

# 卒業研究報告書

クラス数推定に用いる最適な情報量基準の探求

指導教員

藤田 一寿

津山工業高等専門学校

情報工学科

萩原 涼介

平成 29 年 2 月 13 日

## Abstract

Clustering is to divide data into several groups called cluster. It is used in various fields such as data analysis, data mining, image processing, and pattern recognition. The  $k$ -means is the most famous clustering methods. It is assumed that the number of clusters is known in advance and clustering is performed by specifying the number of clusters. In spite of it, in general, there are few data whose number of cluster is known in advance. Even when the number of clusters is unknown, it is important to estimate the number of clusters appropriately. X-means is one way to estimate the number of clusters. It is to suppose to the data generated from mixed isotropic Gaussian distribution, and estimates the number of clusters by estimating the parameters of the probability distribution. It uses an estimator called information criterion. Many of information criterions are proposed by resarchers like AIC (Akaike Information Criterion) and BIC (Bayesian Information Criterion). In to estimate the number of clusters, however, it is not known which information criterion is valid for what kind of data. In this study, the optimal information criterion used for estimating the number of clusters is clarified through quantitative experiments.

## 目次

1. 緒言 . . . . .	1
2. 先行研究 . . . . .	1
2.1 クラスタリング . . . . .	1
2.2 $k$ -means . . . . .	1
2.3 Kullback-Leibler 情報量 . . . . .	3
2.4 最尤法 . . . . .	4
2.5 Mean shift . . . . .	5
3. 手法 . . . . .	5
3.1 X-means . . . . .	5
3.2 情報量規準 . . . . .	7
4. クラスタリング実験 . . . . .	8
4.1 実験環境 . . . . .	8
4.2 精度の評価 . . . . .	8
4.3 2次元空間のクラスタリング . . . . .	9
4.4 3次元空間のクラスタリング . . . . .	9
4.5 手書き数字データのクラスタリング . . . . .	11
5. 結論 . . . . .	12
参考文献 . . . . .	12

## 1. 緒言

クラスタリングとはデータを教師なし学習により任意の数のクラスタ（データのグループ）に分ける手法である。クラスタリングはデータ解析，データマイニング，画像処理，パターン認識など様々な分野で用いられる。k-means を始めとする多くのクラスタリング手法では，予めクラスタ数がわかっているものとして，クラスタ数を指定しクラスタリングを行う。しかし，データに対し最適なクラスタ数を指定しなければ，最適なクラスタリング結果を得ることはできない。それにも関わらず，一般にクラスタ数が事前にわかっているデータは少ない。その為，クラスタ数が未知である場合に対しても，適切にクラスタ数を推定しクラスタリングを行うことは重要な課題となっている。

クラスタ数推定を行う手法の一つに X-means がある。X-means は，データが混合等方 Gauss 分布から生成されたと想定して，その確率分布のパラメータを推定することにより，クラスタ数推定を行う。X-means は情報量規準とよばれる，確率分布とデータの分布の当てはまり具合（モデルの良さ）を表す指標を用い，クラスタ数推定を行う。その情報量基準は多くの研究者により様々なものが提案されている。代表的なものに，1973 年に赤池が提案した AIC (Akaike Information Criterion) や，Bayes の定理によって算出される事後確率を用いる BIC (Bayesian Information Criterion)，AIC の課題を解決した cAIC (Conditional Akaike Information Criterion) などがある。一般に X-means は，クラスタ数を決定する上で BIC を用いている。しかし，クラスタ数推定において，どの情報量規準がどのようなデータに対し有効かは分かっていない。そこで本研究では，クラスタ数推定に用いる情報量規準として最適なものを数値実験を通し明らかにする。

本研究では，AIC, cAIC, BIC と呼ばれる情報量規準をそれぞれ用いた X-means により混合等方 Gauss 分布から生成されたデータおよび実データのクラスタ数推定およびクラスタリングを行った。そして，どの情報量基準がクラスタ数推定に有効かを調査した。

本報告書の構成は次のとおりである。第 2 章では，既存のクラスタリング手法である k-means および Mean shift のアルゴリズムの紹介を行う。第 3 章では，本研究で利用する X-means の理論の説明を行う。まず，モデルと真の確率分布との近さを計る指標である情報量基準の例として Kullback-Leibler 情報量について述べ，それと最尤推定との情報量基準の関係性について詳しく述べる。その後，X-means の手法について述べる。第 4 章では，本研究により得られた実験結果について述べる。第 5 章では，本研究を通してのまとめおよび今後の課題について述べる。

## 2. 先行研究

### 2.1 クラスタリング

クラスタリングとはデータを教師なし学習により任意の数のクラスタに分ける手法である。クラスタとは，データのグループである。多くのクラスタリング手法において，ユークリッド距離やコサイン距離などの距離尺度を用い，データからクラスタを抽出する。クラスタリングはデータ解析，データマイニング，画像処理，パターン認識など様々な分野で用いられる。

### 2.2 k-means

様々なクラスタリング手法の中で最も有名な手法が k-means である。k-means<sup>1)</sup> は， $d$  次元空間上のデータについて，ユークリッド距離を用い各データ点が属するクラスタを決定する手法である。

$d$  次元空間上の確率変数  $\mathbf{x}$  の  $N$  個のデータ点で構成されるデータ  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  があるとする。このデータを  $K$  個のクラスタに分割することを考える。ここで，セントロイド  $\mu_k$  を導入する。セントロイド  $\mu_k$

とはクラスタの重心を表す。k-means はクラスタに所属するデータ点とそのクラスタのセントロイド間のユークリッド距離の総和を最小にすることで、クラスタリングを行う。

