第八讲
机器人轨迹规划

张 继 文

清华大学 机械工程系
机电工程研究所

电话: (010) 62796698

E-mail: jwzhang@mail.tsinghua.edu.cn

后续课程安排

周 次	日 期	教学内容	备注
1	09.14	绪论	授课
2	09.21	机器人概述	授课
3	09.28	机器人基础知识	授课
4	10.05	实验 1：机器人认知实验	实验
5	10.12	机器人运动学 1	授课
6	10.19	机器人运动学 2	授课
7	10.26	机器人运动学 3	授课
8	11.02	机器人运动学 4	授课
9	11.09	标定与编程	授课
10	11.16	实验 2：工业机器人标定与编程实验	实验
11	11.23	轨迹规划	授课
12	11.30	机器人动力学	授课
13	12.07	运动控制	授课
14	12.14	路径规划	授课
15	12.21	机器人视觉	授课

本堂主要内容

- 机器人运动学回顾 (Matlab Robotics Toolbox)
- 轨迹规划概述
- 关节空间轨迹规划
- 笛卡尔空间轨迹规划

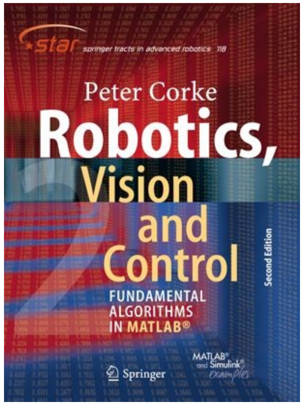
- 向量，坐标系，旋转矩阵
- 齐次变换矩阵
- DH 规则为操作臂建模
- 正运动学：关节空间✉操作空间
- 逆运动学：操作空间✉关节空间
- 微分运动学： Jacobian 矩阵

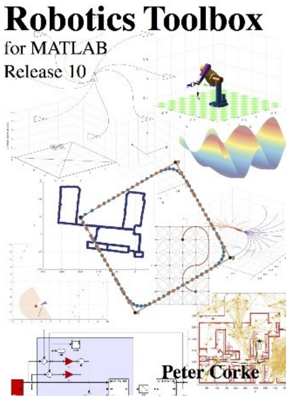
Matlab 下的两大机器人工具箱

- ✓ Matlab Robotics System Toolbox Mathworks ，付费，产业应用
- ✓ Matlab Robotics Toolbox Peter Corke，开源免费，初学者学习

Matlab Robotics Toolbox 相关资源

- ✓ 安装校园正版 Matlab 2018b
- ✓ http://www.petercorke.com/RVC 下载工具包 10.3.1 版
- ✓ lib.Tsinghua.edu.cn✉ 数据库导航✉ springer Link 下载
- ✓ 请大家自行安装工具包
- ✓ 首先运行 startup_rvc.m
- ✓ 运行 rtbdemo ，查看演示 demo





```
>> R = rot2(0.2)
R =
0.9801 -0.1987
0.1987 0.9801
```

2D 旋转矩阵

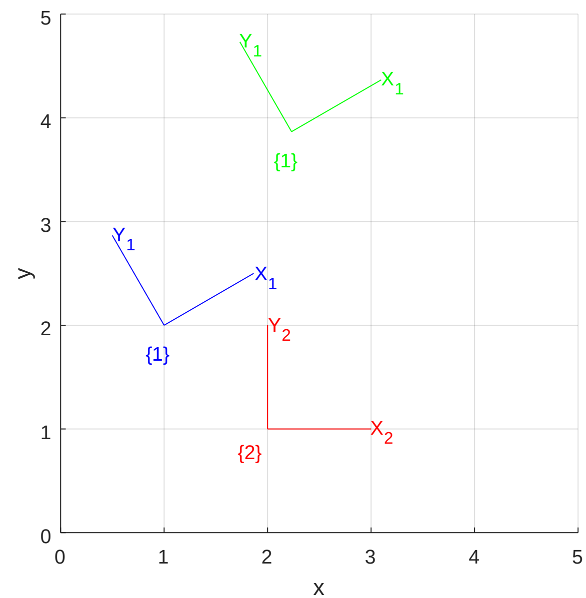
```
>> syms theta
>> R = rot2(theta)
R =
[ cos(theta), -sin(theta)]
[ sin(theta), cos(theta)]
```

```
>> simplify(R*R)
ans =
[ cos(2*theta), -sin(2*theta)]
[ sin(2*theta), cos(2*theta)]
```

Matlab 符号推导

2D 齐次矩阵

```
>> T1 = transl2(1, 2) * trot2(30, 'deg')
T1 =
0.8660 -0.5000 1.0000
0.5000 0.8660 2.0000
0 0 1.0000
>> T2 = transl2(2, 1);
>> T3 = T1*T2
T3 =
0.8660 -0.5000 2.2321
0.5000 0.8660 3.8660
0 0 1.0000
```



绘制坐标系

```
>> plotvol([0 5 0 5]);
>> trplot2(T1, 'frame', '1', 'color', 'b')
>> trplot2(T2, 'frame', '2', 'color', 'r');
```

3D 旋转矩阵

>> R = rotx(pi/2)

R =

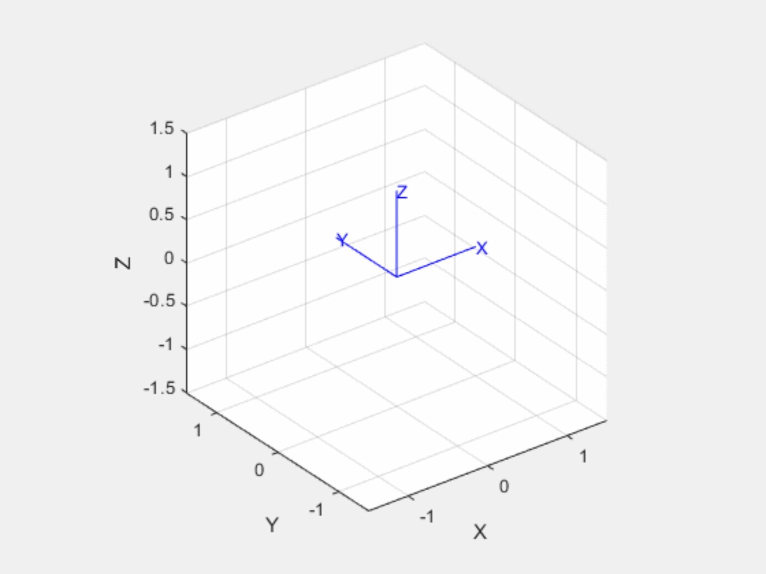
1.0000 0 0

0 0.0000 -1.0000

0 1.0000 0.0000

>> trplot(R)

>> tranimate(R)



\>> 如何实现 RPY 角?

\>> 各种类型的欧拉角?

3D 齐次矩阵

>> T = transl(1, 0, 0) * trotx(pi/2)

\>> 如何生成任意的齐次矩阵?

■ 工具箱中的更多概念

- ✓ SO(2), SE(2), SO(3), SE(3) 特殊正交群， 特殊欧式群

SO(2)	2x2 单位正交矩阵	2D 姿态及旋转变换
SE(2)	3x3 齐次变换矩阵	2D 位姿及位姿变换
SO(3)	3x3 单位正交矩阵	3D 姿态及旋转变换
SE(3)	4x4 齐次变换矩阵	3D 位姿及位姿变换

>> L = Link('revolute', 'd', 1.2, 'a', 0.3, 'alpha', pi/2);

>>robot = SerialLink([Revolute('a', 1) Revolute('a', 1)], 'name', 'my robot');

机器人构件(DH 规则)

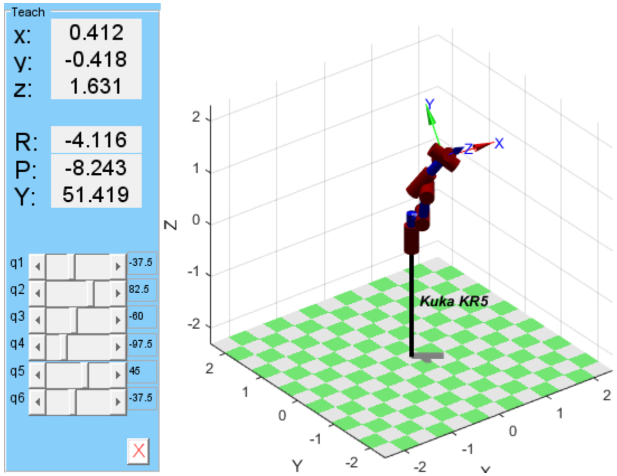
两个构件构成的机器人

>> mdl_kr5

```
links = [
        Link([0      0.4       0.18    pi/2])
        Link([0      0.135      0.60    pi])
        Link([0      0.135      0.12   -pi/2])
        Link([0      0.62        0       pi/2])
        Link([0      0           0      -pi/2])
        Link([0      0           0        0])
        ];
KR5=SerialLink(links, 'name', 'Kuka KR5');
KR5.tool=transl(0,0,0.115);
```

>> KR5.teach

Kuka kr5 机器人模型

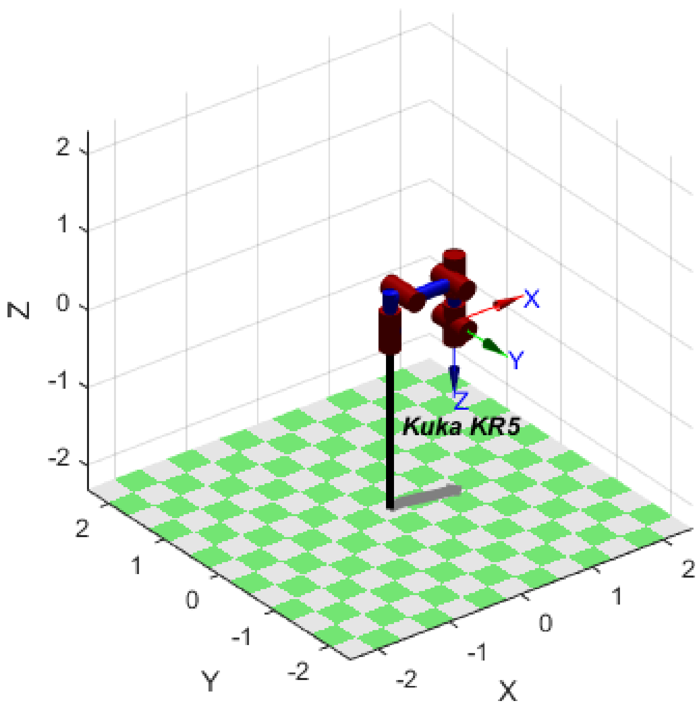


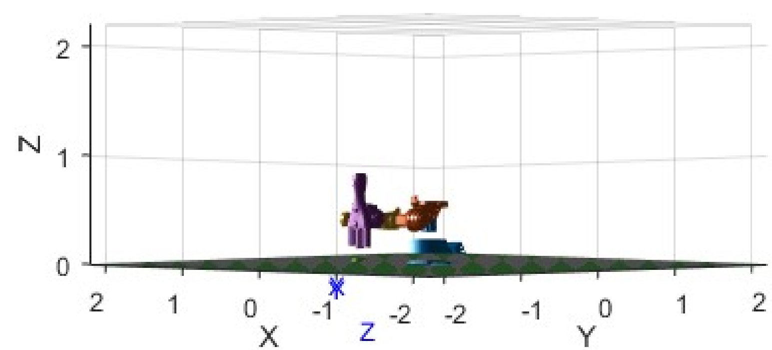
>> *KR5.fkine(qz);* 正运动学

>> *KR5.plot(qz);* 图形显示

>> *KR5.plot3d(qz);* 模型显示

>> *KR5.edit* 编辑参数





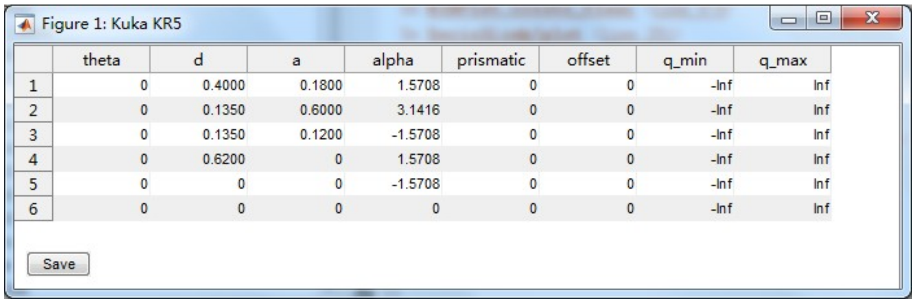


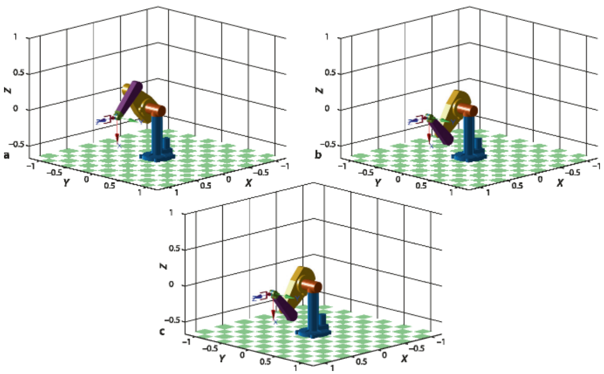
Figure 1: Kuka KR5

	theta	d	a	alpha	prismatic	offset	q_min	q_max
1	0	0.4000	0.1800	1.5708	0	0	-Inf	Inf
2	0	0.1350	0.6000	3.1416	0	0	-Inf	Inf
3	0	0.1350	0.1200	-1.5708	0	0	-Inf	Inf
4	0	0.6200	0	1.5708	0	0	-Inf	Inf
5	0	0	0	-1.5708	0	0	-Inf	Inf
6	0	0	0	0	0	0	-Inf	Inf

