第九讲
机器人动力学

张　继　文

清华大学　机械工程系
　　　　　机械电子所

电话：　（010）62796698

E-mail:　jwzhang@mail.tsinghua.edu.cn

后续课程安排

周 次	日 期	教学内容	备注
1	09. 14	绪论	授课
2	09. 21	机器人概述	授课
3	09. 28	机器人基础知识	授课
4	10. 05	实验1：机器人认知实验	实验
5	10. 12	机器人运动学1	授课
6	10. 19	机器人运动学2	授课
7	10. 26	机器人运动学3	授课
8	11. 02	机器人运动学4	授课
9	11. 09	标定与编程	授课
10	11. 16	实验2：工业机器人标定与编程实验	实验
11	11. 23	轨迹规划	授课
12	11. 30	机器人动力学	授课
13	12. 07	运动控制	授课
14	12. 14	路径规划	授课
15	12. 21	机器人视觉	授课

本堂主要内容

- 机器人运动学回顾
- 机器人动力学概述
- 动力学建模方法
- 动力学方程分析及应用

- 齐次变换矩阵
- DH规则为操作臂建模
- 正运动学：关节空间→操作空间
- 逆运动学：操作空间→关节空间
- 微分运动学：Jacobian矩阵

■ 工具箱中的更多概念

✓ **SO(2), SE(2), SO(3), SE(3)** **特殊正交群， 特殊欧式群**

SO(2)	2x2单位正交矩阵	2D姿态及旋转变换
SE(2)	3x3齐次变换矩阵	2D位姿及位姿变换
SO(3)	3x3单位正交矩阵	3D姿态及旋转变换
SE(3)	4x4齐次变换矩阵	3D位姿及位姿变换

■ DH规则建立机器人运动学模型

$$T_{i-1}^{i}=T(z_{i-1},d_i)R(z_{i-1},\theta_i)T(x_i,a_i)R(x_i,\alpha_i)$$

$$\begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^n=T_0^1T_1^2\ldots T_{n-1}^n$$

$$=\begin{bmatrix} R_0^n & P_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & s & a & P_0^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

？机器人工具箱里怎样建立机器人模型

■ 机器人正运动学，逆运动学，Jacobian矩阵

$$T_0^n = T_0^1 T_1^2 \ldots T_{n-1}^n$$

$$= \begin{bmatrix} R_0^n & P_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & P_0^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

已知T_{i-1}^i求 T_0^n

已知 T_0^n 求T_{i-1}^i

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \left[\frac{dh(q)}{dq} \right]_{6\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

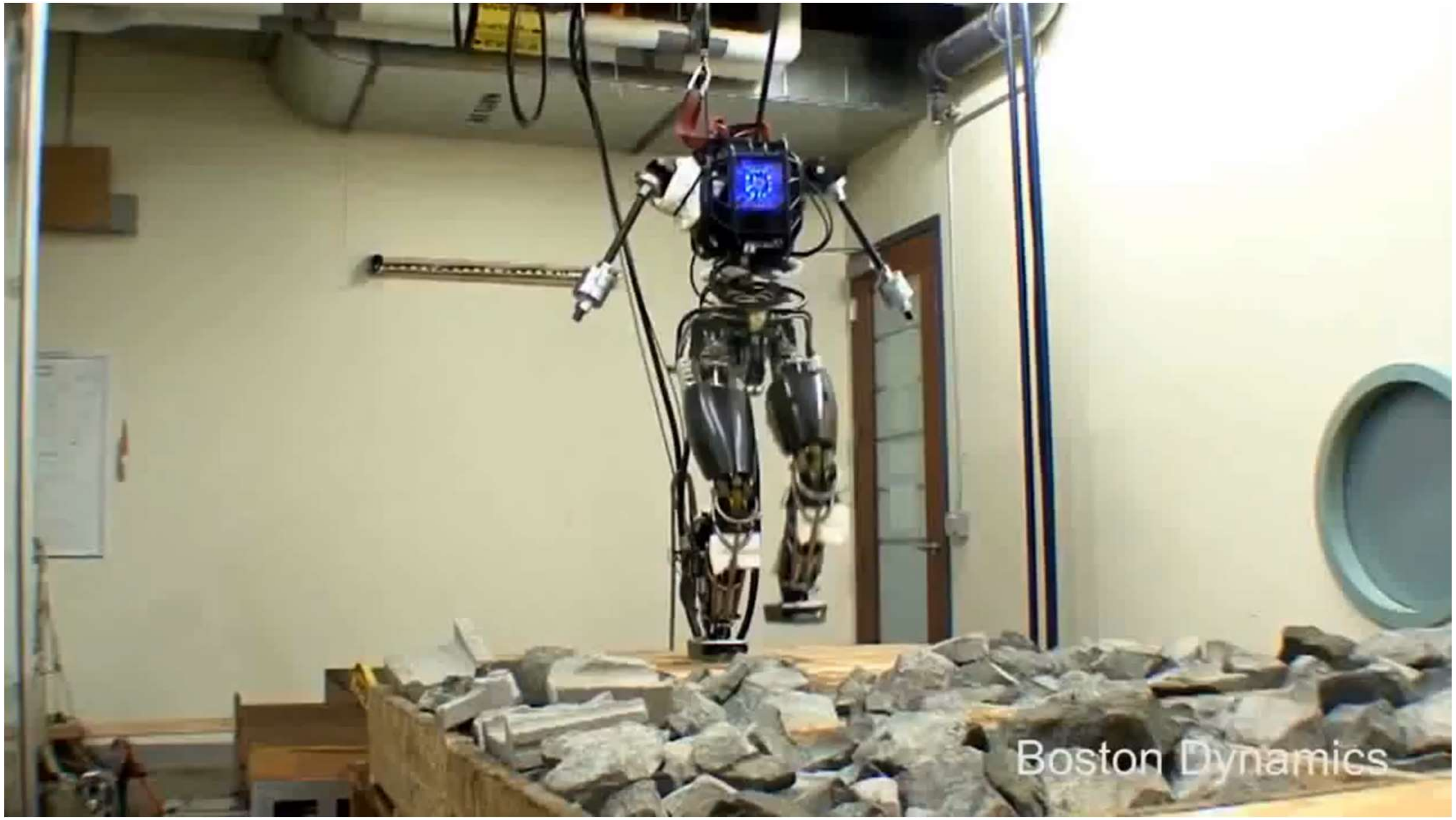
$$J = \left(\frac{dh(q)}{dq} \right)_{6\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_6}{\partial q_1} & \frac{\partial h_6}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h_6}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{6\times n}$$

