$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑

周潇翔

摘要. 介绍一个我大一时为了理解 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑概念而使用的一套方法, 这种方法也可以推广至一般的度量空间的情况, 不过还是在 $\mathbb{R}^n$ 中, 尤其是$\mathbb{R}$ 中显得最清楚. 这种方法对我开始时厘清概念起到相当大的帮助, 但之后便不会再用到, 所以可以将其视为"拓扑初级阶段".

在拓扑学中, 我们往往会对一个集合的子集感兴趣. 自然地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们会对 $\mathbb{R}^n$ 的子集感兴趣. 我们会如何来利用这个给定的集合, 分析它的性质呢?

Example 0.1. *观察集合 $E:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant x^2\}$ 可以直观地感觉到 $\mathbb{R}^2$ 被这个集合分成了 3 个部分：*

- *E 的内部 $E^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2\}$*
- *E 的边界 $\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$*
- *E 的外部 $(E^c)^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x^2\}$*

当然, 我们自然留下了许多无法解决的问题. 什么是 E 的内部、边界和外部? 为何我们就能将其恰好分成这三个部分? 为此, 我们需要剖析我们自己的直觉：我们是如何通过自己的直觉来辨别出这些元素的不同的? 如何将我们的这一点直观转换成严谨的数学语言?

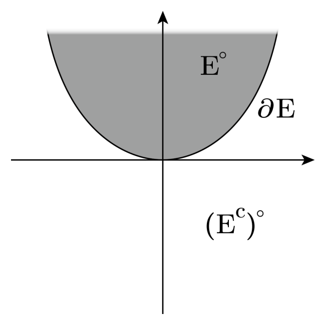


图 1. E

1. E 对 $\mathbb{R}^n$ 的分类

在这里, 我们想用集合 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 来将 $\mathbb{R}^n$ 分成几块. 有一个标准是既简单又直接的：按照点在不在集合 E 中, 先将 $\mathbb{R}^n$ 分成两大块：$\mathbb{R}^n=E\sqcup E^c$[1]

Exercise 1.1. *试从网上查阅 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 的定义, 将集合*

$$A=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{Z},0<p\leqslant q\leqslant 5\right\}$$

按照是否落在 $\mathcal{C}$ 中分为两类.

但这难以完全满足我们的需求. 我们看到我们对 $\mathbb{R}^n$ 中点的分类, 不止关注这个点的情况, 还在这个点附近的情况. 故我们引入点的空心球 (去心邻域)[2]的概念：

[1]这里 $\sqcup$ 表示无交并的意思, 有两层意义：1.(表并)$\mathbb{R}^n=E\cup E^c$; 2.(无交)$E\cap E^c=\varnothing$.

[2]实际的去心邻域的概念更广, 不过我们也不涉及.

图 2. 生成 Cantor 集的最初几步

Definition 1.1 (空心球)**.** *我们称*

$$B_r(\check{\boldsymbol{a}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$$

为以 $\boldsymbol{a}$ *为球心, 以* $r > 0$ *为半径的*空心球 *(open ball of radius r around a)*.

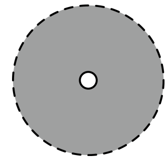


图 3. 空心球

事实上, 一个足够小的空心球能够充分地体现一个点附近的情况.[3]下面的定义是为了叙述方便使用, 用过后可以直接忘却即可.

Definition 1.2 (被 E 包围)**.** *我们称点* $\boldsymbol{a}$ *被* E *包围, 是指存在* $r > 0$, *使得* $B_r(\check{\boldsymbol{a}}) \subseteq E$[4].

Corollary 1.3. *点* $\boldsymbol{a}$ *被* E^c *包围, 当且仅当存在* $r > 0$, *使得* $B_r(\check{\boldsymbol{a}}) \subseteq E^c$

容易看出对于一个给定的点 $\boldsymbol{a}$, 这两种情况不会同时发生 (作为练习). 我们将其余的情况划为第三类, 这样我们就成功地从另一种角度 (点附近的情况) 来将 $\mathbb{R}^n$ 中的点集分类.