Save

（一） Matlab Robotics Toolbox

>> *KR5.ikine6s(T, 'ru')*　　　　解析逆解



l, r	左手右手
u, d	肘上肘下
f, n	手腕翻转

>> *KR5. ikine(T, 'q0', [0 0 3 0 0 0])*　　　　数值逆解

'q0'	给定初值

>> *KR5. jacob0(qz)*　　　　雅克比阵（基础坐标系）

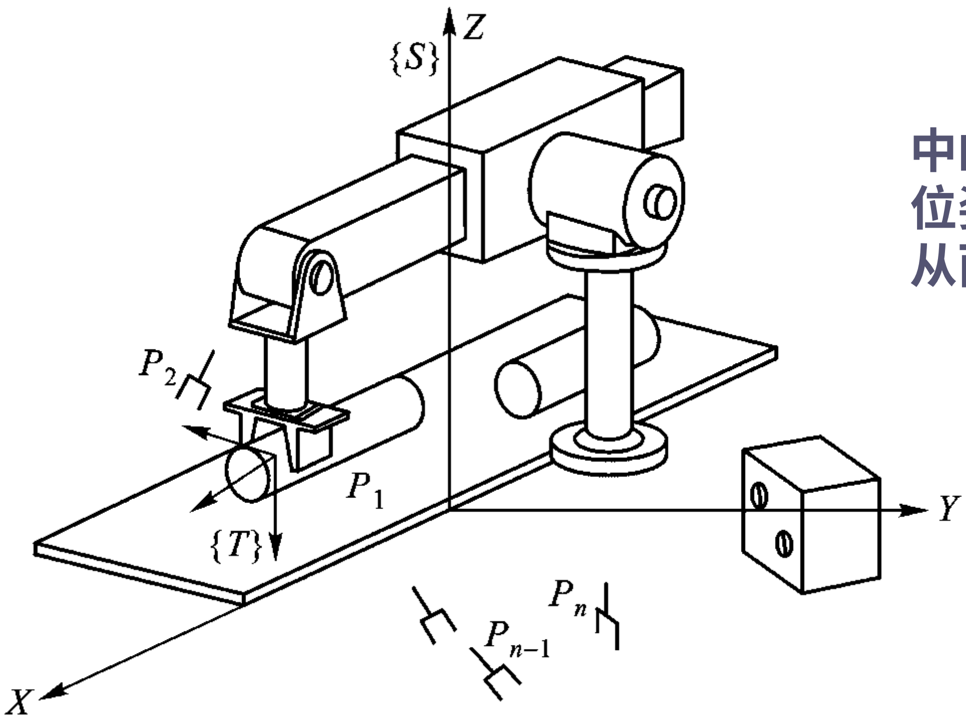
>> *KR5. jacobe(qz)*　　　　（工具坐标系）

本堂主要内容

- 机器人运动学回顾 (Matlab Robotics Toolbox)
- 轨迹规划概述
- 关节空间轨迹规划
- 笛卡尔空间轨迹规划

■ 轨迹规划解决的问题：

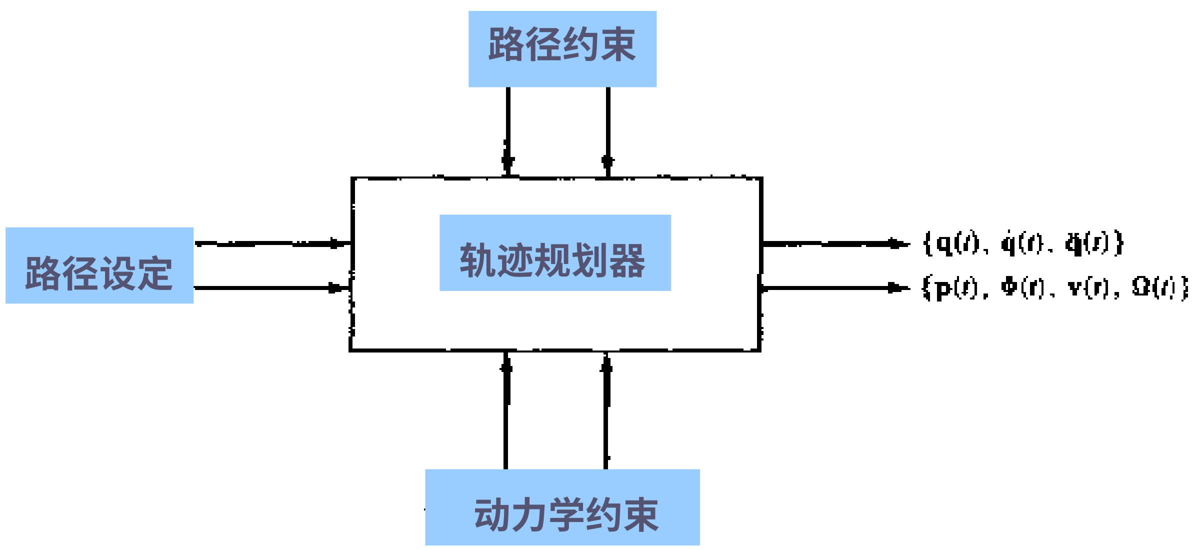
机器人操作臂从初始状态 $\{P_1\}$ 运动到目标状态 $\{P_n\}$ ，并可能通过一系列中间结点 $\{P_i\}$ 的过程



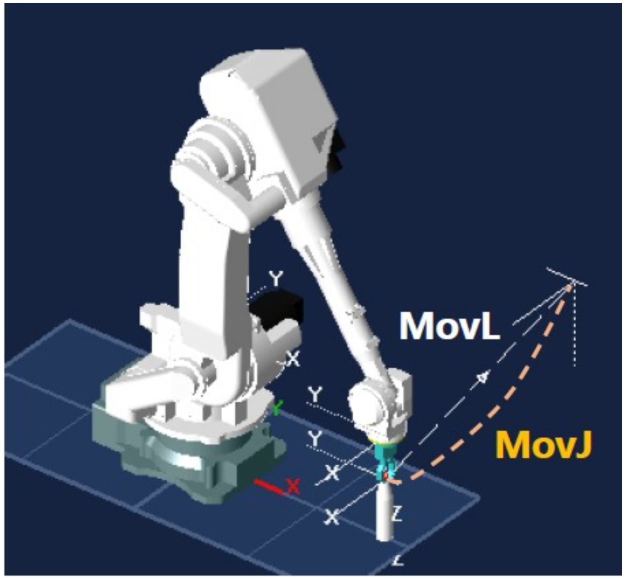
如图所示的将销插入工件孔中的作业，需要经历一系列的位姿 P_i (i=1 ， 2 ，…， n) ，从而达到最终目标。

路径与轨迹容易混淆

- 路径：机器人运动的空间几何描述，即由运动起始点到终止点，所经过的中间形态（Configuration）序列
- 轨迹：机器人运动过程中的位移、速度和加速度，即运动起始点到终止点的中间形态时空描述，可以表示为时间的函数 $q(t)$



- 轨迹规划需考虑的问题
  - 路径约束
    - 点到点运动（PTP， point-to-point motion）
    - 连续路径运动（CP， continuous-path motion）
  - 动力学约束
    - 最大加速度限制
    - 路径连续、光滑



- 轨迹规划的方式
  - 关节空间
    - 首先通过逆运动学将全部路径点转换成关节角度值，再对每个关节变量通过光滑函数进行插值，从而将关节变量表示成时间的函数，求得它的一阶和二阶时间导数
  - 笛卡尔空间
    - 首先对路径点进行插值，将手部位姿、速度和加速度表示为时间的函数，再通过逆运动学得出关节位移，用逆雅克比求出关节速度，用逆雅克比及其导数求解关节加速度

3.1 原则

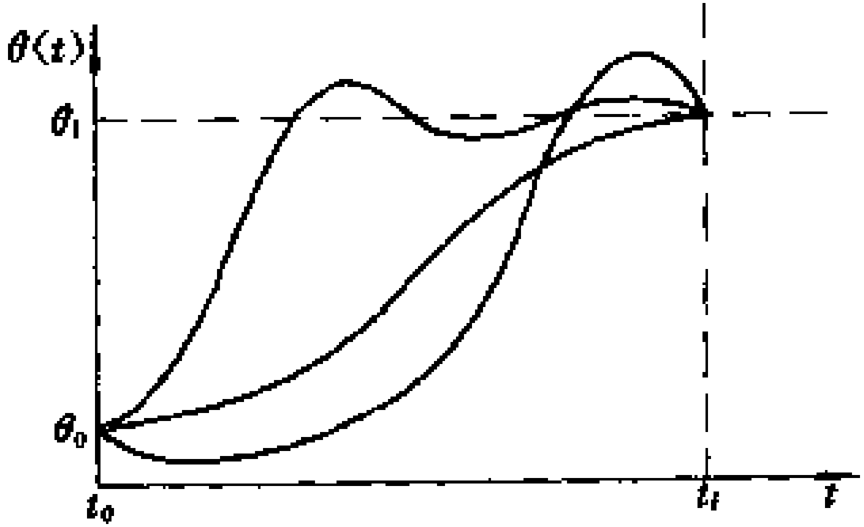
- 对每个关节拟合一个光滑函数，使之从起始点开始，依次通过所有路径点，最后到达目标点。

？ 如何保证工具坐标系应有的位置和姿态

- **令各个关节运动时间均相同**，这样保证所有关节同时到达路径点和终止点，从而得到工具坐标系应有的位置和姿态。各个关节函数之间可以是相互独立的。

3.1 原则

- 对于单个关节来说，起始点的关节角 θ_0 和终止点的关节角 θ_f 是已知的，理论上关节轨迹有无数种，应在满足轨迹规划约束条件的前提下，选取合适类型的关节插值函数 $\theta(t)$ 生成关节轨迹。



3.2 三次多项式插值

- 为实现单个关节的平稳运动，考虑用三次多项式构造插值函数

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

- 则关节运动过程中的速度、加速度为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t\end{aligned}\right\}$$

3.2 三次多项式插值

- 由于三次多项式有四个系数，至少需要找到四个约束条件：
  - 端点位置约束

$$\left.\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_{\mathrm{f}}) &= \theta_{\mathrm{f}}\end{aligned}\right\}$$

  - 端点速度约束

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_{\mathrm{f}}) &= 0\end{aligned}\right\}$$

3.2 三次多项式插值

- 把约束条件代入多项式，得到

$$\left.\begin{aligned}\theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2\end{aligned}\right\}$$

- 解得

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)\end{aligned}\right\}$$

3.2 三次多项式插值

- 则对于起始速度及终止速度为零的关节运动，基于三次多项式插值函数构造的满足连续平稳运动要求的关节位置、速度及加速度为

$$\theta(t)=\theta_0+\frac{3}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)t^2-\frac{2}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)t^3$$

$$\dot{\theta}(t)=\frac{6}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)t-\frac{6}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)t^2$$

