的解

周潇翔

指导老师: 许金兴

University of Science and Technology of China

2020 年 6 月 17 日

目录

目录

代数

几何

代数

几何

正多面体

代数

几何

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{正多面体}}$

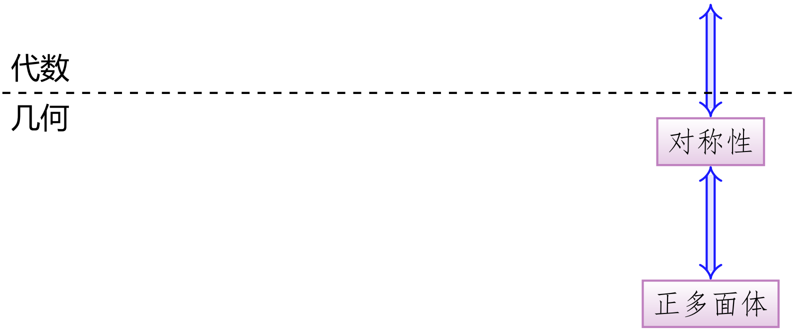
代数

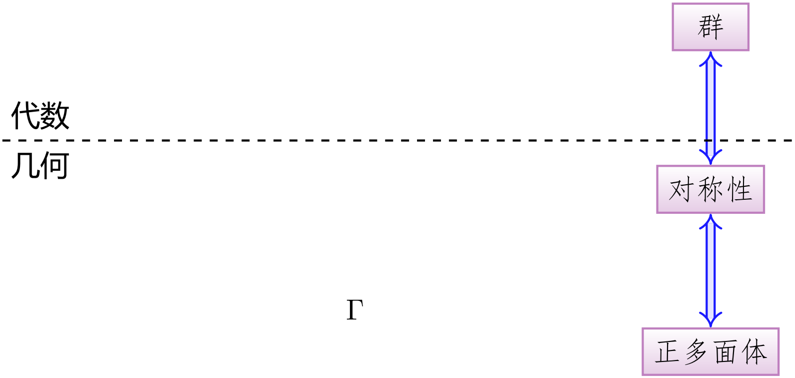
几何

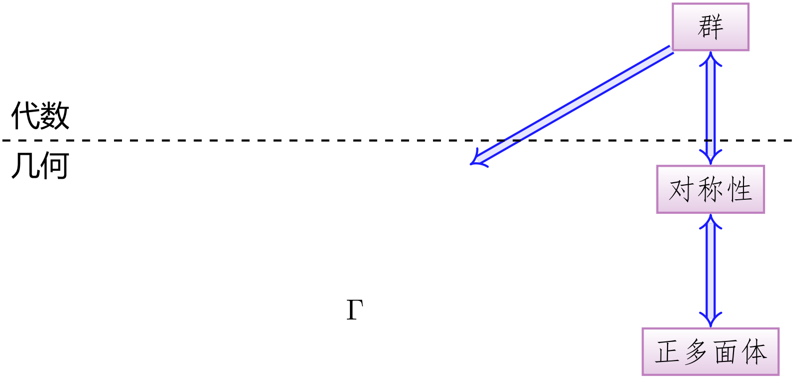
对称性

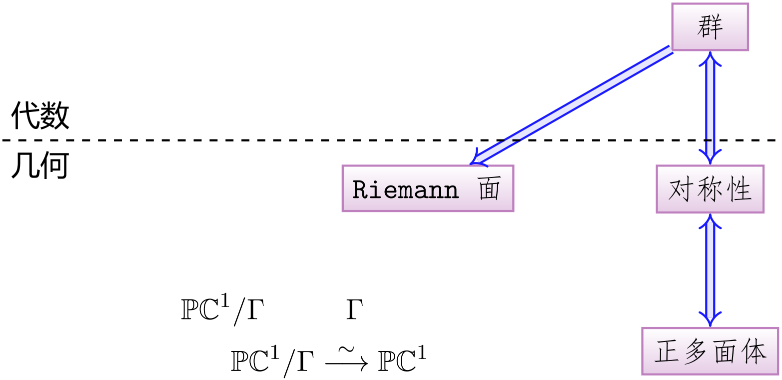
$\Updownarrow$

正多面体


代数
几何
对称性
正多面体


群
代数
几何
对称性
Γ
正多面体


群
代数
几何
对称性
Γ
正多面体

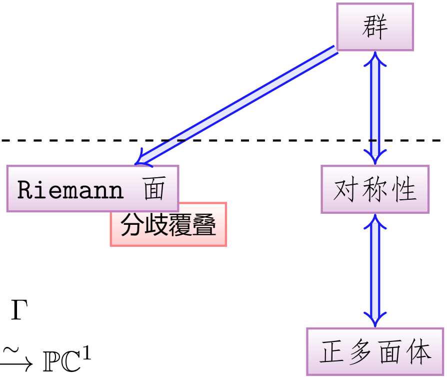


$$\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \qquad \Gamma$$

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\mathbb{C}^1$$

代数

几何



$$\mathbb{PC}^1/\Gamma \qquad\qquad \Gamma$$

