

傅科摆数值模拟实验报告

作者: XXX

学号: XXX

摘要 依据牛顿运动定律,利用计算机数值模拟技术,通过求运动方程的数值解,演示了傅科摆的一些性质。通过改变初始条件,研究了傅科摆在不同情况下的运动,给出了傅科摆运动轨迹。

需要把模拟的问题陈述一下,最简单的就是把题目抄过来

1 引言

关于傅科摆,在两种典型初始条件下,通过适当的近似,已得到了摆端轨迹的解析解^[1,2]:自摆球最低位置以某一初速度推出,傅科摆的轨迹为多叶玫瑰线;将摆拉起小角度而释放时的轨迹为内摆线。借助数值模拟,本文给出了一些更一般情形下的运动轨迹。

2 计算原理与方法

2.1 傅科摆运动方程

将地球视为正球体。如右图所示,非惯性坐标系 $x-y-z$ 选择如下: x 轴指向正东, y 轴指向正北, z 轴指向天空,坐标原点为摆绳结点。惯性坐标系 $X-Y-Z$ 选择如下:坐标原点为地球中心, Z 轴指向北极, X 和 Y 轴在赤道平面。图中, $\Omega=(0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)^T$ 为地球自转角速度, φ 为纬度($\varphi>0$ 表示北纬, $\varphi<0$ 表示南纬,赤道纬度为 0 度,北极纬度为 90 度,南极纬度为 -90 度)。摆球受到的力 $\mathbf{F}=\mathbf{mg}+\mathbf{f}$, 其中重力 $\mathbf{mg}=(0,0,-mg)^T$, (g 为重力加速度, m 为摆球的质量)、 \mathbf{f} 为摆绳的拉力,随着摆球的运动,摆绳对摆球的拉力随时变化。

在惯性坐标系 $X-Y-Z$ 中,摆球的位置 \mathbf{P} 表示为

$$\mathbf{P}=\mathbf{R}_0+\mathbf{r} \quad (1)$$

其中 \mathbf{R}_0 为 $x-y-z$ 坐标原点在 $X-Y-Z$ 中的位置, \mathbf{r} 为摆球在 $x-y-z$ 中的位置。用 $D(\cdot)/Dt$ 表示在 $X-Y-Z$ 坐标系中对时间的导数, $d(\cdot)/dt$ 表示在 $x-y-z$ 中对时间的导数,对任何矢量 \mathbf{h} , 它们之间有如下关系:

$$\frac{D\mathbf{h}}{Dt}=\frac{d\mathbf{h}}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{h} \quad (2)$$

从而,有

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} &= \frac{D\mathbf{R}_0}{Dt} + \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \\ &= \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3)$$

注意到 $D\boldsymbol{\Omega}/Dt=0$, 有

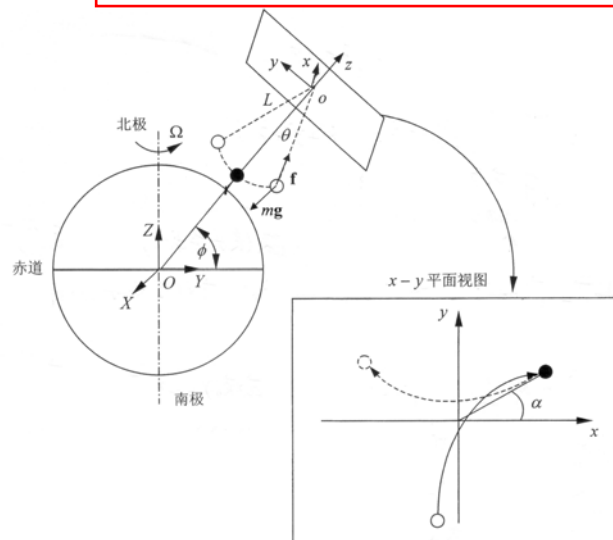
$$\frac{D^2\mathbf{P}}{Dt^2}=\frac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2}+\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}_0}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{R}_0}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0\right)+\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \quad (4)$$

对于 $x-y-z$ 坐标系, \mathbf{R}_0 为常数, $d\mathbf{R}_0/dt=0$, $d^2\mathbf{R}_0/dt^2=0$ 。所以

$$\frac{D^2\mathbf{P}}{Dt^2}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0)+\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (5)$$

作用在摆球 m 上的力 $\mathbf{F}=\mathbf{mg}+\mathbf{f}$, 则有 $D^2\mathbf{P}/Dt^2=\mathbf{F}/m=\mathbf{g}+\mathbf{f}/m$, 所以

分析建模过程描述很详细,很好



$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g} + \frac{\mathbf{f}}{m} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{\mathbf{f}}{m} + \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\end{aligned}\quad (6)$$

其中

$$\boxed{\mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}\quad (7)$$

其中 $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 。(6)式与(7)式的物理意义很明显：在非惯性坐标系 x-y-z 中看来，摆球除了受到重力 $m\mathbf{g}$ 和摆绳的拉力 \mathbf{f} 的作用外，还受到科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ 及地球自转产生的离心力 $-m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -m\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r})] = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P})$ 的作用。

2.2 模拟方案 1

注意到 \mathbf{f} 的方向沿着摆绳方向，即

$$\frac{\mathbf{f}}{m} = \pm \frac{|\mathbf{f}|}{mL} \mathbf{r} = \frac{f}{mL} \mathbf{r}$$

其中 L 为摆绳的长度。约束条件为

$$\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = L^2 \quad (9)$$

(9)式两边对 t 求一阶导数，得

$$\mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (10)$$

这说明速度的方向始终垂直于摆绳。(9)式两边对 t 求二阶导数，得 $\mathbf{r} \bullet \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} = 0$ ，即

$$\mathbf{r} \bullet \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} \quad (11)$$

(6)式两边点乘 \mathbf{r} ，并利用(8)式及(11)式，得到

$$\begin{aligned}-\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} \bullet \left(\frac{\mathbf{f}}{m} + \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \frac{f}{mL} \mathbf{r} \bullet \mathbf{r} + \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{f}{m} L + \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\end{aligned}\quad (12)$$

从而，

$$\frac{\mathbf{f}}{m} = \frac{f}{mL} \mathbf{r} = \frac{-\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{L^2} \mathbf{r} \quad (13)$$

(13)式的物理意义也很明显：摆绳的拉力 \mathbf{f} 由两部分构成，其中一部分 $(-m \frac{\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}}{L^2} \mathbf{r})$ 是摆球绕摆绳结点运动所需的向心力，另一部分 $(-m \frac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{L^2} \mathbf{r})$ 用于平衡其他外力(重力、科里奥利力及地球自转产生的离心力)的合力在摆绳方向的分力。将(13)式代入(6)式，得

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{L^2} \mathbf{r}} \quad (14)$$

给定初始条件 \mathbf{r}_0 、 $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ 后，利用(7)式及(14)式即可进行数值计算。

t 时刻的位置 \mathbf{r} 、速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} 由下式决定^[2]：

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

离散化后得递推公式(Euler-Cromer 方法)：

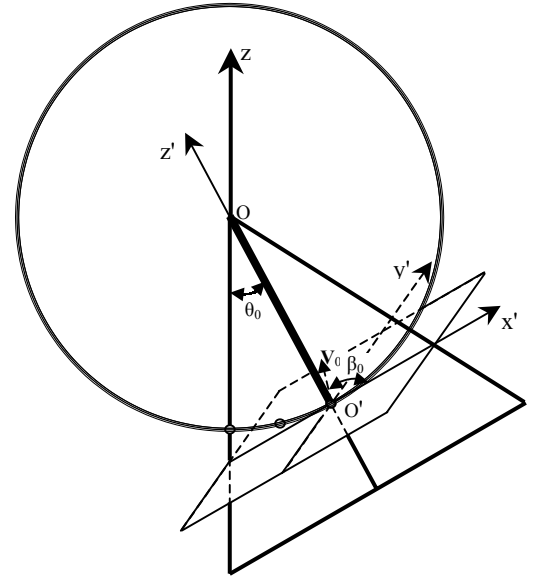
详细给出了二个不同的模拟方案，说明进行了思考。是否需要给不同的方案，视各自学时情况而定，不是基本要求。这里虽给了不同的方案，但为什么给不同方案的意图描述不清楚，未对方案进行比较，因此描述两个方案没有必要，冲淡了主要内容

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_i &= \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \\
\mathbf{a}_i &= \mathbf{G}_i - \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{G}_i}{L^2} \mathbf{r}_i \\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t \\
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_{i+1} \Delta t \\
(i &= 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\mathbf{g}=(0,0,-g)^T$, $\mathbf{R}_0=(0, 0, R_0)^T$, $\boldsymbol{\Omega}=(0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)^T$, φ 为地理纬度, $R_0=R+L$, R 为地球半径, $\Omega=\frac{2\pi}{T_0}$, T_0 为地球自转周期。当然, $\mathbf{g}=(0,0,-g)^T$ 只是近似表示式, \mathbf{g} 实际上应该指向地心, 即 $\mathbf{g} = g \frac{(0,0,-R_0)^T - \mathbf{r}}{|(0,0,-R_0)^T - \mathbf{r}|} = -g \frac{\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}}{|\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|}$, 在 L 较大时应考虑这一点。此外, 由式(7)和式(14)知, 当 $\dot{\mathbf{r}}=0$ 且 $\ddot{\mathbf{r}}=0$ 即摆

处于静止平衡状态时, 由于地球自转产生的离心力, 除非在地球两极, 摆绳一般不会沿地球径向。给定初始条件 \mathbf{r}_0 、 \mathbf{v}_0 后, 利用递推公式(15)可求得随后时刻的位置和速度。由于 Euler-Cromer 递推公式是近似的, 为了使约束条件式(9)、式(10)始终得到满足, 可对其进行校正, 校正方法见附录 A。

初始条件的表述形式为: 摆长 L , 初始摆角 θ_0 (摆绳与垂直向下方向的夹角), 摆球初始位置的方位角 α_0 (即位置向量 \mathbf{r}_0 在 xy 平面上的投影与 x 轴正向的夹角); 由于速度的方向必须垂直于 \mathbf{r}_0 (见前述关于(9)式的讨论), 所以初始速度的方向不能随意给定, 它必须平行于如右图所示的 $x'y'$ 平面, 图中 $x'y'z'$ 坐标系的原点在摆球的初始位置, $x'y'$ 平面垂直于摆绳, z' 轴沿摆绳指向摆绳的结点, x' 轴的方向指向 θ_0 增大的方向, 这样, 初始速度可由其大小 v_0 及其在 $x'y'z'$ 坐标系中的方向角 β_0 (即速度向量 \mathbf{v}_0 与 x' 轴正向的夹角)来描述。由此初始条件的表述形式可以得到初始位置向量和初始速度向量



$$\mathbf{r}_0 = L[\sin \theta_0 \cos \alpha_0, \sin \theta_0 \sin \alpha_0, -\cos \theta_0]^T \tag{16}$$

$$\mathbf{v}_0 = v_0(\mathbf{s}_1 \cos \beta_0 + \mathbf{s}_2 \sin \beta_0) \tag{17}$$

其中 \mathbf{s}_1 、 \mathbf{s}_2 分别为沿 x' 轴和 y' 轴方向的单位向量, 可由下式求得

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \frac{\mathbf{r}_0}{L}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 \times \frac{\mathbf{r}_0}{L} = (\mathbf{s} - \frac{\mathbf{r}_0}{L}) \times \frac{\mathbf{r}_0}{L} = \mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}_0}{L} \tag{18}$$

其中

$$\mathbf{s} \equiv \frac{\mathbf{r}_0}{L} + \mathbf{s}_1 = \sqrt{2}[\sin(\theta_0 + \frac{\pi}{4})\cos \alpha_0, \sin(\theta_0 + \frac{\pi}{4})\sin \alpha_0, -\cos(\theta_0 + \frac{\pi}{4})]^T \tag{19}$$