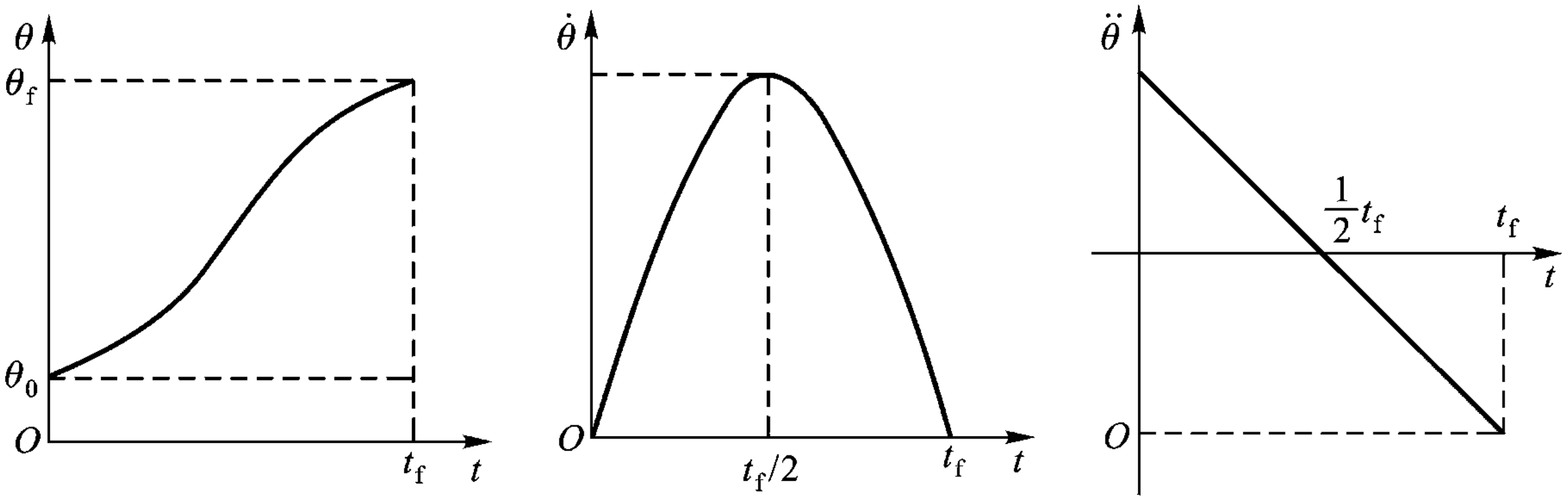
$$\ddot{\theta}(t)=\frac{6}{t_f^2}(\theta_f-\theta_0)-\frac{12}{t_f^3}(\theta_f-\theta_0)t$$

3.2 三次多项式插值

```
%%
clear
d  = input(' initial data = [q0,v0,q1,v1,t0,tf] = ')
q0 = d(1); v0 = d(2); q1 = d(3); v1 = d(4);
t0 = d(5); tf = d(6);
t = linspace(t0,tf,100*(tf-t0));
c = ones(size(t));
M = [ 1 t0 t0^2 t0^3;
     0 1 2*t0 3*t0^2;
     1 tf tf^2 tf^3;
     0 1 2*tf 3*tf^2];
%%
b = [q0; v0; q1; v1];
a = inv(M)*b;
%%
% qd = reference position trajectory
% vd = reference velocity trajectory
% ad = reference acceleration trajectory
%
qd = a(1).*c + a(2).*t +a(3).*t.^2 + a(4).*t.^3;
vd = a(2).*c +2*a(3).*t +3*a(4).*t.^2;
ad = 2*a(3).*c + 6*a(4).*t;
```

3.2 三次多项式插值

- 三次多项式插值的关节运动轨迹如图所示，其速度曲线为抛物线，相应的加速度曲线为直线。



(a) 角位移　　(b) 角速度　　(c) 角加速度

三次多项式插值的关节运动轨迹

3.3 高次多项式插值

- 如果对于运动轨迹的要求更为严格，约束条件增多，那么三次多项式就不能满足需要，必须用更高阶的多项式对运动轨迹的路径段进行插值。例如， 对某段路径的超始点和终止点都规定了关节的位置、速度和加速度要求，则要用一个五次多项式进行插值。

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

3.3 高次多项式插值

- **五次多项式有 6 个系数，利用起点及终点的位置、速度、加速度可以给定 6 个约束条件进行求解。**

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \\ \ddot{\theta}_f \end{bmatrix}$$

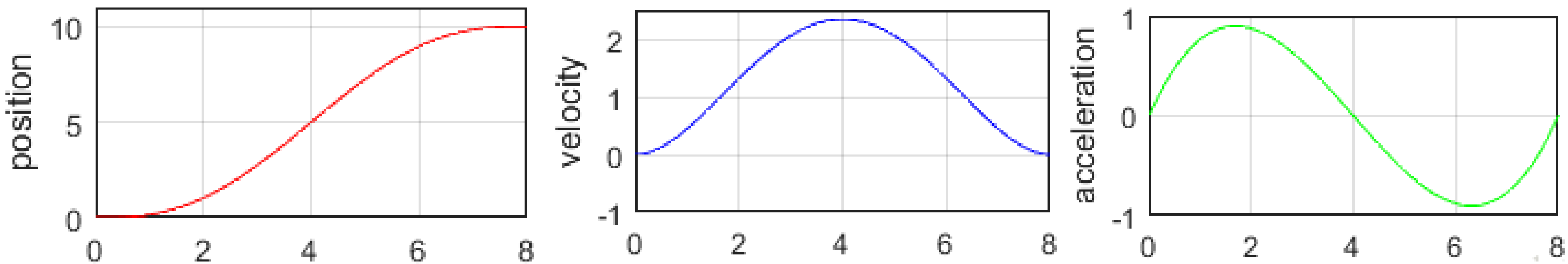
3.3 高次多项式插值

- **五次多项式有 6 个系数，利用起点及终点的位置、速度、加速度可以给定 6 个约束条件进行求解。**

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= \theta_0 \\
a_1 &= \dot{\theta}_0 \\
a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\
a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - \left(8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0\right)t_f - \left(3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f\right)t_f^2}{2t_f^3} \\
a_4 &= \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + \left(14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0\right)t_f + \left(3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f\right)t_f^2}{2t_f^4} \\
a_5 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - \left(6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0\right)t_f - \left(\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f\right)t_f^2}{2t_f^5}
\end{aligned}
\right\}
$$

3.3 高次多项式插值

- **与三次多项式相比，五次多项式轨迹的加速度也是连续的，有利于减少机器人运动过程中的冲击**

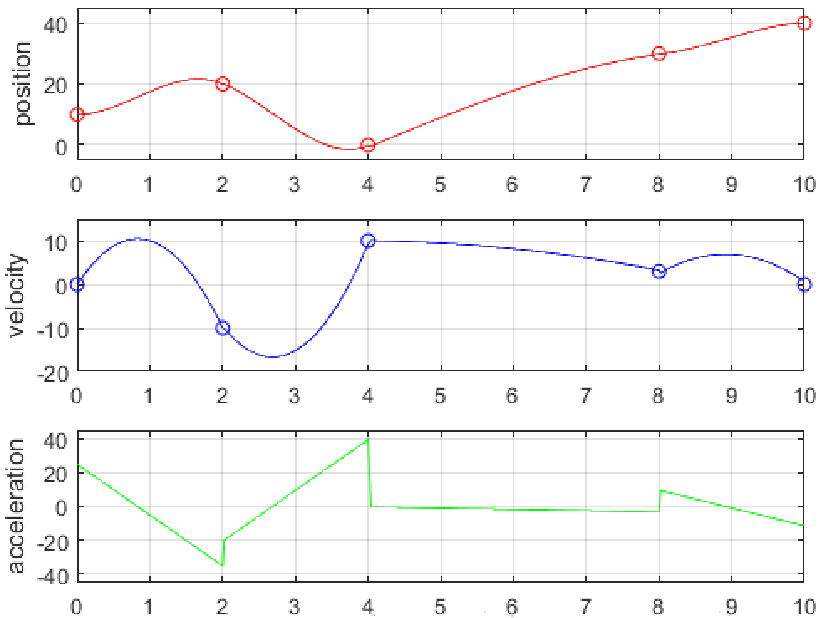


$\theta_0 = 0, \theta_8 = 10$ 并且起点和终点处的速度和加速度均为零的五次多项式轨迹

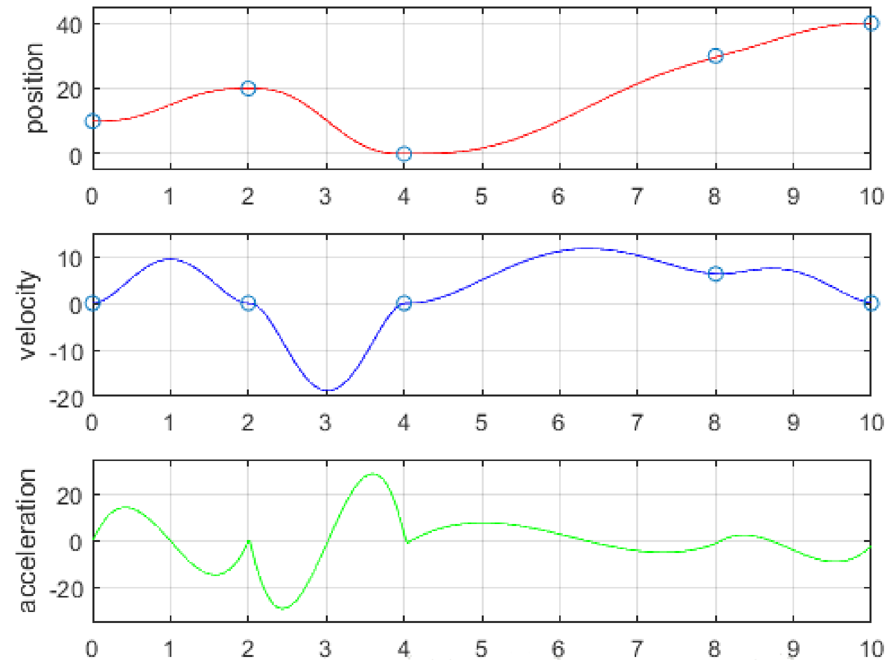
>> tpoly(0, 10, [0:0.1:8]);

五次多项式

3.3 高次多项式插值



三次多项式轨迹

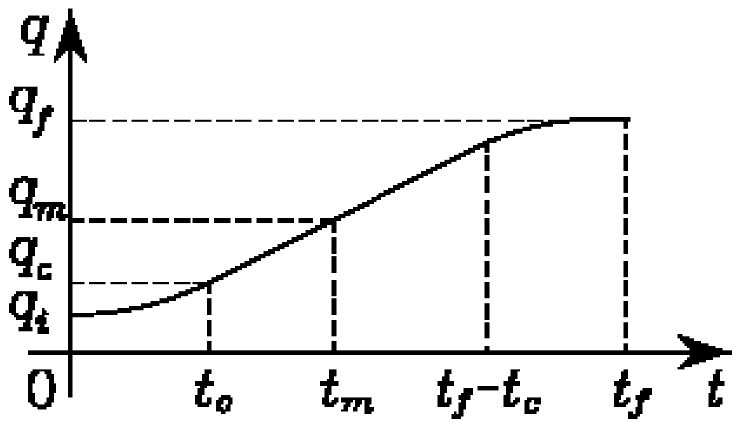


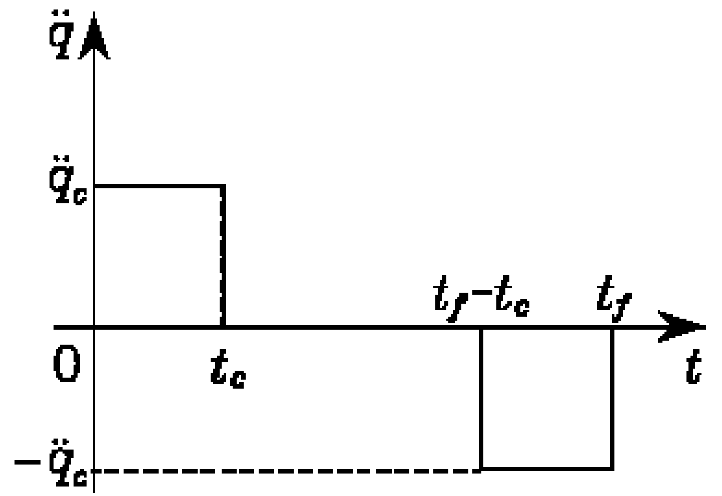
五次多项式轨迹

? 如何让轨迹的加加速度 (jerk) 连续?