$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$

群

代数

几何

Riemann 面

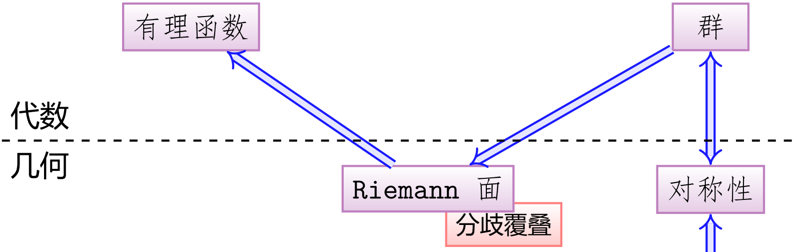
分歧覆叠

对称性

正多面体

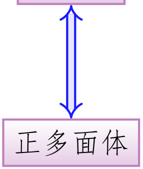
$$\mathbb{PC}^1/\Gamma \qquad \Gamma$$

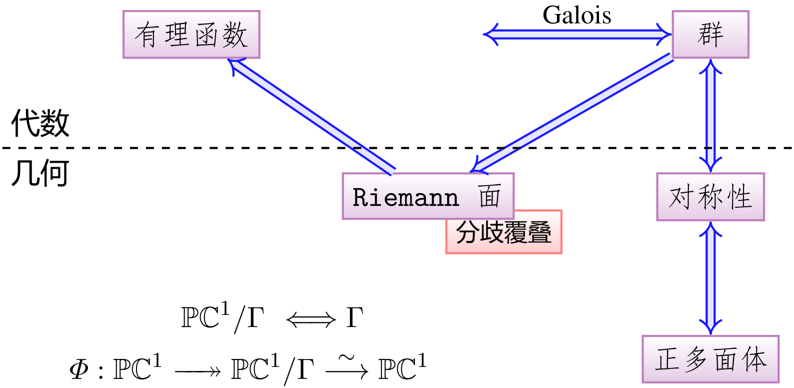
$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$



$$\mathbb{PC}^1/\Gamma \qquad \Gamma$$

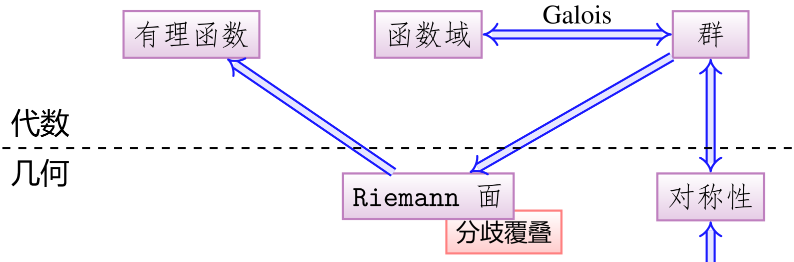
$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$





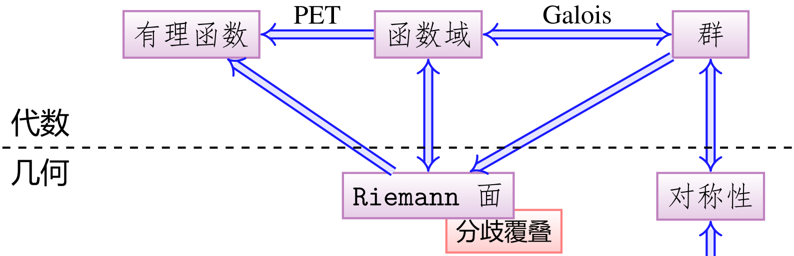
$$\mathbb{PC}^1/\Gamma \iff \Gamma$$

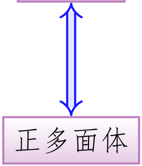
$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$



$$\mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma) \Longleftrightarrow \Gamma$$