ここで、各データ点  $\mathbf{x}_n$  に対し、対応する 2 値指示変数  $r_{nk} \in \{0, 1\}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) を定める。これは、そのデータ点  $\mathbf{x}_n$  がクラスタ  $k$  に割り当てられるかを表す変数である。すなわち、データ点  $\mathbf{x}_n$  がクラスタ  $k$  に割り当てられる場合は  $r_{nk} = 1$  とし、そうでない場合は  $r_{nk} = 0$  とする。これは、1-of-K 符号化法として知られている。

次に、k-means における目的関数  $J$  を定義する。

$$J = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K r_{nk} \|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_k\|^2 \quad (1)$$

これは、各データ点からそれらが割り当てられたクラスタのセントロイド  $\boldsymbol{\mu}_k$  までのユークリッド距離の 2 乗の総和を表している。k-means によるクラスタリングは、 $J$  を最小にする  $\{r_{nk}\}$  と  $\{\boldsymbol{\mu}_k\}$  の値を求めることに換言できる。

まず  $r_{nk}$  の決定を考える。(1) 式における  $J$  は  $r_{nk}$  についての線形関数なので、最適化は代数的に解くことができる。異なる  $n$  を含む項は互いに独立である。よって、各  $n$  について別々に  $r_{nk} = 1$  としたときに、 $\|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_k\|^2$  が最小になるような  $k$  の値に対して  $r_{nk}$  を選んで 1 とおけばよい ((2) 式)。

$$r_{nk} = \begin{cases} 1 & k = \arg \min_j \|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_j\| \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2)$$

つまり、単純に  $n$  番目のデータ点がそれに最も近いセントロイドを持つクラスタに割り当てるのである。

次に、 $r_{nk}$  を固定したもつて  $\boldsymbol{\mu}_k$  の最適化を考える。対象関数  $J$  は  $\boldsymbol{\mu}_k$  の二次関数であり、次のように  $\boldsymbol{\mu}_k$  に関する偏微分を 0 とおく事で最小化できる ((3) 式)。

$$2 \sum_{n=1}^n r_{nk} (\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_k) = 0 \quad (3)$$

これを  $\boldsymbol{\mu}_k$  についてとくと、(4) 式を得る。

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\sum_n r_{nk} \mathbf{x}_n}{\sum_n r_{nk}} \quad (4)$$

この式の分母は  $k$  番目のクラスタに割り当てられたデータの数に等しい。それゆえ  $\boldsymbol{\mu}_k$  は  $k$  番目のクラスタに割り当てられた全てのデータ点  $\mathbf{x}_n$  の平均値と単純に解釈することができる。

図 1 に k-means によるクラスタリングの具体例を示す。k-means では、 $r_{nk}$  と  $\boldsymbol{\mu}_k$  をそれぞれ最適化する 2 つのステップを交互に繰り返す手続きでクラスタリングを実現する。

最初に、 $\boldsymbol{\mu}_k$  の初期値を選ぶ (図 1a)。次に、最初のフェーズで  $\boldsymbol{\mu}_k$  を固定しつつ、 $r_{nk}$  について  $J$  を最小化する (図 1b)。第二フェーズでは、 $r_{nk}$  を固定しつつ、 $\boldsymbol{\mu}_k$  について  $J$  を最小化する (図 1c)。そして、このような二段階最適化を収束するように繰り返す。

データ点のクラスタへの再割り当てと、クラスタ平均の再計算という 2 つのフェーズは、再割り当てが起きなくなるまで (もしくはあらかじめ定めた最大繰り返し数を超えるまで) 繰り返される。各フェーズは、対象関数  $J$  の値を減少させるので、このアルゴリズムの収束は保証されている。しかしながら、大域的最小点ではなく極小点に収束する可能性はある。

なお、k-means によるクラスタリングは、事前にクラスタ数を指定することによりクラスタリングを行うためクラスタ数が未知の場合、k-means を用いることはできない。