3.4 用抛物线过渡的线性插值

- 在线性插值两端点的邻域内设置一段抛物线形缓冲区段。由于抛物线函数对于时间的二阶导数为常数，即相应区段内的加速度恒定，这样保证起始点和终止点的速度平滑过渡，从而使整个轨迹上的位置和速度连续。

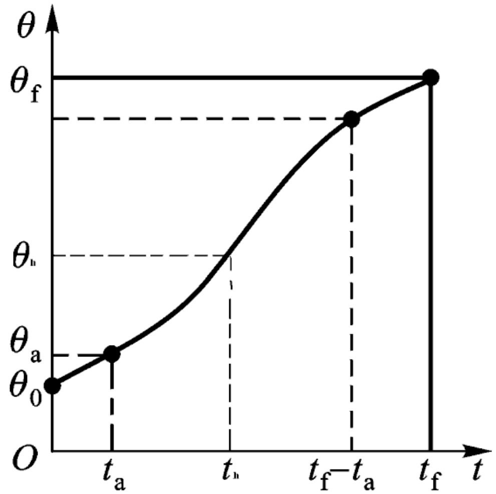




3.4 用抛物线过渡的线性插值

- 为了构造这段运动轨迹，假设两端的抛物线轨迹具有相同的持续时间，具有大小相同而符号相反的恒加速度。因而路径对称于时间中点 t_h 和位置中点 θ_h。
- 由于抛物线轨迹的终点速度必须等于线性段的速度，有

$$\ddot{\theta} t_a = \frac{\theta_h - \theta_a}{t_h - t_a}$$



- 又有

$$\theta_a = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta} t_a^2 \qquad \theta_h = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_f)$$

3.4 用抛物线过渡的线性插值

- **推出**

$$\ddot{\theta} t_a^2 - \ddot{\theta} t_f t_a + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

- **一般情况下，** θ_0 , θ_f **和** t_f **都是已知量，因此选定加速度** θ'' **即可求出** t_a

$$t_a = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

- **为了保证** t_a **有解，加速度** θ'' **必须满足**

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$

3.4 用抛物线过渡的线性插值

例题 1 已知条件为 θ_0=15°， θ_f=75°， t_f=3 s， 试设计两条带有抛物线过渡的线性轨迹。

解：

（1）求出加速度的取值范围。

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} = \frac{4(75-15)}{3^2} = 26.67 \quad {}^\circ/S^2$$

（2）分别取 $\ddot{\theta}_1 = 42 \quad {}^\circ/S^2$ **和** $\ddot{\theta}_2 = 27 \quad {}^\circ/S^2$ **设计两条轨迹。**

3.4 用抛物线过渡的线性插值

例题 1

已知条件为 θ_0=15°， θ_f =75°， t_f =3 s，试设计两条带有抛物线过渡的线性轨迹。

（3）$\ddot{\theta}_1 = 42 \;^\circ/S^2$ 时，

$$t_{a1} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{42^2 \times 3^2 - 4 \times 42(75-15)}}{2 \times 42}\right)\mathrm{s} = 0.59\ \mathrm{s}$$

$$\theta_{a1} = 15 + \left(\frac{1}{2} \times 42 \times 0.59^2\right)^\circ = 22.3^\circ$$

$$\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 t_{a1} = (42 \times 0.59)^\circ/\mathrm{s} = 24.78^\circ/\mathrm{s}$$

3.4 用抛物线过渡的线性插值

例题 1

已知条件为 $\theta_0=15°$， $\theta_f=75°$， $t_f=3\text{ s}$，试设计两条带有抛物线过渡的线性轨迹。

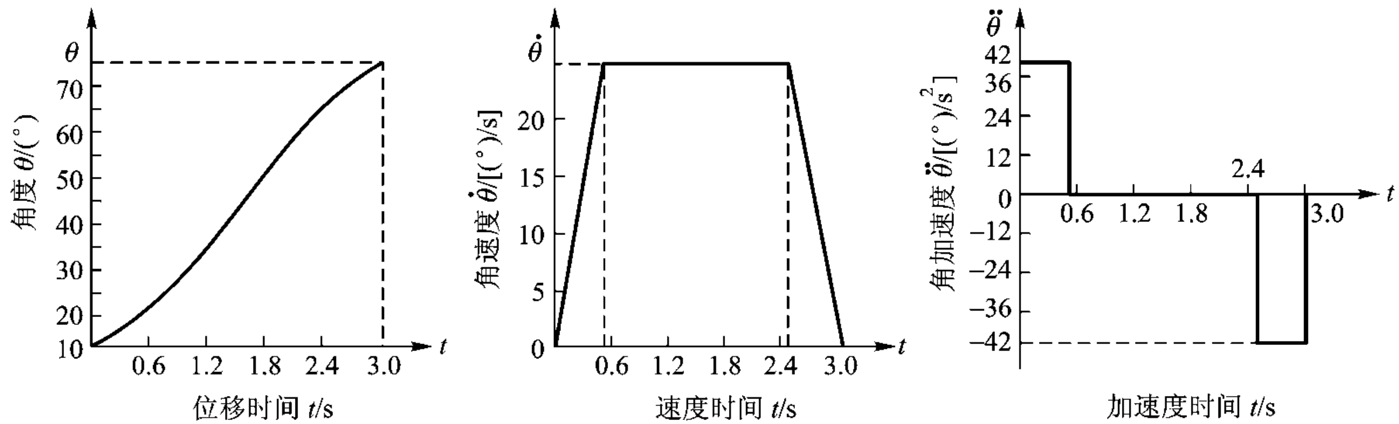
（4）$\ddot{\theta}_2=27\ °/S^2$ 时，

$$t_{a2}=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{27^2\times 3^2-4\times 27(75-15)}}{2\times 27}\right)\text{s}=1.33\text{ s}$$

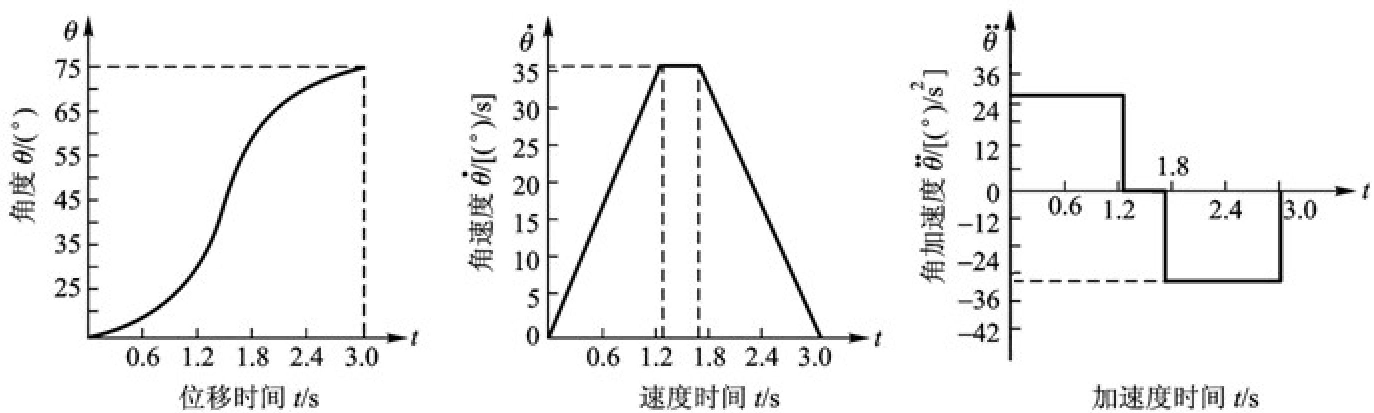
$$\theta_{a2}=15+\left(\frac{1}{2}\times 27\times 1.33^2\right)^{\circ}=38.88^{\circ}$$

$$\dot{\theta}_2=\ddot{\theta}_2 t_{a2}=(27\times 1.33)^{\circ}/\text{s}=35.91^{\circ}/\text{s}$$

3.4 用抛物线过渡的线性插值



(a) $\ddot{\theta}_1 = 42 \quad {}^\circ/S^2$ **时的位移、速度、加速度曲线**

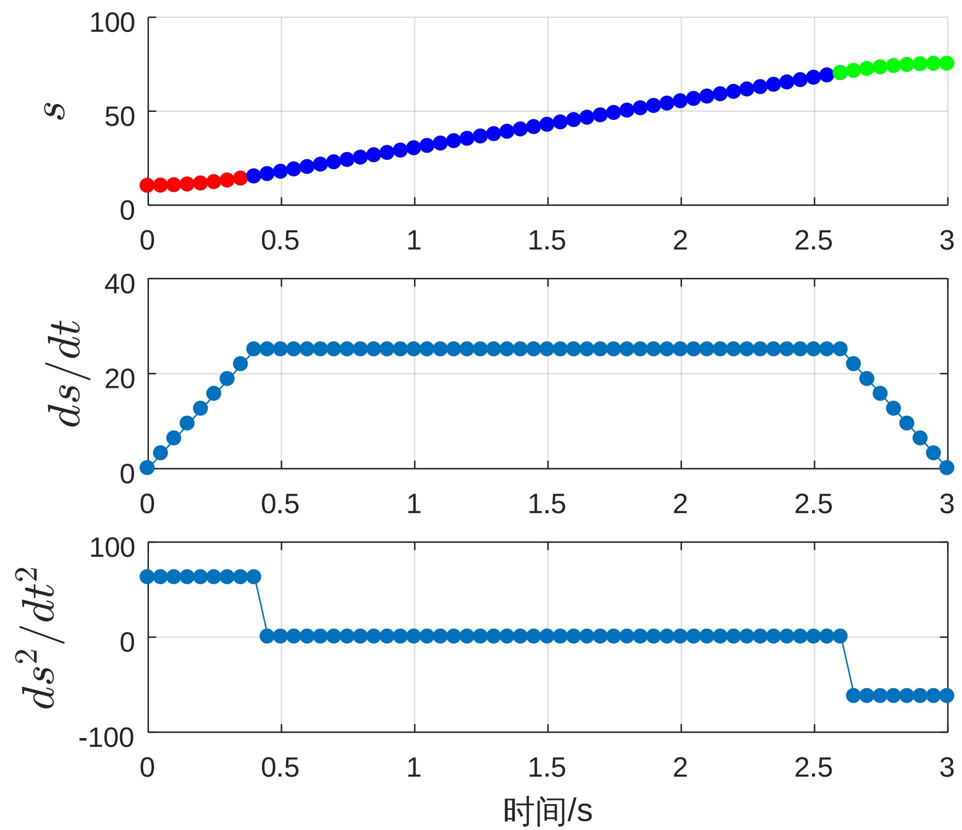


(b) $\ddot{\theta}_2 = 27 \quad {}^\circ/S^2$ **时的位移、速度、加速度曲线**

3.4 用抛物线过渡的线性插值

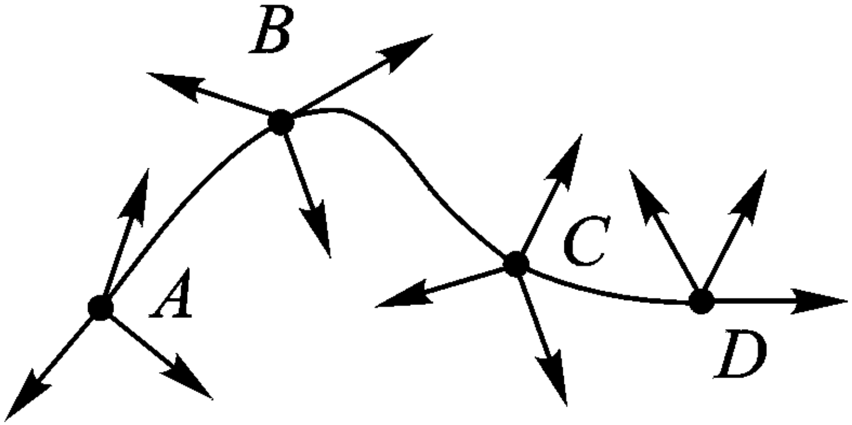
>> lspb(10, 75, [0:0.1:3],25);