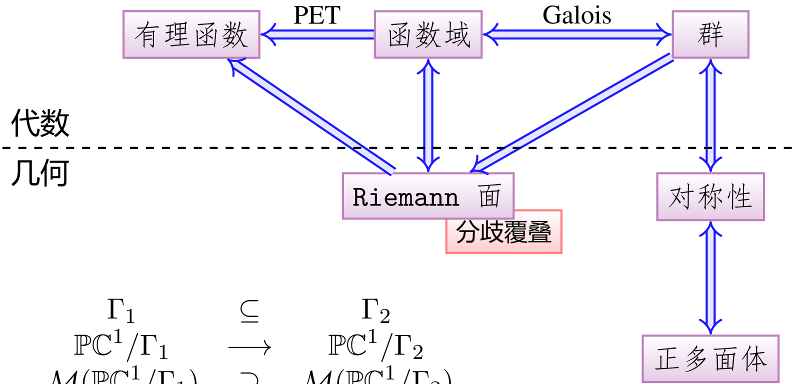
$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$





定理 (本原元定理 (PET))

域 $\mathbb{C}(x)$ 的有限扩域 E 是单扩域, 即, 存在 $y \in E$ 使得 $E = \mathbb{C}(x)(y)$.



$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma_1 & \subseteq & \Gamma_2 \\
\mathbb{PC}^1/\Gamma_1 & \longrightarrow & \mathbb{PC}^1/\Gamma_2 \\
\mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma_1) & \supseteq & \mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma_2)
\end{array}
$$

一些结论

$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728f^5} = \frac{\left\{-(z^{20}+1)+228(z^{15}-z^5)-494z^{10}\right\}^3}{1728\left\{z(z^{10}+11z^5-1)\right\}^5}$$

- $\mathbb{PC}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1}.

一些结论

$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728 f^5} = \frac{\left\{-(z^{20}+1) + 228(z^{15}-z^5) - 494 z^{10}\right\}^3}{1728\left\{z(z^{10}+11z^5-1)\right\}^5}$$

- $\mathbb{PC}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1}.

一些结论

$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$

对于正十二面体,

- Φ 的表达式: process

$$\Phi = \frac{H^3}{1728 f^5} = \frac{\left\{-(z^{20}+1) + 228(z^{15}-z^5) - 494 z^{10}\right\}^3}{1728\left\{z(z^{10}+11z^5-1)\right\}^5}$$

- $\mathbb{PC}^1/\Gamma$ 上的亚纯函数:

$$\mathcal{M}(\mathbb{PC}^1/\Gamma) = \mathbb{C}(\Phi)$$

- 可以分别从复分析和近世代数的角度描述 Φ^{-1}.

正二十面体方程

Definition

称正二十面体方程为如下关于 z 的多项式方程

$$H(z)^3 - 1728\Phi_0 f(z)^5 = 0$$

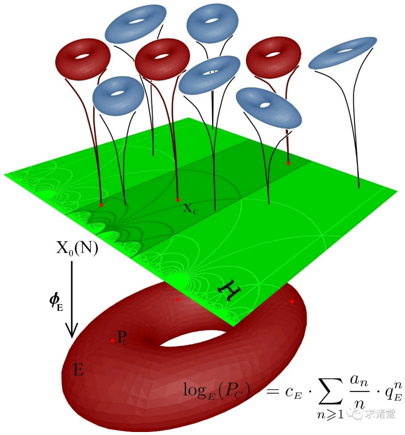
这等价于方程 $\Phi(z) = \Phi_0$.

目录

符号解释

- $SL_2(\mathbb{Z}) :=$ 行列式为 1 的整系数矩阵构成的群;
- $\Gamma(N) :=$ $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\};$
- 特别地, $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$;
- $\mathcal{H} :=$ 上半平面;
- $\mathcal{H}^* := \mathcal{H} \sqcup \mathbb{P}\mathbb{Q}^1$.

模空间



- $\mathcal{H}/\Gamma(1)$: 分类复环面;
- $\mathcal{H}/\Gamma(N)$: 分类复环面 + 复环面上的级结构.

$\mathbb{C}/\Lambda$ 与 $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$

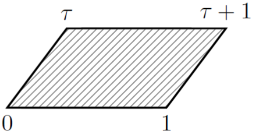
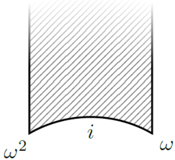
复环面 $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$	模空间 $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$
	
$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau)=\mathbb{C}(\wp,\wp')$	$\mathrm{M}_*(\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z}))=\mathbb{C}[E_4,E_6]$
椭圆函数	模形式
Weierstrass 函数	Eisenstein 级数