- 运动学方程只是描述了机器人的位姿、速度、加速度等运动学参数的求解，相互关系。但本质上，力和力矩产生了运动，动力学方程描述了力和运动的关系

- 动力学方程的用途
  - ✓ 设计机器人
  - ✓ 计算机仿真
  - ✓ 运动控制算法

2.1 动力学的重要作用

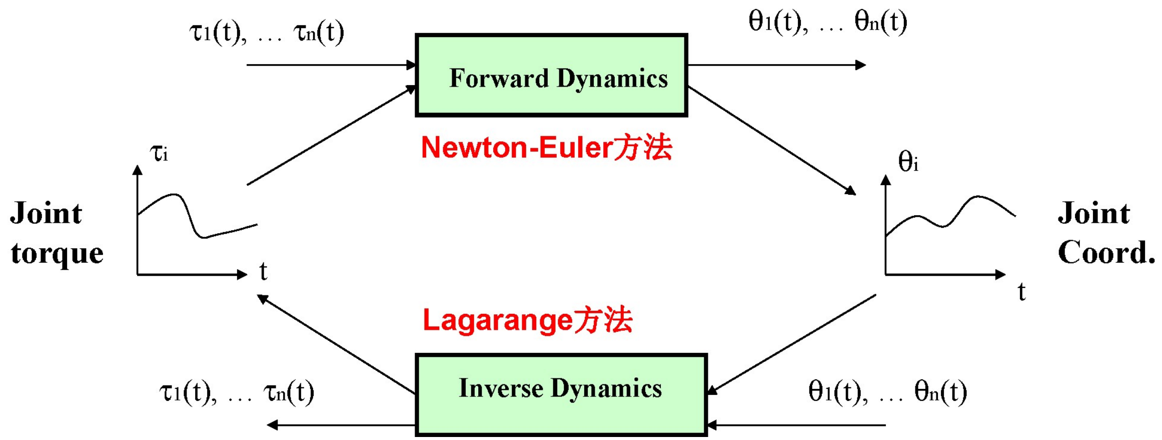
2.1 动力学的重要作用



2.1 动力学的重要作用

2.2 机器人动力学建模方法

- Lagrange方法
  - 基于虚位移和虚功原理，针对整体系统
  - 易于从理论角度理解动力学
- Newton-Euler方法
  - 基于力平衡和力矩平衡，递推式算法
  - 易于计算机进行数值计算

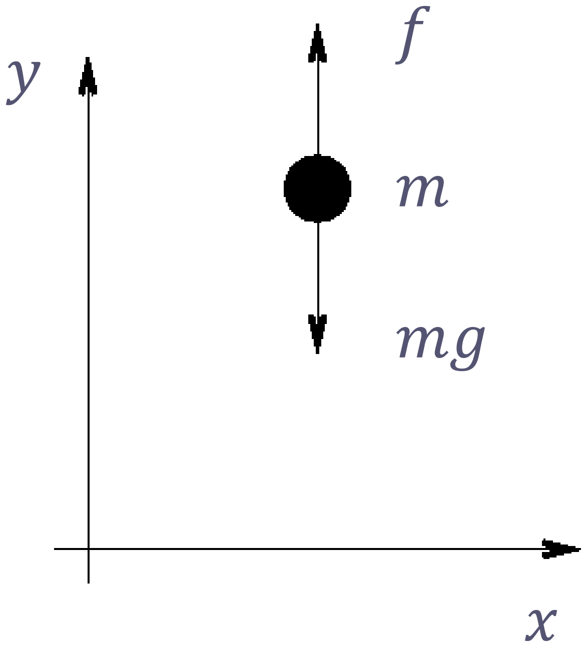


本堂主要内容

- 机器人运动学回顾
- 机器人动力学概述
- 动力学建模方法
- 动力学方程分析及应用

3.1 虚功原理

- 针对一个质点建立动力学方程



$$\boxed{m\ddot{y} = f - mg}$$ 牛顿第二定律

$$K = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$ 动能

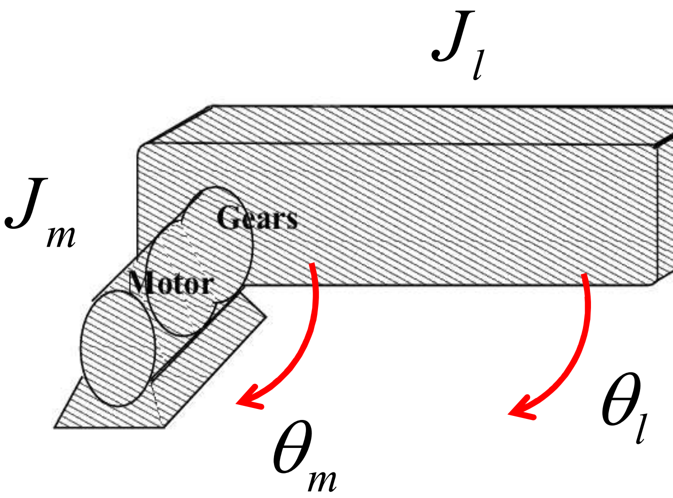
$$P = mgy$$ 重力势能

$$\boxed{L = K - P}$$ 拉格朗日函数

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f$$ 拉格朗日方程

3.1 简单示例

■ 一自由度机械臂建立动力学方程



$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_\ell\dot{\theta}_\ell^2 \\ &= \frac{1}{2}\underline{(r^2J_m + J_\ell)}\dot{\theta}_\ell^2 \end{aligned}$$

动能

$$P = Mg\ell(1-\cos\theta_\ell)$$

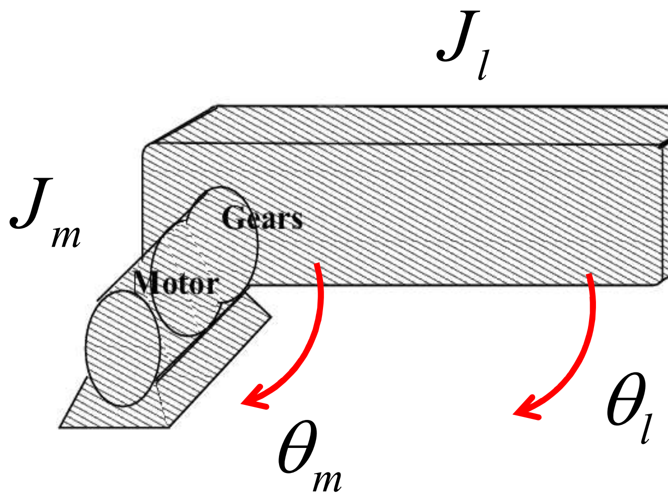
重力势能

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_\ell^2 - Mg\ell(1-\cos\theta_\ell)$$