Exercise 1.2. *按照被* E *包围、被* E^c *包围和其他情况将* ***Example 0.1*** *中的* $\mathbb{R}^2$ *分为三类.*

在介绍开集闭集这些概念之前, 我们先来深入探讨下“被 E 包围”相关的等价叙述.

Definition 1.4 (聚点[5])**.** *我们称* a *为* E *的*聚点 *(accumulated point)**(凝聚点, 极限点), 如果对任意* $r > 0$, *总存在* $x \in E$, *使得* $x \in B_r(\check{\boldsymbol{a}})$.

聚点有许多等价的定义, 兹列举如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \text{ 为 } E \text{ 的聚点} &\Leftrightarrow \text{对任意 } r > 0, \text{总存在 } x \in E, \text{使得 } x \in B_r(\check{\boldsymbol{a}}) \\ &\Leftrightarrow \text{对任意 } r > 0, B_r(\check{\boldsymbol{a}}) \cap E \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \text{存在不取值于 } \boldsymbol{a} \text{ 的数列 } \{a_n\} \subseteq E \text{ 收敛于 } \boldsymbol{a} \\ &\Leftrightarrow \text{存在数列 } \{a_n\} \subseteq E \text{ 收敛于 } \boldsymbol{a}, \text{且对任意 } n \neq m, \text{有 } a_n \neq a_m \end{aligned}$$

下面的性质和推论是自然的, 留作习题.

[3]我们之所以用空心球而不用球 $B_r(\boldsymbol{a})$, 是由于点 $\boldsymbol{a}$ 过于特殊.

[4]注意这里我们没有要求 $\boldsymbol{a} \in E$ 或 $\boldsymbol{a} \notin E$.

[5]见 [1, p325, 定义 8.3.3].

Proposition 1.5.

- 点 $\boldsymbol{a}$ 不被 E 包围 $\Longleftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ 为 E^c 的聚点
- 点 $\boldsymbol{a}$ 不被 E^c 包围 $\Longleftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的聚点

Corollary 1.6. *点 $\boldsymbol{a}$ 为第三类情况 $\Longleftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ 同时为 E 与 E^c 的聚点,i.e. 在 $E\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 中存在收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的数列, 且在 $E^c\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 中存在收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的数列.*

这时候我们可以说是相当清晰地描述了一个点附近的三种情况. 将点与点附近的情况组合起来考虑, 我们得到了一个对全集 $\mathbb{R}^n$ 的分划:

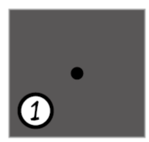
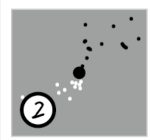
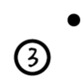
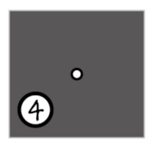
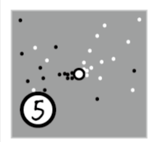
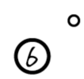
	被 E 包围	其它	被 E^c 包围
$\boldsymbol{a}\in E$			
$\boldsymbol{a}\notin E$			

表 1. 对 $\mathbb{R}^n$ 彻底的分类

Exercise 1.3. *指出在 **Example 0.1**中的①~⑥. 哪几部分为空集?*
*当 $n=1, E=\mathcal{C}$ 时, 指出①~⑥. 哪几部分为空集? 在 **Exercise 1.1**中, 集合 A 中的元素各在哪个位置?*

2. 开集与闭集

我们来利用我们的分类来研究开集和闭集.

Definition 2.1 (内点, 内部[6])**.** *设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 如果点 $\boldsymbol{a}\in E$, 并且存在 $r>0$, 使得 $B_r(\boldsymbol{a})\subseteq E$, 那么称 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的一个**内点 (interior point)**. 点集 E 的全体内点所构成的集合记作 E°, 称之为 E 的**内部 (interior)**.*[7]

来观察我们的分划.E 的内点按照定义, 首先落在 E 中, 然后又被 E 包围, 故一定落在①中. 反过来, 落在①中的元素一定为 E 的内点.[8]故集合 E 的内部恰好即为①.