抛物线混合线段



3.5 通过一系列路径点的轨迹

- 规划过多个路径点的轨迹
- 末端执行器在路径点停留，速度为零，直接使用前面介绍的轨迹规划方法
- 末端执行器只是经过不停留，将前述方法推广



3.5 过路径点的三次多项式插值

- **A. 随意指定节点处的速度，从而约束条件变为**

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f\end{aligned}\right\}$$

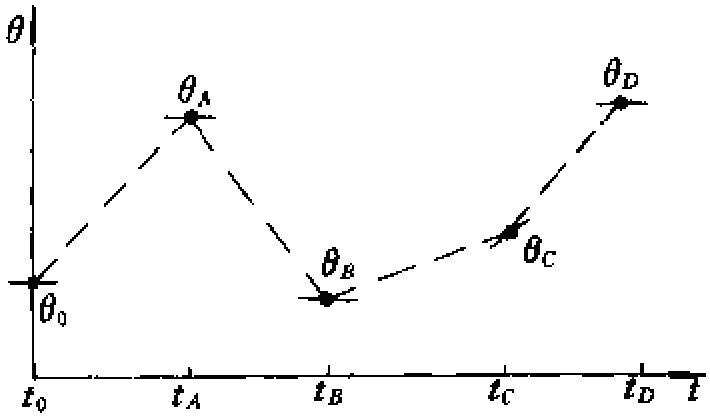
- **解得**

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f)\end{aligned}\right\}$$

3.5 过路径点的三次多项式插值

B. 启发式方法确定路径点的速度

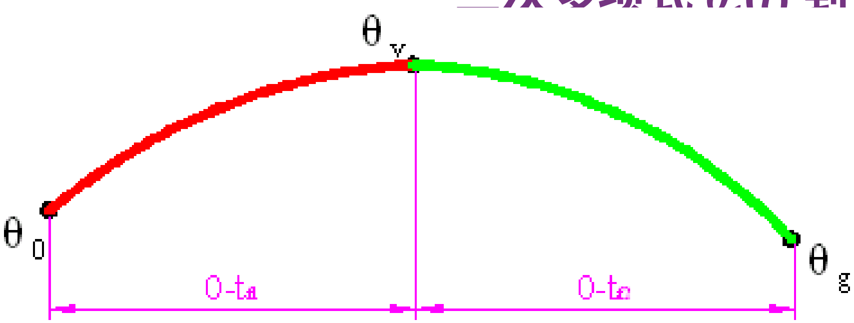
- 下图表示一种启发式选择路径点速度的方式：假设用直线段把这些路径点依次连接起来，如果相邻线段的斜率在路径点处改变符号，则把速度选定为零；如果相邻线段不改变符号，则选取路径点两侧的线段斜率的平均值作为该点的速度。



3.5 过路径点的三次多项式插值

C. 按照每个路径点上的加速度连续的原则，确定路径点的速度。

- 设法用两条三次曲线在路径点处连接起来，约束条件是速度、加速度连续，本质是三次样条曲线插值
- 假设路径可分为 θ_0 到 θ_v 段及 θ_v 到 θ_g 段两段，分别通过两个三次多项式 $\theta_1(t)$ 到 $\theta_2(t)$ 组成的样条函数连接。

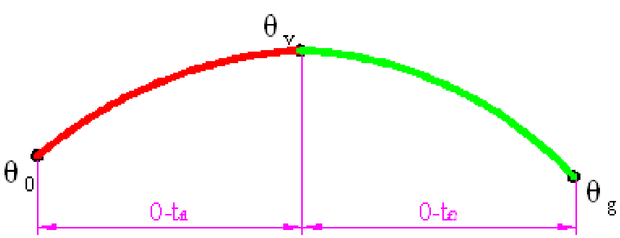


$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

3.5 过路径点的三次多项式插值

C. 按照每个路径点上的加速度连续的原则，确定路径点的速度。



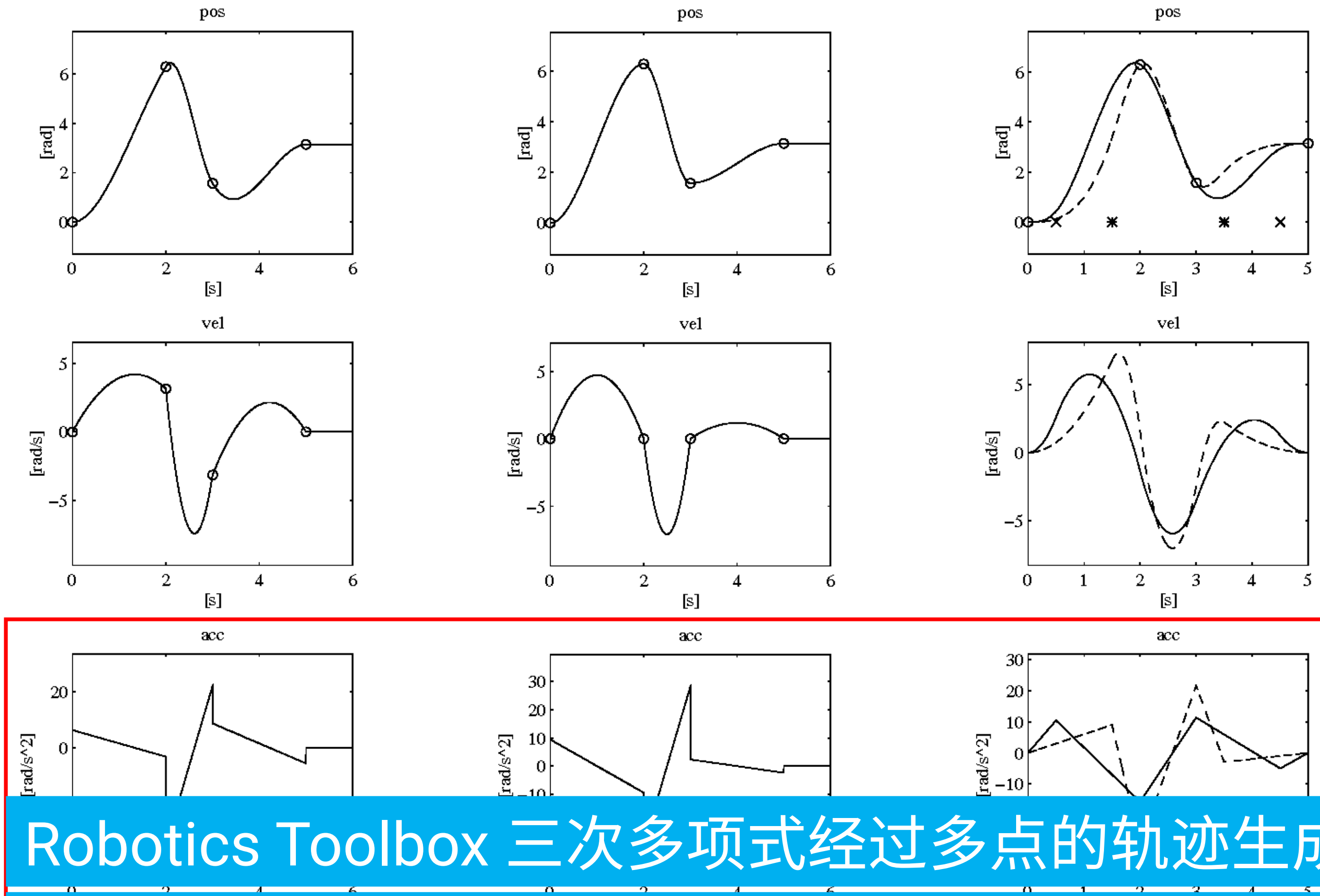
$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1(0)=0\\
&\theta_1(v)=\theta_v\\
&\theta_2(0)=\theta_v\\
&\theta_2(g)=\theta_g\\
&\dot{\theta}_1(0)=0\\
&\dot{\theta}_2(g)=0\\
&\dot{\theta}_1(v)=\dot{\theta}_2(v)\\
&\ddot{\theta}_1(v)=\ddot{\theta}_2(v)
\end{aligned}\right\}$$

$$t_{f1}=t_{f2}=t_f$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{10}&=\theta_0;\\
a_{11}&=0;\\
a_{12}&=\frac{12\theta_v-3\theta_g-9\theta_0}{4t_f^2};\\
a_{13}&=\frac{-8\theta_v+3\theta_g+5\theta_0}{4t_f^2};\\
a_{20}&=\theta_v;\\
a_{21}&=\frac{3\theta_g-3\theta_0}{4t_f};\\
a_{22}&=\frac{-12\theta_v+6\theta_g+6\theta_0}{4t_f^2};\\
a_{23}&=\frac{8\theta_v-5\theta_g-3\theta_0}{4t_f^3}。
\end{aligned}\right\}$$

3.5 三次多项式通过多点规划对比



位置

速度

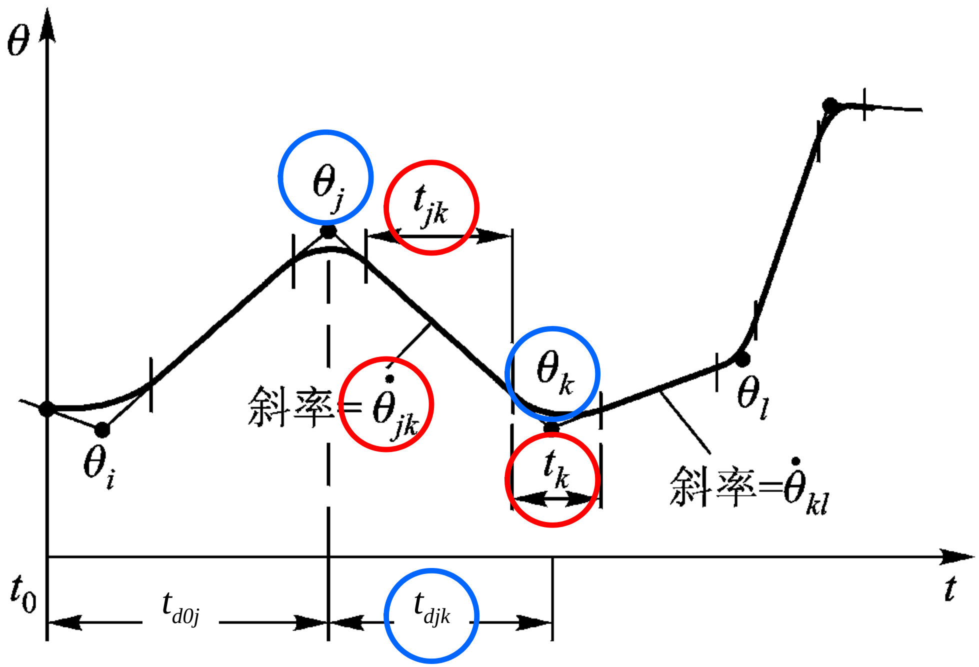
加速度

Robotics Toolbox 三次多项式经过多点的轨迹生成函数？

本质是三次样条插值，参见通用函数 spline

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

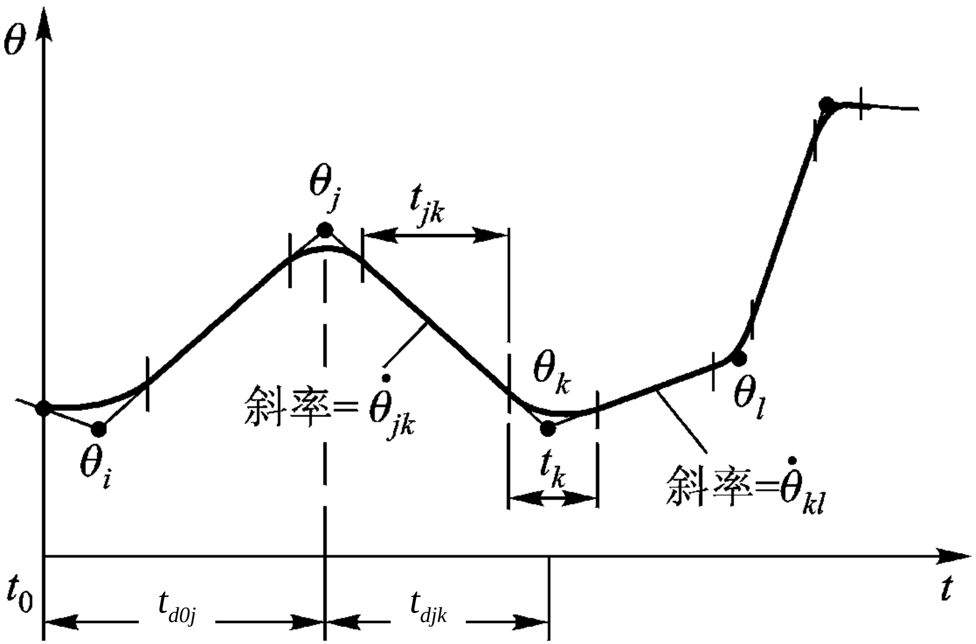
- 某个关节在运动中有 n 个路径点，其中三个相邻的路径点表示为 j,k,l ，每两个相邻的路径点之间都以线性函数相连，而所有路径点附近则由抛物线过渡。



3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

- 这个问题同样是多解的，下面给出一种利用路径点许用加速度设计轨迹的方法，即计算出过渡域的时间 t_k ，线性域的时间 t_{jk} 以及线性域的速度。
- 对于内部路径段（j ， $k \neq 1$ ； j ， $k \neq n-1$ ， n ）

