



# Relative Orientation

By:  
Reza Rashidi

2019

# Methods

## Relative orientation with collinearity equations

$$\begin{cases} x_L - x_o = -f \frac{r_{11}(X - X_o) + r_{12}(Y - Y_o) + r_{13}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} \\ y_L - y_o = -f \frac{r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} \\ x_R - x'_o = -f \frac{r'_{11}(X - X'_o) + r'_{12}(Y - Y'_o) + r'_{13}(Z - Z'_o)}{r'_{31}(X - X'_o) + r'_{32}(Y - Y'_o) + r'_{33}(Z - Z'_o)} \\ y_R - y'_o = -f \frac{r'_{21}(X - X'_o) + r'_{22}(Y - Y'_o) + r'_{23}(Z - Z'_o)}{r'_{31}(X - X'_o) + r'_{32}(Y - Y'_o) + r'_{33}(Z - Z'_o)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_L = x_o - f \frac{r_L}{q_L} - x_L \\ G_L = y_o - f \frac{s_L}{q_L} - y_L \\ F_R = x'_o - f \frac{r_R}{q_R} - x_R \\ G_R = y'_o - f \frac{s_R}{q_R} - y_R \end{cases}$$

$$\text{observations} \begin{cases} x_L, y_L \\ x_R, y_R \end{cases}$$

$$\text{known} \begin{cases} I.O.p \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{unknown} \begin{cases} X, Y, Z \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{number\_of\_Equation} = m \rightarrow \text{parametric\_method}$$

باید توجه داشت که تعداد مجهولات و معلوما مسئله بسته به نوع توجیه نسبی (یک طرفه یا دو طرفه) فرق می کند.

(1) عناصر حرکتی پروژکتور سمت چپ

$$(b_x', b_y', b_z', \omega', \phi', K')$$

(1) عناصر حرکتی پروژکتور سمت راست

$$(b_x'', b_y'', b_z'', \omega'', \phi'', K'')$$

اگر توجیه نسبی یک طرفه انجام شود و پارامترهای عکس سمت چپ ثابت فرض شود داریم:

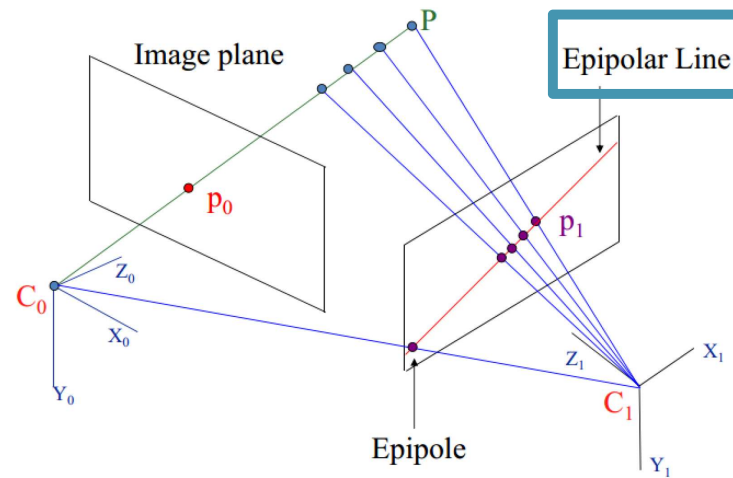
$$\left\{ \begin{array}{l} Xo = Yo = Zo = \phi_1 = \omega_1 = \kappa_1 = 0 \\ \text{unknown: } \left\{ \begin{array}{l} Y'o = by \\ Z'o = bz \\ \phi_2 \\ \omega_2 \\ \kappa_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_L - x_o = -f \frac{X}{Z} \\ y_L - y_o = -f \frac{Y}{Z} \\ x_R - x'_o = -f \frac{r'_{11}(X-b) + r'_{12}(Y-by) + r'_{13}(Z-bz)}{r'_{31}(X-b) + r'_{32}(Y-by) + r'_{33}(Z-bz)} \\ y_R - x'_o = -f \frac{r'_{21}(X-b) + r'_{22}(Y-by) + r'_{23}(Z-bz)}{r'_{31}(X-b) + r'_{32}(Y-by) + r'_{33}(Z-bz)} \end{array} \right.$$

در این روش مختصات مدلی و مجهولات با هم برآورد می شوند و برای حل معادلات به مقادیر اولیه احتیاج داریم. روش حل شبیه حل معادلات ترفیع و تقاطع همزمان است.