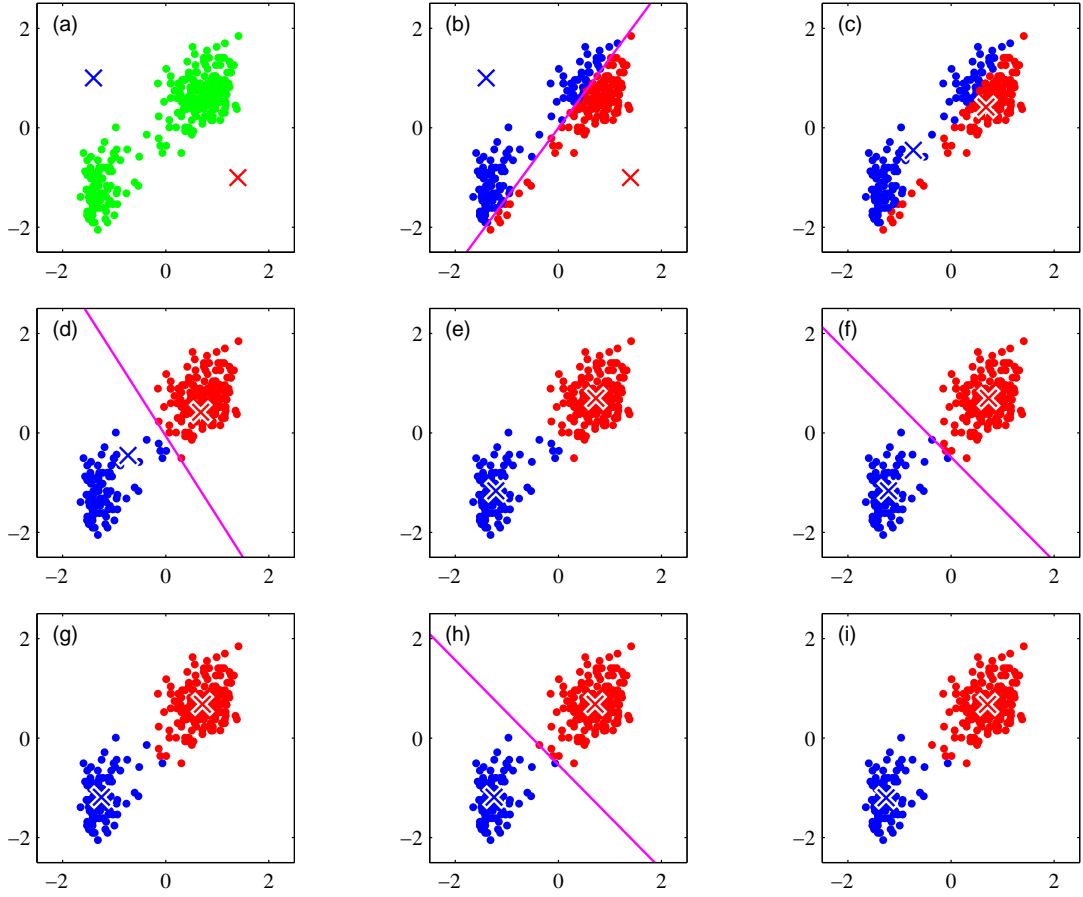


図1  $k$ -means の動作

### 2.3 Kullback-Leibler 情報量

偶然を伴う現象は、ある確率分布に従う確率変数の実現値であると考えることができる。この確率分布を近似するモデル（以後「モデル」）は、データを生成する真の確率分布にどの程度近いかにによって評価することができる。また、データにモデルを当てはめることは、データから真の確率分布を推定しているものとみなすことができる。このようにモデルと真の分布が共に確率分布であると見なし、モデルの評価や推定を行う。

真の分布とモデルの近さを測る客観的な規準として Kullback-Leibler 情報量（以後「K-L 情報量」）がある。連続型の確率分布のとき、 $g(x)$  を真の確率密度関数、 $f(x)$  をモデルが定める確率密度関数とすると、モデルに関する真の分布の K-L 情報量は  $\log\{g(X)/f(X)\}$  の期待値を取り (5) 式で表される。

$$I(g | f) = \int_{-\infty}^{\infty} \log \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\} g(x) dx \quad (5)$$

ただし、 $\log$  は自然対数で、注記がない限り一貫してこの意味で用いる。

このように、真の分布がわかっている場合には K-L 情報量によってモデルの良し悪しを比較できた。しかし、通常は真の分布が未知で、真の分布から得られたデータだけが与えられていることが多い。したがって、データから K-L 情報量を推定する必要がある。(5) 式を展開すると

$$\begin{aligned} I(g | f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{g(x)}{f(x)} \right\} g(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \{\log f(x)\} g(x) dx - \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \{\log g(x)\} g(x) dx \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となるが、右辺の第2項は定数であり、右辺第1項が大きいほど K-L 情報量  $I(g | f)$  は小さくなることがわかる。すなわち、K-L 情報量の大小比較のためには、本質的には  $\int_{-\infty}^{\infty} \{\log f(x)\}g(x)dx$  だけを推定すれば良いことがわかる。右辺第1項の  $\int_{-\infty}^{\infty} \{\log f(x)\}g(x)dx$  は、確率密度関数  $\log f(x)$  の期待値であり、平均対数尤度と呼ばれている。ここで、

$$\sum_{i=1}^n \log f(x_i) \quad (7)$$

を対数尤度と呼ぶことにすると、 $n$  個の独立な観測値  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が得られると、この平均対数尤度は、対数尤度の  $n$  分の 1

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(x_i) \quad (8)$$

で近似される。したがって、符号に注意すると、対数尤度が大きいほど、そのモデルは真の分布に近いと考えられる。このようにして、対数尤度を K-L 情報量の推定値と考えることにすると異なったタイプのモデルの良し悪しも比較できるのである。

ところで、確率変数  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の同時密度関数が  $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$  で与えられているものとする。 $\theta$  は確率密度関数を規定するパラメータである。この時、観測値  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は与えられたものとして固定し、 $f$  を  $\theta$  の関数と考える時、この関数を**尤度**と呼び、 $L(\theta)$  で表す。すなわち、

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \quad (9)$$

である。特に、確率変数が独立な場合には  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  の確率密度関数は、各  $X_i (i = 1, \dots, n)$  の確率密度関数の積に等しいことから、

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \cdots f(x_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。この両辺の対数をとると、すでに求められた対数尤度関数

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i | \theta) \quad (11)$$

が導かれる。

ここでは、平均対数尤度の推定量から対数尤度を直接導入した。しかし、モデルが確率分布の形で与えられている場合には、まず観測値の同時分布から尤度を定義し、その対数として対数尤度を求めるほうが都合が良い。 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が独立でない場合にも、尤度の対数として対数尤度

$$l(\theta) = \log f(x_1, \dots, x_n | \theta) \quad (12)$$

が定義できる。

## 2.4 最尤法

ここまで、データに基づいて K-L 情報量の大小を比較するためには対数尤度を比較すれば良いことを示した。あらかじめ与えられたいくつかのモデルがある場合には、対数尤度が最大となるモデルを選択することによって、近似的には真の分布にいちばん近いモデルが得られることになる。したがって、モデルがいくつかの調整できるパラメータを保つ場合には、対数尤度を最大とするようにパラメータの値を選ぶことによって良いモデルが得られることがわかる。この推定を最大尤度法、略して**最尤法**と呼ばれている。また、最尤法で導かれた推定量は**最尤推定量**と呼ばれ、この最尤推定量によって定められるモデルが最尤モデルである。最尤モデルの対数尤度を**最大対数尤度**という。