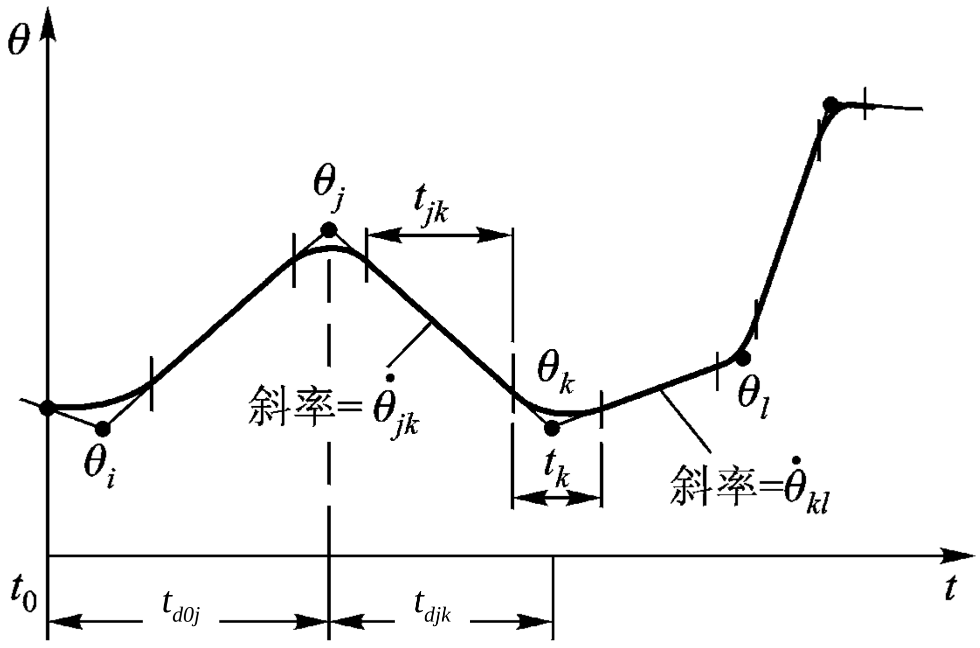
$$
\begin{cases}
\dot{\theta}_{jk} = \dfrac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\
\ddot{\theta}_k = \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}\right)\left|\ddot{\theta}_k\right| \\
t_k = \dfrac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\
t_{jk} = t_{djk} - \dfrac{1}{2}t_j - \dfrac{1}{2}t_k
\end{cases}
$$



3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

- 第一个路径段和最后一个路径段，因轨迹端部的整个过渡域的时间都必须计入这一路径段内，公式略有不同
- 对于第一个路径段（j=1， k=2）

$$
\begin{cases}
\ddot{\theta}_1 = \mathrm{sgn}(\theta_2 - \theta_1)\left|\ddot{\theta}_1\right| \\
t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \dfrac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\
\dot{\theta}_{12} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} \\
t_{12} = t_{d12} - t_1 - \dfrac{1}{2}t_2
\end{cases}
$$



3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

- 同样的，对于最后一个路径段（j=n-1， k=n），有

$$\ddot{\theta}_n t_n = \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} t_n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_n = \operatorname{sgn}(\theta_{n-1} - \theta_n)\left|\ddot{\theta}_1\right| \\ t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \dfrac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} = \dfrac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} t_n} \\ t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \dfrac{1}{2} t_{n-1} \end{cases}$$

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

例题 2

考虑单连杆旋转关节机器人，由初始位置 $\theta_1=10°$，途经 $\theta_2=35°$， $\theta_3=25°$，到达终点位置 $\theta_4=10°$，三段延续时间分别为 2s， 1s 和 3s，设所有抛物线段加速度大小为 $50°/s^2$，试计算各段的速度、抛物线段和直线段的时间。

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

例题 2

解：

由题，已知

$$\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 35^\circ, \theta_3 = 25^\circ, \theta_4 = 10^\circ$$

$$t_{d12} = 2s, t_{d23} = 1s, t_{d34} = 3s$$

对于起始段，

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \mathrm{sgn}(\theta_2 - \theta_1)\left|\ddot{\theta}_1\right| \\ t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \dfrac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} \\ t_{12} = t_{d12} - t_1 - \dfrac{1}{2}t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = 50 \quad {}^\circ/s^2 \\ t_1 = 2 - \sqrt{2^2 - \dfrac{2(35-10)}{50}} = 0.27\ s \\ \dot{\theta}_{12} = \dfrac{35-10}{2 - \frac{1}{2}\cdot 0.27} = 13.5^\circ \\ t_{12} = 2 - 0.27 - \dfrac{1}{2}t_2 = ? \end{cases}$$

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

例题 2

解：

由题，已知

$$\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 35^\circ, \theta_3 = 25^\circ, \theta_4 = 10^\circ$$

$$t_{d12} = 2s, t_{d23} = 1s, t_{d34} = 3s$$

对于中间段，

$$\ddot{\theta}_2 = -50 \quad {}^\circ/s^2$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{jk} = \dfrac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k = \operatorname{sgn}\left(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}\right)\left|\ddot{\theta}_k\right| \\ t_k = \dfrac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \\ t_{jk} = t_{djk} - \dfrac{1}{2}t_j - \dfrac{1}{2}t_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_{23} = \dfrac{25-35}{1} = -10 \ {}^\circ/s^2 \\ t_2 = \dfrac{-10-13.5}{-50} = 0.47\ s \\ t_{23} = 1 - \dfrac{0.47}{2} - \dfrac{1}{2}t_3 = ? \\ t_{12} = 2 - 0.27 - \dfrac{1}{2}t_2 = 1.5\ s \end{cases}$$

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

例题 2

解：

由题，已知 $\theta_1=10^\circ,\theta_2=35^\circ,\theta_3=25^\circ,\theta_4=10^\circ$

$t_{d12}=2s, t_{d23}=1s, t_{d34}=3s$

对于结束段，

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{\theta}_n=\mathrm{sgn}(\theta_{n-1}-\theta_n)\left|\ddot{\theta}_1\right| \\ &t_n=t_{d(n-1)n}-\sqrt{t_{d(n-1)n}^2+\frac{2(\theta_n-\theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}} \\ &\dot{\theta}_{(n-1)n}=\frac{\theta_n-\theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n} \\ &t_{(n-1)n}=t_{d(n-1)n}-t_n-\frac{1}{2}t_{n-1} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\ddot{\theta}_4=50\ ^\circ/s^2 \\ &t_4=3-\sqrt{3^2+\frac{2(10-25)}{50}}=0.102s \\ &\dot{\theta}_{34}=\frac{10-25}{3-\frac{1}{2}\cdot 0.102}=-5.10\ ^\circ/s^2 \\ &t_{34}=3-0.102-\frac{1}{2}t_3=? \end{aligned}\right.$$

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

例题 2

解：

由题，已知

$$\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 35^\circ, \theta_3 = 25^\circ, \theta_4 = 10^\circ$$

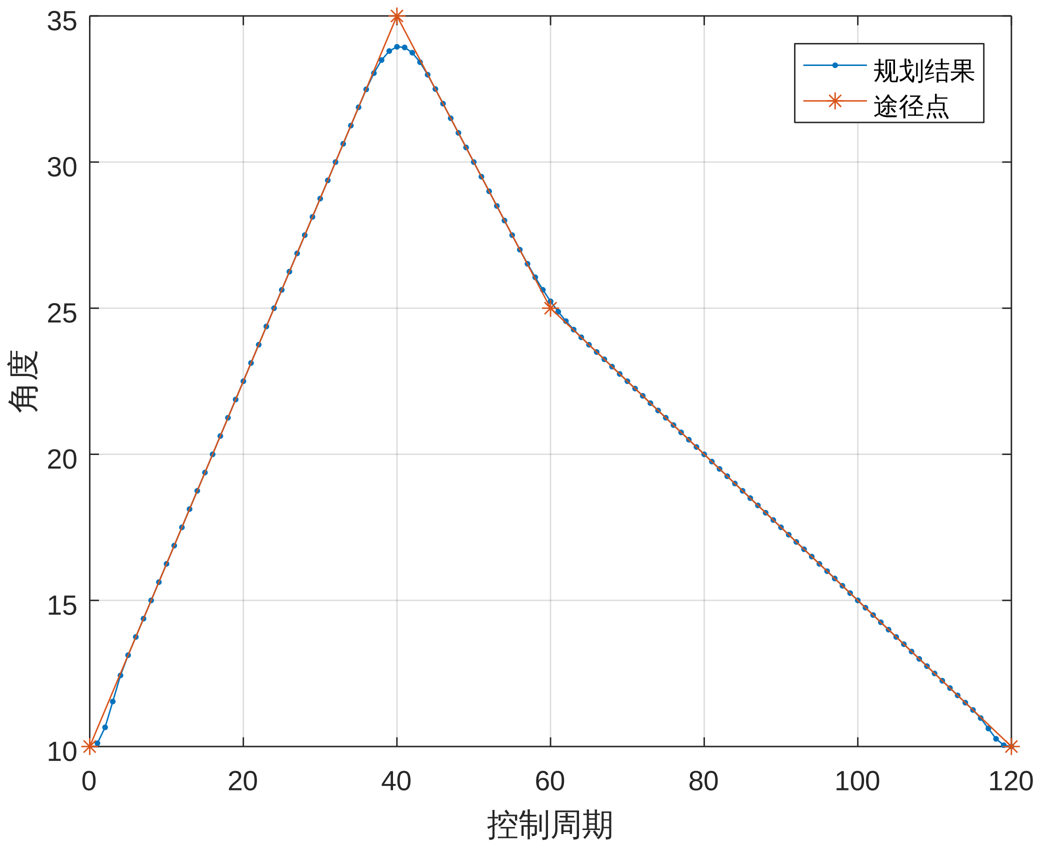
$$t_{d12} = 2s, t_{d23} = 1s, t_{d34} = 3s$$

利用已知参数求解剩余参数，

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_3 = \mathrm{sgn}\left(\dot{\theta}_{34} - \dot{\theta}_{23}\right)\left|\ddot{\theta}_3\right| = 50 \quad {}^\circ/s^2 \\ t_3 = \dfrac{\dot{\theta}_{34} - \dot{\theta}_{23}}{\ddot{\theta}_3} = \dfrac{-5.1 - (-10)}{50} = 0.098\,s \\ t_{23} = 1 - \dfrac{0.47}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot 0.098 = 0.716 \\ t_{34} = 3 - 0.102 - \dfrac{1}{2}\cdot 0.098 = 2.849\,s \end{cases}$$

3.6 过路径点的用抛物线过渡的线性插值

>> mstraj([35,25,10]', [], [2,1,3], 10, 0.05, 0.5);

