

拓扑与近世代数补充：PSet2

2019.3.24

1 有趣的群作用

设 $\{u, v\} \in \mathbb{C}$ 为 \mathbb{C} 的一组 \mathbb{R} -基, 考虑 $G := \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ 在 \mathbb{C} 上的群作用:

$$G \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (g, z) \longmapsto g + z$$

另外, 考虑

$$SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc = 1 \right\}$$

在上半平面

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$$

上的作用:

$$SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (\gamma, z) \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

试问这些作用对某个元素的稳定子群、作用的基本区域、商掉这些作用后得到的商空间 (取商拓扑) 拓扑同胚于什么? 是否是紧的?

Remark 1.1. 这两个群作用有一些关系, 如果有机会的话可以讲一下。另外可以讲一下格点的性质 (近世代数)。

2 矩阵群的性质

填表:

G	连通分支个数	紧性	中心	$G/Z(G)$ 是否为单群	极大环面
$GL_n(\mathbb{R})$					
$SL_n(\mathbb{R})$					
$O(n)$					
$SO(n)$					
$U(n)$					
$SU(n)$					
$GL_n(\mathbb{C})$					
$SL_n(\mathbb{C})$					

注：红色的是可补充内容。横向还可以加：标准型、切空间维数等。纵向可以加： $Sp(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{R})$, $O(p, q)$, $SL_n(\mathbb{Z})$, $PSL_n(\mathbb{R})$ 等等。