这是因为 \mathbf{s} 、 \mathbf{s}_1 、 \mathbf{r}_0/L 在 $x'z'$ 平面 (即初始摆平面) 内围成一个等腰直角三角形, 其直角边长为 1 (即向量 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{r}_0/L 的长度), 斜边长为 $\sqrt{2}$ (即向量 \mathbf{s} 的长度), \mathbf{s} 与摆绳之间的夹角为 $\pi/4$, 与 z 轴负向的夹角为 $\theta_0 + \pi/4$ 。

2.3 模拟方案 2

由于 $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0$, 式(6)两端用 \mathbf{r} 左叉乘, 从而消去 \mathbf{f} , 得

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} - 2\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0)] - \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \tag{20}$$

将式(20)写成分量形式, 可得到关于 \ddot{x} 、 \ddot{y} 、 \ddot{z} 的三个方程, 但由于必须满足约束条件 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = L^2$, 所得到的三个方程不是独立的, 其中只有两个方程独立。利用

$$\begin{aligned}x &= L \sin \theta \cos \alpha \\y &= L \sin \theta \sin \alpha \\z &= -L \cos \theta\end{aligned}\quad (21)$$

可将式(20)写成

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & \sin \theta \cos \theta \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned}b_1 &= -\frac{g}{L} \sin \theta \sin \alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos^2 \theta \cos \alpha + \dot{\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \\ &\quad - 2\Omega(\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \left[\dot{\alpha} \sin \theta \sin \alpha - \dot{\theta} \cos \theta \cos \alpha + \frac{\Omega R_0}{2L} \cos \varphi + \frac{\Omega}{2} (\sin \theta \sin \alpha \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) \right] \\ b_2 &= \frac{g}{L} \sin \theta \cos \alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos^2 \theta \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta \cos \alpha + \frac{\Omega^2 R_0}{L} \sin \theta \cos \alpha \cos^2 \varphi \\ &\quad + 2\Omega(\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \left[\dot{\alpha} \sin \theta \cos \alpha + \dot{\theta} \cos \theta \sin \alpha + \frac{\Omega}{2} \sin \theta \cos \alpha \sin \varphi \right] \\ b_3 &= -\sin \theta \left[2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \theta + (\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)(-2\Omega\dot{\theta} + \Omega^2 \cos \alpha \cos \varphi) - \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \right]\end{aligned}\quad (23)$$

式(22)代表三个不独立的方程，将其中的第一个方程两端乘以 $\sin \alpha$ ，第二个方程两端乘以 $\cos \alpha$ ，再相减，这样，式(22)化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \sin \alpha - b_2 \cos \alpha \\ b_3 \end{pmatrix}\quad (24)$$

从而，

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= b_1 \sin \alpha - b_2 \cos \alpha \\ &= -\frac{g}{L} \sin \theta + \dot{\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta - 2\Omega\dot{\alpha} \sin \theta (\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) \\ &\quad - \Omega^2 [(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \\ &\quad + \frac{\Omega^2 R_0}{L} (-\sin \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi)\end{aligned}\quad (25)$$

$$\ddot{\alpha} = b_3 / \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \theta + (\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)(-2\Omega\dot{\theta} + \Omega^2 \cos \alpha \cos \varphi) - \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (\text{当 } \sin \theta \neq 0)\end{aligned}\quad (26)$$

当 $\sin \theta = 0$ 时，不能直接利用式(26)计算 $\ddot{\alpha}$ 。将 $\sin \theta = 0$ 代入式(22)、式(23)，可得

$$0 = b_1 \cos \alpha + b_2 \sin \alpha = -2\dot{\theta}\dot{\alpha} - 2\Omega\dot{\theta} \sin \varphi + \Omega^2 (1 + \frac{R_0}{L} \cos \theta) \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \quad (\text{当 } \sin \theta = 0)\quad (27)$$

事实上，将 $\sin \theta = 0$ 代入式(26)右端的分子部分，可得

$$\text{式(26)右端分子部分} = \left[-2\dot{\theta}\dot{\alpha} - 2\Omega\dot{\theta} \sin \varphi + \Omega^2 (1 + \frac{R_0}{L \cos \theta}) \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \right] \cos \theta \quad (\text{当 } \sin \theta = 0)\quad (28)$$

注意到由于 $\sin \theta = 0$ ， $\cos \theta = \pm 1$ ，显然有 $(1 + \frac{R_0}{L} \cos \theta) = (1 + \frac{R_0}{L \cos \theta})$ ，所以由式(27)、式(28)知，式(26)右

端在 $\sin \theta \rightarrow 0$ 时的极限为 $\frac{0}{0}$ 型。

令 $\lambda = \sin \theta$ ， $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$ ，则当 $\lambda \neq 0$ 时，由式(26)，有

$$\ddot{\alpha}(\lambda, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) = - \left[\pm \sqrt{1 - \lambda^2} 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + (\lambda \sin \alpha \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \varphi)(-2\Omega\dot{\theta} + \Omega^2 \cos \alpha \cos \varphi) - \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \right] / \lambda \quad (29)$$

由式(21)可知， $\lambda = \sin \theta = 0$ 意味着 $x = y = 0$ ，这时 α 取任意值均能满足约束条件，相当于由式(21)所表示的坐标变换没有明确定义 α ，这是问题的根源所在。从物理上考虑，由于运动轨迹是连续的， $\ddot{\alpha}$ 、 $\dot{\alpha}$ 、 α 当然不能取任意值，在 $\lambda = \sin \theta = 0$ (即 $x = y = 0$) 时，往往意味着摆球在 xy 平面内的投影从一个象限跨越到另一个象限，因此，在 $x = y = 0$ 时， α 一般是不连续的，在无限小的时间间隔内， α 必须变化一个有限值 $\Delta\alpha$ ($0 \leq |\Delta\alpha| \leq 2\pi$) 才能跨越该间断点。从数学上讲，在 α 的间断点， $\dot{\alpha}$ 应取正无穷大或负无穷大，即 $\dot{\alpha}$ 在该处也是不连续的，因而 $\ddot{\alpha}$ 在该处也应取正无穷大或负无穷大。所以在推导式(27)时简单地认为在 $\sin \theta = 0$ 的情况下 $\dot{\alpha} \sin \theta = 0$ 实际上是不严格的。

好在我们在进行数值模拟，实际上是不断地在有限的时间间隔 Δt 内进行数值积分，重要的是奇点的存在并不会影响积分结果，且由于数值计算的近似性，实际上 $\dot{\alpha}$ 也不大可能真正取得正无穷大或负无穷大，所以并无必要过分考究奇点处的细节。采用时间步长 Δt ，如果在数值模拟计算过程中不幸地出现了 $\sin \theta = 0$ ，从技术上讲完全可以回到上一步，将时间步长改为例如 $2\Delta t/3$ ，重新推进，以避免经历不幸的奇点。事实上，设计机器程序时 $|\sin \theta|$ 究竟小到什么程度才需要转入奇点处理也是人为的，且随机器字长而异。

另一方面，只要 $\lambda \neq 0$ ， $|\lambda|$ 无论小到什么程度，式(29)均没有理由不成立，所以，我们可以定义

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(\lambda = 0, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) &\equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ddot{\alpha}(\lambda, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{- \left[\pm \sqrt{1 - \lambda^2} 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + (\lambda \sin \alpha \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \varphi)(-2\Omega\dot{\theta} + \Omega^2 \cos \alpha \cos \varphi) - \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi \right]}{\lambda} \end{aligned} \quad (30)$$

如果上式右端的极限存在且有限，完全可以用这一极限值继续推进计算过程。由于该极限为 $\frac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则不难求出：

$$\ddot{\alpha}(\lambda = 0, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ddot{\alpha}(\lambda, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}) = \Omega \sin \alpha \cos \varphi (2\dot{\theta} - \Omega \cos \alpha \cos \varphi) \quad (31)$$

从而

$$\ddot{\alpha} = \begin{cases} - \frac{2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \theta + (\sin \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi)(-2\Omega\dot{\theta} + \Omega^2 \cos \alpha \cos \varphi) - \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} & (\text{当 } \sin \theta \neq 0) \\ \Omega \sin \alpha \cos \varphi (2\dot{\theta} - \Omega \cos \alpha \cos \varphi) & (\text{当 } \sin \theta = 0) \end{cases} \quad (32)$$

另一种处理办法是由式(22)、式(23)得

$$\begin{aligned} 0 &= b_1 \cos \alpha + b_2 \sin \alpha \\ &= -2\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos^2 \theta + 2\Omega\dot{\theta}(\sin \theta \cos \theta \sin \alpha \cos \varphi - \cos^2 \theta \sin \varphi) \\ &\quad + \frac{\Omega^2 R_0}{L} \cos \theta \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \Omega^2 (\sin \theta \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi) \end{aligned}$$

上式两端对 t 求导(注意: 不能先将 $\sin \theta = 0$ 带入上式后再求导, 因为这样会导致不同的当然也是错误的结果), 可以得到含有 $\ddot{\alpha}$ 的等式, 然后讨论在某些情况下(例如 $\dot{\theta} \neq 0$) 可以取得 $\ddot{\alpha}$ 的表达式, 否则对得到的等式继续求导(仍然不能先将 $\sin \theta = 0$ 带入后再求导), 继续讨论并决定是否继续求导以便获得各种情况下的 $\ddot{\alpha}$ 的表达式。事实上这一推导过程非常烦琐, 其复杂程度难以忍受以致不得不放弃。

关于初始条件, θ_0 、 α_0 可以方便地给出, $\dot{\theta}_0$ 、 $\dot{\alpha}_0$ 却难以给出, 而通过给出满足约束条件的 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 、 \dot{z}_0 进行计算可以指望得到。

由于

$$\begin{aligned}x &= L \sin \theta \cos \alpha \\y &= L \sin \theta \sin \alpha \\z &= -L \cos \theta\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\theta} L \cos \theta \cos \alpha - \dot{\alpha} L \sin \theta \sin \alpha \\ \dot{y} &= \dot{\theta} L \cos \theta \sin \alpha + \dot{\alpha} L \sin \theta \cos \alpha \\ \dot{z} &= -\dot{\theta} L \sin \theta\end{aligned} \quad (33)$$

从而

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \alpha_0 & -\sin \theta_0 \sin \alpha_0 \\ \cos \theta_0 \sin \alpha_0 & \sin \theta_0 \cos \alpha_0 \\ \sin \theta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0/L \\ \dot{y}_0/L \\ \dot{z}_0/L \end{pmatrix}$$

或改写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\dot{x}_0 \cos \theta_0 \cos \alpha_0 + \dot{y}_0 \cos \theta_0 \sin \alpha_0 + \dot{z}_0 \sin \theta_0)/L \\ (\dot{y}_0 \cos \alpha_0 - \dot{x}_0 \sin \alpha_0)/L \end{pmatrix}$$

这里, 当 $\sin \theta_0 = 0$ 时, 我们又遇到了麻烦, 计算 $\dot{\theta}_0$ 毫无问题, 而计算 $\dot{\alpha}_0$ 却不大可能。事实上, 当 $\sin \theta_0 = 0$ 时, α_0 可为任意值, 而由式(33)可知

$$\dot{y}_0 \cos \alpha_0 - \dot{x}_0 \sin \alpha_0 = L \dot{\alpha}_0 \sin \theta_0 \quad (34)$$

