二阶椭圆 PDE 作业

每一周

摘要

该作业集主要是方便问大家作业题怎么做打出来的, 因为之前很多作业都没有搞懂, 错误没有及时更正. 有漏的题目或者 typoes 感谢帮忙指出!

1 L^2 Estimate

练习 1.1

$n=2$ 时, 叙述和证明方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = -D_j(a_{ij}(x)D_i(u)) + c(x)u = f - D_i f^i & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

的弱极值原理.

hint 1. 可以使用 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$

练习 1.2

说明

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1) \Longleftrightarrow \alpha < \frac{n-p}{p}$$

练习 1.3

设 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 且具有紧支集,u 是方程

$$-\Delta u + c(u) = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

的弱解, 其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,c 是光滑函数且 $c(0)=0, c'(0) \geqslant 0$. 证明 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$

hint 2. 当 $c(u) = e^u - 1$ 时尝试解答, 再对其进行推广.

练习 1.4

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $c = c(\varepsilon) > 0$ 使得对于任意 $u \in H^2(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \varepsilon \|u\|_{H^2(\Omega)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

hint 3. 只需证

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\|D^2u\|_{L^2(\Omega)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

使用反证法. 若不对, 则对其进行规范化后取收敛的子序列.

2 Schauder Estimate

练习 2.1

设 $u \in C_0^\infty(B_R)$ 且在 B_R 上有 $\Delta u = f$, 则

(1)

$$\|u\|_{L^\infty(B_R)} \leqslant \frac{R^2}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_R)}$$

(2)

$$\|D_n u\|_{L^\infty(B_R)} \leqslant R\|f\|_{L^\infty(B_R)}$$

练习 2.2

设 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且在 $\mathbb{R}^n$ 上有 $-\Delta u = f$, 则对于任意 $R > 0$, 有

$$|D_i u(x)| \leqslant \frac{n}{R} \operatorname*{osc}_{B_R(x)} u + R \operatorname*{osc}_{B_R(x)} f$$

其中

$$\operatorname*{osc}_{B_R(x)} f = \sup_{B_R(x)} f - \inf_{B_R(x)} f$$

hint 4. 使用极值原理.

练习 2.3

设 $\varphi \in C^\alpha(\partial B_1) \quad (0 < \alpha < 1)$. 证明

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = \varphi & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

在 $C^2(B_1) \cap C^\alpha(\overline{B}_1)$ 上存在唯一解.

hint 5. 请直接使用 Poisson 公式验证.(后改为考虑 $n = 2$ or 3 的情况. 考虑使用匣函数.)

练习 2.4

取 $\beta >> 1$ 使 $W(x) = \rho^{-\beta} - |x-y|^{-\beta}$ 为闸函数.

练习 2.5

阅读第九章, 利用 Campanato 空间推导 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B_1 \\ u = 0, & x \in \partial B_1 \end{cases}$$

的 Schauder 内估计, 其中 $f \in C^{\alpha}(\bar{B}_1)$

3 L^p Estimate

练习 3.1

设 $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 的 C^1 函数,$\phi(0) = 0$.
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数, 设 $\phi(|f(x)|)$ 在 Ω 上可积, 利用 $\lambda_f(t)$ 表示积分

$$\int_{\Omega} \phi(|f(x)|) dx$$

练习 3.2

延拓 $T : L^1 \longrightarrow L^1_{\omega}$ 使得 T 为弱 $(1,1)$ 型.

练习 3.3

设 T 是弱 $(p,\bar{p})$ 型, 弱 $(q,\bar{q})$ 型, 其中

$$1 < p < q < +\infty \qquad 1 < \bar{p} < \bar{q} < +\infty$$

证明 T 是强 $(r,\bar{r})$ 型, 其中

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} \qquad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{\theta}{\bar{p}} + \frac{1-\theta}{\bar{q}} \qquad \theta \in (0,1)$$

练习 3.4

设 $u \in W^{2,p}(B_1^+) \cap W_0^{1,p}(B_1^+)$, 令

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n \geqslant 0 \\ -u(x', -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

试证:$\tilde{u} \in W_0^{2,p}(B_1)$.

练习 3.5

证明：如果 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$,Ω 具有内球性质/锥性质/$\Omega = B_0(1)$, 则

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha}\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

并指出 α 可能的一个取值.

练习 3.6

设 $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 是方程

$$-\Delta u + u^3 - u = 0$$

的解. 证明：$u \in C^\infty(\Omega)$.

4 De Giorgi-Nash Estimate

练习 4.1

设 $b^i \in L^\infty, c \in L^\infty, c \geqslant 0$. 对方程

$$-D_j(a^{ij} D_i u) + b^i D_i u + cu = f + D_i f^i$$

导出定理 2.3 的估计.

练习 4.2

设 $u \in W^{1,p}(B_R)(p > 1)$ 是方程

$$\nabla \cdot (a(x)|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

$(\lambda \leqslant a(x) \leqslant \Lambda)$ 的弱解, 证明局部极值原理.

练习 4.3

当 $n = 2$ 时, 证明引理 4.2.

练习 4.4

假设 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 且对某个 $p > 0$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx < +\infty$$

则在 $\mathbb{R}^n$ 上 $u \equiv 0$.

练习 4.5

证明定理 3.4.

5 Krylov-Safonov Estimate

练习 5.1

在定理 1.9 中设 $f \leqslant 0$, 直接证明 $\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+$

练习 5.2

设 $A \subset B \subset Q_1$ 满足

1. $|A| < \delta < 1$
2. 对于 $K_R(y) \subset Q_1$, 若
$$|A \cap K_R(y)| \geqslant \delta |K_R(y)|,$$
则
$$K_{3R}(y) \cap Q_1 \subset B$$

证明：$|A| \leqslant \delta |B|$

...