در این جا بحث رانیمه کاره رها می کنیم و در اسلایدهای بعدی، آن را تکمیل می کنیم

## Relative orientation with coplanarity condition equations

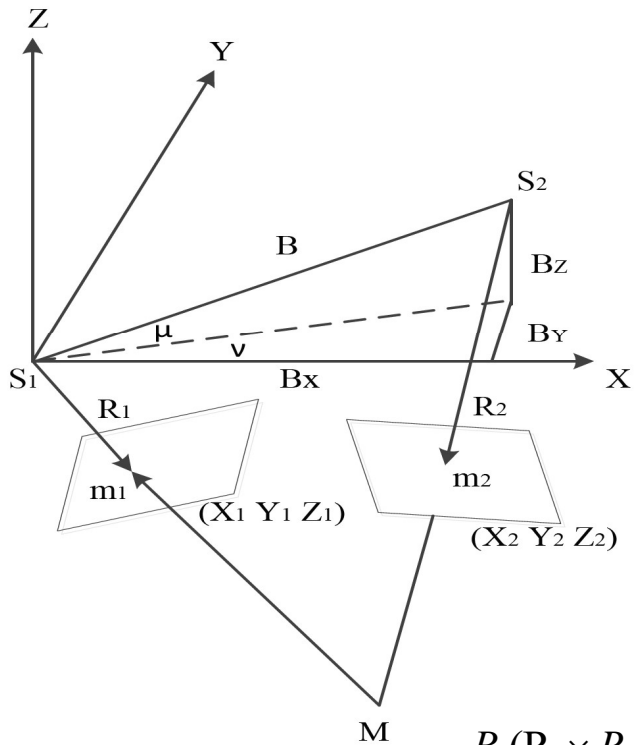


بنا به تعریف، طی شرط هم صفحه‌ای، دو مرکز تصویر، هر نقطه‌ای مانند  $P$  و نقاط نظیر آن روی زوج عکس پوشش دار در یک صفحه قرار می‌گیرند.

## #coplanarity condition equations

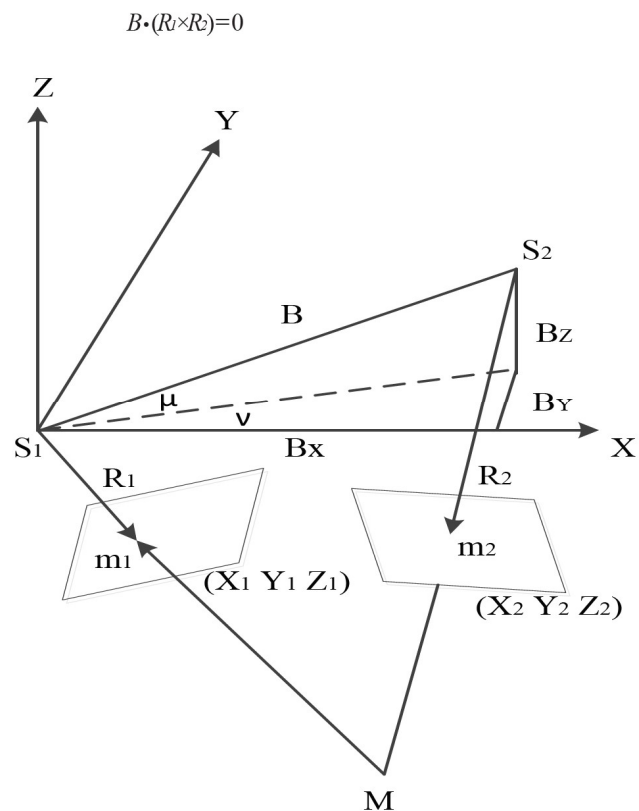
$$B \cdot (R_1 \times R_2) = 0$$

(1)