表 1: 复环面与模空间的比较

θ functions

$\mathcal{H}/\Gamma(5)$: 基本区域

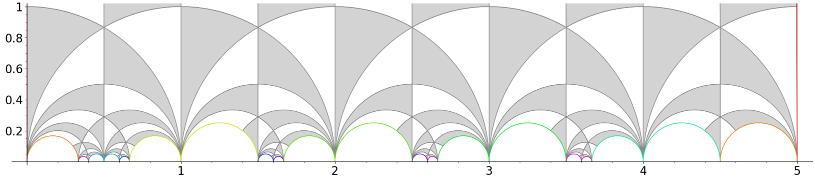
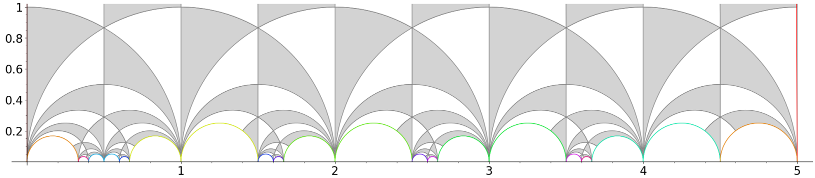
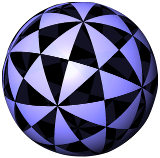


表 2: $\mathcal{H}/\Gamma(5)$ 的基本区域

$\mathcal{H}/\Gamma(5)$: 紧化



$$\Downarrow \hat{j}_5$$



$\mathcal{H}/\Gamma(7)$: 基本区域

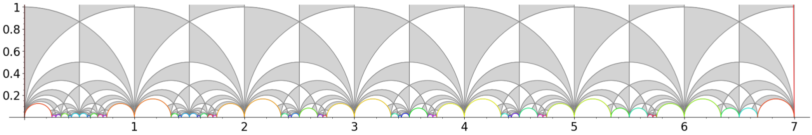
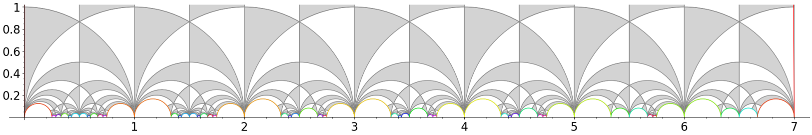