拉格朗日函数

3.1 简单示例

- 一自由度机械臂建立动力学方程



$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \ldots, n$$

拉格朗日方程

$$J\ddot{\theta}_\ell + Mg\ell \sin\theta_\ell = \tau_\ell$$

动力学方程

- 电机的力矩输出还需要克服摩擦阻力

$$\tau = u - B\dot{\theta}_\ell$$

$$J\ddot{\theta}_\ell + B\dot{\theta}_\ell + Mg\ell \sin\theta_\ell = u$$

控制方程

3.2 Lagrange动力学方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \ldots, n$$

- 联系DH规则，自然的取n个关节变量作为广义坐标
- 只要能够写出拉格朗日函数，则立即可得动力学方程
- 正确的写出系统的动能和保守力势能即可得拉格朗日函数

3.2 Lagrange动力学方程

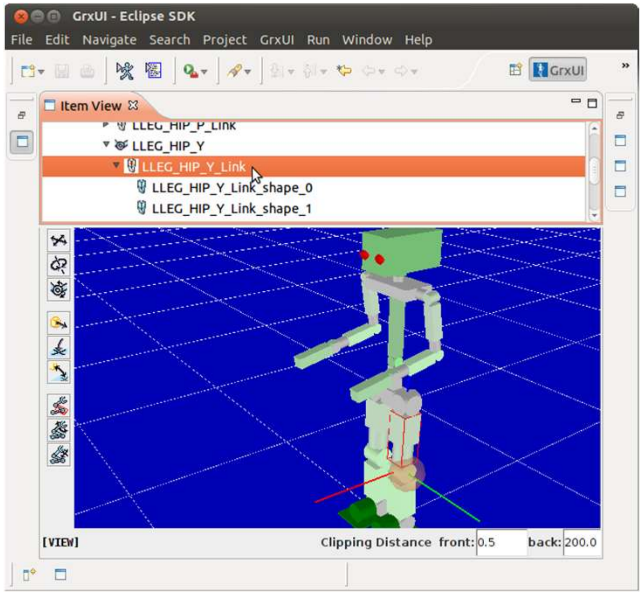
- 构成机器人杆件的动能

$$K=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$$

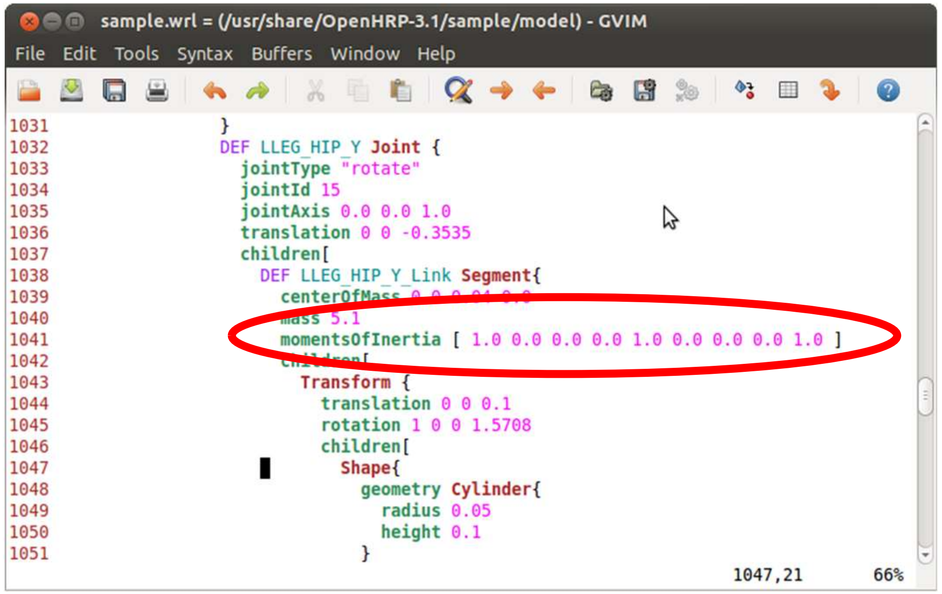
- 对于平面条件下的转动运动，用惯量矩I来描述转动的惯性，但在空间中，刚体的运动是三维的，用惯性张量$\boldsymbol{I}$来描述

3.3 惯性张量

■ **例子：在动力学仿真软件的机器人模型中需要设定惯性张量**

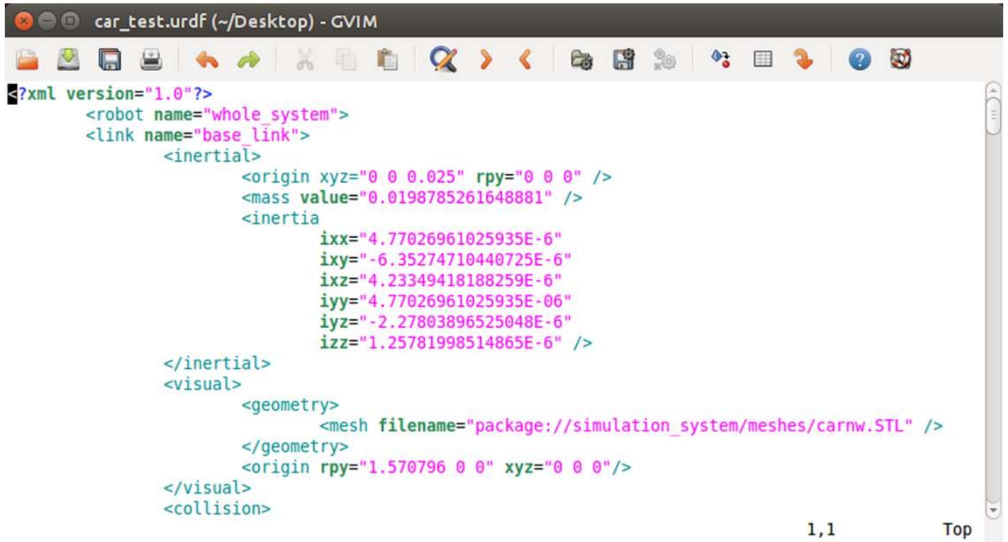


仿人机器人模型



模型描述文件

3.3 惯性张量



UR-10协作手臂　　　　UR-10模型描述文件

3.3 惯性张量

- **惯性张量/表达了刚体的质量分布**

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

惯量主矩

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int\int\int (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \\ I_{yy} &= \int\int\int (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \\ I_{zz} &= \int\int\int (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \end{aligned}$$

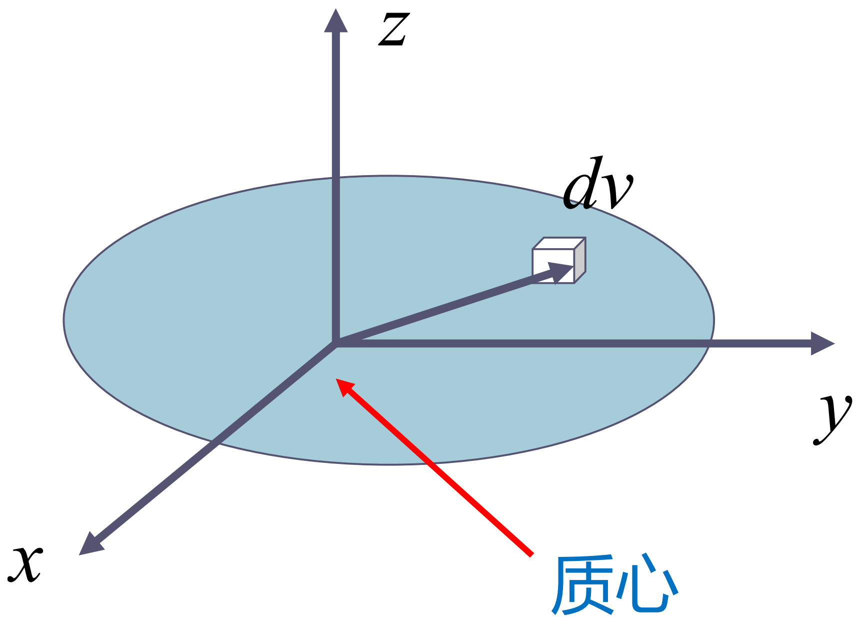
惯量积

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\int\int\int xy\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \\ I_{xz} = I_{zx} &= -\int\int\int xz\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \\ I_{yz} = I_{zy} &= -\int\int\int yz\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz \end{aligned}$$

3.3 惯性张量

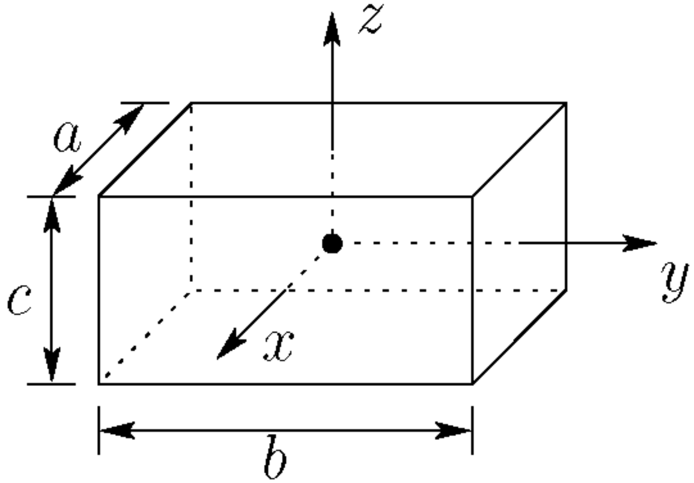
- **惯性张量/表达了刚体的质量分布**

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$



3.3 惯性张量

- 例子: 长方体尺寸如图，质量分布ρ均匀



$$I_{xx} = \int\int\int (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz$$

$$= \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dx\ dy\ dz = \rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2)$$

$$I_{yy} = \rho\frac{abc}{12}(a^2+c^2) \quad ; \quad I_{zz} = \rho\frac{abc}{12}(a^2+b^2)$$