## 2.5 Mean shift

本実験では、クラスタリング結果の比較のため、Mean shift<sup>2)</sup>によるクラスタリングも行った。Mean shiftは、データ点  $\mathbf{x}$  を標本点として得られるような確率密度関数  $f(\mathbf{x})$  を想定し、その標本点から確率密度関数  $f(\mathbf{x})$  の極大点を探索する手法である。図2に Mean shift によるクラスタリングの概念図を示す。ある任意の観測点  $\mathbf{y}_j$  から半径  $h$  の超球 (2次元の場合は円) を考え、その範囲にある点群  $\mathbf{x}_i$  の平均  $\mathbf{x}_c$  を計算し、その位置に観測点  $\mathbf{y}_{j+1}$  を移動する。同様の操作を繰り返すと観測点は最大勾配の方向に移動し、極大点に収束する。

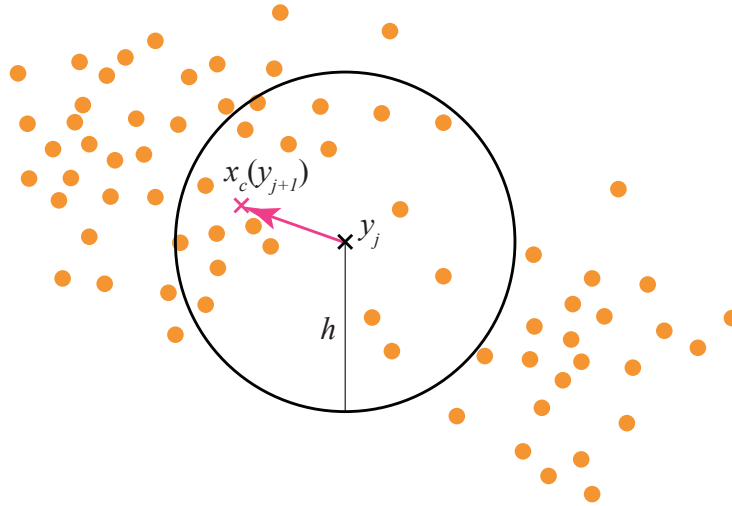


図2 Mean shift によるクラスタリング

Mean shift を用いたクラスタリングは以下のように行う。

- (1) 各点  $\mathbf{x}_i$  に Mean shift を適用し、その収束位置  $\mathbf{x}_i^c$  を計算する。
- (2) 任意の2つの点  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  について、 $\|\mathbf{x}_i^c - \mathbf{x}_j^c\| < \text{threshold}$  ならこの2点を同じ極大点として同じクラスタとして扱う。
- (3) (1), (2) により、全ての点群  $\mathbf{x}_i$  を同じ収束位置に属するごとにクラスタに識別する。

Mean shift は、 $k$ -means と異なり、クラスタ数をあらかじめ指定する必要がある。

## 3. 手法

本研究では、クラスタ数推定に X-means を用いる。そして、X-means で用いる情報量基準を変更することで、どの情報量基準がクラスタ数推定に有効か検証する。

### 3.1 X-means

X-means<sup>3)</sup> は、データ分布が混合等方 Gauss 分布から生成されたと想定してクラスタ数推定及びクラスタリングを行う手法である。 $k$ -means の逐次繰り返しと、BIC による分割停止基準を用いることで、クラスタ数を推定しクラスタリングを実行する。

具体的には以下の手順で行われる。

- (1) クラスタ数  $k$  を初期化する (通常は  $k = 2$ ) 。



- (2)  $k$ -means を実行する.
- (3) 次の処理を  $j = 1$  から  $j = k$  まで繰り返す.
  - (a) クラスタ  $j$  の  $BIC_j$  を計算する.
  - (b) クラスタ  $j$  に所属するデータに対し, クラスタ数 2 として  $k$ -means を行う.
  - (c) クラスタ数 2 としてクラスタリングした結果に対し  $BIC'_j$  を計算する.
  - (d)  $BIC_j$  と  $BIC'_j$  を比較し,  $BIC'_j$  が大きければクラスタ数  $k$  に 1 を足す.
- (4) 前の処理で  $k$  が増加した場合は処理 2 へ戻る. そうでない場合は終了する.

図 3 に X-means の具体的な動作例を示す. 図 3a は 5 つの等方 Gauss 分布から生成されたデータである. クラスタ数の初期値  $k = 2$  で  $k$ -means を実行後, 親と子の BIC を計算した結果が図 3b である.  $k = 2$  で  $k$ -means によりクラスタリングした結果, 上の 4 つのデータの塊と右下の 1 つの塊にクラスタリングされた. 図中の丸印が親クラスタのセントロイド, ばつ印が子クラスタのセントロイドを表す. 子クラスとは, クラスタ  $j$  に対しクラスタ数 2 でクラスタリングした結果得られたクラスタのことである. また,  $BIC(k = 1)$  が親クラスタの BIC,  $BIC(k = 2)$  が子クラスタの BIC を表す. 図 3b の場合, 赤色のクラスタでは子の BIC が親クラスタのものに比べ大きく, 紫色のクラスタでは子の BIC が親クラスタのものに比べ小さい. よって親クラスタと子クラスタの BIC の大小関係から, 赤色のクラスタのセントロイドは 2 つに分割し, 紫色のクラスタのセントロイドは分割しない. その結果, クラスタ数が 1 つ増え, クラスタ数は 3 となる. 次に, 全データに対し, クラスタ数 3 で  $k$ -means を実行し, BIC を計算した結果が図 3c である. その結果, 親クラスタと子クラスタの BIC の大小関係からクラスタを 1 つ増やす. 同様に, 図 3d では, クラスタ数 4 で  $k$ -means を実行し BIC 大小結果を比較し, クラスタを 1 つ増やしている. そして, クラスタ数が収束するまで行った結果が図 3e である. この場合, 全てのクラスタにおいて親の BIC が大きくなっているため, クラスタ数 5 と推定された. この推定結果は実際のクラスタ数と一致しており, 正確に推定できていることがわかる.