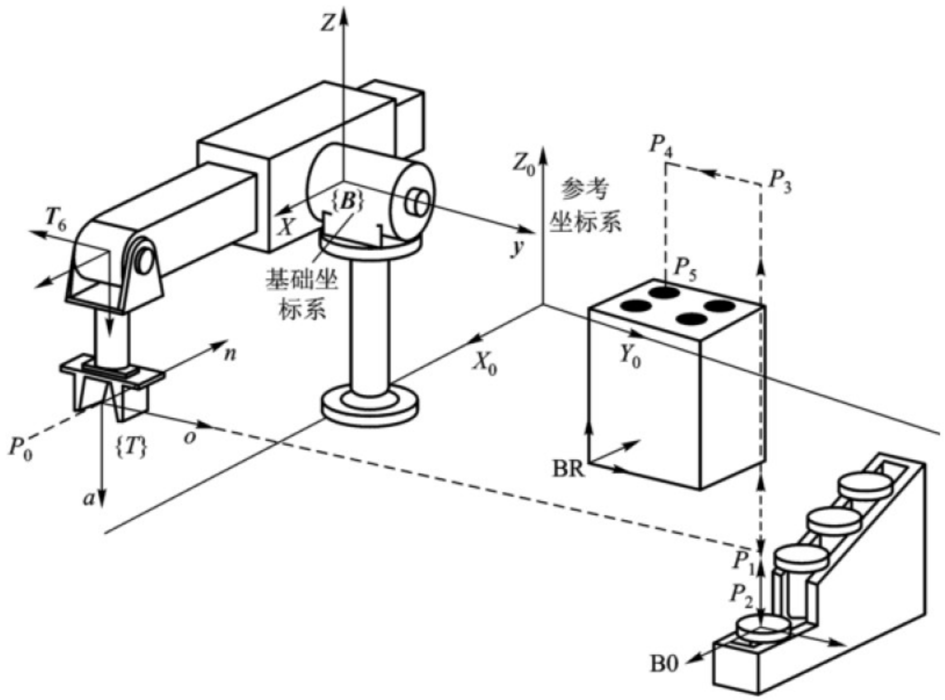


本堂主要内容

- 机器人运动学回顾 (Matlab Robotics Toolbox)
- 轨迹规划概述
- 关节空间轨迹规划
- 笛卡尔空间轨迹规划

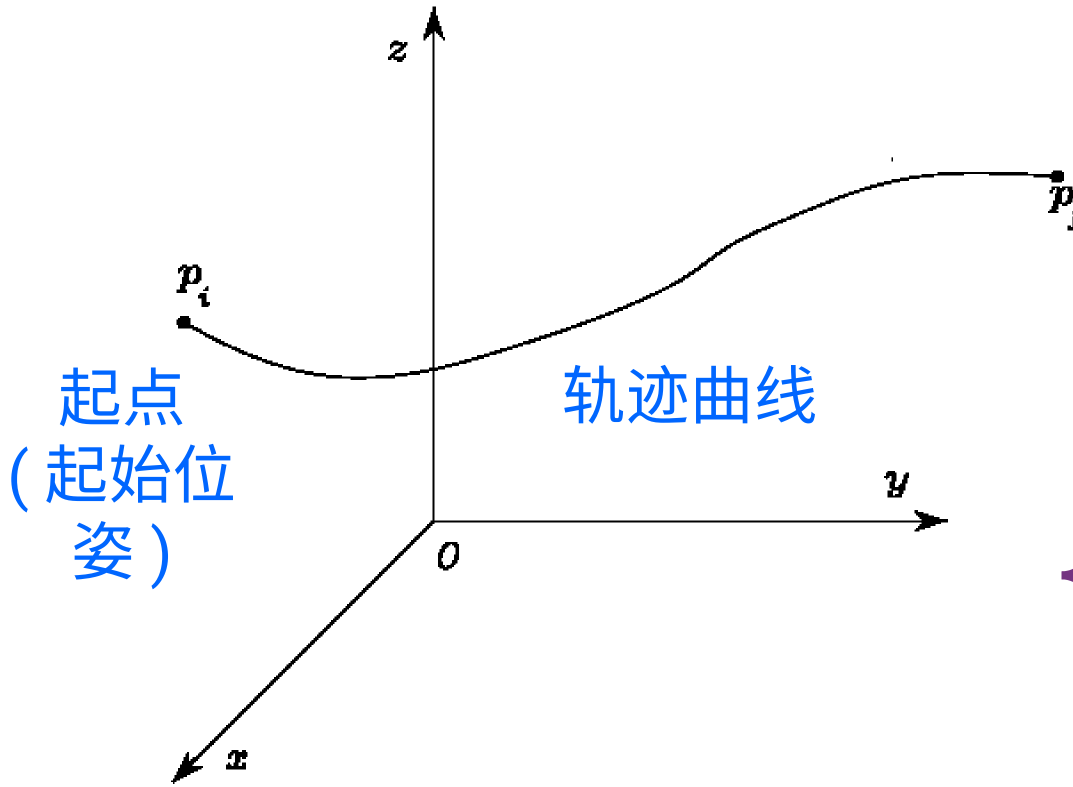
4.1 作业描述实例

- 螺栓的抓取和插入
- 期望机器人的末端能够精确的跟随一条给定的轨迹，再由逆运动学获得关节运行序列



4.1 笛卡尔空间轨迹插补 (Interpolation)

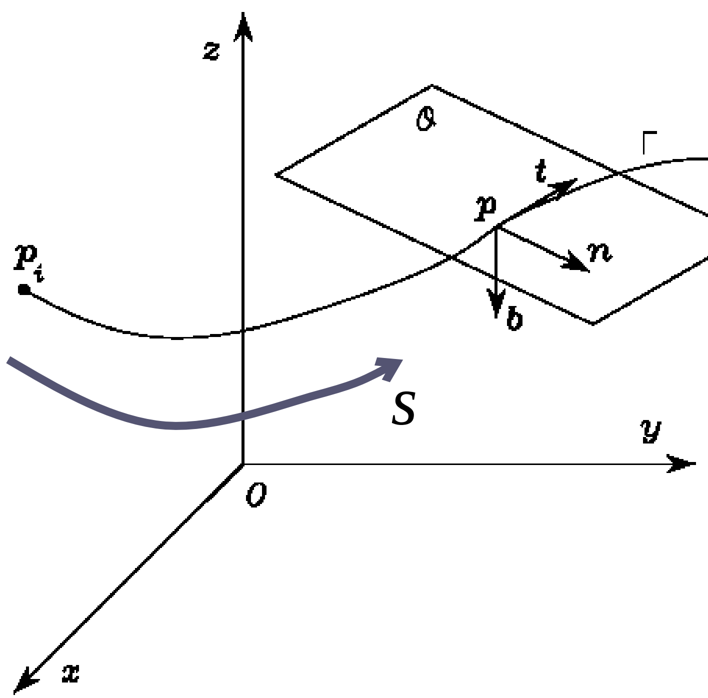
- 目的是在 p_i 和 p_f 所定义的路径起点和终点之间，生成一系列中间点，进而产生一条运动轨迹



- 直线插补
- 圆弧插补
- 样条插补
- 螺旋线插补
- XXXX 插补

4.2 笛卡尔空间直线插补

- 采用自然坐标系和参数方程表示空间集合轨迹
- 采用轨迹的弧长 S 作为参数描述空间轨迹



切线方向

法线方向

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{p}}{ds}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2}$$

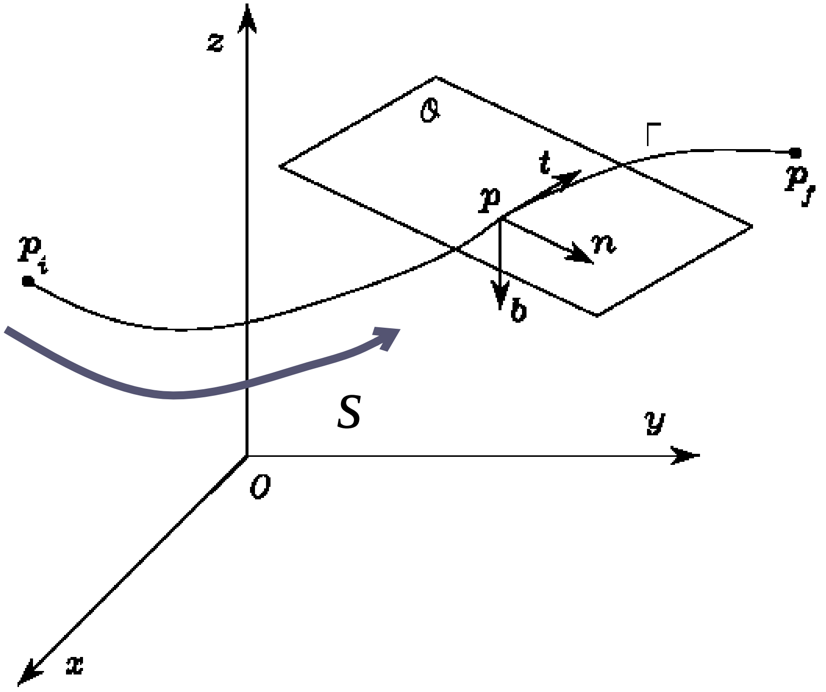
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$$

4.2 笛卡尔空间直线插补

- 将曲线描述为 s 的函数
- 直线插补

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(s)$$

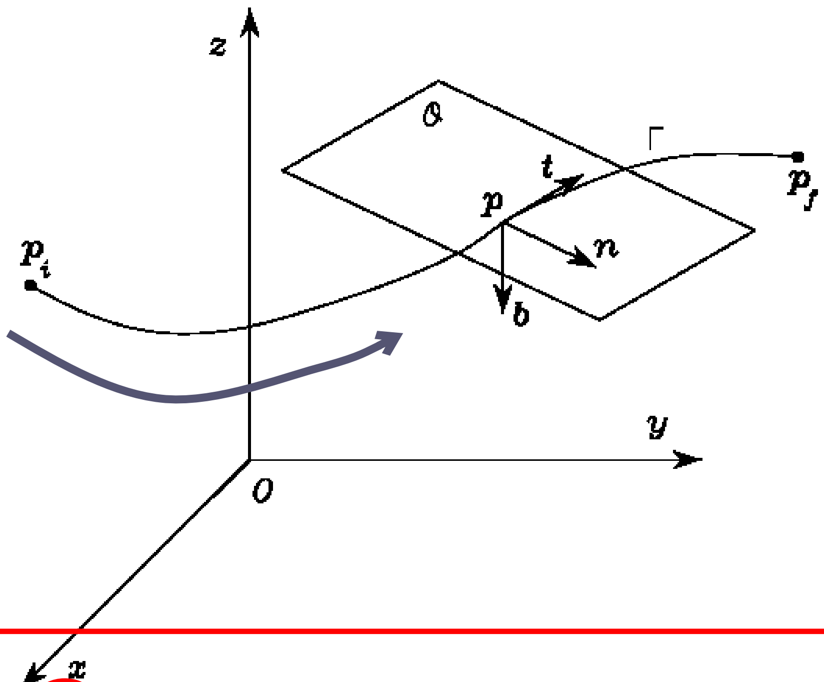
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_i + \frac{s}{\left\| \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i \right\|}(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)$$



$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \frac{1}{\left\| \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i \right\|}(\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i)$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{p}}{ds^2} = 0$$

4.2 笛卡尔空间直线插补



$\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_f$ 末端位置

$s: 0 \to s_f$ 曲线参数

$t: 0 \to t_f$ 运行时间

$$s = s(t)$$

? 能否分别针对 x, y, z 分量分别规划轨迹?

4.3 笛卡尔空间直线插补

- 仅仅完成了末端位置的轨迹生成，末端的姿态也需要实现线形插补
- 将旋转矩阵转换为欧拉角，将欧拉角视做 3D 向量，照搬位置的直线插补方法

$$\boldsymbol{R}_i \rightarrow \phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i & \theta_i & \psi_i \end{pmatrix}$$ 起点姿态

$$\boldsymbol{R}_f \rightarrow \phi_f = \begin{pmatrix} \varphi_f & \theta_f & \psi_f \end{pmatrix}$$ 终点姿态

4.3 笛卡尔空间直线插补

```
>> R0 = SO3.Rz(-1) * SO3.Ry(-1);
>> R1 = SO3.Rz(1) * SO3.Ry(1);
>> rpy0 = R0.torpy(); rpy1 = R1.torpy();
```

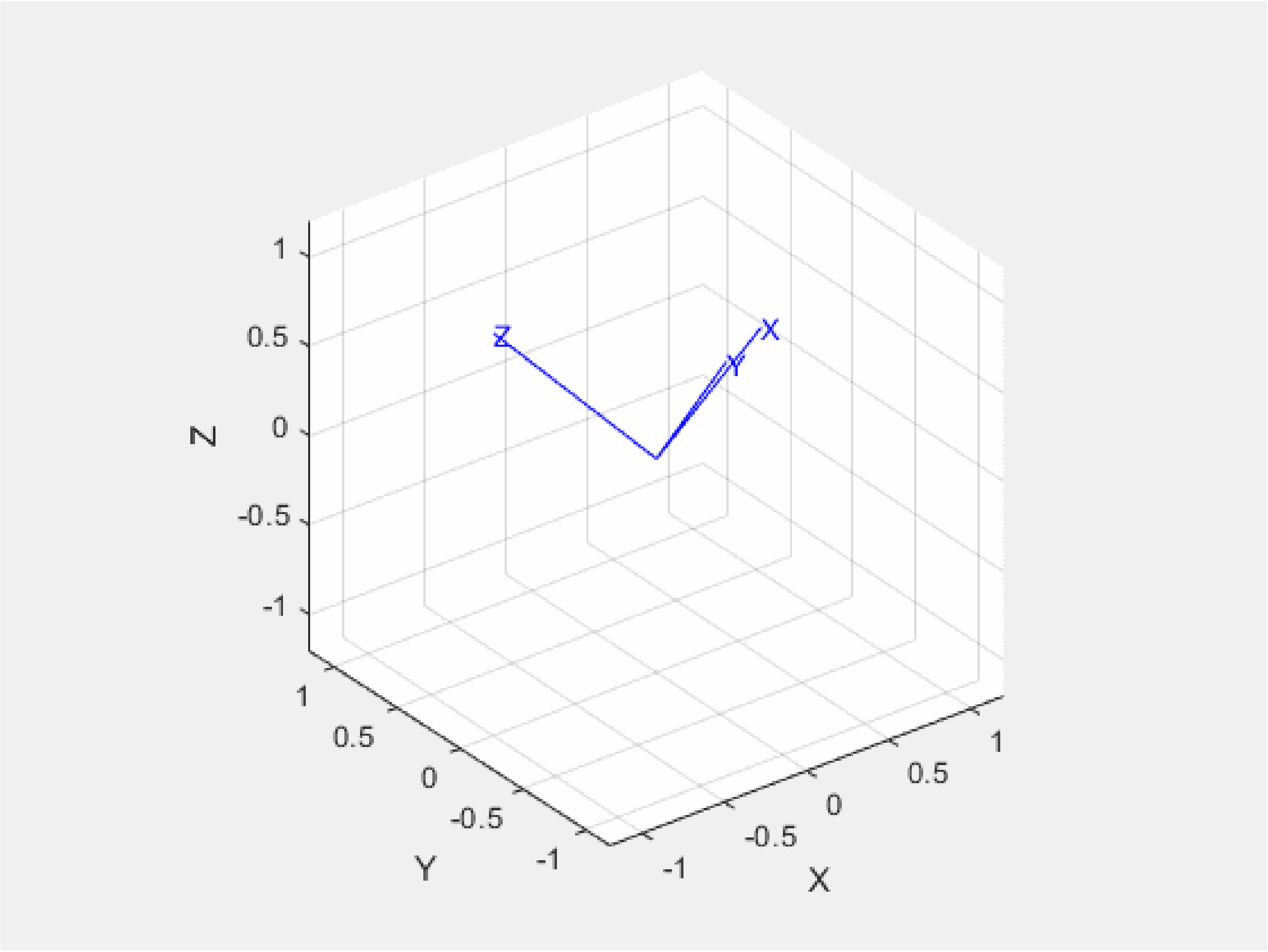
RPY 分别调用 tpoly 五次多项式插值

```
>> rpy = mtraj(@tpoly, rpy0, rpy1, 50);

>> SO3.rpy( rpy ). animate;
```

? 转换成欧拉角再直线插补的问题?