3.3 惯性张量

- 针对任意的位于质心的坐标系

$$\boldsymbol{I}_2 = ({}^2\boldsymbol{R}_1) \cdot \boldsymbol{I}_1 \cdot ({}^2\boldsymbol{R}_1)^{\mathrm{T}}$$

- ${}^2R_1$ 是两个坐标系之间对应的旋转矩阵
- 若机器人连杆在自身固连坐标系下的惯性张量 I_1 、固连坐标系与全局坐标系的旋转变换关系 ${}^2R_1$ 已知，则立即可得全局坐标系下的惯性张量I_2

3.4 动能

- 依据Jacobian矩阵，可以将杆件动能表达为广义坐标q的函数

$$K=\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{\omega}_i$$

第i个杆件

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{J}_{v_i}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\qquad\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{J}_{\omega_i}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}$$

Jacobian阵

$$K=\frac{1}{2}\dot{q}^T\sum_{i=1}^{n}\left[m_iJ_{v_i}(q)^TJ_{v_i}(q)+J_{\omega_i}(q)^TR_i(q)I_iR_i(q)^TJ_{\omega_i}(q)\right]\dot{q}$$

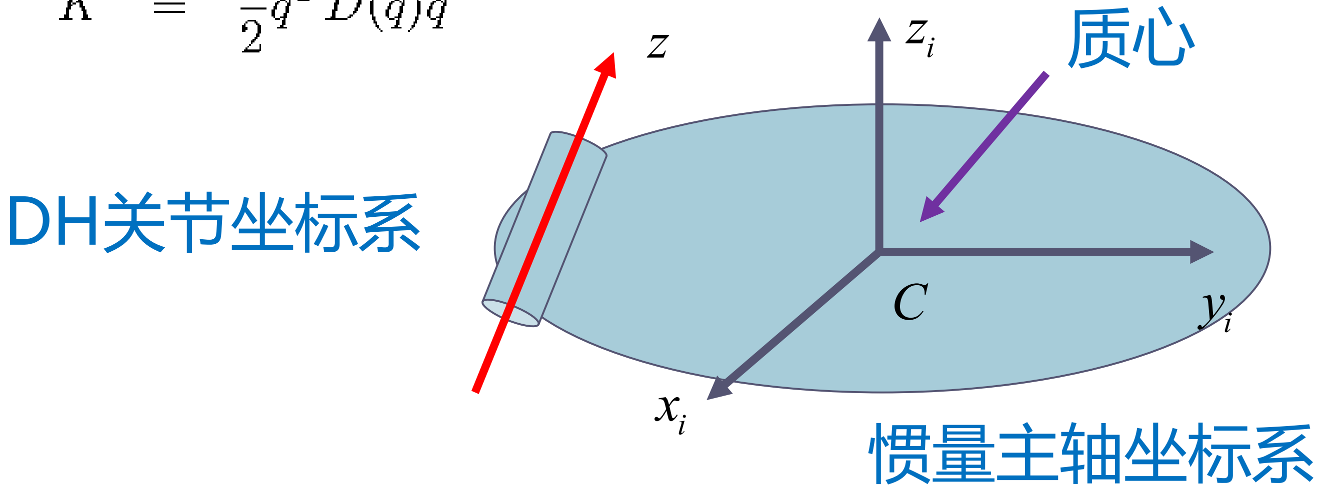
$$K=\frac{1}{2}\dot{q}^TD(q)\dot{q}$$

3.4 动能

- 依据Jacobian矩阵，可以将杆件动能表达为广义坐标q的函数

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} \left[m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + \underline{J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)} \right] \dot{q}$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$$



3.4 保守力势能

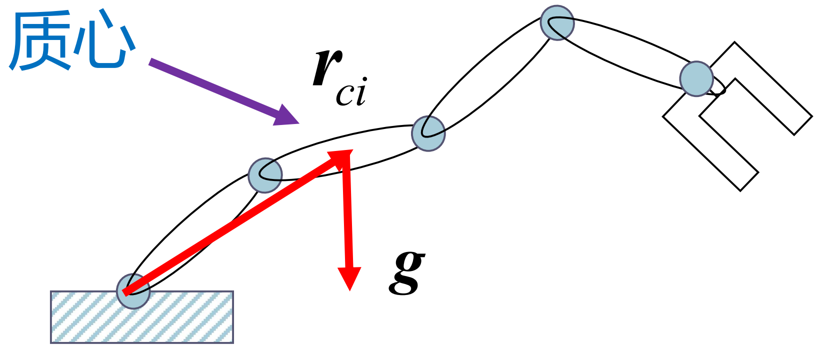
- **在地面主要是重力势能，如果有弹性元件，则需包含弹性势能**

$$P_i = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{r}_{ci} \cdot m_i$$

第i个杆件势能

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{r}_{ci} \cdot m_i$$

整体势能



3.4 Lagrange函数

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j := \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$$

$$L = K - P = \frac{1}{2}\sum_{i,j} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - P(q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}\dot{q}_j \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} d_{kj}\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

$$\sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k$$

3.5 动力学方程

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ijk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\boldsymbol{q}) = \tau_i \quad i = 1,\ldots,n.$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- 第一项是广义坐标的二阶微分项或加速度项
- 第二项是广义坐标的一阶微分的二次项，离心力项或科氏项
- 第三项是重力项
- 三项系数都依赖于广义坐标q

3.5 动力学方程

- 上述模型是关节处直接输出力矩，不存在摩擦力的状况
  - 驱动机构的细节？电机、减速器
  - 摩擦阻力？末端的非保守力？

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{T}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\tau}$$