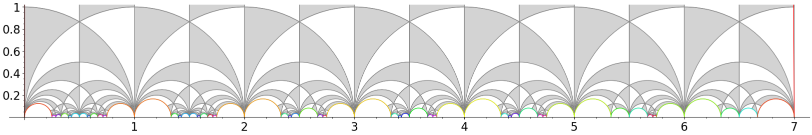
表 3: $\mathcal{H}/\Gamma(7)$ 的基本区域

$\mathcal{H}/\Gamma(7)$:Klein 四次曲线



$$\Downarrow \Phi$$

$\mathcal{H}/\Gamma(7)$:Klein 四次曲线



$$\Downarrow \Phi$$

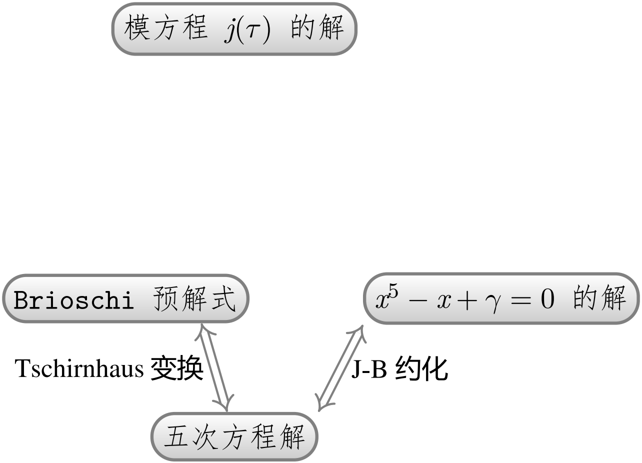
目录

流程图

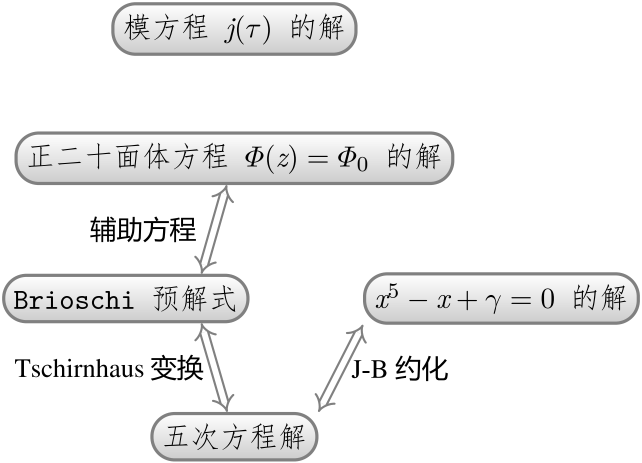
模方程 $j(\tau)$ 的解

五次方程解

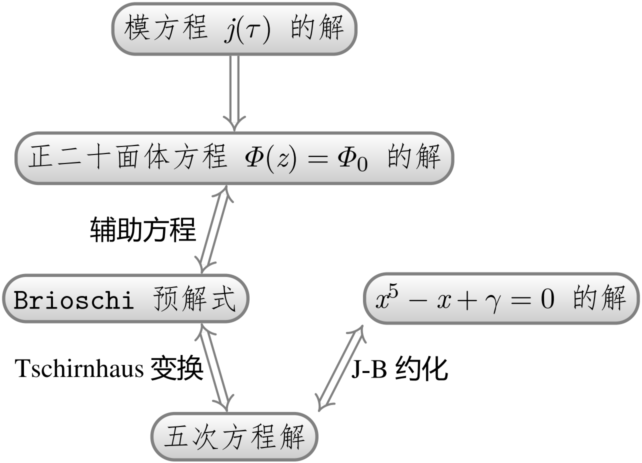
流程图


模方程 $j(\tau)$ 的解
Brioschi 预解式
$x^5 - x + \gamma = 0$ 的解
Tschirnhaus 变换
J-B 约化
五次方程解

流程图

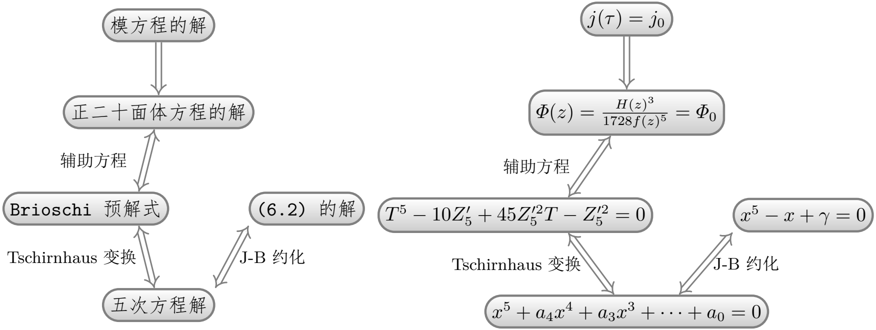

模方程 $j(\tau)$ 的解
正二十面体方程 $\Phi(z) = \Phi_0$ 的解
辅助方程
Brioschi 预解式
$x^5 - x + \gamma = 0$ 的解
Tschirnhaus 变换
J-B 约化
五次方程解

流程图



模方程 $j(\tau)$ 的解
正二十面体方程 $\Phi(z) = \Phi_0$ 的解
辅助方程
Brioschi 预解式
$x^5 - x + \gamma = 0$ 的解
Tschirnhaus 变换
J-B 约化
五次方程解

流程图



▸ more details

模方程解正二十面体方程

记 $\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}$

则有交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^* \arrow[r, "r"] & \mathcal{H}^*/\Gamma(5) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\hat{j}_5", "\sim"'] & \mathcal{H}^*/\Gamma(1) \arrow[d, "\hat{j}", "\sim"'] \\ & \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{P}\mathbb{C}^1/\Gamma \end{tikzcd}$$

$$\left(\Gamma(1)/\Gamma(5) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong \Gamma\right)$$

模方程解正二十面体方程

记 $\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}$

则有交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^* \arrow[r, "r"] & \mathcal{H}^*/\Gamma(5) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\hat{j}_5", "\sim"'] & \mathcal{H}^*/\Gamma(1) \arrow[d, "\hat{j}", "\sim"'] \\ & \mathbb{PC}^1 \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{PC}^1/\Gamma \end{tikzcd}$$

$$\left(\Gamma(1)/\Gamma(5) \cong PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong \Gamma\right)$$

Thank You!

截影	不变量	经典模形式:θ 函数
函数	Φ	j, j_5
空间	$\mathbb{PC}^1/\Gamma$	$\mathcal{H}^*/\Gamma(N)$