4.3 笛卡尔空间直线插补



4.3 笛卡尔空间直线插补

- 两个姿态之间的变换关系可以表示为绕定轴转动一个角度
- 将旋转矩阵转换为单位四元数，单位四元数体现了轴角法的特征
- 针对四元数的四个分量，采用高维球面线形插值方法

$$\boldsymbol{R}_i \to q_i = (\eta_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i)$$

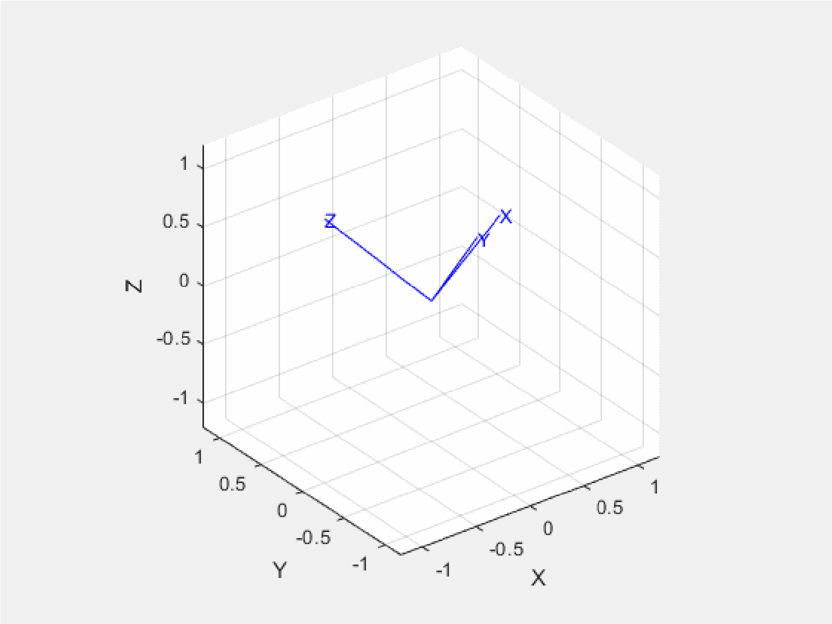
起点姿态

$$\boldsymbol{R}_f \to q_f = (\eta_f \quad \boldsymbol{\varepsilon}_f)$$

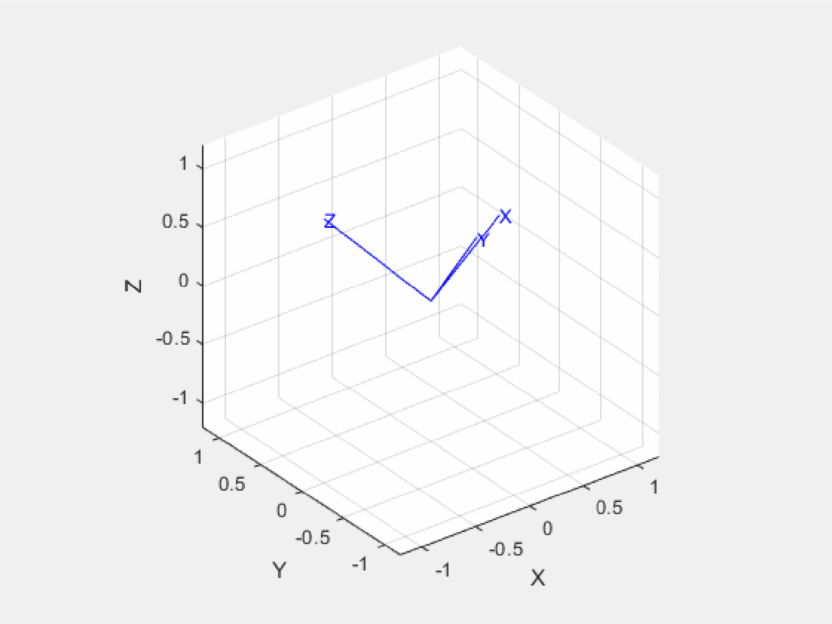
终点姿态

```
>> q0=R0.UnitQuaternion;
>> q1=R1.UnitQuaternion;
>> q = interp(q0, q1, 50, 'shortest');
>> q.animate;
```

4.3 两个位姿之间的“直线”运动



欧拉角插补



四元数插补

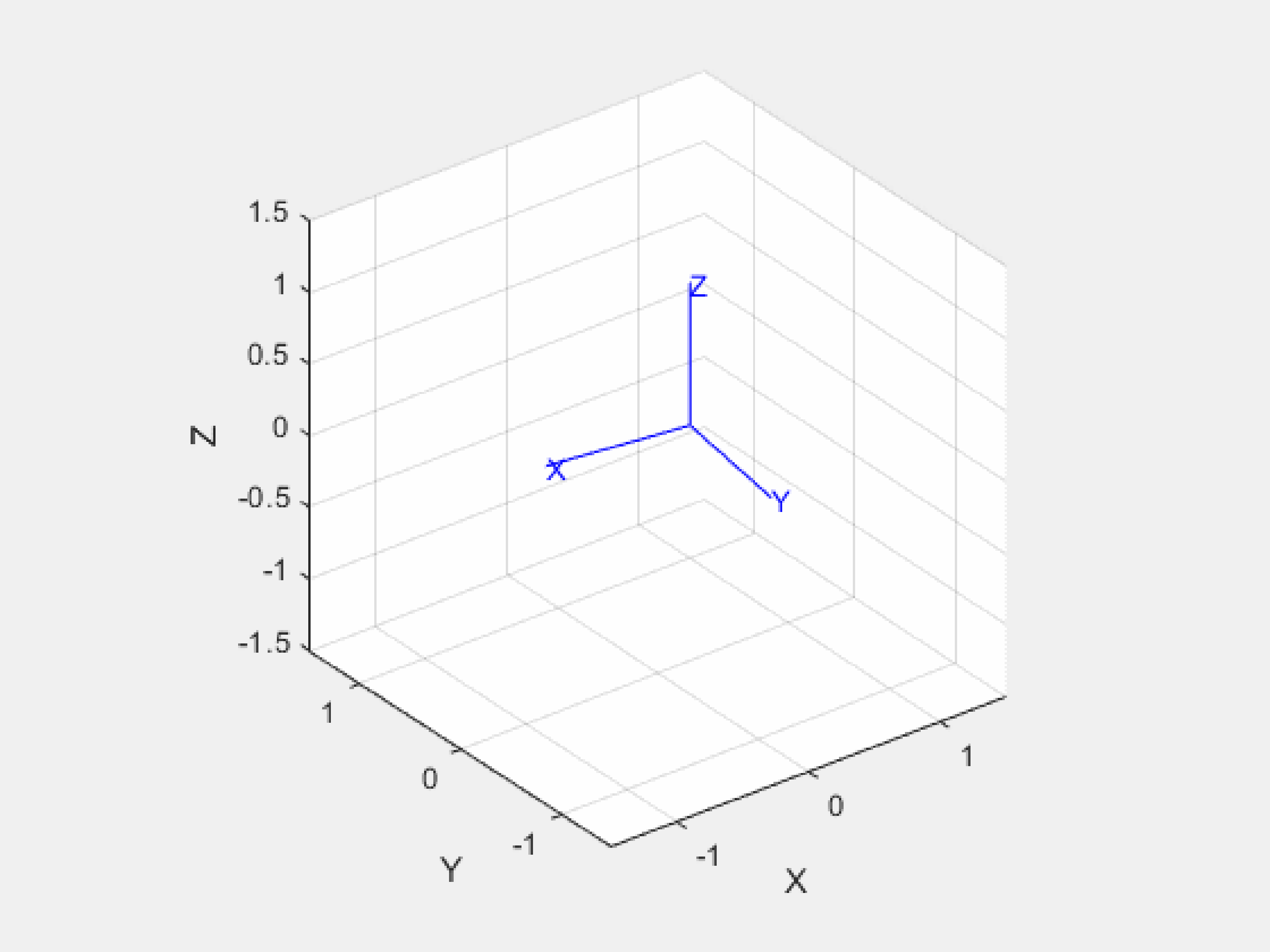
4.3 两个位姿之间的“直线”运动

- 分解成位置插补部分和姿态插补部分，把转动变换以欧拉角、 RPY 角，轴角等形式进行单独的插补，与描述位置的插补结果结合，得到最终的插值结果。
- 笛卡尔空间的直线运动也仅是一种轨迹插补类型，还有其他多种插补轨迹可以选用，如圆弧，三次样条曲线等

```
>> T0 = SE3([0.4, 0.2, 0]) * SE3.rpy(0, 0, 3);
>> T1 = SE3([-0.4, -0.2, 0.3]) * SE3.rpy(-pi/4, pi/4, -pi/2);

>> Ts = interp(T0, T1, 50);
>> Ts = T0. interp(T1, lspb(0, 1, 50) );
>> Ts.animate
```

4.3 两个位姿之间的“直线”运动



4.3 笛卡尔空间轨迹生成

- 将笛卡尔空间轨迹（ X， X' 和 X'' ）转换成等价的关节空间的量。
- 通过求解逆运动学得到关节位移，用逆雅克比计算关节速度，用逆雅克比及其导数计算角加速度。

$$\dot{\theta} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{t}$$

- 计算量大、如路径点是奇异点无法求得，采用插分法求速度

$$\dot{q}(t) = \frac{q(t) - q(t - \delta t)}{\delta t}$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{\dot{q}(t) - \dot{q}(t - \delta t)}{\delta t}$$

机器人轨迹规划

- 关节空间轨迹规划
  - 三次多项式插值，五次多项式插值
  - 用抛物线过渡的直线插值
  - 过中间点的插值
- 笛卡尔空间轨迹规划
  - 笛卡尔空间的直线插补方法
  - 笛卡尔空间的姿态角插补方法

机器人轨迹规划

	优势	劣势
笛卡尔空间轨迹规划	1）直观 2）路径准确	1）计算量大 2）存在性问题 3）唯一性问题 4）奇异性问题
关节空间轨迹规划	1）计算简单、容易 2）无奇异性问题 3）容易考虑动力学约束	1）不容易考虑路径约束

作业 1

下载并安装 Matlab2018b 以及 Robotics Toolbox

作业 2

自行举例，利用 Matlab 对通过一系列路径点的轨迹规划算法进行对比，(1) 路径点速度为 0 的三次多项式轨迹；(2) 加速度连续条件下的三次多项式轨迹；(3) 过路径点的用抛物线过渡的线性插值。

作业 3

自行举例，对比差异 (1) 利用 Matlab 对笛卡尔空间直线插补和轴角法插补 (2) 将末端分解为 x, y, z, a, b, c 六个自由度进行独立轨迹规划

本次授课的 PPT 和作业均可在在网络学堂上下载。

作业截止日期：12 月 7 日之前