- $F(\dot{q})$即为摩擦阻力，与关节运动速度有关
- $J(q)^{T}W$是末端作用力引起的关节广义力变化

3.5 动力学方程

- $J(q)^TW$是末端作用力引起的关节广义力变化——静力学

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^T \boldsymbol{W}$$

外部力

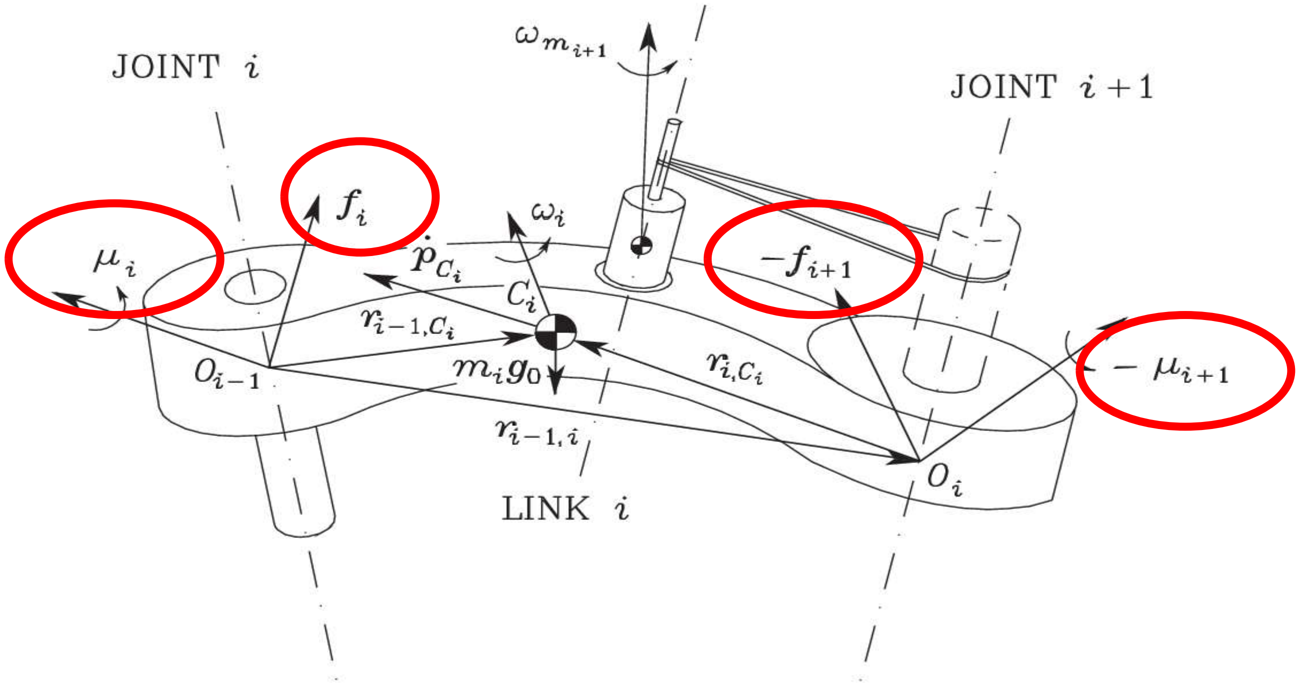
Jacobian的逆

- 由虚功原理得出

$$\delta W_\tau = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{q}$$
$$\delta W_\gamma = \gamma_e^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \delta \boldsymbol{q},$$

3.6 Newton-Euler思想简介

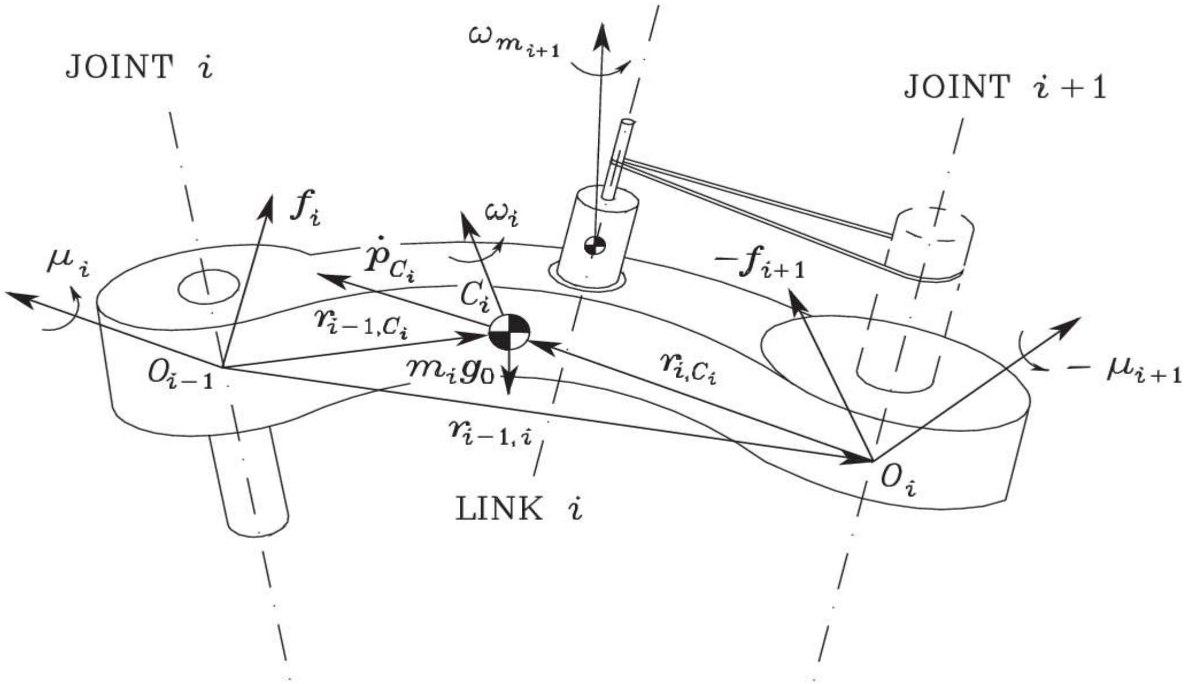
- Lagrange方法是将机器人视作一个系统，而Newton-Enler方法则是分部件建立方程



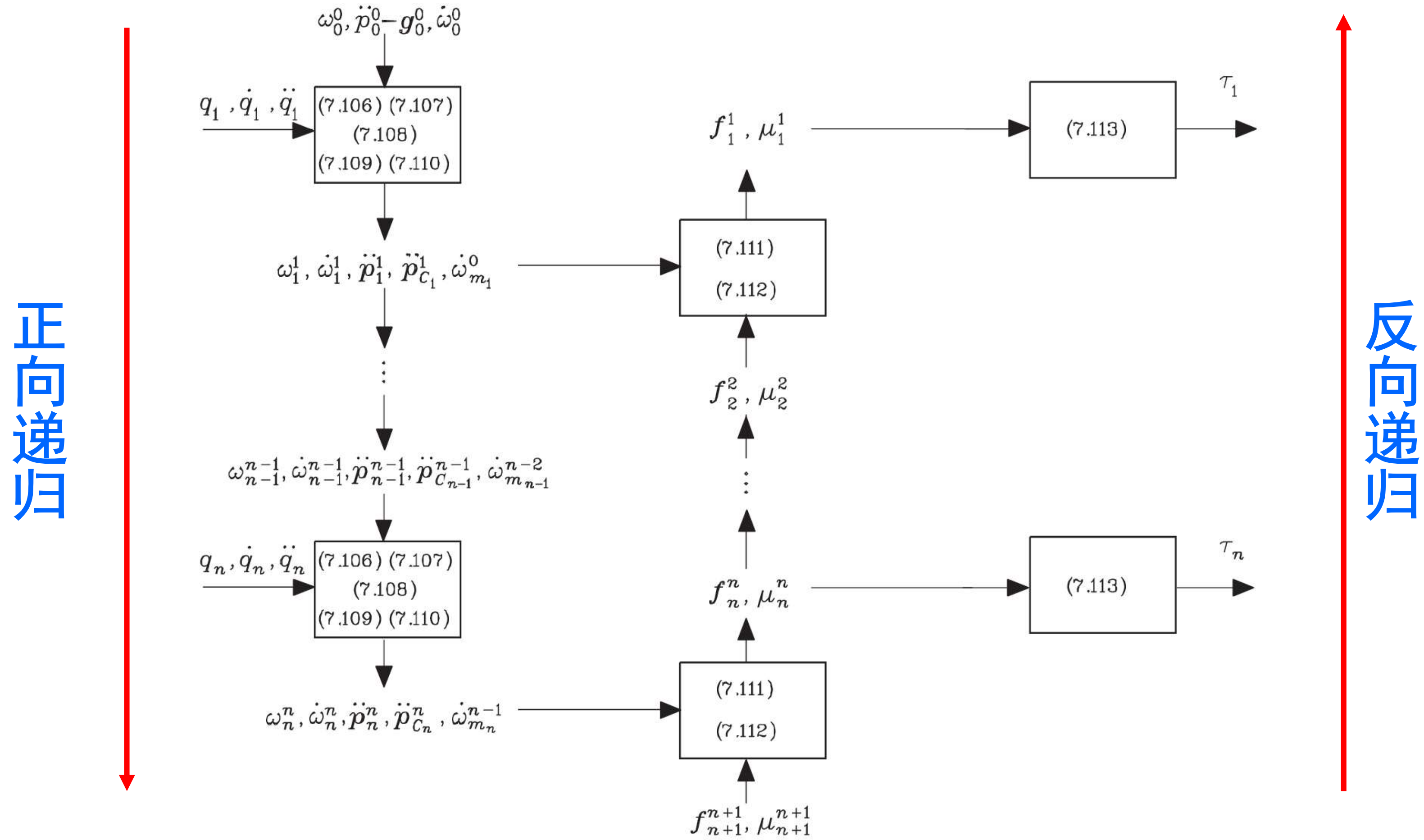
3.6 Newton-Euler思想简介

$$\boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_{i+1} + m_i \boldsymbol{g}_0 = m_i \ddot{\boldsymbol{p}}_{C_i}.$$