从物理图象上看, 当 $\sin \theta_0 = 0$ 时, 约束条件只要求 $\dot{z}_0 = 0$, 而 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 可以给任意值都不违背约束条件, 然而, 无论 α_0 取何值, 式(34)左端除少数特殊情况外不等于零, 为了使式(34)右端不等于零, 唯一的选择就是 $|\dot{\alpha}_0| = \infty$ 。被逼无奈, 为了使模拟工作得以进行, 可以将 θ_0 略加修改, 使 $\sin \theta_0 = \varepsilon \neq 0$, 其中 $|\varepsilon|$ 是受 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 制约的同时也必须是人和机器都可以接受的非常小的数, 当然也要对 α_0 、 \dot{x}_0 、 \dot{y}_0 、 \dot{z}_0 略加修改以满足约束条件, 从而避免陷入无穷深渊。

当然, 也可以不给出 θ_0 、 α_0 , 而给出 x_0 、 y_0 、 z_0 通过计算得到 θ_0 、 α_0 , 这时如果 $z_0 = \pm L$, 在计算 α_0 时又陷入了泥坑, 不过如果机器万幸不产生溢出错误, 我们大可不必计较机器算出的 α_0 究竟是何值。

3 计算机程序设计

由于模拟方案 2 的诸多弊端, 采用模拟方案 1。

在 Visual C++ 6.0 集成开发环境^[3]中进行程序设计。

由于涉及向量运算, 首先建立了一个向量类(Vector 类), 提供有关向量的一些基本操作和运算^[4]。然后建立运动类(Motion 类), 其主要功能是根据提供的初始条件, 采用 Euler-Cromer 方法, 利用向量运算完成运动物体位置、速度、加速度的计算。Motion 类声明了一个纯虚函数 Acceleration() 和一个纯虚函数 ModifyIfNecessary(), 需要由子类实现, 在函数 ModifyIfNecessary() 中可对 Euler-Cromer 方法预测的运动状态

这部分给出伪代码就可以了(当然, 有些特殊的考虑, 可以加以说明解释), 这样的描述对程序的框架并未描述清楚, 没有必要

进行校正, 使其满足初始条件, 函数 `Acceleration()` 的功能是根据当前运动状态计算加速度。Motion 类提供成员函数 `NextPosition()` 以获取下一步的运动状态, `NextPosition()` 函数首先采用 Euler-Cromer 方法预测下一步的运动状态, 然后在返回之前自动调用由子类实现的 `ModifyIfNecessary()` 函数以便完成必要的校正工作。

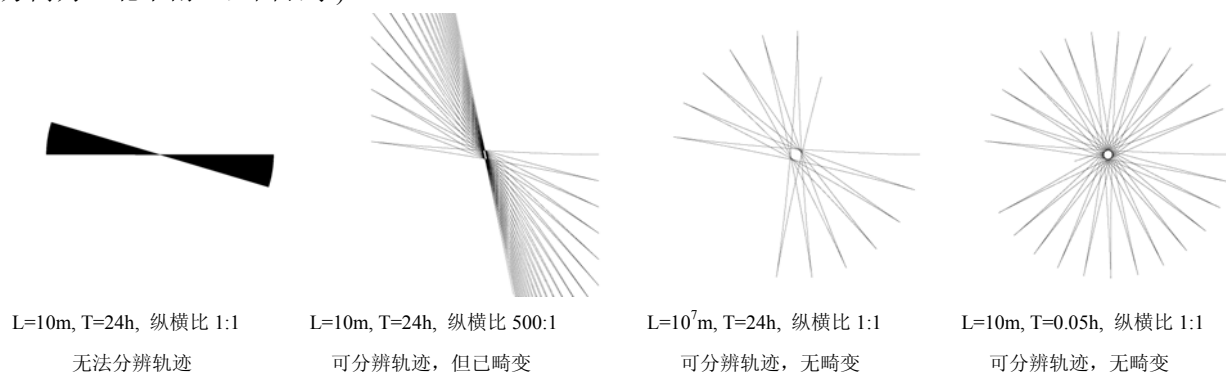
建立了傅科摆类(FoucaultMotion 类), 它是 Motion 类的子类, 主要任务是根据(7)式及(14)式实现父类声明的虚函数 `Acceleration()`, 以及 `ModifyIfNecessary()` 并在其中根据要求决定是否对运动状态进行校正。在 FoucaultMotion 类的基础上, 主程序 FOUCAULT 根据输入参数建立并初始化 FoucaultMotion 类的对象, 然后反复调用其成员函数 `NextPosition()` 计算随后时刻的位置、速度和加速度, 并将摆端轨迹图象保存于磁盘文件。为了描绘轨迹图象, 建立了 Image 类。

FOUCAULT 程序设计为 DOS 应用程序, 其使用方法是: 在命令行提供参数文件名, 程序从参数文件中读取参数, 并根据参数进行计算。参数文件为文本文件, 其中的数据组织格式如下图所示:

```
6400 // R0: 地球半径, 单位为 km
20 // L: 摆长, 单位为 m
5 // theta: 摆杆与竖直向下方向的初始夹角, 单位为度
0 // alpha: 摆球初始位置偏离正东方向的方位角度(例如正的锐角表示东北方向), 单位为度
0 // 摆球的初始速率(即初始速度的大小), 单位为 m/s。初始速度的方向必须与摆杆垂直
0 // beta: 摆球初始速度的方向, 其定义见正文, 单位为度
45 // fi: 纬度, 单位为度。fi>0 为北纬, fi<0 为南纬, 赤道纬度为 0 度, 北极纬度为 90 度, 南极纬度为 -90 度
9.8 // g: 重力加速度, 单位为 m/s^2
24 // T: 地球自转周期, 单位为 hour
1 // 指示是否根据摆球的位置对重力加速度的方向进行修正以使其指向地球中心
1 // 指示是否对每一步的位置和速度作校正以满足约束条件
-1 // 时间步长, 单位为 s。如果小于 0, 则自动设置
-1 // 结束时间, 单位为 hour。如果小于 0, 则按任意键结束
-1 // 放大被率。如果小于 0, 则自动设置
0 0 0 0 // 本行四个参数, 第一个参数为 1 则自动设置投影中心, 否则后三个参数指定投影中心的 xyz 坐标
1 1 1 // 观察者方向。如果为 (0, 0, 0), 则自动设置
1 1 1 // 指示是否画 X、Y、Z 坐标轴(作图时, 将坐标原点移到投影中心, 即图象中心)
img.bmp // 用于保存轨迹图象的文件名
// 坐标系: X 轴指向正东, Y 轴指向正北, Z 轴指向天空, 坐标原点为摆球最低位置
```

4 数值模拟实验

由于地球自转周期长, 傅科摆的进动很慢, 为了看清楚摆端轨迹, 有三种方法: 选取不同的纵向放大倍率与横向放大倍率, 但是这样画出的轨迹已经畸变(不成比例); 人为缩短地球自转周期 T (即增大 Ω), 从而增大科里奥利力, 使在一个摆动周期内运动轨迹的进动量可观, 但是由于地球自转产生的离心力随 Ω 的增大而增大得更快, 会导致“异常”或“意外”的结果; 增大摆长 L , 从而增大摆动周期, 同样使在一个摆动周期内运动轨迹的进动量可观。例如, 取 $\varphi=90^\circ$ (北极), 正东初始摆角 $\theta=5^\circ$, $v_0=0$, 计算结果如下图所示(图中地理方向为上北下南、左西右东)。



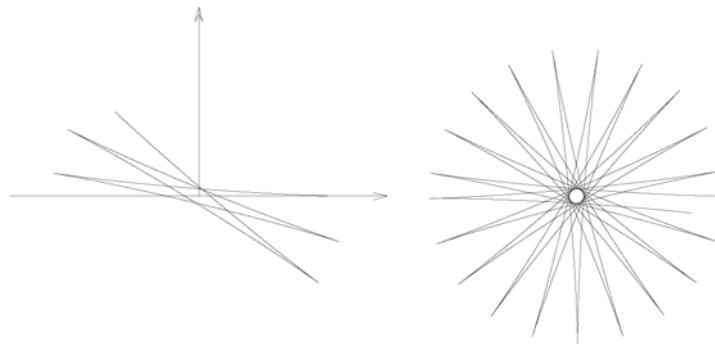
模拟考虑了多种影响因素，并揭示了图像，很好，体现了对物理问题的理解。这也取决于可支配学时（+兴趣），鼓励多考虑，但通常考虑重要的二、三点就行

以下模拟实验主要采取增大 L 的办法来演示傅科摆的运动，给出的图片有的是平面投影图，有的是立体图，有的还画有坐标轴的投影，无论哪种情形，图片的中心或坐标轴的交点并不一定代表真正的坐标原点的投影，而仅仅代表为了观察方便而由程序自动设定或由输入参数控制的照相机瞄准点(称为焦点)，而所画的坐标轴是将坐标原点平移到焦点之后再由观察者位置决定的投影，图片中的坐标轴仅代表方向，指示东南西北。

4.1 地理位置的影响

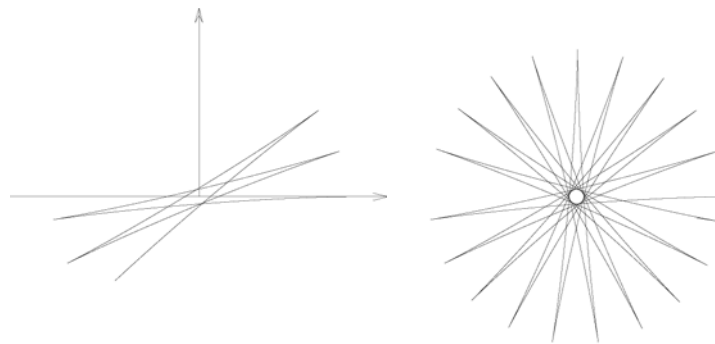
(1) 计算条件: $L=20$, $\theta=5$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $\varphi=90$ (北极), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=0.05h$ 。

轨迹发展过程如下图所示。摆动周期大约为 $T_1=2.5e-3h$, 进动周期大约为 $T_2=-0.050h$ (负号表示沿与 x 轴投影之间的夹角减小的方向进动)。



(2) 计算条件: $L=20$, $\theta=5$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $\varphi=-90$ (南极), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=0.05h$ 。

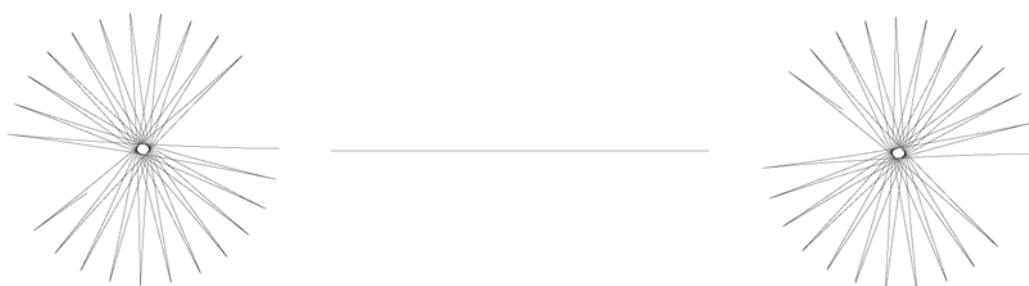
轨迹发展过程如下图所示。摆动周期大约为 $T_1=2.5e-3h$, 进动周期大约为 $T_2=0.050h$ (沿与 x 轴投影之间的夹角增大的方向进动)。



可见，南北半球傅科摆进动方向相反，在北半球沿顺时针方向进动，在南半球沿反时针方向进动；摆球轨迹弯曲的方向相反：在北半球，摆球运动时向右弯曲前进，而在南半球，摆球运动时向左弯曲前进。

(3) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=5$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。