Definition 2.2 (开集与闭集)**.** *我们称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的**开集 (open set)**, 若 $E=E^\circ$. 如果 E^c 为开集, 则称 E 为闭集.*

[6]见 [1, p322, 定义 8.3.1].

[7]注意元素与集合的区别. 内点是 E 的元素, 而内部为 E 的子集.

[8]不过是同义反复.

$\checkmark$		

表 2. 内点与内部

	$\times$	$\times$

表 3. 开集

观察到 $E = \textcircled{1} \sqcup \textcircled{2} \sqcup \textcircled{3}$ 而 $E^\circ = \textcircled{1}$, 故 E 为开集 $\Longleftrightarrow \textcircled{2} = \textcircled{3} = \varnothing$. 为了更好地了解闭集的信息, 我们想知道 E 与 E^c 将集合分成的六类中有没有什么相关性. 很明显是有的: 故 E 为闭集 $\Longleftrightarrow E^c$ 为开集 $\Longleftrightarrow \textcircled{4} = \textcircled{5} = \varnothing$.

	被 E^c 包围	其它	被 $(E^c)^c$ 包围
$\boldsymbol{a} \in E^c$	⑥	⑤	④
$\boldsymbol{a} \notin E^c$	③	②	①

表 4. E^c 分成的 6 类

$\times$	$\times$	

表 5. 闭集

Exercise 2.1. 由 ***Exercise 1.3***, 直接说明 ***Example 0.1***中的 E 与 *Cantor* 集分别为 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

[1, p325, 推论 8.3.1] 是关于闭集的等价定义, 这个定义对于理解 "$\mathbb{R}^n$ 中, 列紧集 $\Leftrightarrow$ 有界闭集" 非常有帮助, 且这个定义在泛函分析中被多次使用 (其对一般的度量空间也是成立的).

我们来开始肝这一节中最难的几个定义. 在这之前, 我们回顾下聚点这个概念:
点 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的聚点 $\Longleftrightarrow$ 点 $\boldsymbol{a}$ 不被 E^c 包围 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \notin \textcircled{3} \sqcup \textcircled{6} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \in \textcircled{1} \sqcup \textcircled{2} \sqcup \textcircled{4} \sqcup \textcircled{5}$.
我们称 E 的全体凝聚点 E' 为 E 的**导集 (derived set)**, 故 $E' = \textcircled{1} \sqcup \textcircled{2} \sqcup \textcircled{4} \sqcup \textcircled{5}$

Definition 2.3 (孤立点)**.** 我们称 $\boldsymbol{a} \in E$ 为 E 的**孤立点** ***(isolated point)***, 若 $\boldsymbol{a}$ 不为聚点.

Exercise 2.2. 验证 $\boldsymbol{a}$ 为孤立点 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \in \textcircled{3}$.

$\checkmark$	$\checkmark$	
$\checkmark$	$\checkmark$	

表 6. 导集

		$\checkmark$

表 7. 孤立点

$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\checkmark$	$\checkmark$	

表 8. 闭包

Exercise 2.3. *定义 E 的**闭包 (closure)**$\overline{E} = E \cup E'$. 验证 $\overline{E} = ① \sqcup ② \sqcup ③ \sqcup ④ \sqcup ⑤ = \mathbb{R}^n \setminus ⑥$, 故而有推论 $\overline{E} = ((E^c)^\circ)^c$.*

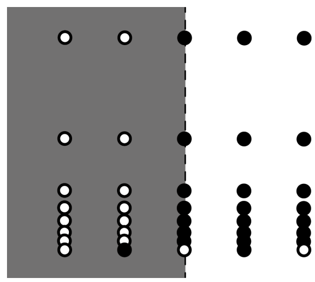
接下来我就偷个懒, 毕竟还是要留下自己思考的余地呀.