$$\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{f}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,C_i} - \boldsymbol{\mu}_{i+1} - \boldsymbol{f}_{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i,C_i} = \frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{I}}_i \boldsymbol{\omega}_i + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \boldsymbol{z}_{m_{i+1}}),$$



3.6 Newton-Euler思想简介



SICILIANO，BRUNO，Robotics Modelling, Planning and Control, chapter 7

本堂主要内容

- 机器人运动学回顾
- 机器人动力学概述
- 动力学建模方法
- 动力学方程分析及应用

4.1 动力学方程数值计算

>> mdl_puma560 创建机器人

>> p560.links(2).dyn 动力学参数显示

```
Link 2::Revolute(std): theta=q, d=0, a=0.4318, alpha=0, offset=0    DH参数
  m    = 17.4                                                         质量
  r    = -0.3638    0.006     0.2275                                  质心位置
  I    = | 0.13       0          0         |                          惯性张量
         | 0          0.524      0         |
         | 0          0          0.539     |
  Jm   = 0.0002                                                       电机惯性矩
  Bm   = 0.000817                                                     电机摩擦系数
  Tc   = 0.126     (+) -0.071    (-)                                  库伦摩擦系数
  G    = 107.8                                                        齿轮减速比
  qlim = -0.785398 to 3.926991                                        转角限位
```

4.1 动力学方程数值计算

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+F(\dot{q})+J(q)^{T}W=\tau$$

>> *Q = p560.rne([qn, qz, qz], 'fext', W)* 逆动力学计算

>> *gravload = p560.gravload(qn)* 重力项

>> *D = p560.inertia(qn)* 惯量矩阵

>> *C = p560.coriolis(qn, qd)* 科氏项

4.1 动力学方程数值计算

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+F(\dot{q})+J(q)^{T}W=\tau$$

```
>> p560.payload(2.5, [0 0 0.1]);
```
外加力项

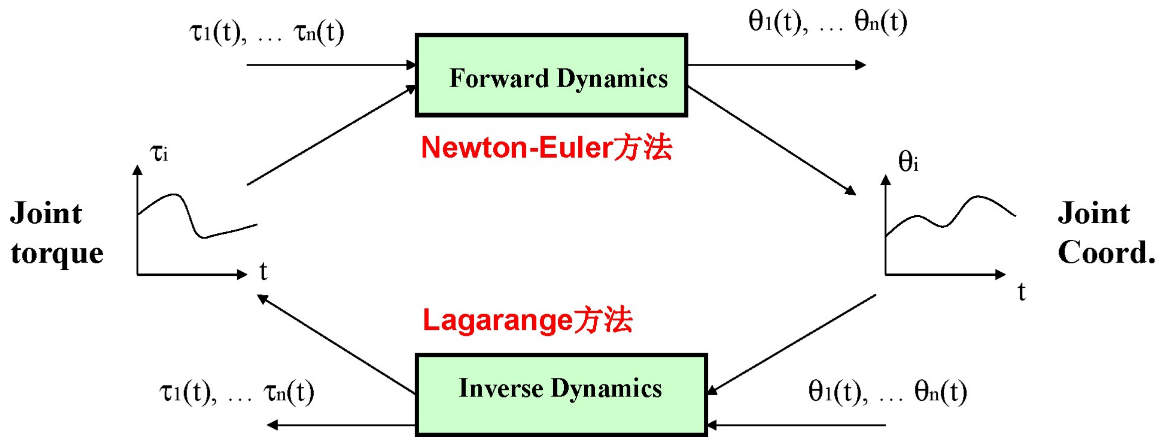
```
>> qn(1)*p560.dyn(1).Bm+ p560.dyn(1).Tc
```
摩擦力项

```
>> [Q, Wb] = p560.rne(qn, qz, qz);
```
基座受力

？获得基座受力的潜在应用

4.2 动力学模型的应用

- 动力学的两大问题：正向动力学，逆动力学
  - 正向动力学：已知关节广义力，求机器人运动，多用于计算机仿真
  - 逆动力学：已知机器人运动，求关节广义力，多用于关节控制器设计



4.2 正向动力学

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)\left(\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) + J(q)^T W\right)$$

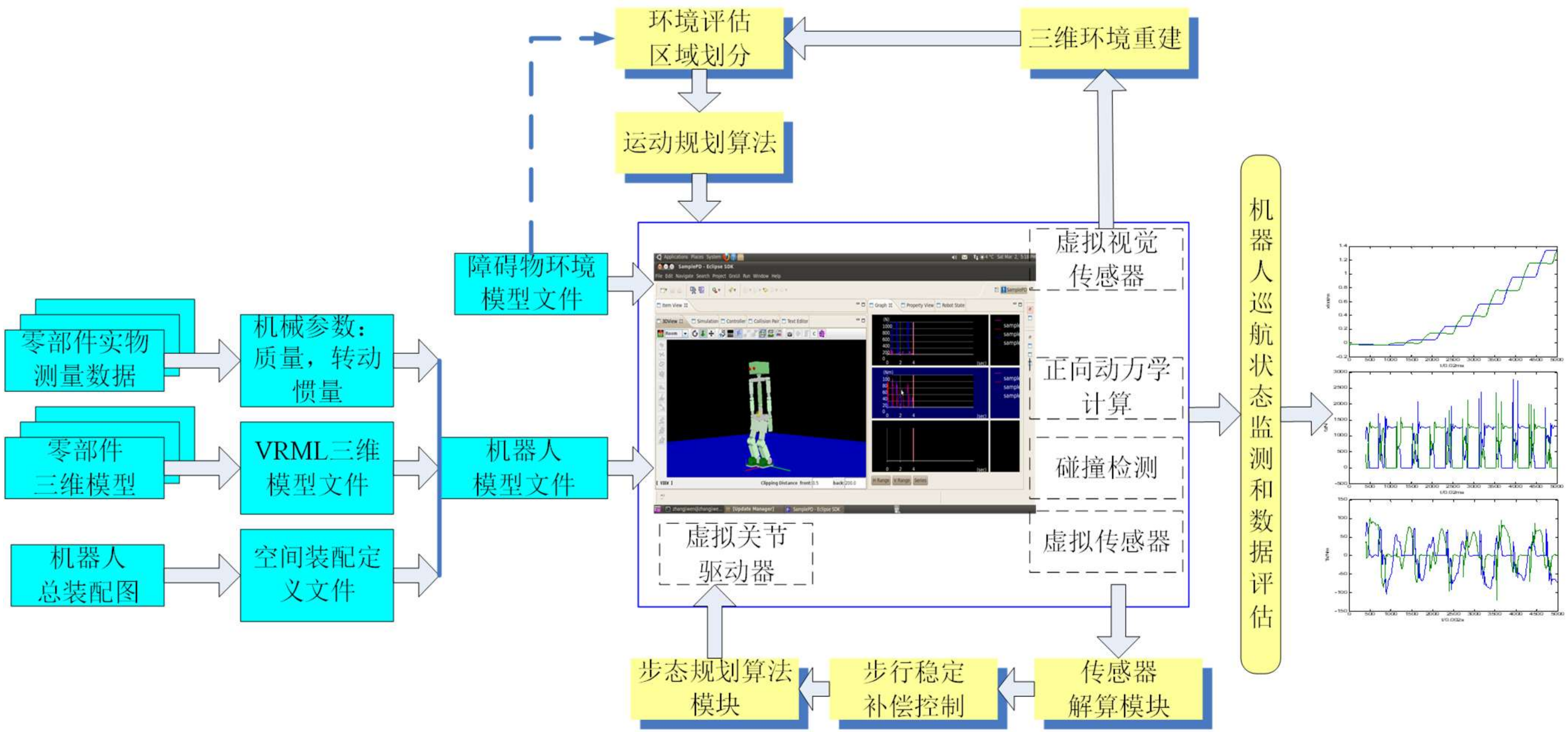
$$\ddot{q}_{k+1} = D^{-1}(q_k)\left(\tau - C(q_k,\dot{q}_k)\dot{q}_k + g(q_k) + F(\dot{q}_k) + J(q_k)^T W\right)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \ddot{q}_{k+1} \cdot \Delta t$$