轨迹发展过程如下图所示，对应的纬度分别为 $\varphi=45$ (北纬)、 $\varphi=0$ (赤道)、 $\varphi=-45$ (南纬)。纬度越小，则进动周期越长，在赤道附近则基本不进动。摆动周期约为 $1.25h$ (注意：按照单摆周期计算公式应为 $2.5h$ 左右。数值模拟实验表明，对重力加速度的方向进行修正以后，当 L 较大时，摆动周期受到明显影响。减小 L 或改变输入控制参数以强制程序不修正重力加速度的方向，则可以得到与公式符合的摆动周期)，在南北 45 度纬度位置傅科摆的进动周期约为 $35h$ ，比地球自转周期(设定为 $24h$)长。

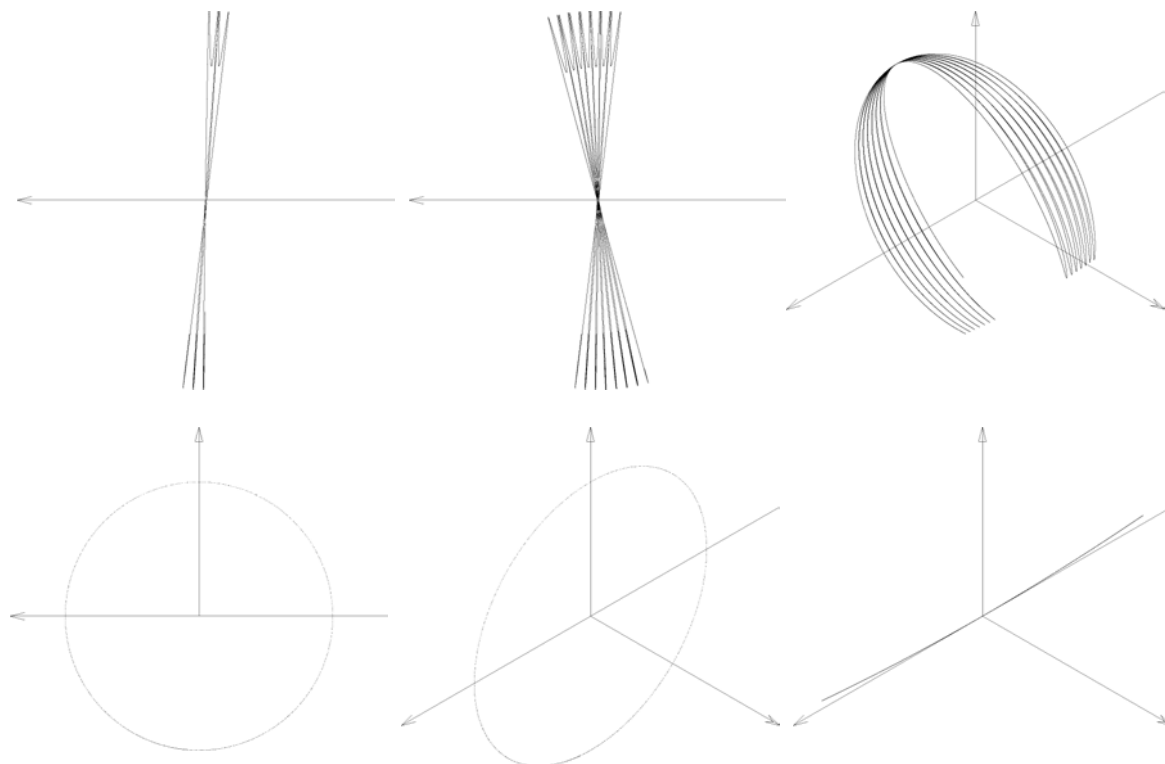


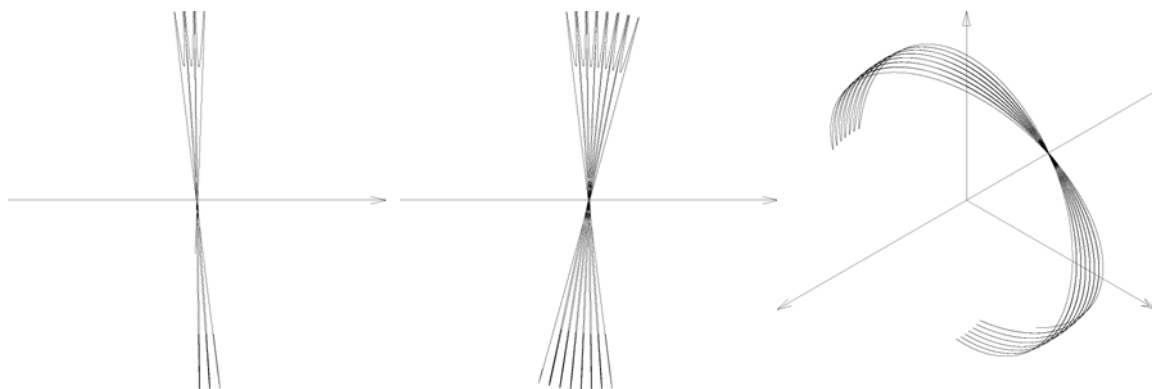
(4) 计算条件: $L=20$, $\theta=5$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=0.05h$ 。

模拟非极地位置的情况。

为了看清运动轨迹,人为加快了地球自转,而傅科摆又不在地球两极,由于离心力的强烈影响,摆球的运动已经有些不同寻常,需要手动在输入参数中减小时间步长(因为程序是根据单摆周期计算公式大致设定时间步长的,而这时单摆周期公式不适用)。

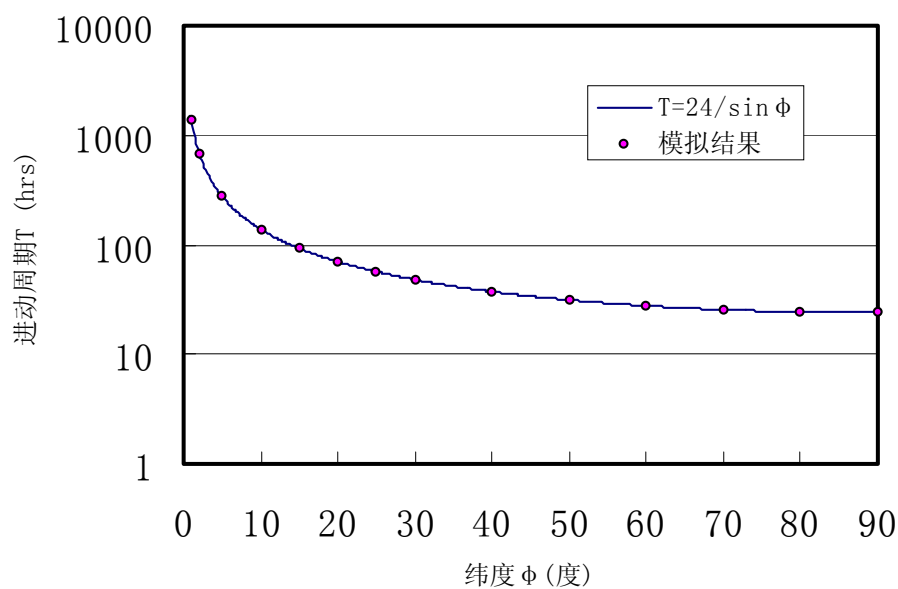
轨迹发展过程如下图所示,三组图象对应的纬度分别为 $\varphi=45$ (北纬)、 $\varphi=0$ (赤道)、 $\varphi=-45$ (南纬),图中平面投影图和立体图中的坐标轴均采用不同的箭头风格区分 x 轴(贯穿整个图象区域,箭头不封闭)、 y 轴(未贯穿整个图象区域,箭头半封闭)、 z 轴(未贯穿整个图象区域,箭头全封闭)。可见,由于离心力的影响,南北纬 45 度处的傅科摆平衡中心极大地偏离了 z 轴负向(实际上平衡位置与 z 轴负向的夹角已经达到接近 135 度),见下图第一组和第三组,摆动周期为 $1.6e-4h$,进动周期为 $1.8e-2h$ 。在赤道地区(见下图第二组的第一和第二张图片),由于离心力的影响,摆球不再来回摆动,而是绕 y 轴高速旋转,作非匀速圆周运动,圆周运动的周期为 $1.7e-4h$,没有进动现象。作为对比,将地球自转周期还原为 $24h$,而 $L=20e6m$,得到下图第二组的第三张图片(没有圆周运动,只有来回摆动)。可见,在高速自转的星球(或许还包括微观世界中的高自旋粒子)上,傅科摆的运动截然不同于地球上的情况。





(5) 正常情况下的进动周期随纬度的变化

计算条件: $L=10\text{m}$, $\theta=1$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $g=9.8$, 地球自转周期 $T=24\text{h}$ 。

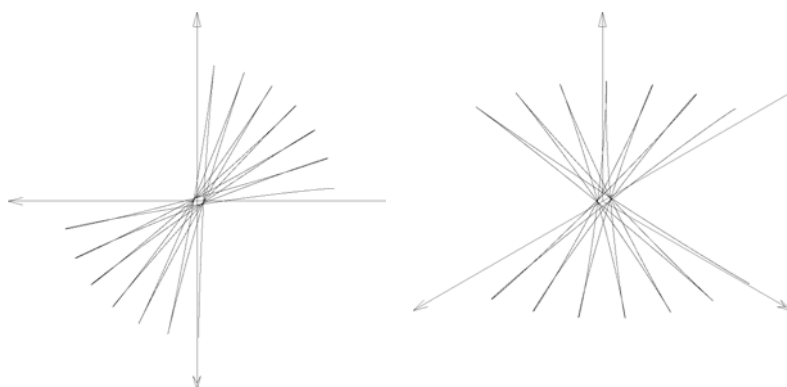


傅科摆进动周期随纬度的变化

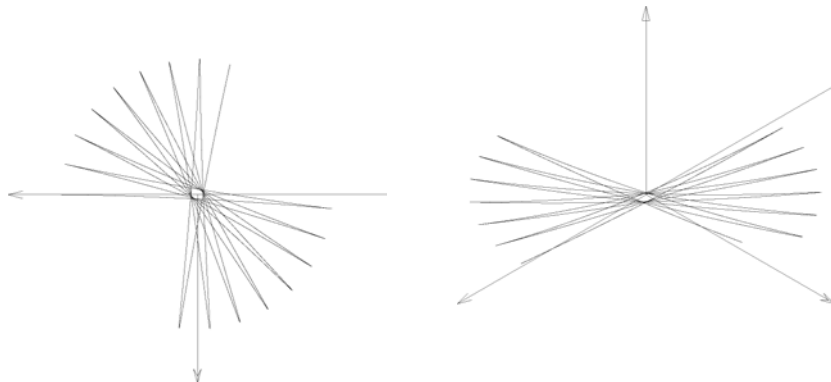
4.2 初始条件的影响

(1) 计算条件: $L=20\text{e}6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $\phi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24\text{h}$ 。

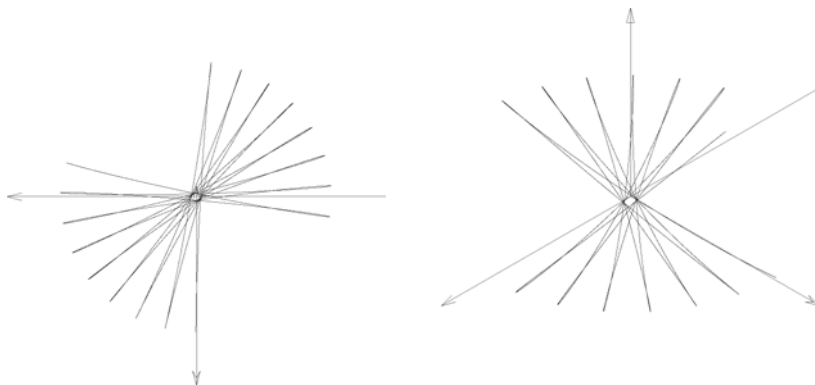
尽管初始摆角为零, 初始速度也为零, 但由于离心力造成平衡位置偏离, 傅科摆依然摆动。实际上相对于平衡位置还是存在一个很小的初始摆角。轨迹为典型的内摆线。