$$B \cdot (R_1 \times R_2) = 0 \Rightarrow$$

$$F = \begin{vmatrix} X_{o_2} - X_{o_1} & Y_{o_2} - Y_{o_1} & Z_{o_2} - Z_{o_1} \\ X_M - X_{o_1} & Y_M - Y_{o_1} & Z_M - Z_{o_1} \\ X_M - X_{o_2} & Y_M - Y_{o_2} & Z_M - Z_{o_2} \end{vmatrix} = 0$$



(1)

$$F = \begin{vmatrix} Bx & By & Bz \\ X1 & Y1 & Z1 \\ X2 & Y2 & Z2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Bx & X1 & X2 \\ By & Y1 & Y2 \\ Bz & Z1 & Z2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xo2 - Xo1 \\ Yo2 - Yo1 \\ Zo2 - Zo1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M - Xo_1 \\ Y_M - Yo_1 \\ Z_M - Zo_1 \end{bmatrix} = \lambda_1^{-1} R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M - Xo_2 \\ Y_M - Yo_2 \\ Z_M - Zo_2 \end{bmatrix} = \lambda_2^{-1} R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} Bx & By & Bz \\ X1 & Y1 & Z1 \\ X2 & Y2 & Z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bx & \boxed{X1} & \boxed{X2} \\ By & \boxed{Y1} & \boxed{Y2} \\ Bz & \boxed{Z1} & \boxed{Z2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xo2 - Xo1 \\ Yo2 - Yo1 \\ Zo2 - Zo1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M - Xo_1 \\ Y_M - Yo_1 \\ Z_M - Zo_1 \end{bmatrix} = \lambda_1^{-1} R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M - Xo_2 \\ Y_M - Yo_2 \\ Z_M - Zo_2 \end{bmatrix} = \lambda_2^{-1} R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{bmatrix} \lambda_1^{-1} R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} \lambda_2^{-1} R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \begin{bmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{bmatrix} R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{bmatrix} R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} = 0$$

با استفاده از معادله بالا می‌توان به هر حالت دلخواه از ۲۵۲ حالت ممکن توجیه نسبی انجام داد و ۵ تا از پارامترهای مجهول توجیه نسبی را حل کرد. با استفاده از این ۵ پارامتر و مثلث بندی که در اسلایدهای جلوتر شرح داده شده می‌توان به مختصات مدلی نقاط نظیر رسید. (برای رسیدن به مختصات زمینی از مختصات مدلی ۷ مجهول باقی مانده را از توجیه مطلق محاسبه می‌کنیم).

توجیه نسبی یک طرفه با معادلات شرط هم صفحه‌ای:

با فرض مشاهده مختصات n نقطه نظیر

$$\left\{ \begin{array}{l} Xo_1 = Yo_1 = Zo_1 = \varphi_1 = \kappa_1 = \omega_1 = 0 \\ \text{Unknown} \left\{ \begin{array}{l} Yo_2 = by \\ Zo_2 = bz \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \\ \kappa_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$F = \left| \begin{array}{cc} Bx & R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} \\ By & R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} \\ Bz & \end{array} \right| = 0$$

$$\text{Knowns\_parameter} \rightarrow R_1 = I_{3 \times 3}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} bx & by & bz \\ x & y & -f \\ x' & y' & z' \end{array} \right| = 0$$

$$\Rightarrow bx(y.z' + y'.f) - by(z.z' + f.x') + bz(x.y' - y.x') = 0$$

$$\rightarrow F(x, y - e) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix}$$

مدل پارامتریک: شرط هم خطی

به تعداد نقاط نظیر مشاهده شده معادله خواهیم داشت:

$$Eq: 4n < n < df = n - 5$$

شرط هم صفحه‌ای

مدل شرط



سرشکنی به روش مدل ترکیبی غیر خطی:

به تعداد نقاط نظیر مشاهده شده معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow bx(y.z' + y'.f) - by(z.z' + f.x') + bz(x.y' - y.x') = 0$$

$$\rightarrow F(x, y - e) = 0$$

$$\Rightarrow F_{(n \times 1)}(X, Y - e) = F(X_0 + dX, Y_0 - e) = F(X_0, Y_0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X_0, Y=Y_0} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} \Big|_{X=X_0, Y=Y_0} (-e) = 0$$

$$\Rightarrow W_{0(n \times 1)} + A_{0(n \times 5)} d\hat{X}_{(5 \times 1)} - B_0^T_{(n \times 4n)} \hat{e}_{(4n \times 1)} = 0$$

$$\begin{cases} d\hat{X} = -(A^T (B^T B)^{-1} A)^{-1} A^T (B^T B)^{-1} W \\ \hat{X}_1 = X_0 + d\hat{X} \\ \hat{e} = B(B^T B)^{-1} (eye(n) - A(A^T (B^T B)^{-1} A)^{-1} A^T (B^T B)^{-1}) W \\ \hat{Y} = Y_0 - \hat{e} \end{cases}$$

توجیه نسبی دو طرفه با معادلات شرط هم صفحه‌ای:

$$\left\{ \begin{array}{l} Xo_1 = Yo_1 = Zo_1 = Zo_2 = Yo_2 = \omega_1 = 0 \\ \text{Unknown} \left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_2 \\ \kappa_2 \end{array} \right. \\ Xo_2 = bx \end{array} \right. \quad F = \left\| \begin{array}{c} Bx \\ By \\ Bz \end{array} \quad R_1^T \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} \quad R_2^T \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$F = \left\| \begin{array}{c} Bx \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad R_1^T_{(\kappa_1, \varphi_1, \omega_1=0)} \begin{bmatrix} x_L - x_o \\ y_L - y_o \\ -f \end{bmatrix} \quad R_2^T_{(\kappa_2, \varphi_2, \omega_2)} \begin{bmatrix} x_R - x'_o \\ y_R - y'_o \\ -f \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow Bx[(r_{12}(x_L - x_o) + r_{22}(y_L - y_o) - r_{32}f)(r'_{13}(x_R - x'_o) + r'_{23}(y_R - y'_o) - r'_{33}f) - (r_{13}(x_L - x_o) + r_{23}(y_L - y_o) - r_{33}f)(r'_{12}(x_R - x'_o) + r'_{22}(y_R - y'_o) - r'_{32}f)] = 0 \\ &\Rightarrow (r_{12}(x_L - x_o) + r_{22}(y_L - y_o) - r_{32}f)(r'_{13}(x_R - x'_o) + r'_{23}(y_R - y'_o) - r'_{33}f) - (r_{13}(x_L - x_o) + r_{23}(y_L - y_o) - r_{33}f)(r'_{12}(x_R - x'_o) + r'_{22}(y_R - y'_o) - r'_{32}f) = 0 \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید Bx از معادله حذف شد!

## تمرین

- ▶ با استفاده از مختصات‌های داده شده برای دو عکس چپ و راست، توجیه نسبی دو طرفه انجام دهید و مختصات مدلی تولید کنید.
- ▶ باز هوایی را از یک تا ۱۰ تغییر دهید و با توجه به فاصله نقاط مدلی نتایج را تحلیل و گزارش کنید.
- ▶ اگر پارامترهای توجیه خارجی عکس سمت چپ و  $Xo2$  به صورت زیر باشد، سایر پارامترهای توجیه خارجی عکس راست را بیابید.

$$\left\{ \begin{array}{l} Xo_1 = 3600 \\ Yo_1 = 2024 \\ Zo_1 = 2235 \\ \omega_1 = 0.11 \text{ deg} \\ \varphi_1 = 0.155 \text{ deg} \\ \kappa_1 = 18.764 \text{ deg} \\ Xo_2 = 4900 \end{array} \right.$$

- ▶ توجه کنید که واحد مختصات‌های داده شده میلی‌متر است  
در صورت نیاز می‌دانیم:  $f=0.152844, x_o=y_o=0$