Exercise 2.4. *自行阅读 [1, p326, 定义 8.3.5], 利用分类的方法理解概念：外点与**外部 (exterior)**；边界点与**边界 (boundary)**. 画出表格 (可参考表2) 并顺手证明*

$$E^\circ \sqcup (E^c)^\circ \sqcup \partial E = \mathbb{R}^n.$$

Exercise 2.5. *利用分类的方法刷完 [1, p327-328, 练习题 8.3] 的 1-3,5,6,13.*

Exercise 2.6. [9] *考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的两个集合：$\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 与*



$$\big((-\infty, 0) \times \mathbb{R}\big) \triangle \left(\{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \left\{\tfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+\right\}\right) \triangle \left(\{-1, 0, 1\} \times \{0\}\right)$$

它们是开集、闭集、有界集吗? 它们的导集、闭包、内部、外部、边界分别是什么? 有无孤立点?

Exercise 2.7. *定义*

$$A_n = \{(0.j_1 j_2 \cdots j_n)_3 \mid j_i = 0, 2 \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \qquad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

说明 $\mathcal{C} \neq A$ 而 $\mathcal{C} = \overline{A}$.(许多人问 Cantor 集是不是就是边界点集的并, 这个练习可以说明这一点是错误的, 但是 "很接近"：Cantor 集是边界点集的并的闭包.)

在学完抽象的拓扑空间后，你还可以说明 A 是 $\mathcal{C}$ 中的离散稠密子集 (discrete dense subset). 这个现象在 p-adic 的世界中非常普遍：$\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ 也是一个离散稠密子群.

3. 后记

这份材料与其说是介绍 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑, 不如说是对教材 [1, 8.3] 中内容的一个导读. 我希望这份材料能使同学克服阅读 [1, 8.3] 的一些障碍, 并获得阅读材料 [2, Appendix A] 的能力.

还有许多的内容我没有提到, 索性在这里一并提一提.

- 定理 8.3.6 是很有意思的一个定理, 它说明了内部与闭包的特殊性.(你也可以说这两个概念是对偶的).

[9]定义对称差 (symmetric difference):$A \triangle B = (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B)$.

- 定理 8.3.3 以后会推广到抽象的拓扑空间中作为开集的定义.
- [1, 8.4] 主要就是定义 (列紧集和紧集 (紧致集)) 与一个结论 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集 $\Leftrightarrow$ 紧集 $\Leftrightarrow$ 列紧集, 证明是很漂亮的, 结论也很重要 (例如, 你就可以说明有界闭集上的连续函数一定取到最值了).
- [1, 8.5] 主要和连通性有关, 看之前可以想想如果是自己的话, 会怎样定义一个集合的连通性. 亦有一些非平凡的有趣的结论. 比如, 为什么 $\mathbb{R}^n$ 中又开又闭的集合只有 $\mathbb{R}^n$ 和 $\varnothing$?
- 这里的分类方法也可以推广到一般的度量空间上 (甚至是拓扑空间), 对给定的集合 E, 你可以将全空间划分为 8 个部分。

另外, 这里术语的英文翻译主要参照 [2, Appendix A]. 还有借了下 wiki 的图片.

References

[1] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (第 3 版). 合肥：中国科学技术大学出版社,2012.8.

[2] Lee J M. *Introduction to smooth manifolds[M]*. 2008.

[3] Armstrong M A. *Basic topology[J]*. Undergraduate Texts in Mathematics, 1997:137-155.

[4] James Munkres. *Topology*. 2nd. Prentice-Hall, Inc., Jan. 2000. ISBN: 9788120320468

[5] 尤承业,《基础拓扑学讲义》, 北京大学出版社,1997

[6] 熊金城,《点集拓扑讲义》, 人民教育出版社,1981

[7] 伏・巴尔佳斯基, 伏・叶弗来莫维契, 裘光明. 拓扑学奇趣 [J]. 湖南教育出版社,1999.8.

[8] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2003. isbn: 0-521-79160-X

[9] Evan Chen. *An Infinitely Large Napkin*. draft. 2018. URL:http://web.evanchen.cc/napkin.html

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026, P.R. China,

Email address: `xx352229@mail.ustc.edu.cn`