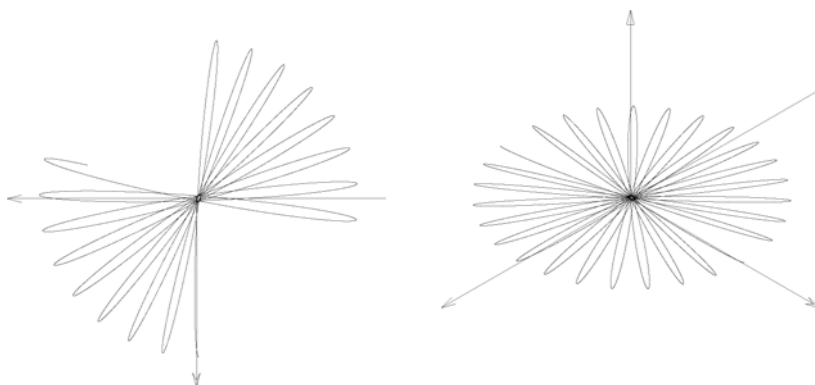
- (2) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=5$, $\alpha=0$, $v_0=0$, $\beta=0$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
正东初始摆角非零, 初始速度为零。轨迹为典型的内摆线。



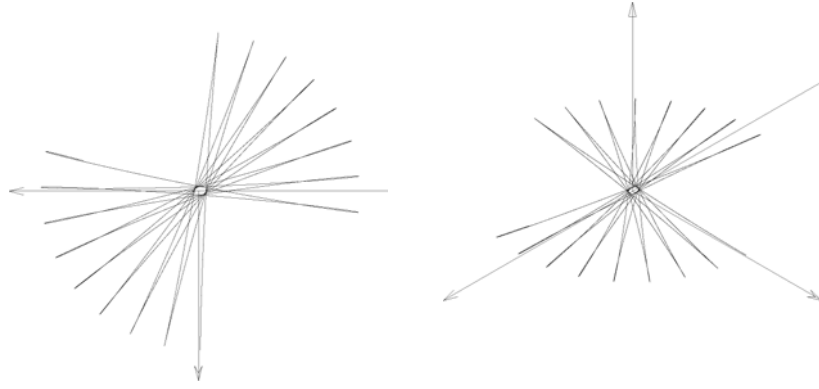
- (3) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=5$, $\alpha=90$ (正北), $v_0=0$, $\beta=0$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
正北初始摆角非零, 初始速度为零。轨迹接近内摆线。



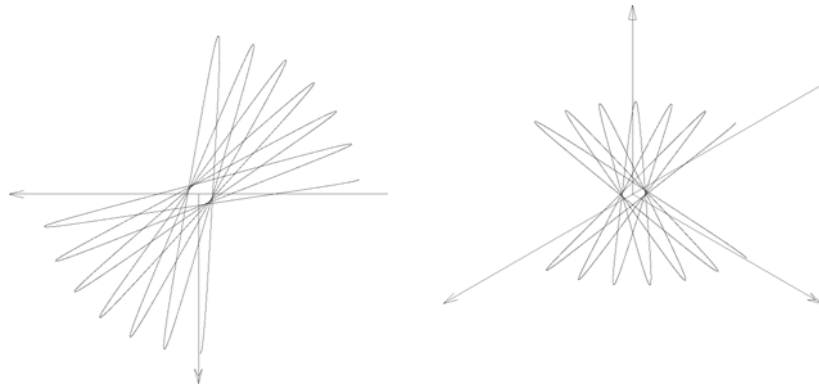
- (4) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=0.5$, $\beta=0$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
初始摆角为零, 初始速度非零。轨迹为典型的玫瑰线。



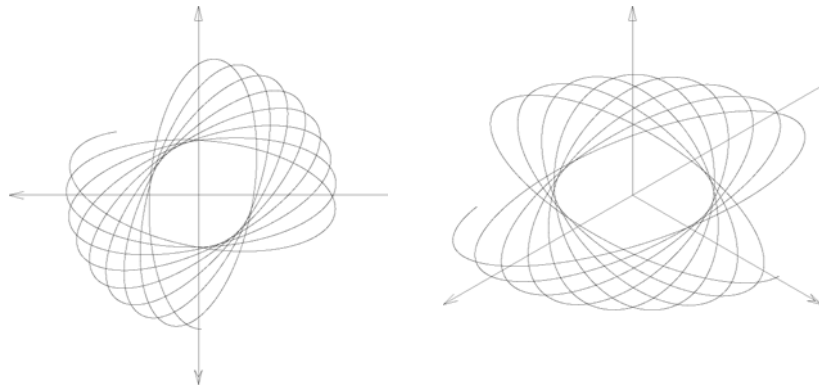
- (5) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=0.5$, $\beta=90$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
初始摆角仍为零, 但初始速度方向改变 90 度。轨迹接近内摆线。



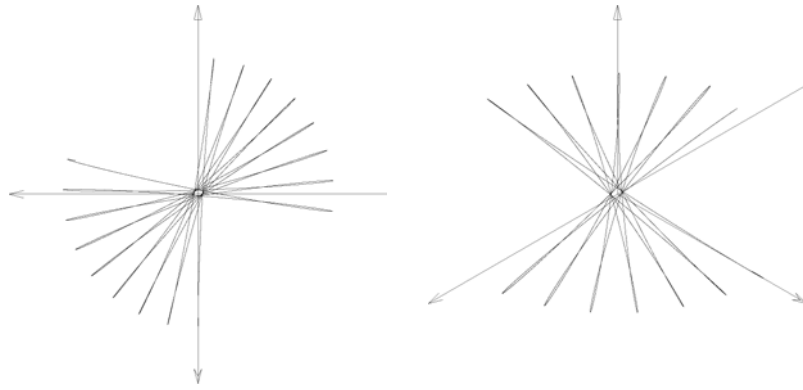
- (6) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=0.5$, $\beta=180$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
初始摆角仍为零, 但初始速度方向改为 180 度。轨迹既非内摆线, 亦非玫瑰线。



- (7) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=5$, $\beta=0$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
初始摆角为零, 初始速度增大到 $5m/s$ 的大小, 方向为 0 度。轨迹既非内摆线, 亦非玫瑰线。



- (8) 计算条件: $L=20e6$, $\theta=0$, $\alpha=0$, $v_0=5$, $\beta=90$, $\varphi=45$ (北纬), $g=9.8$, 地球自转周期设为 $T=24h$ 。
初始摆角为零, 初始速度为 $5m/s$ 的大小, 方向为 90 度。轨迹类似内摆线, 但可看出有明显区别。



4.3 大角度摆动

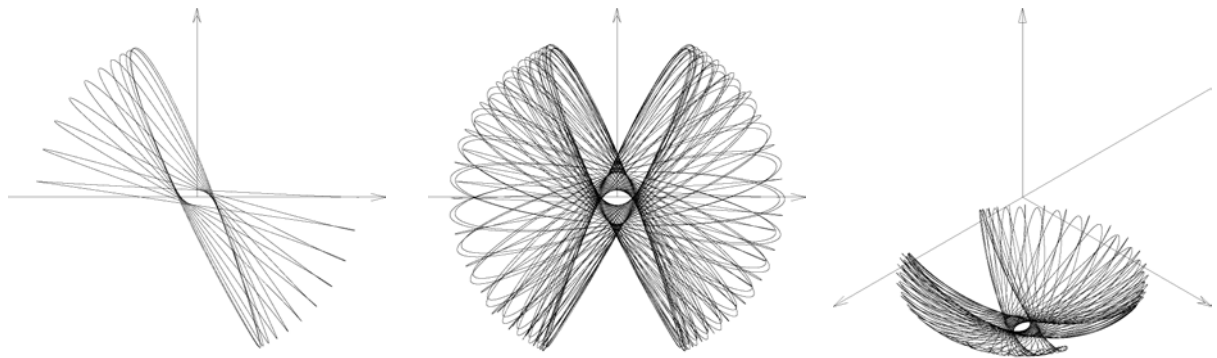
本节平面图中心位置为运动中心，立体图中心位置为摆绳结点(即真正的坐标原点)。

4.3.1 虚拟世界一：摆长 L 堪与星球半径相比

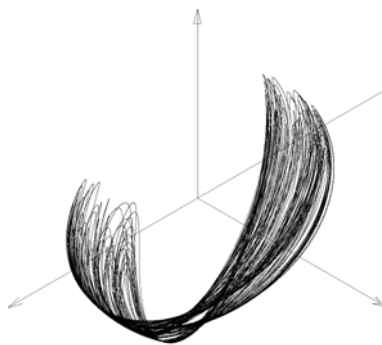
计算条件： $L=20e6$ ， $\alpha=0$ ， $v_0=0$ ， $\beta=0$ ， $\varphi=45$ (北纬)， $g=9.8$ ，地球自转周期设为 $T=24h$ 。

即地球自转周期仍为 $24h$ ，但摆长 L 大于地球半径，当然不可能反映真实的傅科摆。

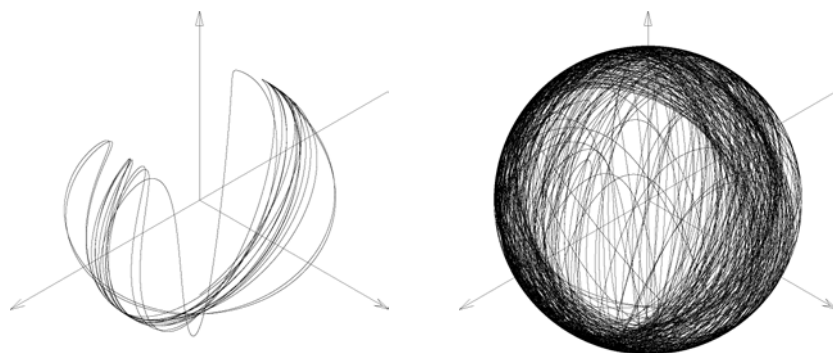
$\theta=50$ 度：球冠不能遍历，原因可能是离心力导致存在两个低位平衡点。轨道量子化？



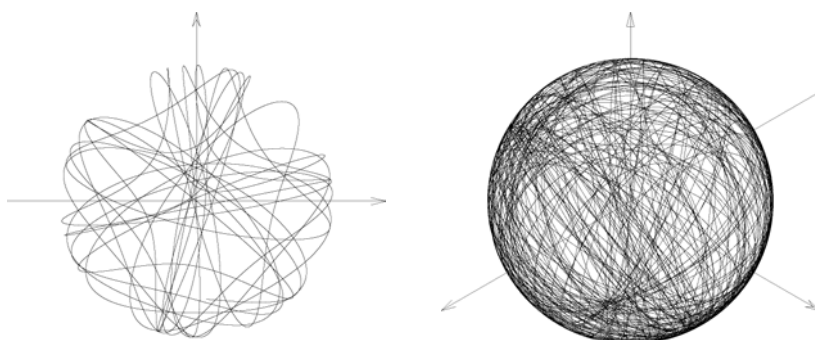
$\theta=90$ 度：轨道量子化？



$\theta=135$ 度：一片混乱，有空洞。电子云？



$\theta=180$ 度：一片混乱。电子云？



由图可见：当初始摆角较大时，轨道既非内摆线，也非玫瑰线，即使在同一个单摆周期内，轨迹也存在非对称性，而且轨迹结构随时间变化；当初始摆角超过 90 度以后，轨道似乎没有稳定结构，呈现混乱状态。