X-means で用いる BIC は次のように求められる.  $d$  次元のデータ  $D = (x_0, x_1, \dots, x_d)$  を  $K$  個のクラスタに分割することを考える. モデル  $M_j$  の評価に用いる BIC は (19) 式で与えられる.  $p_j$  はモデル  $M_j$  のパラメータ数であり,  $R$  は  $M_j$  のデータ数,  $\hat{l}_j(D)$  は  $p$  変量 Gauss 分布の対数尤度関数である.

等方 Gauss 分布を考えると分散  $\sigma^2$  は (13) 式により表される.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{R - K} \sum_i (x_i - \mu_{(i)})^2 \quad (13)$$

すると, 確率は次で表される.

$$\hat{P}(x_i) = \frac{R_{(i)}}{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}^d} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \|x_i - \mu_{(i)}\|^2\right) \quad (14)$$

ここで  $\mu_i$  は  $d$  次元の平均ベクトルである. したがって対数尤度関数は

$$\begin{aligned} l(D) &= \log \prod_i \hat{P}(x_i) \\ &= \sum_i \left( \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^d} - \frac{1}{2\sigma^2} \|x_i - \mu_{(i)}\|^2 + \log \frac{R_{(i)}}{R} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ここでクラスタ  $n (1 \leq n \leq K)$  のデータ  $D_n$  に着目する. クラスタ  $n$  のデータ数を  $R_n$  と表記すると, (15) 式は以下で表される.

$$\begin{aligned} \hat{l}(D_n) &= -\frac{R_n}{2} \log(2\pi) - \frac{R_n \cdot d}{2} \log(\hat{\sigma}^2) - \frac{R_n - K}{2} \\ &\quad + R_n \log R_n - R_n \log R \end{aligned} \quad (16)$$

一般的には, 分割停止規準として BIC を用いるが, 本研究においては, BIC 以外の情報量規準を用いたクラスタリングも行い, クラスタ数推定の精度を検証する.