正多面体方程

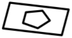
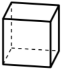
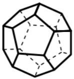
几何体	Z $c_2F_2^{v_2}$ 点	$Z-1$ $c_3F_3^{v_3}$ 线	1 $c_1F_1^{v_1}$ 面	辅助方程
旋转群[16]	z_1^n	$z_1^n - z_2^n$	z_2^n	$Z_1^{(n)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$
	$\left(\frac{z_1^n - z_2^n}{2}\right)^2$	$\left(\frac{z_1^n + z_2^n}{2}\right)^2$	$-(z_1z_2)^n$	$Z_2^{(n)} = -\frac{(Z_1^{(n)}-1)^2}{4Z_1^{(n)}}$
	Ψ^3 $z_1^4 - 2\sqrt{3}iz_1^2z_2^2 + z_2^4$	$-12\sqrt{3}it^2$ $z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$	Φ^3 $z_1^4 + 2\sqrt{3}iz_1^2z_2^2 + z_2^4$	$Z_3 = \left(\frac{Z_2^{(2)} + \omega_3^2}{Z_2^{(2)} + \omega_3}\right)^3$
	W^3 $z_1^8 + 14z_1^4x_2^4 + z_2^8$	χ^2 $z_1^{12} + z_2^{12}$ $-33(z_1^8z_2^4 + z_1^4z_2^8)$	$108t^4$ $z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$	$Z_4 = \frac{4Z_3}{(Z_3-1)^2}$
	H^3 $-(z_1^{20} + z_2^{20})$ $+228(z_1^{15}z_2^5 - z_1^5z_2^{15})$ $-494z_1^{10}z_2^{10}$	$-\mathcal{T}^2$ $(z_1^{30} + z_2^{30})$ $+522(z_1^{25}z_2^5 - z_1^5z_2^{25})$ $-10005(z_1^{20}z_2^{10} + z_1^{10}z_2^{20})$	$1728f^5$ $z_1z_2(z_1^{10} + 11z_1^5z_2^5 - z_2^{10})$	$Z_5 = -\frac{1}{1728}(Z_4' - 3)^3$ $\cdot(Z_4'^2 - 11Z_4' + 64)$

表 4: 正多面体对应方程

辅助方程

Remarks

- 由于嵌入正十二面体的立方体为**倾斜放置**, 辅助方程为 Z_4', 与 Z_4 相差一个分式线性变换. 倾斜的立方体对应的 F_1, F_2, F_3 及其代数关系如下:

$256W'^3$	χ'^2	$135t'^4$
$W' = z_1^8 + z_2^8 - z_1z_2(z_1^6 - z_2^6)$ $+7z_1^2z_2^2(z_1^4 + z_2^4) + 7z_1^3z_2^3(z_1^2 - z_2^2)$	$\chi' = 11(z_1^{12} + z_2^{12}) - 84z_1z_2(z_1^{10} - z_2^{10})$ $-66z_1^2z_2^2(z^8 + z_2^8) - 220z_1^3z_2^3(z_1^6 - z_2^6)$ $+165z_1^4z_2^4(z_1^4 + z_2^4) - 264z_1^5z_2^5(z_1^2 - z_2^2)$ $-924z_1^6z_2^6$	$t' = z_1^6 + z_2^6$ $+2z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)$ $-5z_1^2z_2^2(z_1^2 + z_2^2)$

- 通过辅助方程, 除 $Z_5(z)$ 以外的其他方程均可解出, 且为根式解. 但是正十二面体所对应的最后一个辅助方程是 5 次方程!

预解式

Definition

我们称 $r \in K$ 相对于 *Galois* 扩张 K/k 的**预解式** *(resolution)* 为 r 的最小多项式 $R_{r,K/k}$.

假设预解式可解即相当于给出 r 的值. 对 t' 齐次化, 得到亚纯函数

$$u := \frac{12f^2}{T} \cdot t'$$

计算得到 $(Z_5' := \{1728(1 - Z_5)\}^{-1})$

$$R_{u,\mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T) := T^5 - 10Z_5'T^3 + 45Z_5'^2T - Z_5'^2$$

被称作 **Brioschi 预解式**.

正二十面体方程 $\Longleftrightarrow$ 解 Brischi 预解式

$\Leftarrow$: 固定 $Z_5 = \lambda_0$, 若给出 $R_{u,\mathbb{C}(Z_4)/\mathbb{C}(Z_5)}(T) = 0$ 的一个解 $T = u_0$, 则得到

$$Z_4 = \frac{t'^2}{f} = \frac{u_0^2 \mathcal{T}^2}{144 f^5} = 12 u_0^2 (1 - Z_5)$$

从而依次解出 $Z_4, Z_3, Z_2^{(2)}, Z_1^{(2)}, z$, 得到方程 $Z_5(z) = \lambda_0$ 的解.

$\Rightarrow$: 若给出正二十面体方程解, 直接算出 u 即可.