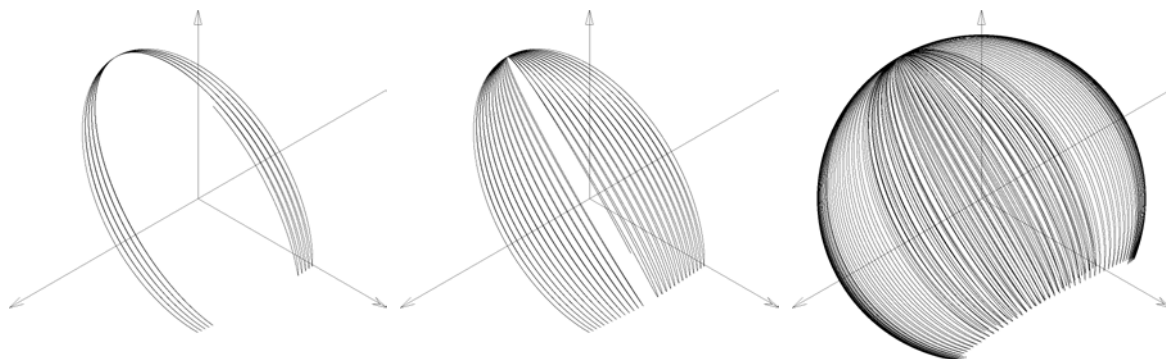
4.3.2 虚拟世界二：高速旋转的星球

自己感兴趣、有好奇心的自由的发挥，很好，但不是作业要求

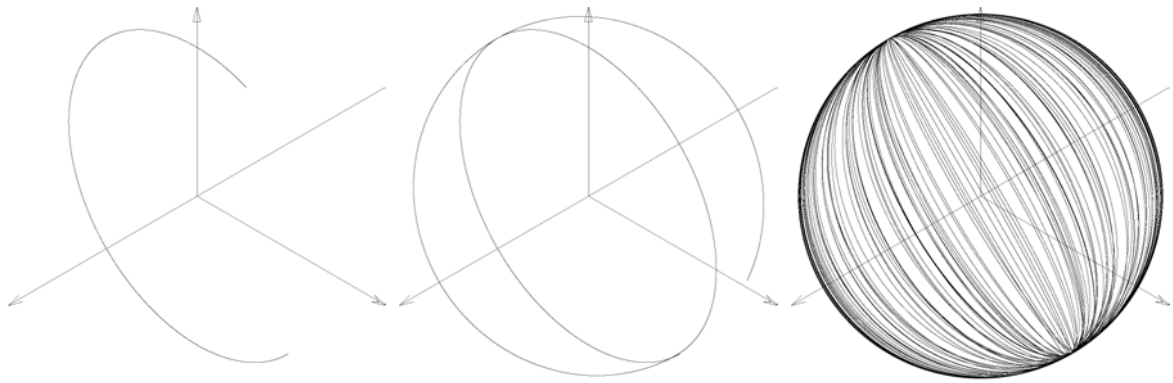
计算条件： $L=10$ ， $v_0=0$ ， $\beta=0$ ， $\varphi=45$ (北纬)， $g=9.8$ ，地球自转周期设为 $T=0.05h$ 。

即摆长 L 取值较现实，但地球自转周期短至 $0.05h$ ，当然也不可能反映真实的傅科摆。

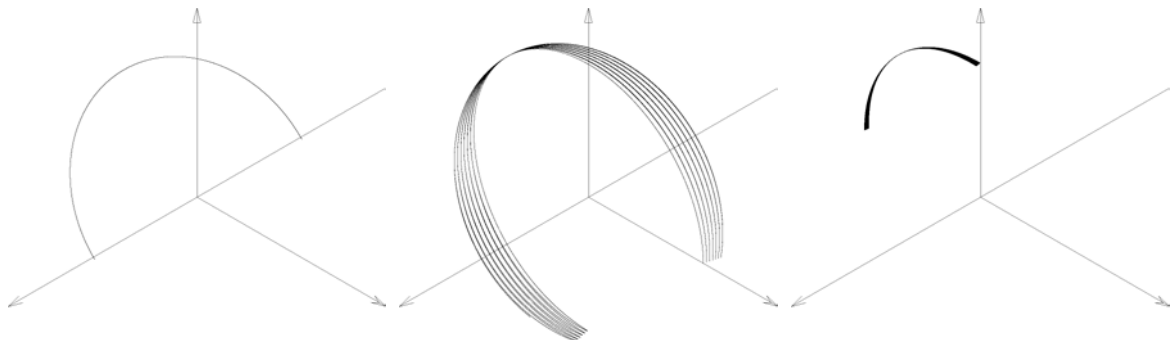
$\theta=0$ 度， $\alpha=0$ 度：由于摆球的静平衡位置与 z 轴负向的夹角很大，接近 135 度，实际上，如果没有约束，该星球表面上的一切都会被离心力抛离星球。好在我们的摆球受到摆绳的约束(姑且不管是怎样实现的)，从下图可以看到，摆球确实以 135 度左右的静平衡位置为中心作很规则的大角度摆动，且轨迹有进动现象。



$\theta=45$ 度， $\alpha=90$ 度：由于摆球初始位置为非稳定静平衡点，所以如果没有进动则摆球应作圆周运动。从下图可以看到，圆周运动轨迹在作高速进动。



$\theta=90$ 度：下面的三幅图片对应的初始方位角 α 分别为 0 度(即正东)、90 度(即正北)、-90 度(即正南)。可以看到，摆球仍然以 135 度左右的静平衡位置为中心作很规则的大角度摆动，但当 $\alpha=0$ 时，轨迹没有进动现象；当 $\alpha=90$ 时，轨迹有明显进动现象；当 $\alpha=-90$ 时，轨迹略微有进动。



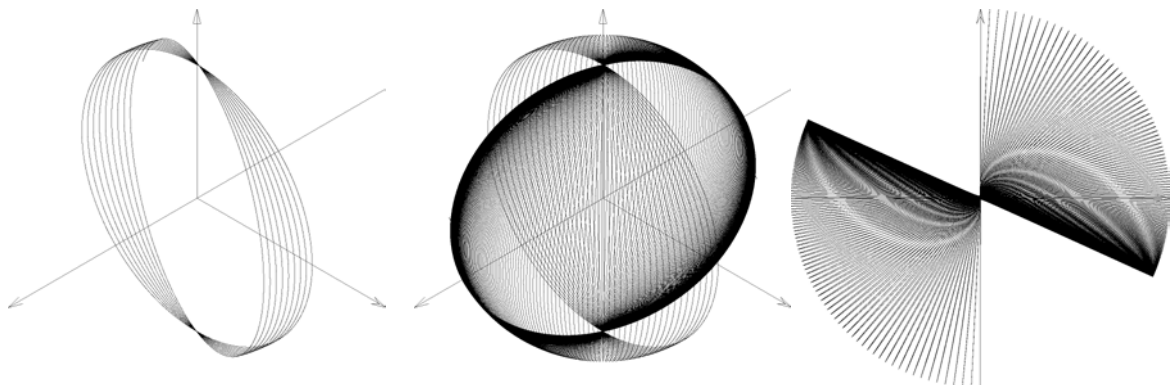
这部分的发挥，没有深入，罗列了结果但没有分析，所以必要性不大，也冲淡了主要内容

4.3.3 现实世界：我们的友好的地球

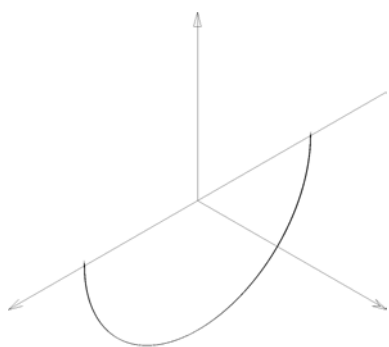
计算条件： $L=10$ ， $\varphi=45$ (北纬)， $g=9.8$ ，地球自转周期设为 $T=24h$ 。

即摆长 L 取值较现实，地球自转周期也取正常值 24h，可以反映真实的傅科摆。

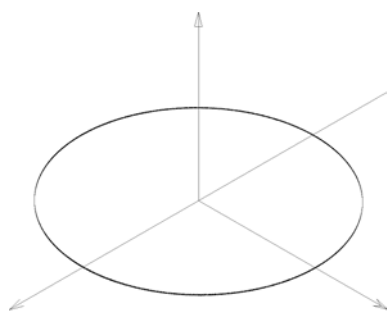
(1) $\theta=180$ 度， $\alpha=0$ 度： $v_0=0$ ， $\beta=0$ 。从下图可以看到，摆球从正南方向开始往小掉，这是由于在北纬 45 度离心力偏向南方。摆球作圆周运动，且轨迹开始有进动现象，后来逐渐趋于稳定的圆周运动，不再进动。另一个现象是摆球不能遍历整个球面。



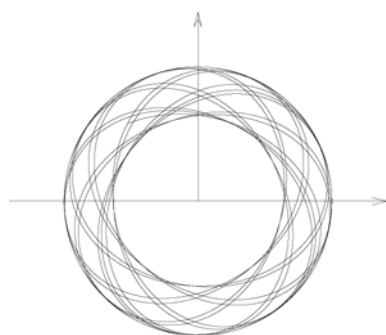
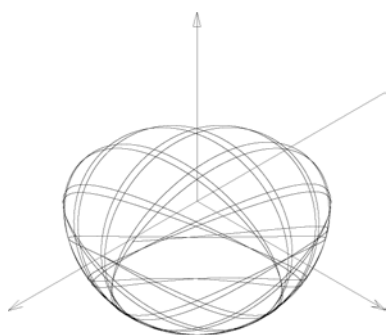
(2) $\theta=90$ 度， $\alpha=0$ 度：施以正北方向(即 $\beta=90$ 度)不同大小的初速度，得到以下几组图片。



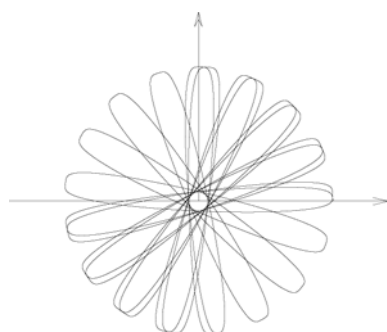
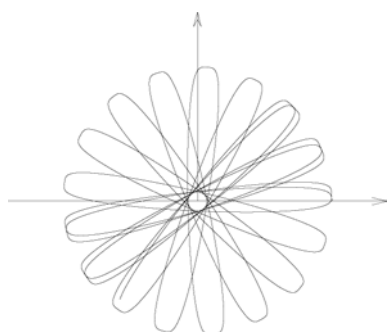
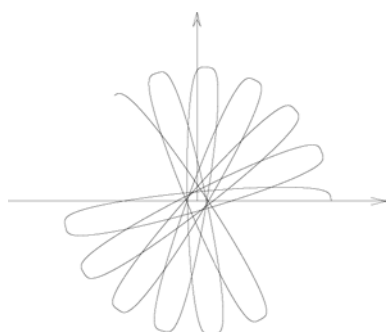
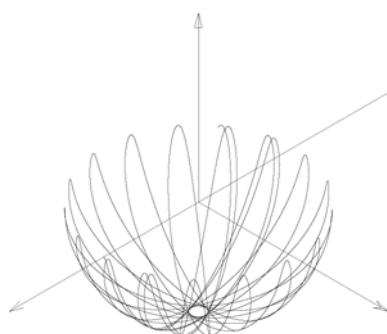
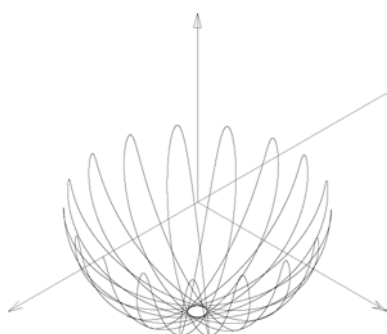
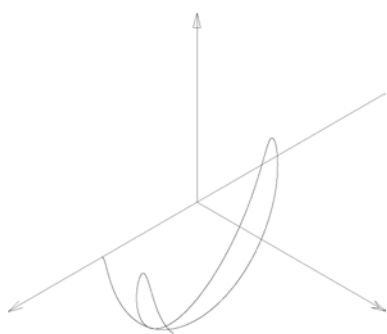
初速度为 0