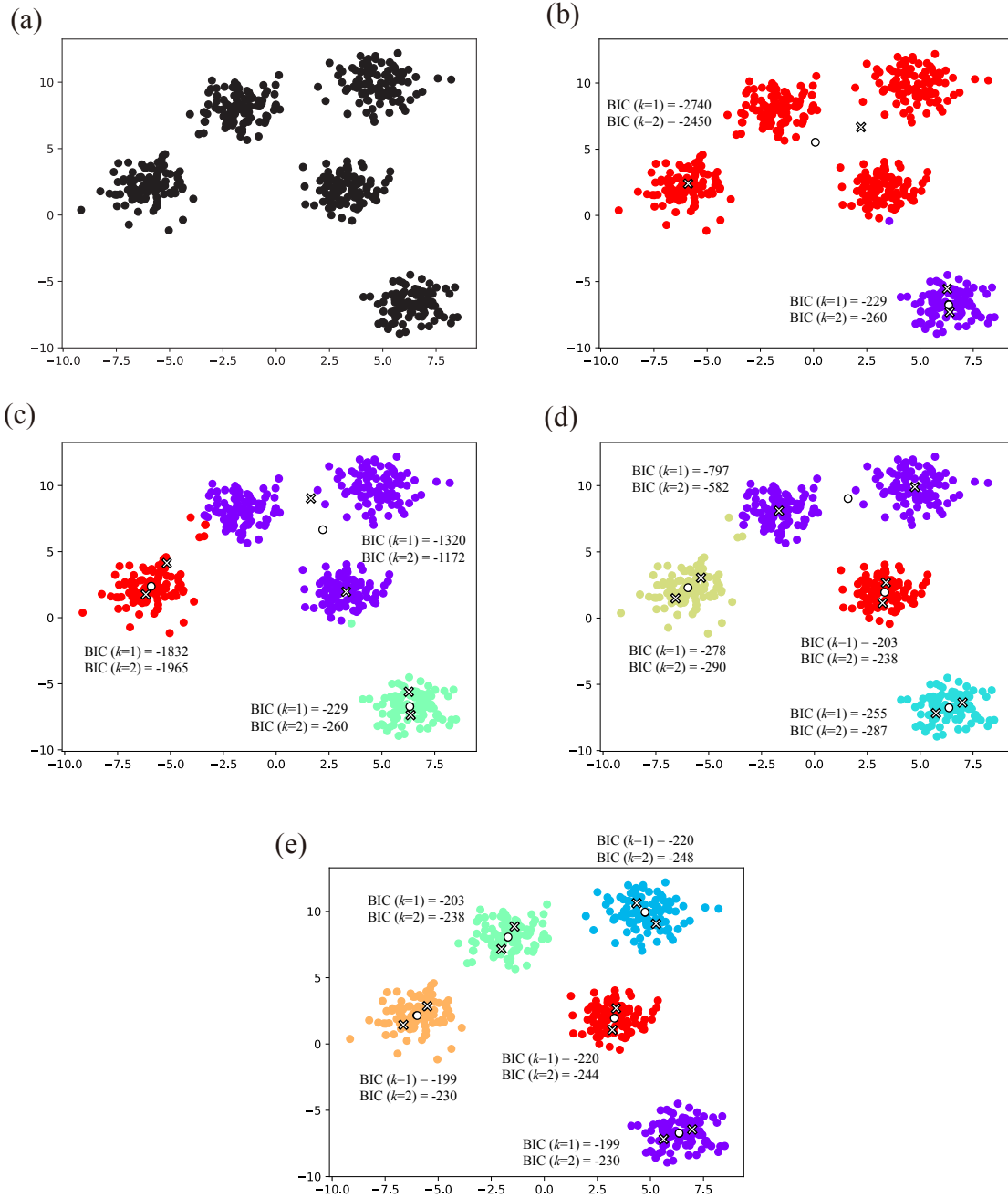


図3 X-means の動作

### 3.2 情報量規準

情報量規準とは、最尤推定によって当てはめられたモデルが複数個あるときに、その中の一つを選択する規準である。

モデルの良し悪しは、最尤モデルの平均対数尤度のデータ  $\mathbf{x}$  に関する期待値（期待平均対数尤度）によって考えることができる。期待平均対数尤度の値が大きいほど、そのモデルは良いといえる。モデルの最大対数尤度を期待平均対数尤度の1つの推定量と捉えることができるが、詳しく調べると、最大対数尤度そのものは期待平均対数尤度の不偏推定量にならないことがわかる。一般に最大対数尤度は、期待平均対数尤度の本当の値に比べて大きく出やすいという偏りを持つ。この傾向はモデルの自由パラメータ数が大きいほど著しい。

これは最大対数尤度の比較に寄ってモデルを選択すると、自由パラメータ数の大きいモデルほど選ばれやすいことを示している。

最大対数尤度の期待平均対数尤度に対する偏りの程度とモデルの自由パラメータ間の関係を調べると、

$$(\text{モデルの最大対数尤度}) - (\text{モデルの自由パラメータ数})$$

が近似的に期待平均対数尤度の不偏推定量となることが導かれる。これが AIC と呼ばれる情報量規準である。AIC を最大とするモデルが最適なモデルと考えられる。AIC は最大対数尤度が同程度のモデルがあるときには、その中で実際に推定しなければならないパラメータの数が最も少ないものを選ぶべきであることを示している。

多くの情報量規準は、AIC の形式を踏襲し、

$$(\text{モデルの最大対数尤度}) - (\text{モデルの自由パラメータ数などの罰則項})$$

という形をしている。

以下に、いくつか情報量規準の例を示す。なお、モデル  $M_j$  の  $p_j$  変量等方 Gauss 分布の対数尤度関数を  $\hat{l}_j$  と表し、モデルのデータ数を  $R$  と表す。

**AIC (Akaike Information Criterion; 赤池情報量規準)**

1973 年に H. Akaike<sup>4)</sup> によって提案された情報量規準である。

$$\text{AIC}(M_j) = \hat{l}_j(D) - p_j \quad (17)$$

**cAIC (Conditional Akaike Information Criterion; 条件付き赤池情報量規準)**

AIC は導出に漸近理論を使っているため、標本サイズが無限に大きいことを想定している。したがって、標本サイズが小さい場合はその過程が成り立たず、AIC によるモデル決定はパラメータ数を過大に見積もってしまう。

そこで、N. Sugiura<sup>5)</sup> は漸近理論を使わない不偏推定量である cAIC を導出した。

$$\text{cAIC}(M_j) = \hat{l}_j(D) - \frac{p_j \cdot R}{R - p_j - 1} \quad (18)$$

**BIC (Bayesian Information Criterion; ベイズ情報量規準)**

BIC は 1978 年に Schwartz<sup>6)</sup> によって提案された。AIC とは異なり、罰則項に事後確率を利用する。

$$\text{BIC}(M_j) = \hat{l}_j(D) - \frac{p_j}{2} \ln R \quad (19)$$

## 4. クラスタリング実験

### 4.1 実験環境

実験には Python3.5 を使い、機械学習のライブラリとして TensorFlow を用いてアルゴリズムを実装した。プログラムは macOS 10.12 上で実行した。

### 4.2 精度の評価

クラスタリング精度の評価は以下の 3 つの指標により行った。

**ARI; Adjusted Rand Index, 調整ランド指数**

クラスタの正解ラベルに対してクラスタリング結果の一致度を評価する指標である。1 に近づくほどよいクラスタリング結果と言える。

## NMI; Normalized Mutual Information, 正規化相互情報量

相互情報量を正規化した指標である。1 に近づくほどよいクラスタリング結果と言える。

## Purity

生成されたクラスタがどれだけ多数派で占められているかを表す指標である。1 に近づくほどよいクラスタリング結果と言える。

これらの指標は、Python のライブラリである scikit-learn で用意されている関数により求めた。

### 4.3 2次元空間のクラスタリング

まず、2次元のデータのクラスタリング結果を比較する。実験では、2次元空間に図4のような分散  $\sigma^2 = 1$  の混合等方 Gauss 分布を用いた。この混合等方 Gauss 分布は5つの等方 Gauss 分布で構成される。そして、各クラスタは500個のデータ点を持つ。このデータに対し、対数尤度関数、BIC, AIC, cAIC を分割停止規準として採用して X-means によるクラスタリングを行った。

表1は X-means により推定されたクラスタ数、X-means により得られたクラスタリング結果の ARI, NMI, Purity を示す。各データは、100回ランダムに生成されたデータに対してクラスタリングをそれぞれ行ったあと得られた結果の平均であり、括弧内の数値は分散を表す。表1より、2次元空間において分割停止規準として BIC と cAIC を採用した X-means のクラスタリング結果に大きな差がないことが分かった。どちらの情報量基準を用いた X-means の結果もクラスタ数の推定もおおよそできており、推定したクラスタ数の分散もあまり大きな値とはなっていない。

また、AIC を分割停止規準として採用した場合に着目すると、推定したクラスタ数の分散が非常に大きくなっている。これは、3.3節で述べたように、AIC はクラスタ数を過大に見積もってしまうことに起因すると思われる。実際に、推定されたクラスタ数を見ると、クラスタ数を20や22と推定しているものが多く存在した。しかし、対数尤度関数を分割停止規準として採用した場合のクラスタリング結果と比較すると、比較的安定したクラスタ数推定を行っていることが見て取れる。