方法：Jerrard-Bring 约化

记 $k=\mathbb{Q}[a_0,\dots,a_4]$，设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

其根记为 r_i. 对某个多项式 $t(T)\in k[T] \pmod{f(T)}$，我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^{5}(T-t(r_i)) = T^5+d_1T^4+d_2T^3+d_3T^2+d_4T+d_5 \in k[T]$$

消去 a_4, a_3

设原方程为

$$f(x) := x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

通过设 $x' = x + b_0$ 我们消去 a_4, 再通过设 $x' = x^2 + b_1x + b_0$ 消去 a_3, 得到

$$p(x) = x^5 - \sigma_3\alpha x^2 + \sigma_4 x - \sigma_5 = 0$$

$p(x)=0 \Longleftrightarrow$ Brioschi 预解式

设原方程为

$$p(T) := T^5 - \sigma_3 T^2 + \sigma_4 T - \sigma_5$$

通过定义特定的多项式 $t(T) \in k[T] \pmod{p(T)}$(可通过线性代数、结式、对称多项式的计算算出), 我们得到新的五次方程

$$q(T) := \prod_{i=1}^{5} (T - t(r_i)) = T^5 + d_3 T^3 + d_4 T + d_5 \in k[T]$$

放缩后得到 Brioschi 预解式.

例：$p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

对方程

$$p(x) = x^5 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

定义多项式 $t(T) = 510T^4 + 120T^3 + 240T^2 + 600T + 960$, 运用 Jerrard-Bring 约化, 我们得到五次方程

$$q(t) = t^5 - 1782000t^3 + 1428985800000t - 636613173900000 = 0$$

取 $T' = \frac{2}{40095}t$, 则方程化为

$$T'^5 - \frac{320}{72171}T'^3 + \frac{5120}{578739249}T' - \frac{1024}{5208653241} = 0$$

此即为 $W = \frac{32}{72171}$ 的 Brioschi 预解式. return

寻找正多面体方程的流程

寻找正多面体方程的流程

Γ-不变函数
$f(\gamma z) = f(z)$

寻找正多面体方程的流程

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{全轨道形式}} \arrow[d, Rightarrow, "\text{商}"] \\ \boxed{\begin{array}{c}\Gamma\text{–不变函数}\\ f(\gamma z)=f(z)\end{array}} \end{tikzcd}$$

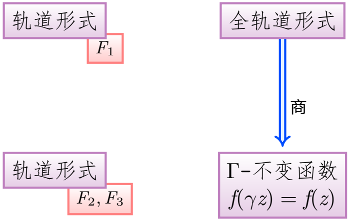
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma')F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

寻找正多面体方程的流程



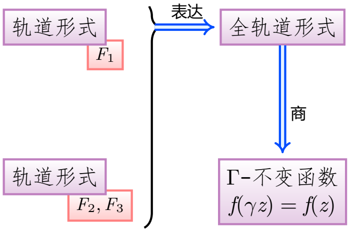
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma')F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

寻找正多面体方程的流程



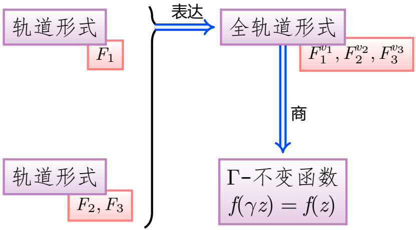
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma')F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. ▸ return

寻找正多面体方程的流程



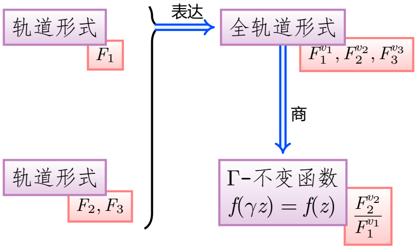
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma')F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

寻找正多面体方程的流程



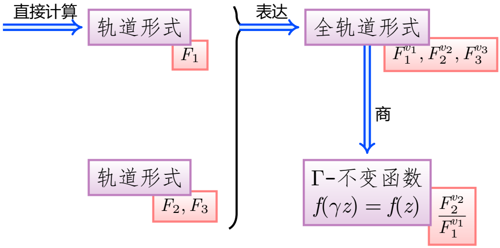
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

寻找正多面体方程的流程



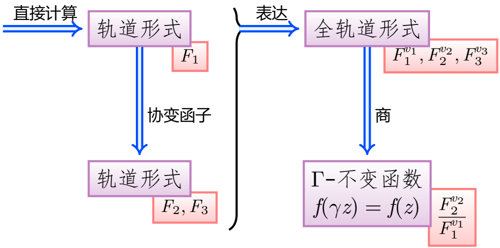
Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma')F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

寻找正多面体方程的流程



Definition (轨道形式)

我们称轨道形式 $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 为满足

$$F \circ \gamma' = \chi_F(\gamma') F \qquad \text{对任意 } \gamma' \in \Gamma'$$

的齐次多项式, 其中 $\chi_F : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ 为某个特征. return

$\mathcal{H}/\Gamma(N)$ 上的" 函数":θ-函数

Definition

我们定义带特征 $\chi := \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 的 θ-函数

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \tau + \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(z + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\}$$

注意到 θ-函数的良定性, 且分别关于 z, τ 全纯.