初速度为 100m/s

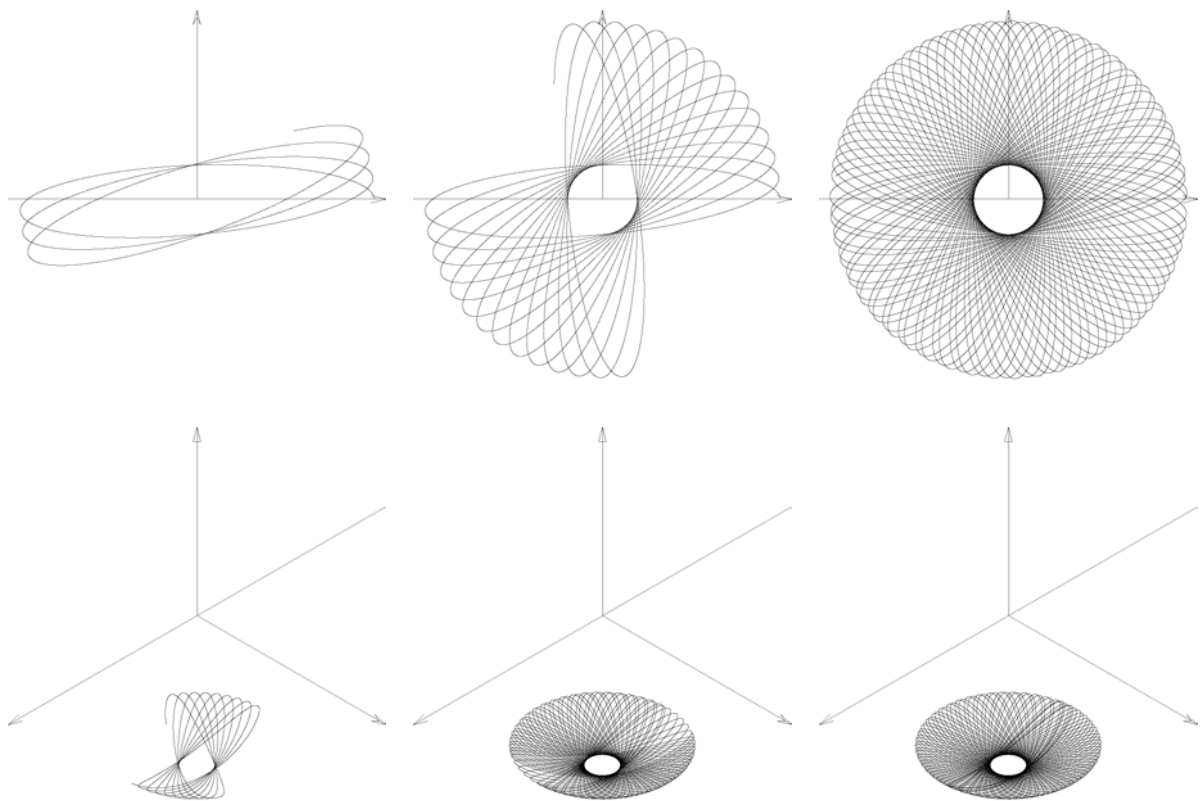


初速度为 10m/s

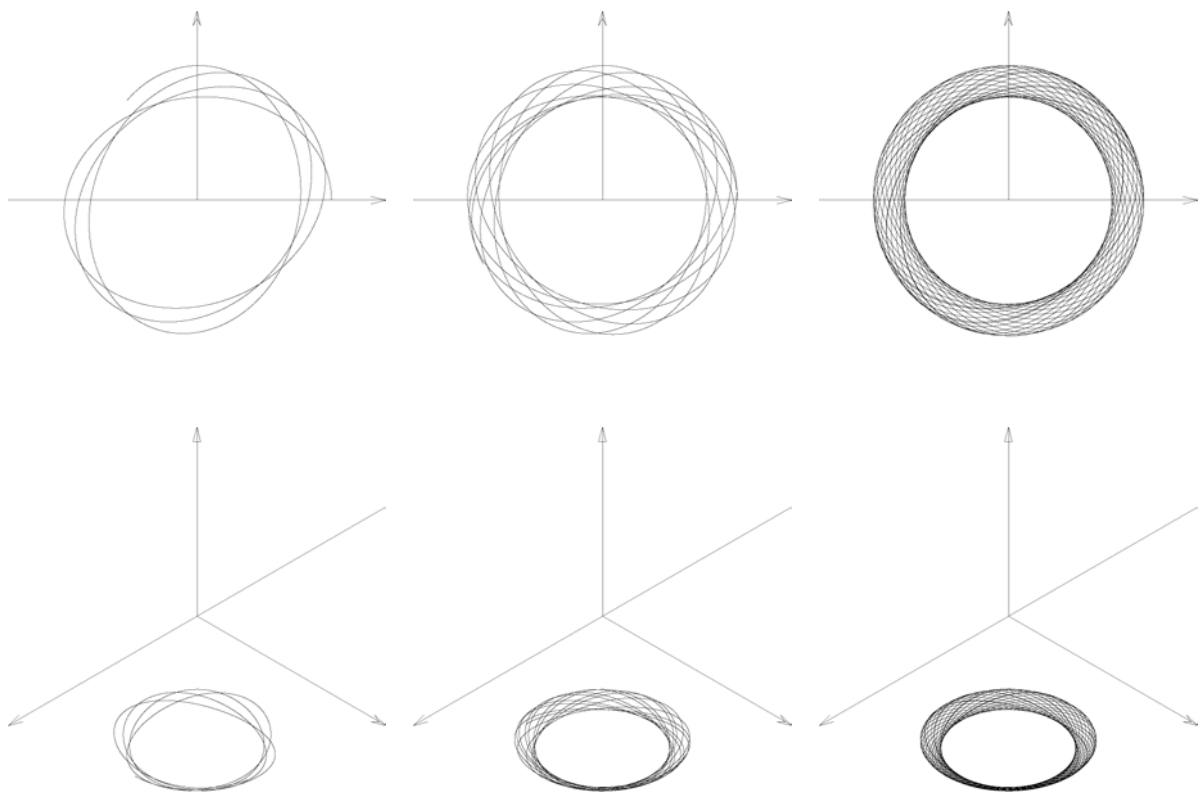


初速度为 1m/s

(3) $\theta=30$ 度, $\alpha=0$ 度: 施以正北方向(即 $\beta=90$ 度)不同大小的初速度, 得到以下几组图片。



初速度为 1m/s



初速度为 3m/s

可见，傅科摆运动轨迹的形状、进动方向与进动周期、轨迹弯曲方向等受到初始速度的强烈影响。

5 结论与讨论

通过数值模拟研究傅科摆的运动，获得了较直观的运动图象，观察到了一些有趣的现象。模拟结果表明，傅科摆的运动是一种较复杂的振动，除观察到文献^[1,2]中描述的特定条件下的特殊轨迹(内摆线和玫瑰线)外，通过试验不同的初始条件，还观察到了其它形状的轨迹；另一个结论是，傅科摆轨迹的弯曲方向和进动周期并非唯一取决于地理纬度，在相当大的程度上还受到初始位置和初始速度的影响。

模拟过程中面临两难抉择，一方面为了看清楚未畸变的成比例的轨迹及其变化过程，希望加快进动速度或减慢摆动速度，这就需要增大 L 、减小 g 、或增大 Ω ；另一方面，增大 L 到可与地球半径相比拟的程度看起来有点偏离实际，且这种情况下必须根据摆球的位置修正重力加速度的方向以使其始终指向地球中心，往往不能反映真实的可实现的傅科摆的运动；减小 g 或增大 Ω 则更会使模拟结果不符合真实的傅科摆，因为这种办法会使离心力成为支配运动的主要成分，会导致异乎寻常的现象，可以说看到的完全不是地球上的傅科摆。

模拟过程遇到的另一个困难是往往稍不小心就找不到摆球，程序输出的图片上一片空白，原因还是离心力在作怪，它导致摆球的静止平衡位置偏离 z 轴负向，在摆幅较小时往往就跑到了照相机的视野之外。而且看起来动平衡位置在某些情况下还会偏离静平衡位置。这些因素往往导致机器傻瓜因为找不着摆球拍照而乱拍一幅交差。所以，用户被机器欺骗以后可根据程序在屏幕上输出的一些信息(例如静平衡位置等)在输入参数文件中手动设置照相机参数，然后重新开始。人毕竟比机器聪明一些。

关于计算中采用的时间步长，在感觉结果不对劲儿时也可以由用户指定，特别是在单摆周期公式失效的情况下。

如果忽略离心力项，模拟工作会简单且顺利得多，否则似乎不是在研究傅科摆，而是在对付离心力。

看到的图象几乎都含有一些非实际的因素，唯一的例外就是进动周期随纬度的变化曲线，因为那是完全按照地球上真正可实现的傅科摆参数进行模拟的。

参考文献

- 1 陈刚. 傅科摆轨道的计算与讨论. 大学物理. 12(6), p6(1993)
- 2 漆安慎等. 《力学》. 高等教育出版社
- 3 刘小石等. 《精通 Visual C++ 6.0》. 清华大学出版社
- 4 归行茂等. 《数学手册》. 上海科学普及出版社

附录 A 满足傅科摆约束条件的 Euler-Cromer 方法的校正公式

A1 引言

在傅科摆模拟过程中，按 Euler-Cromer 方法，根据当前的运动状态 \mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$ ，利用式(14)计算出当前的加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ ，再利用近似的数值计算公式得到下一步的 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$ ，这一过程的不断重复得出了模拟结果。

由式(9)、(10)、(11)知，傅科摆的约束条件为

$$\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} - L^2 = 0, \quad \mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{r} \bullet \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A1})$$

由式(14)，有

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{L^2} \mathbf{r} \quad (\text{A2})$$

上式两端点乘 \mathbf{r} 得

$$\mathbf{r} \bullet \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \bullet \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{L^2} \mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = -\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{当 } \mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = L^2) \quad (\text{A3})$$

所以，对于计算过程中的每一步，只要 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$ 的当前值满足约束条件，则按式(14)或式(A2)计算得到的 $\ddot{\mathbf{r}}$ 肯定满足约束条件 $\mathbf{r} \bullet \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \bullet \dot{\mathbf{r}}$ ，从而 \mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 的当前值都满足约束条件。问题是按 Euler-Cromer 方法根据当前值计算得到的下一步的 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$ 却不见得满足约束条件 $\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = L^2$ 和 $\mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} = 0$ ，违背约束条件的原因是 Euler-Cromer 公式在时间步长有限的情况下是近似的。为了尽可能准确地模拟傅科摆的运动，当然希望每一步都能使约束条件得到满足。为此，利用 Euler-Cromer 方法对下一步的 \mathbf{r} 和 $\dot{\mathbf{r}}$ 进行预测，再对预测值进行最小的校正，使校正结果满足约束条件。实际上约束条件必须满足，Euler-Cromer 公式是近似的，而校正量又是最小的，因而这样的校正是合理的。这样，只要初始条件满足约束条件，以后的每一步都会满足约束条件。

Euler-Cromer 公式的预测值为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t \\ \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} \Delta t \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A4})$$

校正形式为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} + \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{r}}_{i+1} \bullet \tilde{\mathbf{v}}_{i+1}) \\ \mathbf{r}_{i+1} = \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} + \boldsymbol{\delta}(\tilde{\mathbf{r}}_{i+1}^2 - L^2) \end{cases} \quad (\text{A5})$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 为待定的“小”矢量，有点类似于拉格朗日乘子。这样，如果预测值满足约束条件式(A1)，则校正值就等于预测值；如果预测值偏离约束条件式(A1)，则校正量正比于偏离程度。