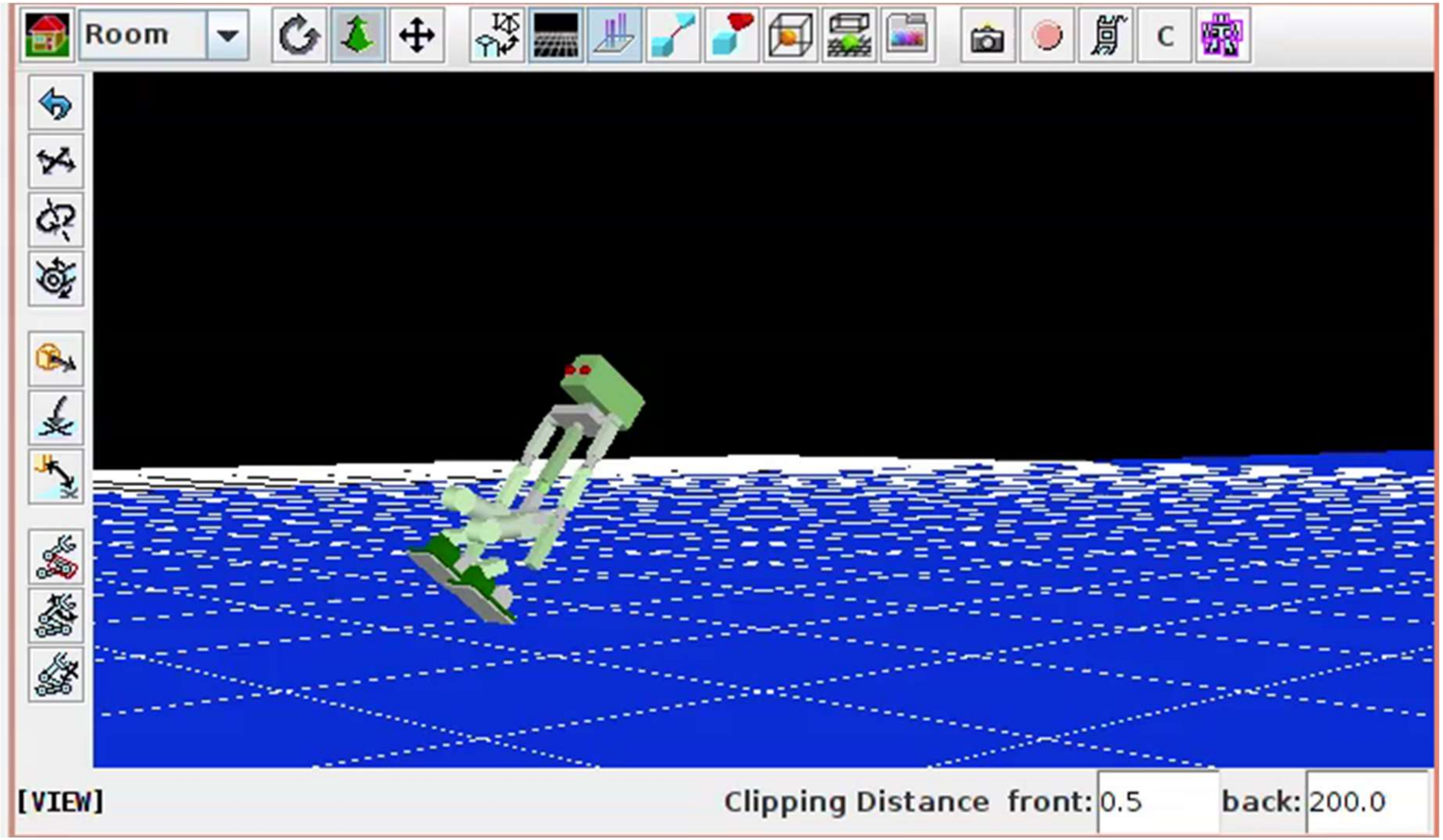
$$q_{k+1} = q_k + \frac{\dot{q}_k + \dot{q}_{k+1}}{2} \cdot \Delta t$$

- **动力学系统状态方程的概念和表达形式**
- **求出关节变量即可得整体机器人的运动状态变量**
- **数值积分方法：欧拉积分，Runge—Kutta积分**