表1 2次元空間におけるクラスタリング結果

分割停止規準	クラスタ数 (分散)	ARI	NMI	Purity
BIC	4.58 (0.9836)	0.84458792	0.88281495	0.84458792
cAIC	4.55 (0.6475)	0.85329139	0.89992544	0.85329139
AIC	4.69 (3.8739)	0.83642236	0.88147442	0.83642236
対数尤度関数	5.32 (10.236)	0.85699618	0.91572100	0.85699618

### 4.4 3次元空間のクラスタリング

3次元空間に図5のようにデータを分散  $\sigma^2 = 1$  の混合等方 Gauss 分布より生成した。実験で使用するデータは図のように5つのクラスタで構成されており、各クラスタは500個のデータ点を持つ。このデータに対し、対数尤度関数、BIC, AIC, cAIC を分割停止規準として採用してクラスタリングを行った。

表2に都度ランダムに生成されたデータに対して100回クラスタリングを行ったときの、推定されたクラスタ数、ARI, NMI, Purity の平均値および推定されたクラスタ数の分散を示す。2次元のクラスタリングとは異なり、3次元空間においては BIC を分割停止規準として採用した場合の精度が良くなっている。分散値も非常に小さいため、安定して精度の高いクラスタ数推定を行っていることが伺える。

cAIC と AIC の場合を比較した場合、cAIC のほうがクラスタリングの精度が高いことがわかる。また、AIC

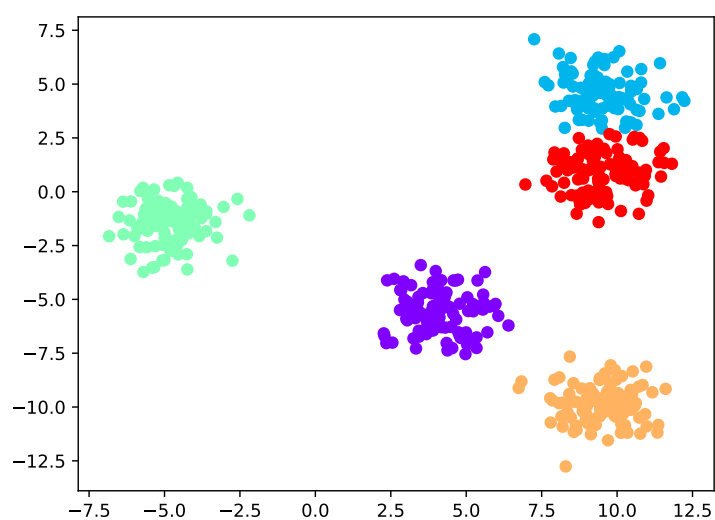


図4 2次元空間のクラスタリング例

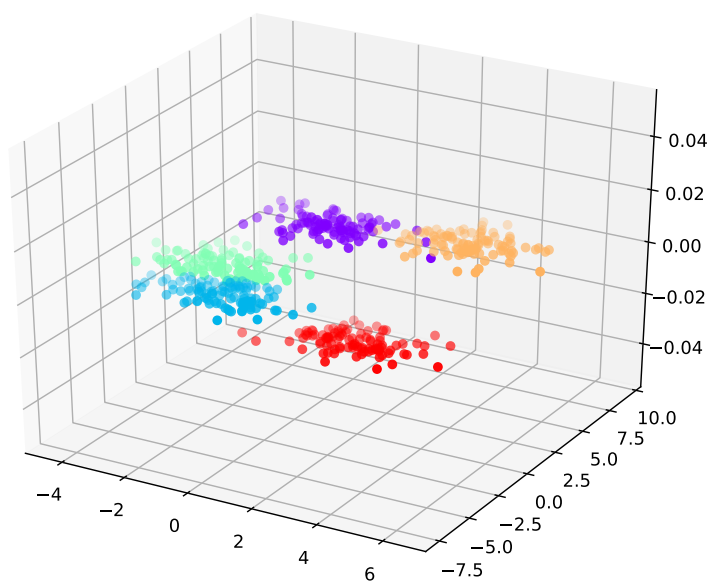


図5 3次元空間のクラスタリング例

を用いた場合では、2次元空間ほど推定されたクラスタ数の分散が大きくないことがわかる。2次元空間では、クラスタ数を過大に見積もってしまう問題があったが、3次元空間においてその問題は発生していなかった。

全体的に3次元空間に生成したデータのクラスタリング結果が2次元のものと比べ向上している。これは、2次元空間と3次元空間とでは、空間の広さが異なるためだと考えられる。同一条件でデータを生成したため、2次元空間においてはクラスタ同士が重なり合っているものが多かったが、3次元空間ではほぼ重なり合ったクラスタは存在していなかった。したがって、3次元空間のほうがクラスタリング精度が良くなっているように見えるデータを取得したものと考えられる。

表2 3次元空間におけるクラスタリング結果

分割停止規準	クラスタ数 (分散)	ARI	NMI	Purity
BIC	4.95 (0.0669)	0.97179074	0.97913818	0.97179074
cAIC	4.92 (0.2313)	0.96312702	0.97023920	0.96312702
AIC	4.88 (0.1443)	0.95216819	0.96855698	0.95216819
対数尤度関数	5.12 (4.1443)	0.95731637	0.96541468	0.95731637

#### 4.5 手書き数字データのクラスタリング

次に、実データの例として MNIST (Modified National Institute of Standards and Technology database) と呼ばれる手書き数字データのクラスタリングの実験を行った。

MNIST は 70,000 枚の手書きのアラビア数字 (0-9) の  $28 \times 28$  画素の画像データセットである。図 6 にデータセットの一部を示す。