在以下的推导过程中，根据式(A5)，利用约束条件得出最小的 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 。由于式(A5)中出现的量的下标都是 $i+1$ ，所以为了书写简便，以下省略下标，记 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{i+1}$ ， $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1}$ ， $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}_{i+1}$ ， $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\dot{\mathbf{r}}} = \tilde{\dot{\mathbf{r}}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{i+1}$ 。

A2 关于 \mathbf{r} 的校正公式

在预测值不满足约束条件，即 $\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2 \neq 0$ 时，欲使校正结果满足约束条件，由式(A5)，须

$$\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} - L^2 = (\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2) + \boldsymbol{\delta} \bullet \boldsymbol{\delta} (\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2)^2 + 2\tilde{\mathbf{r}} \bullet \boldsymbol{\delta} (\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2) = 0$$

即

$$\boldsymbol{\delta} \bullet \boldsymbol{\delta} (\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2) + 2\tilde{\mathbf{r}} \bullet \boldsymbol{\delta} + 1 = 0$$

改写为

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} \bullet \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} \delta^2 (\tilde{\mathbf{r}}^2 - L^2) + 2\tilde{\mathbf{r}} \bullet \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} + 1 = 0$$

由于 $\frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} \cdot \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} = 1$ ，所以上式等价于

$$\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 2\delta \tilde{r} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} = 0$$

即 $\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \cdot \left[\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} [\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1] + 2\delta \tilde{r} \frac{\boldsymbol{\delta}}{\delta} \right] = 0$ ，或写成

$$\tilde{\mathbf{r}} \cdot [\tilde{\mathbf{r}} [\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1] + 2\tilde{r}^2 \boldsymbol{\delta}] = 0 \quad (\text{A6})$$

在与 $\tilde{\mathbf{r}}$ 垂直的平面内任取两个相互垂直的单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} ，则单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}$ 两两相互垂直，且任何矢量都可以由其在这三个方向的分量来表示。从而 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_r + \boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{\delta}_j = \delta_r \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} + \delta_i \mathbf{i} + \delta_j \mathbf{j}$ ， $\delta^2 = \delta_r^2 + \delta_i^2 + \delta_j^2$ 。由于 $\tilde{\mathbf{r}} \neq 0$ ，式(A6)表明矢量 $\tilde{\mathbf{r}}$ 与矢量 $\tilde{\mathbf{r}} [\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1] + 2\tilde{r}^2 \boldsymbol{\delta}$ 相互垂直，即 $[\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1]\tilde{\mathbf{r}} + 2\tilde{r}^2 \boldsymbol{\delta} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j}$ ，其中 c_1 、 c_2 为待定系数。从而

$$[\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1]\tilde{\mathbf{r}} + 2\tilde{r}^2 (\boldsymbol{\delta}_r + \boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{\delta}_j) = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} \quad (\text{A7})$$

依次用 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\tilde{\mathbf{r}}$ 点乘上式，利用 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\tilde{\mathbf{r}}$ 两两相互垂直的性质，得

$$2\tilde{r}^2 \delta_i = c_1 \quad (\text{A8})$$

$$2\tilde{r}^2 \delta_j = c_2 \quad (\text{A9})$$

$$2\tilde{r}^2 \delta_r = -[\delta^2 (\tilde{r}^2 - L^2) + 1]\tilde{r} \quad (\text{A10})$$

(A8)、(A9)、(A10)三式平方相加，得 $[\delta^4 (\tilde{r}^2 - L^2)^2 - 2\delta^2 (L^2 + \tilde{r}^2) + 1]\tilde{r}^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0$ ，即

$$[\delta^2 (\tilde{r} + L)^2 - 1][\delta^2 (\tilde{r} - L)^2 - 1]\tilde{r}^2 + c_1^2 + c_2^2 = 0 \quad (\text{A11})$$

我们的目标是要求 δ^2 尽可能小。不难看出，只要 $\delta^2 \leq \frac{1}{(\tilde{r} + L)^2}$ ，则 $\delta^2 (\tilde{r} + L)^2 - 1 \leq 0$ 且 $\delta^2 (\tilde{r} - L)^2 - 1 \leq 0$ ，

从而 $[\delta^2 (\tilde{r} + L)^2 - 1][\delta^2 (\tilde{r} - L)^2 - 1] \geq 0$ ，所以式(A11)左端的每一项都非负。这样，为了满足式(A11)，必须有

$c_1 = c_2 = 0$ ， $\delta^2 = \frac{1}{(\tilde{r} + L)^2}$ ，于是由式(A8)、(A9)、(A10)得 $\delta_i = \delta_j = 0$ ， $\delta_r = -\frac{1}{\tilde{r} + L}$ 。故

$$\boxed{\boldsymbol{\delta} = -\frac{1}{\tilde{r} + L} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}} \quad (\text{A12})$$

这就是唯一选择，除非愿意让 δ 更大。将式(A12)代入式(A5)，得

$$\boxed{\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\delta} (\tilde{r}^2 - L^2) = \frac{L}{\tilde{r}} \tilde{\mathbf{r}}} \quad (\text{A13})$$

A3 关于 \mathbf{v} 的校正公式

在预测值不满足约束条件，即 $\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \neq 0$ 时，欲使校正结果满足约束条件，由式(A5)，须 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ ，而据式(A13)，这等价于 $\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0$ 。由式(A5)得

$$0 = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{r}} \cdot [\tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma} (\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})] = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) = (\tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (1 + \tilde{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

由于 $\tilde{\mathbf{r}} \bullet \tilde{\mathbf{v}} \neq 0$ ，所以必须 $\tilde{\mathbf{r}} \bullet \boldsymbol{\sigma} + 1 = 0$ ，改写为 $\tilde{\mathbf{r}} \bullet \boldsymbol{\sigma} + 1 = \tilde{r} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \bullet \boldsymbol{\sigma} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \bullet \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \bullet (\tilde{r} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}) = 0$ ，即

$$\tilde{\mathbf{r}} \bullet (\tilde{r}^2 \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{r}}) = 0 \quad (\text{A14})$$

在与 $\tilde{\mathbf{r}}$ 垂直的平面内任取两个相互垂直的单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} ，则单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}$ 两两相互垂直，且任何矢量都可以由其在这三个方向的分量来表示。从而 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_j = \sigma_r \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} + \sigma_i \mathbf{i} + \sigma_j \mathbf{j}$ ， $\sigma^2 = \sigma_r^2 + \sigma_i^2 + \sigma_j^2$

由于 $\tilde{\mathbf{r}} \neq 0$ ，式(A14)表明矢量 $\tilde{\mathbf{r}}$ 与矢量 $\tilde{r}^2 \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{r}}$ 相互垂直，即 $\tilde{r}^2 \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{r}} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j}$ ，其中 c_1 、 c_2 为待定系数。从而

$$\tilde{r}^2 (\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\sigma}_j) + \tilde{\mathbf{r}} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} \quad (\text{A15})$$

依次用 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\tilde{\mathbf{r}}$ 点乘上式，利用 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 $\tilde{\mathbf{r}}$ 两两相互垂直的性质，得

$$\tilde{r}^2 \sigma_i = c_1 \quad (\text{A16})$$

$$\tilde{r}^2 \sigma_j = c_2 \quad (\text{A17})$$

$$\tilde{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_r = -1 \quad (\text{A18})$$

(A16)、(A17)、(A18)三式平方相加，得 $\tilde{r}^4 \sigma^2 = \tilde{r}^2 + c_1^2 + c_2^2$ ，即

$$\tilde{r}^2 (1 - \tilde{r}^2 \sigma^2) + c_1^2 + c_2^2 = 0 \quad (\text{A19})$$

我们的目标是要求 σ^2 尽可能小。只要 $\sigma^2 \leq \frac{1}{\tilde{r}^2}$ ，则 $1 - \tilde{r}^2 \sigma^2 \geq 0$ ，从而式(A19)左端的每一项都非负。这样，为了满足式(A19)，必须有 $c_1 = c_2 = 0$ ， $\sigma^2 = \frac{1}{\tilde{r}^2}$ ，于是由式(A16)、(A17)、(A18)得 $\sigma_i = \sigma_j = 0$ ， $\sigma_r = -\frac{1}{\tilde{r}}$ 。故

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^2}} \quad (\text{A20})$$

这就是唯一选择，除非愿意让 σ 更大。将式(A20)代入式(A5)，得

$$\boxed{\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{r}} \bullet \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\tilde{\mathbf{r}} \bullet \tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{r}^2} \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{v}} - (\frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}} \bullet \tilde{\mathbf{v}}) \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}} \quad (\text{A21})$$

A4 校正后对 Euler-Cromer 方法精度的影响

由式(A13)、(A4)得

$$\mathbf{r}_{i+1} = \frac{L}{\tilde{r}_{i+1}} \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} = \frac{L}{\sqrt{(\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + \mathbf{a}_i \Delta t^2) \bullet (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + \mathbf{a}_i \Delta t^2)}} (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + \mathbf{a}_i \Delta t^2)$$

对上式右端作泰勒展开，整理后得到

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + (\mathbf{a}_i + \frac{\mathbf{v}_i^2}{2L^2} \mathbf{r}_i) \Delta t^2 + (\frac{\mathbf{v}_i^2}{2L^2} \mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{a}_i}{L^2} \mathbf{r}_i) \Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (\text{A22})$$

可见，实际上校正只影响从 Δt^2 项开始的高阶项。

由式(A21)、(A4)得

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{i+1} &= \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} - \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{i+1} \bullet \tilde{\mathbf{v}}_{i+1}}{\tilde{r}_{i+1}^2} \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} - \frac{(\mathbf{r}_i + \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} \Delta t) \bullet \tilde{\mathbf{v}}_{i+1}}{\tilde{r}_{i+1}^2} \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} \\
&= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t - \frac{[\mathbf{r}_i + (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t) \Delta t] \bullet (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t)}{[\mathbf{r}_i + (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t) \Delta t] \bullet [\mathbf{r}_i + (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t) \Delta t]} [\mathbf{r}_i + (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t) \Delta t] \\
&= \frac{[1 - \frac{v_i^2}{r_i^2} \Delta t^2](\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t) - [\frac{a_i^2}{r_i^2} \Delta t^3 + 2 \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{a}_i}{r_i^2} \Delta t^2] \mathbf{r}_i}{1 - \frac{v_i^2}{r_i^2} \Delta t^2 + \frac{a_i^2}{r_i^2} \Delta t^4 + 2 \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{a}_i}{r_i^2} \Delta t^3}
\end{aligned}$$

对上式右端作泰勒展开，整理后得到

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t - 2 \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{a}_i}{L^2} \mathbf{r}_i \Delta t^2 - \left(\frac{a_i^2}{L^2} \mathbf{r}_i + 2 \frac{\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{a}_i}{L^2} \mathbf{v}_i \right) \Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (\text{A23})$$

可见，实际上校正仍然只影响从 Δt^2 项开始的高阶项。

由式(A4)知，Euler-Cromer 公式的精度为一阶精度，而校正只影响从 Δt^2 项开始的高阶项，所以校正后的精度仍为一阶精度，不会损失 Euler-Cromer 公式的精度。

A5 结论

在傅科摆模拟计算过程中的每一步，根据当前的满足约束条件的运动状态(\mathbf{r} 、 $\dot{\mathbf{r}}$)，按照经典牛顿第三定律计算加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ ，然后利用 Euler-Cromer 方法对下一步的运动状态进行近似预测，最后对预测结果必须进行修正，才能得到满足约束条件的运动状态。本附录论证了存在最小修正，并得到了最小修正的计算公式。