θ-函数的意义

参数	变化的对象	考虑的" 函数"
z	复环面中的不同点	层上一个截影
τ	不同的复环面	模形式
χ	环面上不同的层	不同层上的截影

表 5: 参数所代表的几何意义

θ-函数的结论

定理 ([1, p218])

设 N 为奇素数, 对 $l = 0, \dots, \frac{N-3}{2}$, 取 $\chi_l := \begin{bmatrix} \frac{2l+1}{N} \\ 1 \end{bmatrix}$, 定义全纯函数

$$\varphi_l : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \tau \longmapsto \theta[\chi_l](0, N\tau)$$

则 φ_l 为级 $\Gamma(N)$ 权 $1/2$ 的模形式, 且具有相同特征 χ_k.

θ-函数的结论

定理 ([1, p218])

设 N 为奇素数, 对 $l = 0, \dots, \frac{N-3}{2}$, 取 $\chi_l := \begin{bmatrix} \frac{2l+1}{N} \\ 1 \end{bmatrix}$, 定义全纯函数

$$\varphi_l : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \tau \longmapsto \theta[\chi_l](0, N\tau)$$

则 φ_l 为级 $\Gamma(N)$ 权 $1/2$ 的模形式, 且具有相同特征 χ_k.

通俗地说, 对任意 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$, 函数 φ_l 均满足等式

$$\varphi_l(\gamma z) = \chi_k(\gamma)(cz + d)^{\frac{1}{2}} \varphi_l(z)$$

亚纯函数与射影嵌入

定理

对 $N=5,7$, $\varphi_l/\varphi_{l'}$ 为 $\mathcal{H}^*/\Gamma(N)$ 上的亚纯函数, 且我们有射影嵌入

$$\Phi:\mathcal{H}^*/\Gamma(N)\longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^{\frac{N-3}{2}}\qquad \bar{\tau}\longmapsto\left[\varphi_0(\tau),\dots,\varphi_{\frac{N-3}{2}}(\tau)\right]$$

$N = 5$

我们有同构 (记 $\hat{j}_5 := \Phi$)

$$\hat{j}_5 : \mathcal{H}^*/\Gamma(5) \longrightarrow \mathbb{PC}^1 \qquad \bar{\tau} \longmapsto [\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau)]$$

并且 $\hat{j}_5$ 将 $\Gamma(1)\infty$ 映至正十二面体的 12 个面心顶点上, 将 $\Gamma(1)i$ 映至边点, 将 $\Gamma(1)\omega_3$ 映至顶点上. 这给出了我们之前需要的性质.

$N=7$

我们有射影嵌入

$$\Phi : \mathcal{H}^*/\Gamma(7) \longrightarrow \mathbb{PC}^1 \qquad \bar{\tau} \longmapsto [\omega_7^4\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)]$$

满足方程

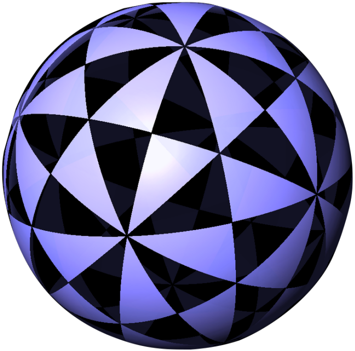
$$X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$$

故 $\mathcal{H}^*/\Gamma(7) \cong \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^3Y + Y^3Z + Z^3X)$, 称为 Klein 四次曲线.

Klein 四次曲线还有其它的表达, 比如射影曲线 $Y^7 = X^2(X-1)$. 它的对称性极强.

return

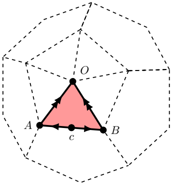
多面体对应图像: 正十二面体/正二十面体



return

例：正十二面体对应的分歧覆叠

$$\Phi : \mathbb{PC}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{PC}^1/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{PC}^1$$



$$\begin{array}{cccc} \mathbb{PC}^1 & A, B, \cdots (12) & c, \cdots (20) & O, \cdots (30) \\ \big\downarrow 60 & \big\downarrow 3 & \big\downarrow 2 & \big\downarrow 5 \\ \mathbb{PC}^1/\Gamma & 0 & 1 & \infty \end{array}$$

在 $0, 1, \infty$ 处分歧，分歧指标为 $(2, 3, 5)$

return

H. M. Farkas and I. Kra, *Theta Constants, Riemann Surfaces and the Modular Group: An Introduction with Applications to Uniformization Theorems, Partition Identities, and Combinatorial Number Theory*, vol. 37.
American Mathematical Soc., 2001.