4.3 动力学仿真示例 — OpenHRP

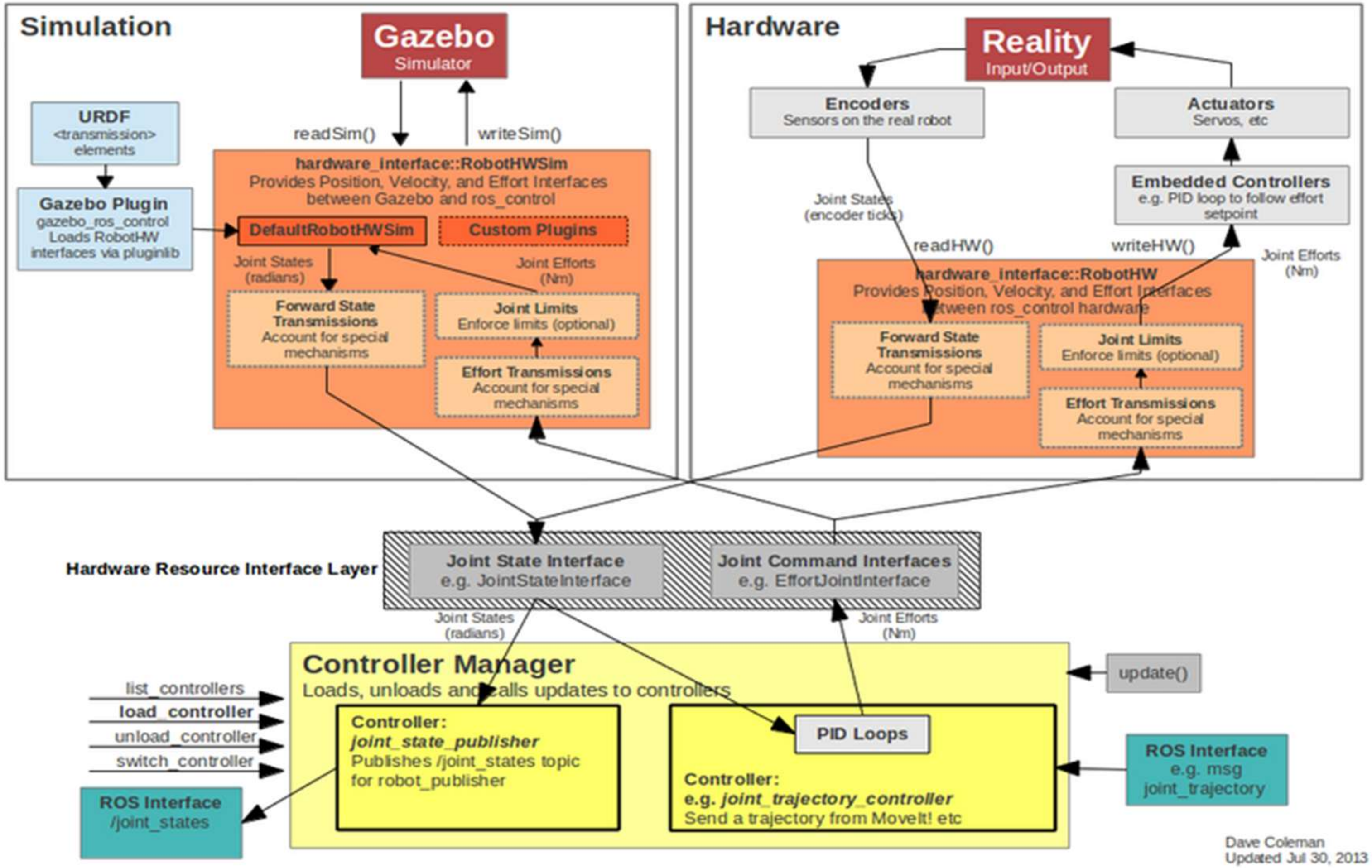


4.3 动力学仿真示例 — OpenHRP



4.3 动力学仿真示例 — Gazebo/ROS

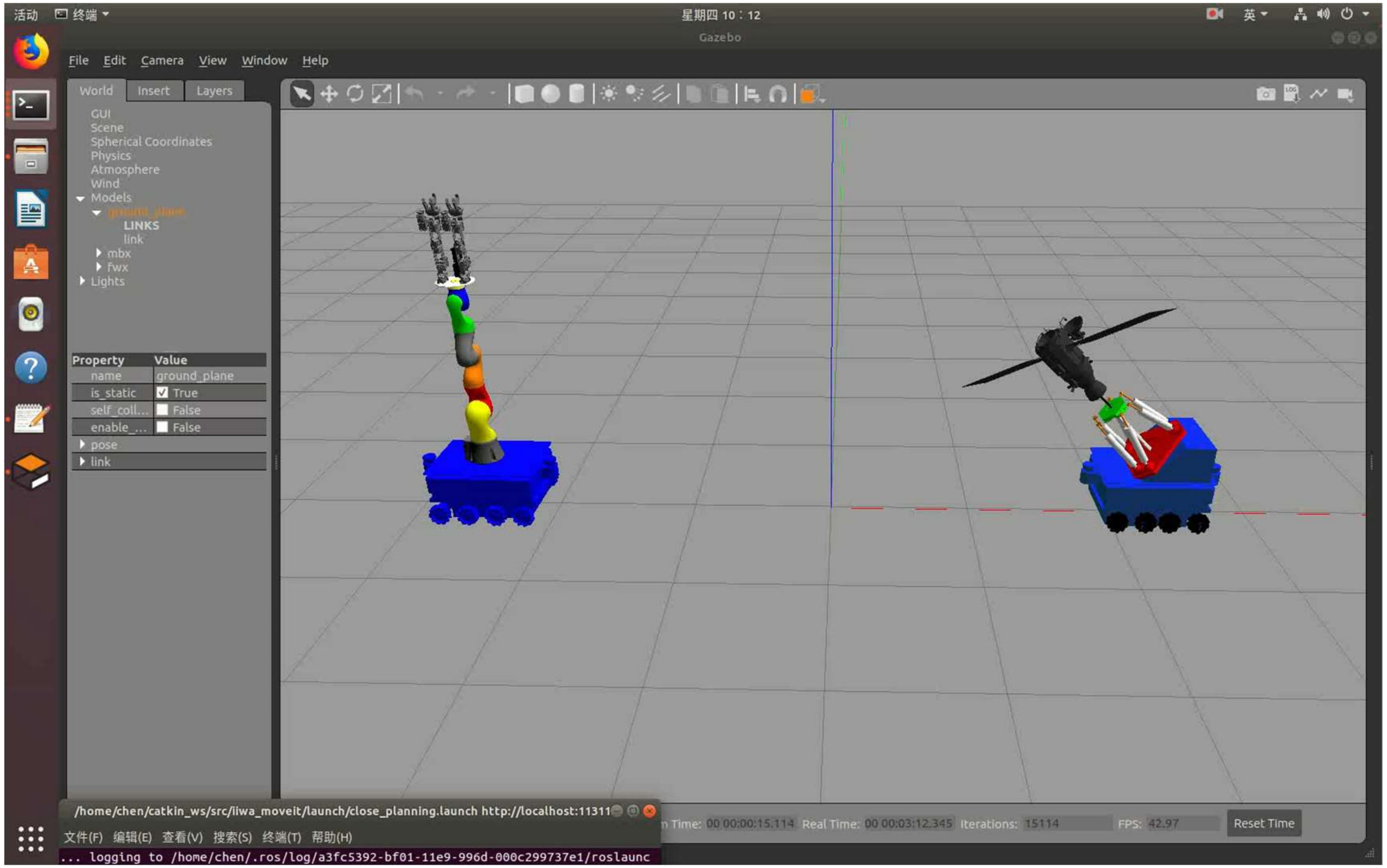
GAZEBO + ROS + ros_control



4.3 动力学仿真示例 — Gazebo/ROS

- 环境模型定义阶段
  - 三维造型软件建立模型，如Solidworks，生成stl格式的文件
  - 定义运动机构运动学参数，生成URDF文件
  - 定义碰撞模型形状、实体零件质量、转动惯量
- 控制器定义阶段(下节课的内容)
  - 控制器种类、PID参数、更新频率等
- 运行仿真阶段

4.3 动力学仿真示例 — Gazebo/ROS



机器人动力学

- 虚功原理及Lagrange 动力学方程
- 惯性张量
- 操作臂动力学方程
- 求解逆向动力学问题
- 求解正向动力学问题及计算机仿真

作业

作业1

下载并安装Matlab2018b以及 Robotics Toolbox

作业2

自行举例，利用Matlab对通过一系列路径点的轨迹规划算法进行对比，(1) 路径点速度为0的三次多项式轨迹；(2)加速度连续条件下的三次多项式轨迹；(3)过路径点的用抛物线过渡的线性插值。

作业3

自行举例，对比差异(1)利用Matlab对笛卡尔空间直线插补和轴角法插补(2)将末端分解为x, y, z, a, b, c六个自由度进行独立轨迹规划

作业4

利用机器人工具箱新建一个机器人动力学模型，针对上周的笛卡尔空间下的末端轨迹规划结果，绘制关节力矩曲线以及基座受力曲线

作业

本次授课的PPT和作业均可在在网络学堂上下载。

作业截止日期: 12月14日之前