図6 MNIST の一部

この MNIST のデータを X-means および Mean shift によりクラスタリングした。X-means の分割停止規準には、AIC, cAIC, BIC, 対数尤度関数を用いた。また、Mean shift の際に用いる超球の大きさは Python のライブラリである scikit learn の関数 (cluster.estimate\_bandwidth) により決定した。

結果を表 3 に示す。

表3 MNIST のクラスタリング結果

クラスタリング手法	クラスタ数	ARI	NMI	Purity
X-means (AIC)	32	0.282377190261	0.562954278053	0.282377190261
X-means (cAIC)	32	0.28312802996	0.562243771104	0.28312802996
X-means (BIC)	32	0.27811599645	0.56101889037	0.27811599645
X-means (対数尤度関数)	32	0.28736538966	0.569692653863	0.28736538966
Mean shift	1	0.0	$-6.93889390391 \times 10^{-6}$	0.0

X-means では、どの分割停止規準を用いた場合も同様のクラスタリング結果となり、適切なクラスタリングが行われていないことがわかる。本実験では X-means のモデルとして等方混合 Gauss 分布を用いたが、実

データのクラスタリングを行うときにはより適したモデルを選択する必要があると考えられる。また、Mean shift によるクラスタリングの結果、確率密度の極大点を見つけることができず、1 クラスタに収束した。したがって、Mean shift による MNIST のクラスタリングにはより工夫が必要であることがわかる。

## 5. 結論

本研究では、いくつかの情報量規準を分割停止規準として採用して X-means でクラスタ数推定を行った。

X-means は確率分布をベースとしたクラスタリング手法であり、本研究では等方 Gauss 分布をモデルとして実験を行った。実データ (MNIST) のクラスタ数推定を行った場合、いずれの情報量規準を分割停止規準を用いた場合も、ほぼ同一の結果となり、等方 Gauss 分布をモデルとする X-means では適切なクラスタ数推定を行うことができないことがわかった。これは、MNIST の分布が等方 Gauss 分布に従っていないことが要因と考えられる。適切なクラスタ数推定を行うためには、他のモデルを用いるなどの工夫をする必要がある。確率ベースではないクラスタ数推定を行う手法として Mean shift によるクラスタリングも同様に行ったが、適切なクラスタリング結果を得ることはできなかった。これは、確率密度関数の極大点を見つけることができず、1 つのクラスタとしてクラスタリングされた。したがって、実データのクラスタリングを行う際にはデータごとに適切なモデルを用いたり、クラスタ数推定手法を用いることが必要である。

また、人工データのクラスタリングの例として、混合等方 Gauss 分布から生成したデータのクラスタ数推定を行った。2 次元空間における混合等方 Gauss 分布から生成したデータセットのクラスタ数推定においては BIC や cAIC が、3 次元空間における混合等方 Gauss 分布から生成したデータセットのクラスタ数推定においては BIC が適していることがわかった。2 次元空間においては AIC を採用した場合、クラスタ数を過大に見積もってしまう問題が見受けられた。AIC を分割停止規準として採用した場合はクラスタ数を課題に見積もる問題が発生することが確認された。AIC は導出に漸近理論を用いているため、パラメータ数を課題に見積もるという問題点があり、それに起因してクラスタ数を課題に見積もったと考えられる。cAIC は AIC のこの問題を解決するために、漸近理論を用いずに導出された情報量規準である。本研究でも cAIC を用いることで、AIC を用いた場合よりも非常に高い精度でクラスタ数を推定することが確認できた。したがって、データ数が比較的少ない場合は cAIC を情報量規準として採用することで、AIC よりもよい精度でクラスタ数推定ができるといえる。しかし、cAIC は 3 次元空間の等方 Gauss 分布のクラスタ数推定では 2 次元空間の等方 Gauss 分布のクラスタ数推定に比べ、BIC よりもより劣った結果となっている。同一条件で 2 次元空間と 3 次元空間でクラスタリングを行ったため、後者のほうがデータが分布する空間が広い。そのため、クラスタ同士の重なり合いが少なくなり、クラスタ数推定の精度がいずれも向上している。等方 Gauss 分布をモデルとした X-means によるクラスタ数推定では、BIC を分割停止規準として用いると非常に精度良くクラスタ数推定を行うことができることがわかった。したがって、混合等方 Gauss 分布により生成されたデータのクラスタリングを行う際は等方 Gauss 分布をモデルとする X-means の分割停止規準として BIC を採用することで適切なクラスタ数推定を行うことができるといえる。

以上の段落より、混合等方 Gauss 分布から生成される人工データのクラスタリングには BIC が最も適していることがわかった。また、AIC は少量のデータのクラスタ数推定には向かず、cAIC を利用することで適切なクラスタ数推定を行うことができる。実データのクラスタ数推定を行う際には、そのデータにあったモデルやクラスタ数推定の手法を採用する必要がある。今後、実データを適切にクラスタ数推定するための手法を検討していく必要がある。

## 参考文献

- 1) James MacQueen et al.: Some methods for classification and analysis of multivariate observations, Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Vol. 1, No. 14, pp. 281–297 (1967).
- 2) 奥富 正敏他: デジタル画像処理 [改訂新版], pp.205-208, 公益財団法人 画像情報教育振興協会 (2015).
- 3) Dan Pelleg, Andrew W Moore, et al.: X-means: Extending K-means with Efficient Estimation of the Number of Clusters., ICML, Vol. 1, pp. 727–734 (2000).
- 4) Akaike, H.: Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory, pp. 267-281 (1973).
- 5) Sugiura, N.: Further analysts of the data by akaike's information criterion and the finite corrections: Further analysts of the data by akaike's, Communications in Statistics-Theory and Methods, 7(1), pp. 13-26 (1978).
- 6) Gideon Schwarz et al.: Estimating the dimension of a model., The annals of statistics Vol. 6, No. 2, pp. 461-464 (1978).